

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(СПбГУ)

Кафедра статистической физики  
Направление «Физика»



Диссипация в формализме временных функций Грина при  
конечной температуре

Бакалаврская работа студента

----- **Яковчука Виктора Александровича**

Научный руководитель:  
----- д.ф.-м.н., проф. **Налимов М.Ю.**

Рецензент:  
----- к.ф.-м.н., доцент **Компаниец М.В.**

Санкт-Петербург  
2016

## Содержание

1	Введение	2
2	Временные функции Грина при конечной температуре	2
3	Функциональный интеграл	3
4	Теория возмущений	6
5	Заключение	12

## 1 Введение

Бозе конденсация - явление, до сих пор вызывающее большой интерес. Статические свойства Бозе конденсации хорошо изучены, её динамика описывается методом стохастических уравнений [1], а поведение в окрестности  $\lambda$  точки до конца не известно [4]. Мы попробуем развить аппарат, основанный на временных функциях Грина при конечной температуре [3]. Из-за сложности этот аппарат используется довольно редко. В частности, он не использовался для изучения фазовых переходов. Так же мы откажемся от концепции идеального газа и будем рассматривать Бозе газ с взаимодействием. Мы хотим заложить основы для описания динамики квантовых систем в состоянии равновесия. Наша задача - попытка убедиться в том, что данный аппарат даёт затухание корреляционной функции.

## 2 Временные функции Грина при конечной температуре

Функции Грина относятся к наиболее важным средствам среди методов квантовой теории поля, применяемых в различных областях физики и в других системах, описываемых в терминах подходящей математической модели. Усреднённая функция Грина в квантовой теории поля - это среднее значение упорядоченного по времени произведения операторов Гейзенберга [5]:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = Tr \{ \hat{\rho} T [\hat{\varphi}_H(x_1) \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_n)] \} \quad (1)$$

Зависящие от времени операторы в картине Гейзенберга в каноническом ансамбле системы, описываемой оператором Гамильтона  $\hat{H}$ , определяются как

$$\hat{\varphi}_H(t, x) = e^{it\hat{H}/\hbar} \hat{\varphi}(x) e^{-it\hat{H}/\hbar} \quad (2)$$

При конечной температуре оператор плотности  $\hat{\rho}$  обычно выбирается в виде

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{Tr e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}} \quad (3)$$

Для разложения по теории возмущений представление взаимодействия вводится с помощью оператора эволюции, порождённого свободным оператором Гамильтона  $\hat{H}_0$

$$\hat{\varphi}(t, x) = e^{it(\hat{H}_0-\mu\hat{N})/\hbar} \hat{\varphi}(x) e^{-it(\hat{H}_0-\mu\hat{N})/\hbar} \quad (4)$$

Функции Грина (1) в терминах операторов Дирака (4) имеют вид

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{U}(0, t_f) T \left[ \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \dots \hat{\varphi}(x_n) \hat{U}(t_f, t_i) \right] \hat{U}(t_i, 0) \right\} \quad (5)$$

где  $t_f > t_n > \dots > t_2 > t_1 > t_i$ , а оператор эволюции  $\hat{U}$  равен

$$\hat{U}(t, t') = e^{it(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})/\hbar} e^{-i(t-t')(\hat{H} - \mu\hat{N})/\hbar} e^{-it'(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})/\hbar} \quad (6)$$

Если временные аргументы полевых операторов в функции Грина удовлетворяют условию  $0 < t < \beta\hbar$ , то в евклидовом эволюционном операторе начальный момент времени в (5) можно выбрать как  $t_i = 0$ , а конечный - как  $t_f = \hbar\beta$ . В этом случае евклидов оператор эволюции

$$\hat{U}_e(t, t') = e^{it(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})/\hbar} e^{-i(t-t')(\hat{H} - \mu\hat{N})/\hbar} e^{-it'(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})/\hbar} \quad (7)$$

даёт эволюционную экспоненту  $\hat{U}_e(0, \beta\hbar) = e^{\frac{\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}{\hbar}} e^{-\frac{\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}{\hbar}}$ , которая преобразует оператор плотности большого канонического ансамбля взаимодействующей системы в аналогичный оператор для свободной системы.

### 3 Функциональный интеграл

Вводим одночастичный Гамильтониан  $\hat{H}_0$ :

$$\hat{H}_0 = -\frac{p^2}{2m} - \mu \quad (8)$$

$$\hat{H}_0 \phi_\alpha = \varepsilon_\alpha \phi_\alpha \quad (9)$$

Где  $\phi_\alpha$  - собственная функция оператора  $\hat{H}_0$ .

Вводятся операторы поля:

$$\psi^+(x) = \sum_\alpha e^{i\varepsilon_\alpha t} \phi^+(x) \hat{a}_\alpha^+ \quad (10)$$

$$\psi(x) = \sum_\alpha e^{-i\varepsilon_\alpha t} \phi(x) \hat{a}_\alpha \quad (11)$$

Как известно, коммутатор этих операторов равен:

$$[\psi(x); \psi^+(x')] = \delta(x - x') \quad (12)$$

Гамильтониан для всех частиц примет вид:

$$\hat{H}_0 = \sum_\alpha \hat{\psi}^+ \varepsilon_\alpha \hat{\psi} \quad (13)$$

Тогда можно сказать, что:

$$\hat{\psi} = \hat{Q} \quad (14)$$

$$i\hat{\psi}^+ = \hat{P} \quad (15)$$

обобщенные координата и импульс соответственно. По формуле Фейнмана-Каца матричные элементы оператора эволюции могут быть записаны с помощью функционального интеграла Фейнмана в виде:

$$\langle \varphi' | e^{-i\hat{H}t} | \varphi \rangle = \int D \frac{i\psi^+}{2m} D\psi e^{iS} \quad (16)$$

$$S^{(0)} = \int d\tau \int dx \left[ i\psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi^+ \varepsilon \psi \right] \quad (17)$$

Нам нужно добавить взаимодействие в нашу систему:

$$S \rightarrow S^{(0)} + \int d\tau \int dx \int dx' [\psi^+(x)\psi(x)V(x-x')\psi^+(x')\psi(x')] \quad (18)$$

Будем использовать приближение Ландау  $V(x-x') = \frac{\lambda}{2}\delta(x-x')$

$$S = \int d\tau \int dx \left[ i\psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi^+ \varepsilon \psi + \frac{\lambda}{2} |\psi(x)|^4 \right] \quad (19)$$

Далее, мы переходим от шредингеровских операторов к гайзенберговским, пользуясь формулой Фейнмана-Каца для рассматриваемого равновесного среднего от Т произведения операторов.

$$\begin{aligned} \langle T(\hat{\psi}(t_1)\hat{\psi}(t_2)\dots\hat{\psi}(t_n)) \rangle &= Tr \left( T(\hat{\psi}(t_1)\hat{\psi}(t_2)\dots\hat{\psi}(t_n)) e^{-\beta\hat{H}} \right) = \\ &= Tr \left( T \left( e^{-i\hat{H}t_1} \hat{\psi} e^{i\hat{H}(t_1-t_2)} \dots \hat{\psi} e^{i\hat{H}t_n - \beta\hat{H}} \right) \right) = \\ &= \int D\varphi \langle \varphi | e^{-i\hat{H}t_1} \hat{\psi} e^{i\hat{H}(t_1-t_2)} \dots \hat{\psi} e^{i\hat{H}t_n - \beta\hat{H}} | \varphi \rangle = \\ &= \int D\psi^+ D\psi e^{i\hat{H}(t_1-t_2)} \dots \psi e^{i\hat{H}(t_n-t_1) - \beta\hat{H}} \end{aligned} \quad (20)$$

Мы получили функциональный интеграл. Действие задано на сложном контуре, приведённом на рис. 1. Пользуясь условиями сшивания (в  $t_0$  и в  $t_0 - i\beta$  значения пропагатора совпадают), находим выражения для интересующих нас функций Грина.

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta + \tau \right) G(x, x', t, t') = \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (21)$$

Сделаем преобразование Фурье по переменной  $x$ :

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - k^2 + \tau \right) \tilde{G}(x, x', t, t') = e^{-ikx'} \delta(t - t') \quad (22)$$

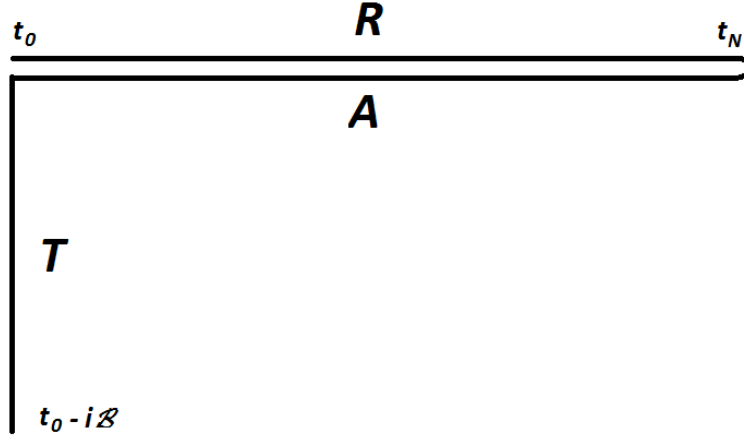


Рис. 1: Контур в комплексной плоскости.

Обозначим  $-k^2 + \tau$  как  $\varepsilon$ . Также будем решать дифференциальное уравнение (21) не на вещественной кривой, а на контуре в комплексной плоскости.

$$G_{i,j} = e^{i\varepsilon(t-t')} (\theta(t-t') + C_{i,j}) \quad (23)$$

где  $i, j$  определяют положение  $t$  и  $t'$  на контуре. Обозначим

$$n(p) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(p)} - 1} \quad (24)$$

Подсчитанные составляющие пропагатора:

$$\begin{aligned}
G_{RR} &= e^{i\varepsilon(t-t')} (\theta(t-t') + n) \\
G_{AA} &= e^{i\varepsilon(t-t')} (-\theta(t-t') + n + 1) = e^{i\varepsilon(t-t')} (\theta(t'-t) + n) \\
G_{TT} &= e^{i\varepsilon(t-t')} (-\theta(t-t') + n + 1) = e^{i\varepsilon(t-t')} (\theta(t'-t) + n) \\
G_{AR} &= e^{i\varepsilon(t-t')} (n + 1) \\
G_{TA} &= e^{i\varepsilon(t-t')} (n + 1) \\
G_{TR} &= e^{i\varepsilon(t-t')} (n + 1) \\
G_{RT} &= e^{i\varepsilon(t-t')} n \\
G_{RA} &= e^{i\varepsilon(t-t')} n \\
G_{AT} &= e^{i\varepsilon(t-t')} n
\end{aligned} \quad (25)$$

## 4 Теория возмущений

Ранее были построены пропагаторы для свободной теории (для теории без взаимодействия). Воспользуемся уравнением Дайсона (26). Где  $\sum$  ряд по один-неприводимым диаграммам, полученный из теории возмущений по  $g$ .

В  $\sum$  содержатся диаграммы типа «ухо» и «арбуз». Диаграмма «ухо» возникает только на диагональных (вклады типа RR, AA, и TT) элементах и даёт плотность числа частиц. Вклады типа ij - это вклады, составленные из  $G_{ij}$  составляющих пропагатора, где  $i, j = R, A, T$  (обозначают внешние поля). Диаграмма «арбуз» появляется и в недиагональных элементах и несёт в себе нетривиальные вклады.

$$\mathbf{G}^{-1} = G_0^{-1} - \sum \quad (26)$$

Рассмотрим вклады от двухпетлевых диаграмм типа «арбуз».

Мы рассматриваем ситуацию, когда спектр по импульсам чисто дискретный. Сначала рассмотрим ситуацию, когда два импульса из спектра в сумме могут давать третий.

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \circlearrowright \\ q \end{array} &= \sum_k \sum_q (e^{i\varepsilon_{p+k}(t-t')} (\theta(t-t') + n(p+k)) \cdot \\ &\cdot e^{i\varepsilon_{-k-q}(t'-t)} (\theta(t'-t) + n(-k-q)) e^{i\varepsilon_q(t-t')} (\theta(t-t') + n(q))) = \\ &= \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q)} \cdot \\ &\cdot (\theta(t-t')(n(-k-q) + n(p+k)) \cdot n(-k-q) + n(-k-q) \cdot n(q) - n(p+k) \cdot n(q)) + \\ &\quad + n(p+k) \cdot n(q) + n(p+k) \cdot n(q) \cdot n(-k-q)) \quad (27) \end{aligned}$$

теперь то же в  $\omega$ -представлении:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \circlearrowright \\ q \end{array} &= \iint dt dt' \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\overbrace{\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q}^{\varepsilon})} \cdot \\ &\cdot (\theta(t-t') \underbrace{(n(-k-q) + n(p+k)) \cdot n(-k-q) + n(-k-q) \cdot n(q) - n(p+k) \cdot n(q))}_{C_1} + \\ &\quad + \underbrace{n(p+k) \cdot n(q) + n(p+k) \cdot n(q) \cdot n(-k-q)}_{C_2}) e^{i\omega t} e^{i\omega' t'} = \\ &= \iint dt dt' \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\varepsilon)} \cdot (\theta(t-t') C_1 + C_2) e^{i\omega t} e^{i\omega' t'} \quad (28) \end{aligned}$$

Посчитаем отдельно слагаемое с  $\theta$  функцией:

$$\begin{aligned}
& \iint dt dt' \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\varepsilon)} \cdot \theta(t-t') C_1 e^{i\omega t} e^{i\omega' t'} = \\
& = \sum_k \sum_q C_1 \iint e^{i(\varepsilon+\omega)t} e^{i(-\varepsilon+\omega')t'} \theta(t-t') dt dt' = \\
& = \sum_k \sum_q C_1 (2\pi)^2 \left( -\frac{1}{2\pi i(\varepsilon+\omega)} + \frac{1}{2} \delta(\varepsilon+\omega) \right) \delta(\omega+\omega') = \\
& = \sum_k \sum_q C_1 (2\pi)^2 \left( -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\varepsilon+\omega+i0} \right) \delta(\omega+\omega') = \\
& = \sum_k \sum_q C_1 2\pi \left( -\frac{1}{i(\varepsilon+\omega)-0} \right) \delta(\omega+\omega') \quad (29)
\end{aligned}$$

Слагаемое без  $\theta$  функции

$$\begin{aligned}
& \iint dt dt' \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\varepsilon)} \cdot C_2 e^{i\omega t} e^{i\omega' t'} = \\
& = \sum_k \sum_q C_2 \iint dt dt' e^{i(\omega+\varepsilon)t} e^{i(\omega'-\varepsilon)t'} = \\
& = \sum_k \sum_q C_2 (2\pi)^2 \delta(\omega+\varepsilon) \delta(\omega'-\varepsilon) \quad (30)
\end{aligned}$$

Итог для двойного арбуза в  $\omega$  представлении:

$$\begin{aligned}
& \left( \text{Diagram: an oval with a horizontal line through its center. The top part is labeled 'p+k', the bottom part 'q', and the middle part '-k-q'. There are small 'x' marks at the ends of the horizontal line and the oval boundary.} \right) = \sum_k \sum_q \left( C_1 2\pi \left( -\frac{1}{i(\varepsilon+\omega)-0} \right) \delta(\omega+\omega') + \right. \\
& \left. + C_2 (2\pi)^2 \delta(\omega+\varepsilon) \delta(\omega'-\varepsilon) \right) \quad (31)
\end{aligned}$$

Рассмотрим порядок расходимости следующего ряда. Видно, что этот ряд расходится так же, как и первое слагаемое «арбуза» в  $\omega$  представлении.

$$\begin{aligned}
& \sum_k \sum_q (n(-k-q) + n(p+k) \cdot n(-k-q) + n(-k-q) \cdot n(q) - n(p+k) \cdot n(q)) \cdot \\
& \cdot \frac{1}{\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q} \quad (32)
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое с  $n(-k-q)$  и воспользуемся тем, что ряд и интеграл имеют одну степень расходимости:



$$\begin{aligned}
& \iint d\vec{k}d\vec{q}n(-k-q)\frac{1}{\varepsilon_{p+k}-\varepsilon_{-k-q}+\varepsilon_q} = \\
& = \iint d\vec{k}d\vec{q}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{-k-q}}+1}\frac{1}{\varepsilon_{p+k}-\varepsilon_{-k-q}+\varepsilon_q} = \\
& = \iint d\vec{k}d\vec{q}e^{-\beta\varepsilon_{-k-q}}\frac{1}{\varepsilon_{p+k}-\varepsilon_{-k-q}+\varepsilon_q} = \\
& = \iint d\vec{u}d\vec{q}e^{-\beta\varepsilon_u}\frac{1}{\varepsilon_{p-u-q}-\varepsilon_u+\varepsilon_q} \quad (33)
\end{aligned}$$

Вспомним, что  $\varepsilon$  квадратично зависит от своих аргументов

$$\begin{aligned}
& \iint d\vec{u}d\vec{q}e^{-\beta\varepsilon_u}\frac{1}{\varepsilon_{p-u-q}-\varepsilon_u+\varepsilon_q} = \\
& = \iint d\vec{u}d\vec{q}e^{-\beta u^2}\frac{1}{(p-u-q)^2-(u)^2+q^2} = \\
& = \int d\vec{u}e^{-\beta u^2}\int d\vec{q}\frac{1}{q^2+uq} \quad (34)
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что интеграл по переменной  $u$  сходится, а по переменной  $q$  имеет расходимость. Ограничим верхний предел суммирования параметром  $\Lambda$  (максимальный модуль импульса). Тогда, очевидно, что сумма и интеграл имеют расходимость порядка  $\Lambda$ .

После проведения аналогичных вычислений было получено, что слагаемое с  $n(p+k) \cdot n(-k-q)$ , слагаемое с  $n(p+k) \cdot n(q)$  и слагаемое с  $n(-k-q) \cdot n(q)$  сходятся.

Для арбуза АА, как и для ТТ будут справедливы те же порядки расходимости.

Арбуз AA:

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ -k-q \\ \circlearrowright \\ q \end{array} &= \sum_k \sum_q (e^{i\varepsilon_{p+k}(t-t')} (\theta(t'-t) + n(p+k)) \cdot \\
&\cdot e^{i\varepsilon_{-k-q}(t'-t)} (\theta(t'-t) + n(-k-q)) e^{i\varepsilon_q(t-t')} (\theta(t'-t) + n(q))) = \\
= \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q)} (\theta(t'-t) + n(p+k)) (\theta(t-t') + n(-k-q)) (\theta(t'-t) + n(q)) = \\
&= \sum_k \sum_q e^{i(t-t') \overbrace{(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q)}^\varepsilon} \cdot (\theta(t-t') \underbrace{(n(p+k) \cdot n_q - n(-k-q) - n(p+k) \cdot n(-k-q) - n(-k-q) \cdot n(q))}_{C_1} + \\
&+ \underbrace{n(-k-q) + n(p+k) \cdot n(-k-q) + n(-k-q) \cdot n(q) + n(p+k) \cdot n(-k-q) \cdot n(q)}_{C_2}) \\
\end{aligned} \tag{35}$$

Итог для двойного арбуза в  $\omega$  представлении:

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ -k-q \\ \circlearrowright \\ q \end{array} &= \sum_k \sum_q (C_1 2\pi \left( -\frac{1}{i(\varepsilon + \omega) - 0} \right) \delta(\omega + \omega') + \\
&+ C_2 (2\pi)^2 \delta(\omega + \varepsilon) \delta(\omega' - \varepsilon)) \tag{36}
\end{aligned}$$

Арбуз TT:

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ \hline -k-q \\ \hline q \\ \circlearrowright \end{array} &= \sum_k \sum_q (e^{i\varepsilon_{p+k}(t-t')} (\theta(t'-t) + n(p+k)) \cdot \\
&\cdot e^{i\varepsilon_{-k-q}(t'-t)} (\theta(t'-t) + n(-k-q)) e^{i\varepsilon_q(t-t')} (\theta(t'-t) + n(q))) = \\
= \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q)} (\theta(t'-t) + n(p+k)) (\theta(t-t') + n(-k-q)) (\theta(t'-t) + n(q)) = \\
&= \sum_k \sum_q e^{i(t-t') \overbrace{(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q)}^\varepsilon} \cdot \\
&\cdot \underbrace{(\theta(t-t') (n(p+k) \cdot n_q - n(-k-q) - n(p+k) \cdot n(-k-q) - n(-k-q) \cdot n(q)))}_{C_1} + \\
&+ \underbrace{n(-k-q) + n(p+k) \cdot n(-k-q) + n(-k-q) \cdot n(q) + n(p+k) \cdot n(-k-q) \cdot n(q)}_{C_2} =
\end{aligned} \tag{37}$$

Итог для двойного  $TT$  арбуза в  $\omega$  представлении:

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ \hline -k-q \\ \hline q \\ \circlearrowright \end{array} &= \sum_k \sum_q (C_1 2\pi \left( -\frac{1}{i(\varepsilon + \omega) - 0} \right) \delta(\omega + \omega') + \\
&+ C_2 (2\pi)^2 \delta(\omega + \varepsilon) \delta(\omega' - \varepsilon)) \tag{38}
\end{aligned}$$

Арбуз RT

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ \hline -k-q \\ \hline q \\ \circlearrowright \end{array} &= \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q)} n(p+k) \cdot n(-k-q) \cdot n(q) \\
& \tag{39}
\end{aligned}$$

теперь тоже в  $\omega$  представлении:

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ \hline -k-q \\ \hline q \\ \circlearrowright \end{array} &= (2\pi)^2 \sum_k \sum_q n(p+k) \cdot n(-k-q) \cdot n(q) \cdot \\
&\cdot \delta(\omega + \varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q) \delta(\omega' - \varepsilon_{p+k} + \varepsilon_{-k-q} - \varepsilon_q) \tag{40}
\end{aligned}$$

Такие же выражения получатся для арбузов RA и AT. Соответствующие выражения обозначим как  $\sum_k \sum_q B(k, q) \delta(\omega + \varepsilon_{p,k,q}) \delta(\omega' - \varepsilon_{p,k,q})$  AR

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ -k-q \\ \circlearrowright \\ q \end{array} &= \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q)} (n_{p+k} + 1)(n_{-k-q} + 1)(n_q + 1) = \\
&= \sum_k \sum_q e^{i(t-t')(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q)} (n_{p+k} n_{-k-q} n_q + \\
&\quad + n_{p+k} n_{-k-q} + n_{p+k} n_q + n_{-k-q} n_q + n_{p+k} + n_{-k-q} + n_q) \quad (41)
\end{aligned}$$

теперь тоже в  $\omega$  представлении:

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ -k-q \\ \circlearrowright \\ q \end{array} &= (2\pi)^2 \sum_k \sum_q (n_{p+k} n_{-k-q} n_q + \\
&\quad + n_{p+k} n_{-k-q} + n_{p+k} n_q + n_{-k-q} n_q + n_{p+k} + n_{-k-q} + n_q) \cdot \\
&\quad \cdot \delta(\omega + \varepsilon_{p+k} - \varepsilon_{-k-q} + \varepsilon_q) \delta(\omega' - \varepsilon_{p+k} + \varepsilon_{-k-q} - \varepsilon_q) \quad (42)
\end{aligned}$$

Такие же выражения получатся для арбузов TR и TA. Соответствующие выражения обозначим как  $\sum_k \sum_q A(k, q) \delta(\omega + \varepsilon_{p,k,q}) \delta(\omega' - \varepsilon_{p,k,q})$

Вклады от недиагональных арбузов будут равны суммам дельта-функций. Это особенность чисто дискретного спектра. Обозначим их как  $C_{ij} \sum \delta(a_k)$

Для того, чтобы определить спектр в нашей задаче и обнаружить затухание был построен определитель, составленный из элементов матрицы полного пропагатора. Нули обратного пропагатора определяют связанные состояния.

$$\begin{vmatrix} \Lambda & C_{RA} & C_{RT} \\ C_{AR} & \Lambda & C_{AT} \\ C_{TR} & C_{TA} & \Lambda \end{vmatrix} \quad (43)$$

Где

$$\begin{aligned}
C_{RA} &= C_{RT} = C_{AT} = \sum_k \sum_q B(k, q) \delta(\omega + \varepsilon_{p,k,q}) \delta(\omega' - \varepsilon_{p,k,q}), \\
C_{AR} &= C_{TR} = C_{TA} = \sum_k \sum_q A(k, q) \delta(\omega + \varepsilon_{p,k,q}) \delta(\omega' - \varepsilon_{p,k,q}).
\end{aligned}$$

Спектр возбуждения данной задачи определяется полюсами пропагатора или нулями обратного пропагатора. Для дискретного спектра видно, что матрица остаётся диагонально и спектр испытывает некий сдвиг. В то время видно, что на отдельных частотах из-за обращения дельта-функций в бесконечность мы получаем расходимости обратного пропагатора или нули пропагатора. Эти нули означают связанные состояния.

## 5 Заключение

Нам удалось применить диаграммную технику для задачи с квантовым Бозе газом со взаимодействием, при учёте второго порядка которой были получены связанные состояния. Как и ожидалось, в системе с чисто дискретным спектром отсутствуют затухания корреляционных функции [2]. В то время как для непрерывного спектра интегралы по импульсам от связанных состояний дают диссипацию.

## Список литературы

- [1] А. Н. Васильев, Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, ЛГУ, Л., 1976
  
- [2] Ф. М. Куни, Статистическая физика и термодинамика, Москва «Наука», 1981
  
- [3] Л. В. Келдыш, том 20 номер 4, стр. 1018, 65
  
- [4] А. Н. Васильев, Квантовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике, 1998
  
- [5] Ю. Хонконен, Теоретическая и математическая физика, том 175, №3, 2013