Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет
Кафедра статистической физики

Принцип максимальной хаотичности в теории развитой турбулентности: модель с предельно нарушенной чётностью

Магистерская диссертация студента
дневного отделения
_____ **Куликова Анатолия Борисовича**

Научный руководитель:
_____ д.ф.-м.н., профессор **Аджемян Л.Ц.**

Рецензент:
_____ д.ф.-м.н., профессор **Антонов Н.В.**

Санкт-Петербург
2015

1. Введение

Классический формализм Колмогорова [1] трёхмерной турбулентности при больших числах Рейнольдса ведёт к определённым выражениям для величин инерционного интервала. Одним из важнейших является "закон 5/3" для одномерного спектра турбулентных пульсаций:

$$E_1(k) = C_k W^{2/3} k^{-\frac{5}{3}}, \tag{1}$$

где W обозначает средний спектральный поток энергии, а константа C_k, названная в честь Колмогорова, как предполагается, является универсальной. Изучению справедливости этого соотношения и различных следствий из него было уделено немало внимания с экспериментальной точки зрения; можно отметить классическую монографию [2] и обзор [3], охватывающий несколько десятков работ.

Хотя в целом экспериментальные данные хорошо согласуются с предсказаниями закона $5/3$, некоторые свидетельствуют о слабой зависимости C_k от волнового числа k. Такая зависимость может быть объяснена наличием малого отклонения от индекса $5/3$ – так называемым аномальным скейлингом. Впервые идеи о возможном наличии такого отклонения были высказаны самим Колмогоровым [4]. Некоторые теоретические методы, связанные с применением современной ренормализационной группы (РГ), также свидетельствуют в пользу существования аномального скейлинга. Стоит отметить, что классическая теория Колмогорова основывается на простых размерных соображениях и не позволяет ни проверить гипотезы о наличии аномального скейлинга (и тем более рассчитать показатель такого отклонения), ни предсказать точное значение C_k. В связи с этим актуальной задачей является обоснование теории Колмогорова, определение области ее применимости и нахождение возможных поправок к этой теории, исходя из последовательной статистической теории, базирующейся на уравнении Навье-Стокса.

Естественным объектом описания с теоретической точки зрения в теории турбулентности является поле скорости. В то же время, методы теории поля активно развивались применительно к задачам теории элементарных частиц и квантовой теории поля, что привело к созданию мощного и хорошо разработанного аппарата в этой области. В связи с этим логичной и часто используемой является идея применить развитые методы КТП для описания турбулентности. Однако попытки построить модель турбулентности на основании КТП сопряжены с рядом трудностей, среди которых можно отметить крайне сильную инфракрасную сингулярность линии (пропагатора), следующую непосредственно из эксперимента, что приводит к очень сильным инфракрасным расходимостям диаграмм. В рамках применения КТП к турбулентности исследование нелинейных задач производится либо с использованием метода ренормализационной группы, либо с помощью уравнений согласования. Настоящая работа посвящена развитию второго из указанных подходов и продолжению анализа модели максимальной хаотичности, предложенной в работах [5] и [6]. Среди преимуществ предложенной в [5] модели стоит отметить отсутствие ИК-расходимостей, докзанное в работе [7].

В настоящей работе будет сформулирована модель предельно нарушенной чётности, с использованием диаграммных разложений проведён анализ уравнений согласования в двухпетлевом приближении. Также будет продемонстрировано наличие аномального скейлинга и определена константа Колмогорова. Структура изложения такова: в следующих четырёх разделах будет сформулирована применяемая модель и кратко приведены полученные в предшествующих работах результаты, после чего приведена итоговая используемая в работе модель. В следующих разделах будут последовательно описаны однопетлевой счёт и его результаты, анализ двухпетлевого приближения, его вычисление и итоговые результаты работы.

2. Модель максимальной хаотичности

Использование предположения о максимальности хаотичности поля скорости выглядит естественным при построении статистической теории развитой турбулентности. Именно это предположение было использовано Уайльдом, а за ним и Крейчнаном [9], в работе [8] в комбинации с его диаграммной техникой. Как упоминал Уайлд, желательным является применение принципа максимальной хаотичности к полю скорости $\mathbf{v}(x)$ при выборе надлежащей статистики случайной силы $\mathbf{f}(x)$, описывающей стохастичность в модели Уайльда. Реализация этого подхода сложна технически, именно поэтому Уайльд применил его к невозмущённому полю скорости $v_0(x)$ или, что то же самое, к случайной силе $\mathbf{f}(x)$. Это соответствует выбору Гауссовой статистики $\mathbf{f}$. Следуя работам [5] и [6], авторы которых предложили и сформулировали применяемую в данной работе модель, используем принцип максимальной хаотичности в его исходной формулировке, т.е. по отношению к полному полю скорости $\mathbf{v}(x)$. Это позволит получить функцию распределения турбулентных пульсаций поля скорости.

Требование максимальной хаотичности само по себе не имеет определённого физического смысла; необходимо сначала зафиксировать условия, при которых мы будем искать экстремум энтропии. С другой стороны, для получения сокращённого описания физической системы необходимо зафиксировать средние значения величин, являющихся ключевыми для описания взаимодействия системы и термостата. Так, для равновесных ансамблей Гиббса такими величинами являются средняя энергия и число частиц. Следуя идеям Колмогорова, предположим, что важнейшей характеристикой, описывающей развитую однородную изотропную турбулентность в инерционном интервале, является средний спектральный поток энергии. Выводы полуэмпирической теории, основанной на таком предположении и сформулированной Колмогоровым в работе 1941 года [1], хорошо подтверждаются большим количеством экспериментальных данных [2], [3]. Как обычно, предполагается, что

источник такого потока энергии – "накачка"- локализован вблизи нуля по волновым числам, $k \sim L^{-1}$, где L – внешний масштаб турбулентности (размер наиболее крупных вихрей).

Рассмотрим уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. Несжимаемость жидкости эквивалентна равенству нулю её дивергенции ($\partial_i v_i = 0$), или же поперечности поля скорости в Фурье-представлении: $k_i v_i(\mathbf{k}) = 0$.

$$\partial_t v_i = \nu \Delta v_i - \partial_i P - v_j \partial_j v_i \tag{2}$$

Введём величины

$$E \equiv \frac{1}{2} < v^2(x) >$$

$$E_{ij} \equiv \frac{1}{2} < v_i(x) v_j(x) >$$

$$\int dx v^2(x) = \int dx \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int v(k_1) e^{ik_1 x} dk_1 \int v(k_2) e^{ik_2 x} dk_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^D} \int \int dk_1 dk_2 v(k_1) v(k_2) \delta(k_1 + k_2) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int dk v(k) v(-k)$$

Это позволяет определить

$$E_{ij}(k) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^D} < v_i(k) v_j(-k) >$$

Напишем уравнение (2) в Фурье-представлении:

$$\partial_t v_i(k) = -\nu k^2 v_i(k) - i k_i P(k) - (v \partial v_i)(k) \tag{3}$$

Домножая на $v_j(-k)$, получаем

$$v_j(-k) \partial_t v_i(k) = -\nu k^2 v_i(k) v_j(-k) - i k_i P(k) v_j(-k) - (v \partial v_i)(k) v_j(-k) \tag{4}$$

Меняя местами значки i и j, а также k и -k, можем записать:

$$v_i(k) \partial_t v_j(-k) = -\nu k^2 v_j(-k) v_i(k) + i k_j P(-k) v_i(k) - (v \partial v_j)(-k) v_i(k) \tag{5}$$

Тогда можем написать сумму

$$\partial_t v_i(k) v_j(-k) = -2\nu k^2 v_i(k) v_j(-k) + (...) - \left[(v \partial v_i)(k) v_j(-k) + (v \partial v_j)(-k) v_i(k) \right] \tag{6}$$

Определяя величину

$$T_{ij}(k) = [v_i(k)(v_s \partial_s v_j)(-k) + (v_s \partial_s v_i)(k) v_j(-k)]/2 \tag{7}$$

И усредняя по статистическому ансамблю, можем получить:

$$\partial_t < E_{ij}(k) > /2 = -\nu k^2 < E_{ij}(k) > - < T_{ij} > \tag{8}$$

Кроме того, учёт внешней накачки энергии позволяет написать итоговое выражение:

$$\partial_t < E_{ij}(k) > /2 = -\nu k^2 < E_{ij}(k) > - < T_{ij} > + d_{ij}(k) \tag{9}$$

Уравнение (9) со свёрнутыми значками является уравнением спектрального баланса энергии. В случае рассмотрения модели турбулентности с ненарушенной чётностью все величины в (9) пропорциональны поперечному проектору $P_{ij}(k) = \delta_{ij} - k_i k_j k^{-2}$. Это непосредственно следует из условия несжимаемости жидкости. В таком случае $d_{ij}(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}) d(k)$, где $d(k)$ является спектральной плотностью внешнего источника энергии и

$$W \equiv 2(2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} d(k) \tag{10}$$

определяет суммарную интенсивность накачки энергии. Предполагается, что функция $d(k)$ локализована при малых волновых числах $k \sim L^{-1}$. В инерционном интервале $kL >> 1$ это предположение соответствует записи

$$d_{ij}(\mathbf{k}) = P_{ij}(2\pi)^3 W \delta(\mathbf{k})/2 \tag{11}$$

В дальнейшим будем рассматривать стационарный случай и полагать в (9) $\partial_t < E_{ij}(k) >= 0$. Искомая функция распределения $\rho(\mathbf{v}(\mathbf{x}))$ будет построена на основании требования максимальности информационной энтропии $\sigma = - < ln\rho >= - \int D\mathbf{v} \rho(\mathbf{v}) ln\rho(\mathbf{v})$, где $D\mathbf{v}$ обозначает функциональное интегрирование. Условием при этом будет рассматриваться уравнение (9). На функцию $\rho(\mathbf{v})$ предполагается наложенным также условие нормировки: $\int D\mathbf{v} \rho(\mathbf{v}) = 1$. Вводя множители Лагранжа $\lambda_{ij}(\mathbf{k})$ и переходя к задаче поиска безусловного экстремума, получаем выражение

$$\rho(\mathbf{v}) = Q^{-1} exp[(2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} \lambda_{ij}(\mathbf{k}) \dot{E}_{ji}(\mathbf{k})], \tag{12}$$

где для краткости записи было введено обозначение $\dot{E}_{ij}(k) = -\nu k^2 E_{ij}(k) - T_{ij}(k)$, а Q является нормировочным множителем. Множители Лагранжа λ_{ij} можно определить из уравнения (9). Так как $\dot{E}_{ij}(\mathbf{k}) = \dot{E}_{ji}(-\mathbf{k})$, мы можем выбрать $\lambda_{ij}(\mathbf{k}) = \lambda_{ji}(-\mathbf{k})$ и получить квантовополевую модель $\rho = Q^{-1} exp(S)$ с "действием"

$$S = -(2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} [\nu k^2 \lambda_{ij}(\mathbf{k}) v_j(k) v_i(-k) + \lambda_{ij}(\mathbf{k}) v_j(k) (v_s \partial_s v_i)(-k)] \tag{13}$$

Для дальнейшего использования удобно выделить в λ_{ij} слагаемое, пропорциональное $P_{ij}(\mathbf{k})$, с коэффициентом, не зависящим от $\mathbf{k}$:

$$\lambda_{ij}(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}) \varphi_0 / 2\nu + \tilde{\lambda}_{ij}(\mathbf{k}) \tag{14}$$

Вершинное слагаемое действия (13), домноженное на константу $\varphi_0/2\nu$, является полной производной в координатном представлении (следствие сохранения энергии при $\nu = 0$), и поэтому может быть опущено.

Нашей целью будет получение уравнений самосогласования. Для этого, помимо стандартного использования уравнения Дайсона с одетыми линиями, необходимо также получить соответствующее представление для условия связи (9). Перепишем с этой целью действие (13) в более удобной форме с локальным взаимодействием, матричное уравнение Дайсона в такой теории будет включать в себя условие (9).

Введём единичную операцию

$$\int \Pi D u_i \delta(u_i(\mathbf{k}) - \tilde{\lambda}_{ij}(\mathbf{k}) v_j(\mathbf{k})) \tag{15}$$

Функциональную дельта-функцию, стоящую под знаком интеграла, можно выразить как Фурье-образ с помощью вспомогательного поля $\mathbf{w}$. Это позволяет ввести "функцию распределения" трёх поперечных полей – $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ посредством соотношения $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = Q^{-1} exp(S)$, где

$$S = -\varphi_0 (\partial_j v_i)(\partial_j v_i)/2 - \nu (\partial_j v_i)(\partial_j v_i) + (\partial_j u_i) v_i v_j - w_i \hat{\lambda}_{ij} v_j + w_i u_i \tag{16}$$

Действие записано в координатном представлении с подразумевающимся интегрированием по $\mathbf{x}$; $\hat{\lambda}$ – оператор, соответствующий $\tilde{\lambda}$ в импульсном представлении.

Для того, чтобы прояснить физический смысл вспомогательного поля $\mathbf{w}$, можно рассмотреть соответствующее (16) уравнение Швингера $< \Phi(\mathbf{v}) \delta S / \delta u_j >= 0$ с произвольным функционалом $\Phi(\mathbf{v})$. Зависящие от $\mathbf{u}$ слагаемые действия (16) можно представить в форме $u_j B_j$, где $B_j = \nu \partial^2 v_j - v_s \partial_s v_j - \partial_j P + w_j$. Продольная компонента $\partial_j P \equiv -\partial_j \frac{\partial_s \partial_l}{\Delta} v_s v_l$, добавленная в B_j, имеет смысл градиента давления; след её произведения с поперечным полем u_j равняется нулю. Это обеспечивает B_j поперечность, необходимую для корректного вычисления $\delta S / \delta u_j$. В результате получаем

$$< \Phi(\mathbf{v}) [\nu \partial^2 v_j - v_s \partial_s v_j - \partial_j P + w_j] >= 0, \tag{17}$$

откуда следует, что $\mathbf{w}$ представляет собой аналог случайной силы в теории Уайльда и описывает взаимодействие поля с "термостатом". Величину

$$\rho(\mathbf{w}) \equiv Q^{-1} \int D\mathbf{u} D\mathbf{v} exp(S) =$$

$$\int D\mathbf{v} \big(\nu \partial^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v}\partial)\mathbf{v} - \partial P + \mathbf{w}\big) exp[-\varphi_0 (\partial_l v_i)^2/2 - \mathbf{w} \hat{\lambda} \mathbf{v}]$$

можно интерпретировать как функцию распределения поля $\mathbf{w}$. С использованием (9) несложно показать, что $\rho(\mathbf{w})$ без нелинейных слагаемых в действии обладает гауссовой функцией распределения $\rho(\mathbf{w}) \sim exp(\mathbf{w} \hat{d}^{-1} \mathbf{w}/2)$, что совпадает с теорией Уайльда. Однако в нашей модели поле $\mathbf{w}$ взаимодействует с полем $\mathbf{v}$, и потому статистика $\mathbf{w}$ оказывается негауссовой.

Уравнение (9) можно записать в очень простой форме с использованием определения поля $\mathbf{w}$. Полагая в уравнении Швингера (17) $\Phi(\mathbf{v}) = v_i(\mathbf{k})$ и учитывая поперечность $\mathbf{v}$, запишем:

$$< \nu k^2 v_i(\mathbf{k}) v_j(-\mathbf{k}) - v_i(\mathbf{k}) (v_s \partial_s v_j)(-\mathbf{k}) + v_i(\mathbf{k}) w_j(-\mathbf{k}) >= 0 \tag{18}$$

Тогда (9) определяет "перекрёстный" пропагатор

$$< v_i(\mathbf{k}) w_j(-\mathbf{k}) >= d_{ij}(\mathbf{k}), \tag{19}$$

который можно интерпретировать как скорость накачки энергии. Это выражение формально совпадает с соответствующим выражением в теории Уайльда.

3. Уравнения согласования

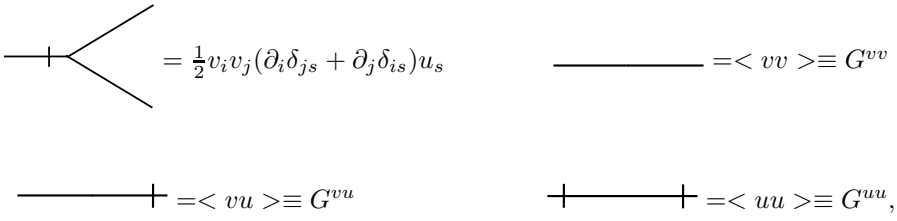
Полученная функция распределения имеет вид стандартной квантовополевой модели трёх поперечных полей с квазилокальным действием (16). Воспользовавшись уравнением Дайсона, можно получить уравнения согласования на "одетые" линии, т.е. полные пропагаторы рассматриваемой системы G^{vv}. Особенностью рассматриваемой модели является фиксированность одного из пропагаторов, отвечающая уравнению (19). Это соотношение является условием, которое позволит определить неизвестную величину λ в действии (16).

Запишем обратную матрицу $\hat{G}^{-1}$ корреляторов полей $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, соответствующую действию (16), в k-представлении:

$$\hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_0 k^2 - \Sigma^{vv} & \nu k^2 - \Sigma^{vu} & \tilde{\lambda} \\ \nu k^2 - \Sigma^{uv} & -\Sigma^{uu} & -1 \\ \tilde{\lambda} & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

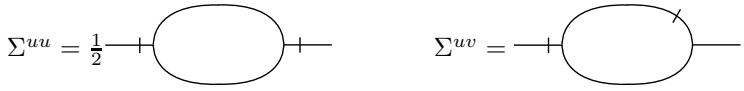
Все элементы матрицы здесь – пропорциональные P_{ij} тензоры; Σ – 1-неприводимые диаграммы, возникающие из уравнения Дайсона. Отсутствие поля $\mathbf{w}$ в негауссовой части действия (16) приводит к отсутствию каких бы то ни было Σ с полем $\mathbf{w}$.

Вводя графические обозначения для симметризованой вершины взаимодействия и полных пропагаторов модели



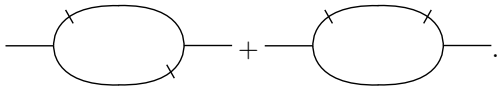
(21)

Можем записать в однопетлевом приближении:



(22)

$$\Sigma^{vv} = \Sigma_1^{vv} + \Sigma_2^{vv} =$$



. (23)

Напишем обратную (20) матрицу:

$$\hat{G} = G^{vv} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\lambda} & \nu k^2 - \Sigma^{vu} - \\ & & -\tilde{\lambda}\Sigma^{uu} \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda}^2 & \tilde{\lambda}(-\nu k^2 + \Sigma^{uv}) - \\ & & -\varphi_0 k^2 + \Sigma^{vv} \\ \nu k^2 - \Sigma^{uv} - & \tilde{\lambda}(-\nu k^2 + \Sigma^{vu}) - & |-\nu k^2 + \Sigma^{uv}|^2 + \\ -\tilde{\lambda}\Sigma^{uu} & -\varphi_0 k^2 + \Sigma^{vv} & +\Sigma^{uu}(\varphi_0 k^2 - \Sigma^{vv}) \end{pmatrix} \tag{24}$$

При этом получаем

$$(G^{vv})^{-1} = -Det(\hat{G})^{-1} = \varphi_0 k^2 - \Sigma^{vv} - \tilde{\lambda}^2 \Sigma^{uu} + \tilde{\lambda}(2\nu k^2 - \Sigma^{uv} - \Sigma^{vu}). \tag{25}$$

Пропагаторы G^{vv}, G^{vu}, G^{uu} связаны друг с другом соотношениями

$$G^{vu} = \tilde{\lambda} G^{vv}, \qquad G^{uu} = \tilde{\lambda}^2 G^{vv}, \tag{26}$$

которые следуют из определения поля $\mathbf{u} = \tilde{\lambda}\mathbf{v}$. Таким образом, достаточно получить замкнутую систему уравнений на пропагатор G^{vv} и функцию $\tilde{\lambda}(\mathbf{k})$. Соотношение (25) является первым уравнением этой замкнутой системы. Подставляя $< vw >$ из (24) в (19), получим второе уравнение:

$$G^{vv}(\nu k^2 - \Sigma^{uv} - \tilde{\lambda}\Sigma^{uu}) = d(k), \tag{27}$$

обе части которого пропорциональны P_{ij}. Вязкость ν и накачка $d(k)$ могут быть опущены в инерционном интервале; тогда из (25) и (27) следует:

$$(G^{vv})^{-1} = \varphi_0 k^2 - \Sigma^{vv} - \tilde{\lambda}^2 \Sigma^{uu} - \tilde{\lambda}(\Sigma^{uv} + \Sigma^{vu}), \tag{28}$$

$$G^{vv}(\Sigma^{uv} + \tilde{\lambda}\Sigma^{uu}) = 0. \tag{29}$$

4. Модель с нарушенной чётностью

Построенная диаграммная техника обладает рядом несомненных положительных черт. Во-первых, она свободна от инфракрасных расходимостей во всех порядках теории возмущений. Доказательство этого факта, опубликованное в [7], мы приведём позже и в общем случае поиска решений с нарушенной чётностью. Во-вторых, ультрафиолетовые расходимости однопетлевых диаграмм имеют такой же вид, как и слагаемое $\varphi_0 k^2$ в (28) и могут быть устранены подходящим выбором свободного параметра φ_0.

Первая попытка поиска решения данной системы уравнений согласования была предпринята в предположении о степенной зависимости коррелятора от волнового числа k [6]:

$$G_{ij}^{vv}(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}) b k^{-2\gamma}, \tag{30}$$

$$\tilde{\lambda}_{ij}(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}) a k^{2\sigma}, \tag{31}$$

где a, b и γ, σ – некие вещественные амплитуды и индексы, соответственно. Легко увидеть, что из определений (30), (31) и уравнения (28) вытекает связь на индексы:

$$6\gamma = 2 + d + 4\sigma. \tag{32}$$

Вычисление однопетлевых диаграмм в таком предположении приводит к Колмогоровским индексам ($\gamma = \frac{11}{6}$), но влечёт отрицательное значение константы Колмогорова. Одной из возможных причин, приводящих к такому результату, является возможное спонтанное нарушение чётности в турбулентности. Опишем подробнее, что это значит.

Одна из важнейших характеристик любого изучаемого объекта – набор симметрий, которыми он обладает, или же набор групп преобразований, оставляющих объект неизменным. Так, мы рассматриваем трансляционно-инвариантную турбулентность, поэтому в x-представлении искомый нами коррелятор зависит лишь от разности координат, а в Фурье-представлении – только от волнового числа. Кроме того, у нас ещё есть и изотропность, т.е. отсутствие выделенного направления. А значит, мы сразу можем заключить, что тензорная структура коррелятора проста и выглядит как δ_{ij} или $k_i k_j$. Поперечность поля скорости накладывает ещё одно условие на вид пропагатора, и единственным возможным вариантом тензорной записи является пропорциональный P_{ij} – поперечному проектору.

Наличие нарушения чётности означает, что в корреляторе может дополнительно присутствовать ещё один член, пропорциональный $\varepsilon_{ijl}k_l$, отвечающий за нарушенную чётность. Модели, рассматривающие поля с нарушенной чётностью, широко представлены в теоретической физике (в основном в КТП и КХД) и активно изучаются, начиная с экспериментального доказательства нарушения пространственной чётности β-распада (Lee, Yang, Wu, 1956-1957).

В теории турбулентности с экспериментальной точки зрения вопрос о нарушенной чётности изучается достаточно давно [11] - [12]. Косвенным подтверждением наличия такого нарушения является значительная чувствительность свойств турбулентных течений к искуственному вращению системы, т.е. целенаправленному нарушению чётности [13] - [15]. Одним из препятствий, не позволяющих провести точные эксперименты, является независимость спектра энергии пульсаций поля скорости от возможного нарушения чётности. В нашей записи такая независимость будет соответствовать тому, что добавочный вклад со свёрнутыми тензорными значками обращается в ноль.

Принимая гипотезу о нарушенной чётности, запишем новый вид пропагатора и множителя Лагранжа:

$$G_{ij}^{vv}(\mathbf{k}) = b k^{-2\gamma}(P_{ij}(\mathbf{k}) + i\theta\varepsilon_{ijl}k_l/k) \tag{33}$$

$$\tilde{\lambda}_{ij}(\mathbf{k}) = a k^{2\sigma}(P_{ij}(\mathbf{k}) + i\chi\varepsilon_{ijl}k_l/k) \tag{34}$$

Количество параметров модели, подлежащих определению из уравнений, увеличилось: к ним добавились две новых вещественных величины θ и χ, отвечающие за степень нарушения чётности в соответствующей конструкции. Однако и количество уравнений на самом деле увеличилось: уравнения (28) и (29) расщепились на два соответственно количеству входящих в них значковых структур. Мнимая единица в запись (33) и (34) введена для того, чтобы G и λ, рассматриваемые как операторы, обладали свойством эрмитовости: $G_{ij}^{vv}(\mathbf{k}) = G_{ji}^{vv}(-\mathbf{k}) = G_{ji}^{vv*}(\mathbf{k})$.

Важным является условие, накладываемое существенной положительной (неотрицательной) определённостью оператора $G_{ij}^{vv}(\mathbf{k}) =< v_i(\mathbf{k}) v_j^*(-\mathbf{k}) >$: его собственные значения $b k^{-2\gamma}(1 \pm \theta)$ должны быть неотрицательны, отсюда следует ограничение $|\theta| \leq 1$.

Определяя $Q_{ij} \equiv i\varepsilon_{ijl}k_l/k$, запишем правила перемножения P и Q.

$$P_{ij}P_{jl} = P_{il} \tag{35}$$

$$P_{ij}Q_{jl} = Q_{ij}P_{jl} = Q_{il} \tag{36}$$

$$Q_{ij}Q_{jl} = P_{il}. \tag{37}$$

Проверка этих выражений осуществляется прямой подстановкой определений и перемножением.

Рассмотрение данной модели в однопетлевом приближении было также проведено в работе [6]. Запишем выражения для оставшихся двух пропагаторов и обратного пропагатора $(G^{vv})^{-1}$ рассматриваемой модели:

$$G_{ij}^{uv} = abk^{2(\sigma-\gamma)}[(1+\chi\theta)P_{ij} + (\chi+\theta)Q_{ij}] \tag{38}$$

$$G_{ij}^{uu} = a^2bk^{2(2\sigma-\gamma)}[(1+2\chi\theta+\chi^2)P_{ij} + (2\chi+\theta+\theta\chi^2)Q_{ij}] \tag{39}$$

$$(G_{ij}^{vv})^{-1} = \frac{b^{-1}k^{2\gamma}}{1-\theta^2}(P_{ij} - \theta Q_{ij}) \tag{40}$$

Первые два выражения являются прямым следствием свойства (26), третье мы подробно обсудим в части "Максимальное нарушение чётности". Стоит отметить, что диаграммная техника осталась прежней, изменились лишь определения линий. Выражения для $\Sigma^{vv}, \Sigma^{uv}, \Sigma^{uu}$ возможно получить в аналитическом по γ, θ и χ виде. Однородное уравнение (29) позволяет определить теперь не только индекс γ, но и параметр θ. Уравнение имеет два корня: $|\theta| = 1.03$ (приближённое численное значение) и $|\theta| = 1$ – точный корень. Уравнение (40) для обратного пропагатора не существует при $|\theta| = 1$, поэтому в работе [6] был рассмотрен второй корень. Дальнейшее решение системы уравнений привело к положительному значению константы Колмогорова, но оставило внутреннее противоречие модели: параметр нарушения чётности θ оказался незначительно превышающим максимальное возможное значение. Авторы высказали гипотезу, что такое превышение может быть следствием приближённого характера рассмотрения. Малое его значение позволяло надеяться, что дефект может быть исправлен учётом двухпетлевых поправок. В этой связи можно упомянуть работу [10], где также рассматривалась теория турбулентности со спонтанно нарушенной чётностью, но было получено значение параметра θ, равное $\theta = 2.83$, далеко выходящее за разрешённые рамки. Такое превышение нельзя было трактовать как следствие приближённого характера уравнений. В рассматриваемом же случае учёт двухпетлевых поправок вполне мог исправить ситуацию, это делало проведение такого расчёта актуальной задачей.

Двухпетлевые вычисления невозможны без подробного анализа возможных расходимостей диаграмм в инфракрасном (ИК) и ультрафиолетовом (УФ) диапазонах волновых чисел. Заканчивая расширенное введение и формулировку предшествующих результатов, докажем в следующем разделе отсутствие ИК-расходимостей во всех порядках теории возмущений, после чего сформулируем итоговую рассматриваемую нами модель максимального нарушения чётности.

5. Отсутствие ИК-расходимостей

В процессе поиска решений уравнений согласования могут появляться ИК- и УФ-расходимости диаграмм разложения. Эти расходимости представляют серьёзное препятствие, в частности, ИК-расходимости не удаётся ликвидировать стандартными методами ренормировки. Проблема неустранимых ИК-расходимостей возникает в ряде подходов к построению теории развитой турбулентности. Следуя работе [7], докажем отсутствие ИК-расходимостей во всех порядках теории возмущений в рассматриваемой модели.

Следующие три свойства вершины взаимодействия в (16) имеют решающее значение.

1. *Вершина такова, что она обращается в нуль, как только обращается в нуль импульс одной из скоростей, в нее входящих.* Это означает, что в диаграммах с одетыми линиями сингулярность безмассовых линий не приводит к появлению ИК-расходимостей.

Записывая действие (16) в импульсном представлении, получаем

$$S_{int} = -i\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}(q_s - k_s)\lambda_{ij}(\mathbf{k})v_j(\mathbf{k})v_s(-\mathbf{q})v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k}). \tag{41}$$

Заменяя здесь $\mathbf{k}$ на $\mathbf{q}-\mathbf{k}$ (в то же время $\mathbf{q}-\mathbf{k}$ заменяется на $\mathbf{k}$) и переставляя местами индексы суммирования $i \leftrightarrow j$, получаем

$$S_{int} = -i\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}k_s\lambda_{ji}(\mathbf{q}-\mathbf{k})v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k})v_s(-\mathbf{q})v_j(\mathbf{k}). \tag{42}$$

Выражения (41), (42) равны, поэтому действие может быть записано как их полусумма. Принимая во внимание, что слагаемое в (41), содержащее q_s, обращается в нуль в силу поперечности поля скоростей ($q_s v_s(-\mathbf{q}) = 0$), приходим к действию

$$S_{int} = \frac{i}{2}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}k_s v_j(\mathbf{k})v_s(-\mathbf{q})v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k})[\lambda_{ij}(\mathbf{k}) - \lambda_{ji}(\mathbf{q}-\mathbf{k})]. \tag{43}$$

Используя свойство симметричности множителей Лагранжа ($\lambda_{ij}(\mathbf{k}) = \lambda_{ji}(-\mathbf{k})$), перепишем последнее выражение в окончательном виде:

$$S_{int} = \frac{i}{2}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}k_s v_j(\mathbf{k})v_s(-\mathbf{q})v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k})[\lambda_{ij}(\mathbf{k}) - \lambda_{ij}(\mathbf{k}-\mathbf{q})]. \tag{44}$$

Из (44) видно, что вершина обращается в нуль, как только аргумент какой-либо скорости стремится к нулю. Для $v_j(\mathbf{k})$ это следует из присутствия множителя k_s, для $v_s(-\mathbf{q})$ – из обращения в нуль скобки $[\lambda_{ij}(\mathbf{k}) - \lambda_{ij}(\mathbf{k}-\mathbf{q})]$ при $\mathbf{q}=0$, а для $v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k})$ – из условия ортогональности $k_s v_s(-\mathbf{q}) = 0$ при $\mathbf{k}=\mathbf{q}$.

2. Второе свойство связано с законом сохранения энергии: *слагаемое в* $\lambda_{ij}(\mathbf{k})$ *вида* $P_{ij}(\mathbf{k}) \cdot const$ *не даёт вклада в* (44). Действительно, в этом случае оба проектора в разности $P_{ij}(\mathbf{k}) - P_{ij}(\mathbf{q}-\mathbf{k})$ можно заменить на δ_{ij}: первый из-за свертки в (44) с поперечным полем $v_j(\mathbf{k})$, а второй из-за свертки с поперечным полем $v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k})$. После этого разность проекторов обращается в нуль.

3. Третье свойство связано с законом сохранения спиральности: *взаимодействие* (44) *обращается в нуль также для вклада* $\varepsilon_{ijl}k_l$ *в* $\lambda_{ij}(\mathbf{k})$. Подставляя такой вклад в разность $[\lambda_{ij}(\mathbf{k}) - \lambda_{ij}(\mathbf{k}-\mathbf{q})]$ и сокращая члены, пропорциональные импульсу k, получаем

$$\frac{i}{2}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}k_s v_j(\mathbf{k})v_s(-\mathbf{q})v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\varepsilon_{ijl}q_l. \tag{45}$$

Заменим $k_s v_j(\mathbf{k})$ на $k_s v_j(\mathbf{k}) - k_j v_s(\mathbf{k})$. Это можно сделать "бесплатно" , так как добавочное слагаемое даёт нулевой вклад в (45): замена $\mathbf{k}\to-\mathbf{q}, \mathbf{q}\to-\mathbf{k}, l\leftrightarrow j$ в выражении

$$\frac{i}{2}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}k_j v_s(\mathbf{k})v_s(-\mathbf{q})v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\varepsilon_{ijl}q_l \tag{46}$$

показывает, что единственное изменение состоит в перестановке индексов $l\leftrightarrow j$ в ε_{ijl}, что меняет знак всего выражения, поэтому оно должно быть равно нулю. Запишем соотношение

$$k_s v_j(\mathbf{k}) - k_j v_s(\mathbf{k}) = (\delta_{sm}\delta_{jn} - \delta_{sn}\delta_{jn})k_m v_n(\mathbf{k}) = \varepsilon_{tsj}\varepsilon_{tmn}k_m v_n(\mathbf{k}) \tag{47}$$

и подставим его в (45):

$$\frac{i}{2}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\varepsilon_{tsj}\varepsilon_{tmn}k_m v_n(\mathbf{k})v_s(-\mathbf{q})v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\varepsilon_{ijl}q_l. \tag{48}$$

Используя свертку $\varepsilon_{tsj}\varepsilon_{ijl} = \delta_{si}\delta_{tl} - \delta_{sl}\delta_{ti}$ и тот факт, что вклад, пропорциональный δ_{sl} обращается в нуль в силу $q_s v_s(-\mathbf{q}) = 0$ в (48), приходим к выражению

$$\frac{i}{2}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\varepsilon_{lmn}k_m v_n(\mathbf{k})v_s(-\mathbf{q})v_i(\mathbf{q}-\mathbf{k})q_l. \tag{49}$$

Произведя в (49) подстановку $-\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} - k$ (соответственно $\mathbf{q}-\mathbf{k} = -\tilde{\mathbf{q}}$) и принимая во внимание $\varepsilon_{lnm}k_m q_l \to \varepsilon_{lnm}k_m(k_l - \tilde{q}_l) = -\varepsilon_{lnm}k_m\tilde{q}_l$, убеждаемся, что выражение (49) сменило знак и, следовательно, оно равно нулю.

6. Максимальное нарушение чётности

Рассмотрим уравнение (20) для обратного пропагатора. Заметим: как в случае ненарушенной чётности, так и в рассматриваемом случае спонтанного её нарушения пропагатор обладает свойством поперечности, т.е. $k_i G_{ij}(\mathbf{k}) = 0$. Рассматривая пропагатор как линейный оператор над множеством векторных полей в R^3, можем сказать, что он обладает проективными свойствами. Однако ни поперечный проектор, ни в более общем случае оператор, имеющий областью значений не всё пространство, не имеют обратного оператора. В формально записанном выражении (20) такой обратный оператор тем не менее присутствует. Такая ситуация возникает во многих моделях теории турбулентности и прочих задачах, в которых речь идёт о наложенных на рассматриваемые поля условиях. В то же время, функциональное интегрирование при усреднении величин по ансамблю производится по всевозможным полям $\mathbf{v}$, в то время как лишь поперечные отвечают возможным реализациям системы, т.е. дают ненулевой вклад. Стандартным подходом к решению возникшего затруднения является следующий: мы переопределяем единичный оператор как оператор, действующий лишь на подпространстве значений оператора G_{ij}. Таким оператором, безусловно, является сам поперечный проектор, т.к. на ортогональном $\mathbf{k}$ подпространстве $P_{ij}v_i = v_j$, и $P_{ij}P_{jl} = P_{il}$. Это позволяет определить обратный оператор от G^{vv}_{ij} (необходимый нам, чтобы использовать уравнения (25) и (28)) и собственно решать систему уравнений. И именно такое определение, дающее в случае ненарушенной чётности "хорошее" уравнение

$$G^{vv}_{ij} = bk^{-2\gamma}P_{ij} \tag{50}$$

$$(G^{vv}_{ij})^{-1} = b^{-1}k^{2\gamma}P_{ij}, \tag{51}$$

в случае нарушенной чётности даёт содержащее полюс и неустойчивость по θ уравнение

$$G^{vv}_{ij} = bk^{-2\gamma}(P_{ij} + \theta Q_{ij}) \tag{52}$$

$$(G^{vv}_{ij})^{-1} = \frac{b^{-1}k^{2\gamma}}{1-\theta^2}(P_{ij} - \theta Q_{ij}) \tag{53}$$

Именно такая сингулярность по θ в знаменателе и мешает рассматривать корень $\theta = 1$ описанной выше системы уравнений и приводит к сильной неустойчивости значения константы Колмогорова по θ. Кроме того, как было указано выше, при переходе модуля θ через единицу (а лишь значения θ, не превосходящие единицу, имеют физический смысл, т.к. оператор энергии должен быть неотрицательно определён) знаменатель выражения (53) меняет знак, что в конечном итоге приводит к чисто мнимому значению константы Колмогорова, только если двухпетлевой вклад не обнуляется, либо не содержит $1 - \theta$ внешним множителем. В этом месте нам придётся немного отойти от последовательной логики изложения и сказать, что ни то, ни другое для двухпетлевого вклада не выполняется, что было обнаружено в рамках данной работы в процессе непосредственного вычисления двухпетлевого вклада. Подробное обоснование данного вывода вместе с методом счёта двухпетлевых диаграмм и результатами представлено в нижеследующих главах.

Как было установлено, при данном написании системы уравнений любой ненулевой результат двухпетлевого счёта оказывается патологическим: система уравнений на параметры ε и θ либо оставляет θ большим единицы, либо делает ε чисто мнимым. Кроме того, даже при малой сдвижке по θ параметр ε оказывается недопустимо большим. Это заставляет пересмотреть начальные уравнения модели, в частности, уравнение для обратного пропагатора.

Можно заметить следующие свойства всех входящих в уравнения тензорных конструкций:

- Все сигмы и корреляторы коммутируют между собой, т.к. составлены из поперечных проекторов и ε-тензоров. Это выполняется при условии того, что они все берутся при одном и том же импульсе k.
- Хотя тензоры, конечно, являются эрмитовыми операторами, сама матрица (20) является чисто симметричной, т.к. не является по сути ни тензором, ни оператором, а лишь матрицей, составленной из пропагаторов и не живёт ни в каком физическом пространстве.
- Это позволяет написать формально стандартные уравнения и обратную матрицу (24), с условием, что произведение матриц (20) и (24) даёт матрицу, пропорциональную I.
- На диагонали стоят, конечно, тензоры, не имеющие обратного, но можно опять-таки формально вынести их за скобку, опустив на данном этапе вопрос о смысле взятия обратного тензора.

Определим все тензоры соответствующими максимально нарушенной чётности, т.е. $\theta = \chi = 1$.

$$G^{vv}_{ij} = bk^{-2\gamma}(P_{ij} + i\varepsilon_{ijs}k_s/k) \tag{54}$$

$$\tilde{\lambda}_{ij} = ak^{2\sigma}(P_{ij} + i\varepsilon_{ijs}k_s/k) \tag{55}$$

В такой форме записи все выражения исходной модели остаются нетронутыми. Вопрос о том, что значит обратный тензор, возникнет лишь при попытке воспользоваться уравнением для обратного пропагатора. Мы

воспользуемся стандартным подходом переопределения единичного оператора, однако учтём, что в нашем пространстве все величины теперь пропорциональны не одному поперечному проектору, но сумме двух тензоров.

Мы определим единичный тензор как

$$U_{ij} = (P_{ij} + i\varepsilon_{ijs}k_s/k)/2 \tag{56}$$

Легко проверить, что $U_{ij} \cdot U_{js} = U_{is}$, множитель $\frac{1}{2}$ существен. Здесь возникает мелкая непрятность, т.к. в наших обозначениях линия есть не константа на U, а константа на 2U. Впрочем, эти двойки как раз учитываются корректно.

Отметим корректность нормировок в наших обозначениях:

$$U_{ii} = (P_{ii} + i\varepsilon_{iis}k_s/k)/2 = 1 \tag{57}$$

$$U_{ij} \cdot U_{ij} = 0 \tag{58}$$

Далее нужно пересчитать выражения и диаграммы в условиях новой записи. На самом деле, конечно, этого делать не нужно, так как мы уже располагаем ответом для любых значений θ и χ, в том числе равных единице.

Ради чего всё, собственно, устраивалось: теперь обратный коррелятор становится равным

$$(G^{vv})^{-1}_{ij} = \frac{b^{-1}k^{2\gamma}}{4}(P_{ij} + i\varepsilon_{ijs}k_s/k), \tag{59}$$

и полюс по параметру θ и неустойчивость из него исчезают.

В заключение описания модели и перед тем, как перейти к вычислениям и получению результатов, запишем ещё одно важное свойство данного определения единичного тензора:

$$U_{ij}(AP_{jl} + BQ_{jl}) = \frac{A+B}{2}U_{il}, \tag{60}$$

т.е. данный единичный тензор, кроме всего, проецирует все выражения на себя. Поэтому, в частности, уравнения модели не распадаются на пары, соответствующие разным входящим в них структурам (P_{ij} или Q_{ij}), но представляют собой согласованные по P и Q выражения.

7. Математическая подготовка

Во-первых, напишем модельный интеграл:

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\frac{d^Dk}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}=\frac{\Gamma(\lambda+1-\alpha)\Gamma(\lambda+1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\lambda-1)\pi^{\lambda+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(2\lambda+2-\alpha-\beta)(2\pi)^D}\frac{1}{p^{2(\alpha+\beta-\lambda-1)}}$$

Определим G-функцию как

$$G(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\lambda+1-\alpha)\Gamma(\lambda+1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\lambda-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(2\lambda+2-\alpha-\beta)(4\pi)^{\lambda+1}}$$

У нас D = 3, и лямбда равна 0.5, так что равенства упрощаются.

Для вычисления однопетлевых и впоследствии двухпетлевых диаграмм в аналитическом виде нам необходимо уметь считать такие интегралы, но с дополнительными степенями циркулирующего импульса k в числителе (причём с несвёрнутыми значками).

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\frac{d^Dk\cdot k_ik_jk_l}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}$$

Для проведения двухпетлевого счёта необходимо уметь вычислять такие выражения с пятью несвёрнутыми степенями k в числителе.

Задача о вычислении интегралов такого вида вполне эквивалентна задаче о вычислении интегралов с какой-то степенью скалярного произведения внешнего импульса p и циркулирующего импульса k в числителе. Более формально, определим x как

$$x=\frac{k_ip_i}{|k|\cdot|p|}$$

Тогда интересующие нас интегралы представляют собой выражения вида

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk\frac{x^l}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}$$

Определим функцию $\mathcal{F}_{(l)}(\alpha,\beta,p)$:

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk\frac{x^l}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}\underset{def}{\equiv}\mathcal{F}_{(l)}(\alpha,\beta,p)$$

Получим соотношение, которое позволит нам выразить $\mathcal{F}_{(l)}(\alpha,\beta,p)$ через аналогичные функции, но с меньшей степенью x в числителе.

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk\frac{x^l}{k^{2(\alpha+1/2)}(k+p)^{2(\beta-1)}}=\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk\frac{x^l(p^2+2pkx+k^2)}{k^{2(\alpha+1/2)}(k+p)^{2\beta}}=$$

$$=p^2\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk\frac{x^l}{k^{2(\alpha+1/2)}(k+p)^{2\beta}}+\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk\frac{x^l}{k^{2(\alpha-1/2)}(k+p)^{2\beta}}+$$

$$+2p\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk\frac{x^{l+1}}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}$$

Переписывая полученное соотношение через $\mathcal{F}_{(l)}(\alpha,\beta,p)$, получаем

$$\mathcal{F}_{(l)}(\alpha+1/2,\beta-1,p)=p^2\mathcal{F}_{(l)}(\alpha+1/2,\beta,p)+\mathcal{F}_{(l)}(\alpha-1/2,\beta,p)+2p\mathcal{F}_{(l+1)}(\alpha,\beta,p)$$

Или

$$\mathcal{F}_{(l+1)}(\alpha,\beta,p)=\frac{1}{2p}\mathcal{F}_{(l)}(\alpha+\frac{1}{2},\beta-1,p)-\frac{p}{2}\mathcal{F}_{(l)}(\alpha+\frac{1}{2},\beta,p)-\frac{1}{2p}\mathcal{F}_{(l)}(\alpha-\frac{1}{2},\beta,p)\tag{61}$$

$$\mathcal{F}_{(0)}(\alpha,\beta,p)=G(\alpha,\beta)p^{-2(\alpha+\beta-\frac{D}{2})}\tag{62}$$

Пользуясь полученной рекуррентной формулой, мы можем свести любой интеграл такого вида к известному интегралу, выражающемуся через G-функцию.

Степень внешнего импульса p в вычисляемых коэффициентах не представляет интереса и будет опущена.

Для получения ответов сворачиваем с собранными из p-шек тензорами и дельта-функциями, дальше не обсчитываемся в коэффициентах и получаем ответ.

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\frac{d^Dk\cdot k_i}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}=F_{1p}\cdot p_i$$

$$F_{1p}=-\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(5/2-\alpha)\Gamma(3/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-3/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(4-\alpha-\beta)}$$

Два k

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\frac{d^Dk\cdot k_ik_j}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}=F_{2p}p_ip_j+F_{2d}\delta_{ij}$$

$$F_{2p}=\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(7/2-\alpha)\Gamma(3/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-3/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(5-\alpha-\beta)}$$

$$F_{2d}=\frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(5/2-\alpha)\Gamma(5/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-5/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(5-\alpha-\beta)}$$

Три k

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\frac{d^Dk\cdot k_ik_jk_l}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}=F_{3p}p_ip_jp_l+F_{3d}symm(\delta_{ij}p_l)$$

$$F_{3p}=-\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(9/2-\alpha)\Gamma(3/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-3/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(6-\alpha-\beta)}$$

$$F_{3d}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(7/2-\alpha)\Gamma(5/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-5/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(6-\alpha-\beta)}$$

Четыре k

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\frac{d^Dk\cdot k_1k_2k_3k_4}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}=F_{4pp}p_1p_2p_3p_4+F_{4pd}symm(\delta_{12}p_3p_4)+F_{4dd}symm(\delta_{12}\delta_{34})$$

$$F_{4pp}=\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(11/2-\alpha)\Gamma(3/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-3/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(7-\alpha-\beta)}$$

$$F_{4pd}=\frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(9/2-\alpha)\Gamma(5/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-5/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(7-\alpha-\beta)}$$

$$F_{4dd}=\frac{1}{4}\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(7/2-\alpha)\Gamma(7/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-7/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(7-\alpha-\beta)}$$

Пять k

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\frac{d^Dk\cdot k_1k_2k_3k_4k_5}{k^{2\alpha}(k+p)^{2\beta}}=F_{5pp}p_1p_2p_3p_4p_5+F_{5pd}symm(\delta_{12}p_3p_4p_5)+F_{5dd}symm(\delta_{12}\delta_{34}p_5)$$

$$F_{5pp}=-\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(13/2-\alpha)\Gamma(3/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-3/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(8-\alpha-\beta)}$$

$$F_{5pd}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(11/2-\alpha)\Gamma(5/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-5/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(8-\alpha-\beta)}$$

$$F_{5dd}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\frac{\Gamma(9/2-\alpha)\Gamma(7/2-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-7/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(8-\alpha-\beta)}$$

8. Однопетлевой счёт

В работе [6] было произведено вычисление однопетлевых выражений диаграммного разложения в аналитическом виде. Приведём здесь ещё раз полученные результаты:

$$\Sigma_{ij}^{uu} = (4\pi)^{-3/2} b^2 k^{5-4\gamma} (P_{ij} A^{uu} + iQ_{ij} B^{uu}) \tag{63}$$

$$\Sigma_{ij}^{uv} = (4\pi)^{-3/2} ab^2 k^{5/2-\gamma} (P_{ij} A^{uv} + iQ_{ij} B^{uv}) \tag{64}$$

$$\Sigma_{ij}^{vv} = (4\pi)^{-3/2} a^2 b^2 k^{2\gamma} (P_{ij} A^{vv} + iQ_{ij} B^{vv}) \tag{65}$$

За подробной расшифровкой значений $A^{uu}, B^{uu}, A^{uv}, B^{uv}, A^{vv}, B^{vv}$ отсылаем читателя к оригинальной работе. Нам будет важен лишь тот факт, что эти параметры не зависят от значений a и b и представляют собой сумму мономов, где каждый моном есть произведение Гамма-функций с аргументами, зависящими от γ, домноженный снаружи на некую комбинацию параметров θ и χ. В нашей модели максимального нарушения чётности параметры $\theta = \chi = 1$, поэтому вид выражений упрощается.

Отметим, что вообще все слагаемые каждой из однопетлевых диаграмм как раз и представляют собой выражения вида

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k \cdot k_i k_j k_l}{k^{2\alpha} (k+p)^{2\beta}} \tag{66}$$

Это ясно из вида вершинных множителей и пропагаторов. Поэтому мы можем использовать полученные выше выражения для повторного вычисления однопетлевых ответов. Такое вычисление представляется полезным с двух точек зрения: во-первых, оно позволяет иным способом получить однопетлевые ответы, что даёт возможность сравнить их с полученными в оригинальной работе и удостовериться в отсутствии ошибок и там, и там, а во-вторых, удостовериться в отсутствии ошибок в полученных выше явных выражениях для интегралов. Кроме того, осуществляющий однопетлевое интегрирование кусок кода войдёт составной частью в программу вычисления двухпетлевых диаграмм.

Для получения результатов использовались программа символьных вычислений form и математический пакет maple с промежуточным использованием регулярных выражений (regexp) для преобразования вывода form'а в читаемый maple'ом вид.

Приведём кратко схему вычисления однопетлевых диаграмм.

1. Инициализация выражений для диаграмм, раскрытие скобок. Импульсы в числителе на этом этапе хранятся в тензорном виде с открытыми значками.

2. Интегрирование, выполняющееся с помощью текстовой замены (команда id в form)

3. Выделение из диаграмм частей, пропорциональных поперечному проектору и антисимметричному тензору.

4. Подстановка рекуррентных функций, сворачивание тензорных значков и вывод ответа.

Код программы на языке form можно увидеть в приложении 1.

Далее maple получает на вход результат form'а в виде рекуррентных функций $\mathcal{F}_{(l)}(\alpha, \beta, p)$, которые с использованием соотношения (61) разворачивает в сумму G-функций, таким образом получая явный (хотя и достаточно громоздкий) ответ. Тем не менее, этот ответ не составляет труда сравнить с ответом, полученным в оригинальной работе и убедиться в их тождественности с точностью до формы записи. Далее в работе мы будем пользоваться однопетлевым ответом, записанным в форме (63)-(65).

Мы рассматриваем модель максимального нарушения чётности, то есть $\theta = \chi = 1$, или $G_{ij} \sim U_{ij}$. Рассмотрим однородное уравнение (29) в однопетлевом приближении. Для удобства приведём его здесь повторно:

$$G_{ij}^{vv} (\Sigma_{js}^{uv} + \tilde{\lambda}_{jk} \Sigma_{ks}^{uu}) = 0 \tag{67}$$

Из определения пропагатора (54) и явных выражений для сигм (63)-(65) видно, что это уравнение оказывается однородным по параметрам a и b, и на них можно сократить. Таким образом, единственный параметр, от которого сохраняется зависимость выражения – показатель степени γ, стоящий в пропагаторе G^{vv}.

Перепишем левую часть выражения через обозначения (63)-(65), сократив предварительно на общий множитель:

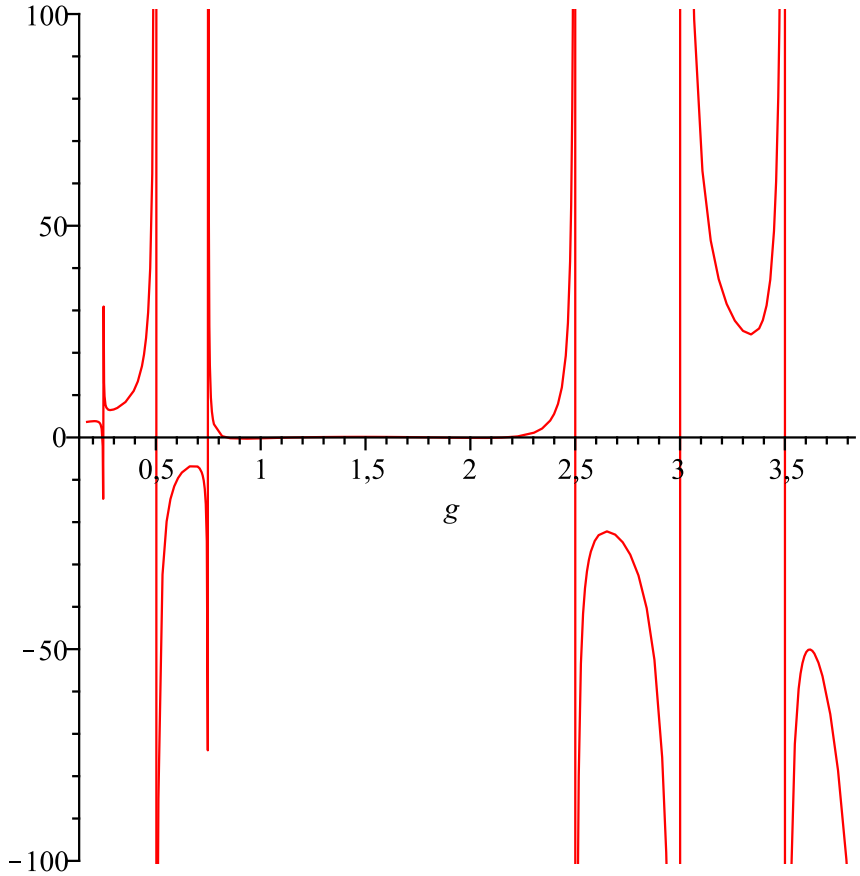
$$A^{uv} + B^{uv} + 2A^{uu} + 2B^{uu} = 0 \tag{68}$$

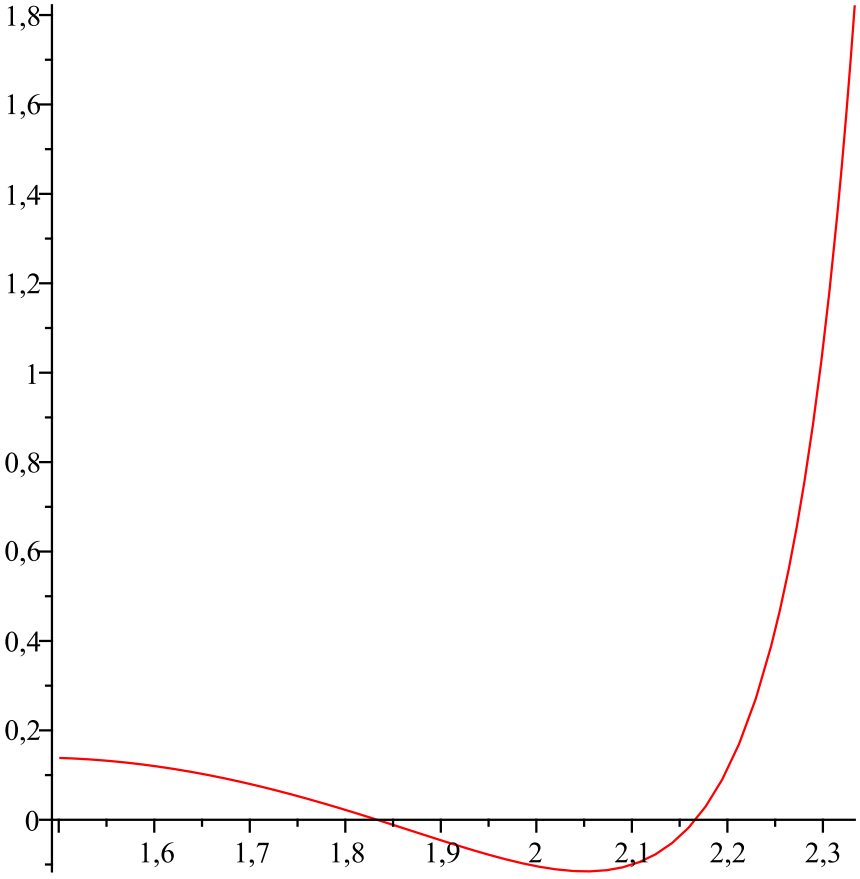
Классическая теория Колмогорова [1] предсказывает определённые значения индексов, а именно, выполнение в инерционном интервале для одномерной корреляционной функции "закона 5/3":

$$E_1(k) = C_k W^{2/3} k^{-\frac{5}{3}}, \tag{69}$$

где W – мощность спектрального потока энергии, равная, конечно, мощности суммарной поступающей в систему энергии. В наших обозначениях это соответствует $2\gamma = \frac{11}{3}$ как индексу трёхмерной корреляционной функции, или же $\gamma = \frac{11}{6}$.

Приведём графики левой части уравнения (68) от γ вблизи интересующего нас интервала значений γ:

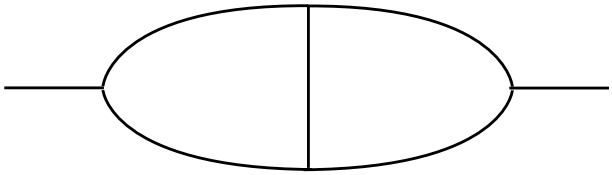




Видно, что поведение функции достаточно сложно и она имеет достаточно большой, хотя и дискретный набор корней. Однако вблизи интересующей нас области единственным корнем является $\gamma = \frac{11}{6}$, то есть индекс, предсказанный теорией Колмогорова и неоднократно проверенный на практике. Именно это значение γ и будет рассматриваться как "отправная точка" для двухпетлевого счёта.

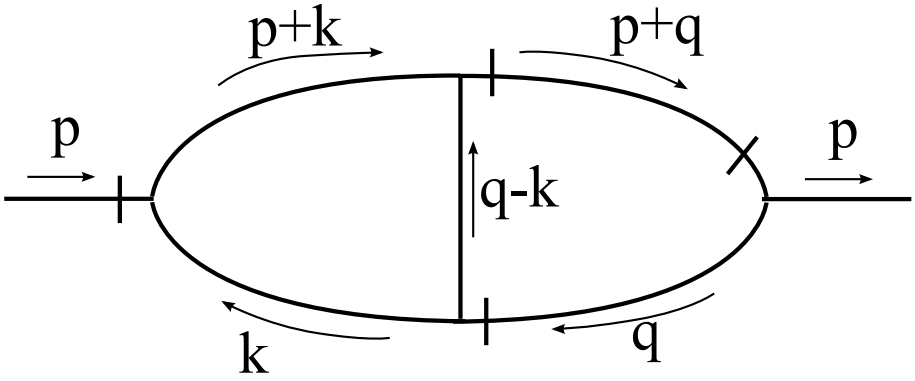
9. Анализ УФ-расходимостей

Рассмотрим диаграммы второго порядка теории возмущений. В обычной модели φ^3 такая диаграмма всего одна:



Однако у нас три поля в вершине неравноправны, поэтому их оказывается несколько: мы можем по-разному расставлять перечёркивания в вершинах. Для того, чтобы приступить к вычислению этих диаграмм, необходимо сначала удостовериться в их существовании, т.е. проверить отсутствие инфракрасных и ультрафиолетовых особенностей. Как было продемонстрировано выше, диаграммы во всех порядках теории возмущений свободны от инфракрасных расходимостей в силу свойства вершины взаимодействия. Кроме того, в статье [7] было показано, что "поверхностная расходимость носит тот же характер, что и в однопетлевом приближении, и следовательно, может быть устранена введением дополнительных вкладов в контрчленах в множителях Лагранжа". Таким образом, нам осталось проанализировать лишь расходимость поддиаграмм в УФ-диапазоне.

Рассмотрим вопрос об УФ-расходимостях двухпетлевых диаграмм на примере диаграммы



и аналогичных диаграмм с тремя перечеркнутыми линиями в правом подграфе.

Зависимость от модуля импульса ищем в том же виде

$$G \sim k^{-2\gamma} \qquad \lambda \sim k^{2\sigma} \tag{70}$$

Из (28) следует связь индексов

$$6\gamma = 4\sigma + d + 2 \tag{71}$$

Мы работаем в пространстве размерности d = 3; Колмогоровские значения индексов, дающие в однопетлевом приближении решение уравнения (29), равны

$$\gamma = 11/6 \qquad \sigma = 3/2 \tag{72}$$

Без учета производной в вершинах, зависимость от модуля импульса q в правом подграфе при больших q на колмогоровских индексах дается степенью $q^{6\sigma-6\gamma} = q^{-2}$. При этом интеграл по q линейно расходится. Нас будут интересовать вклады, в которых значковая структура линий в правом подграфе содержит нечётное число структур $\varepsilon_{jls}q_s$. Тогда асимптотика подынтегрального выражения при больших q будет содержать нечётное число множителей с векторными значками, в частности, q_{s_1}, $q_{s_1}q_{s_2}q_{s_3}$, $q_{s_1}q_{s_2}q_{s_3}q_{s_4}q_{s_5}$. После интегрирования по ориентациям вектора q такие вклады обратятся в ноль. Ненулевой вклад даст следующий член разложения по $1/q$, или что то же самое, по степеням втекающих импульсов. Он будет содержать дополнительный множитель вида $q_s k_s/q^2$ или $q_s p_s/q^2$. Теперь число множителей с векторными значками стало чётным, и такие вклады не обращаются в ноль после интегрирования.

Интегрирование $\int d\hat{q}$ по ориентациям единичного вектора $\hat{q} \equiv \vec{q}/q$ проводится по формулам

$$\frac{1}{S_D}\int d\hat{q} q_{s_1}q_{s_2} = \frac{\delta_{s_1 s_2}}{d}q^2 \tag{73}$$

$$\frac{1}{S_D}\int d\hat{q} q_{s_1}q_{s_2}q_{s_3}q_{s_4} = \frac{\delta_{s_1 s_2}\delta_{s_3 s_4} + \delta_{s_1 s_3}\delta_{s_2 s_4} + \delta_{s_1 s_4}\delta_{s_2 s_3}}{d(d+2)}q^4 \equiv \frac{\delta_{s_1 s_2 s_3 s_4}}{d(d+2)}q^4 \tag{74}$$

$$\frac{1}{S_D}\int d\hat{q} q_{s_1}q_{s_2}q_{s_3}q_{s_4}q_{s_5}q_{s_6} = \frac{\delta_{s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6}}{d(d+2)(d+4)}q^6 \tag{75}$$

$$\vdots$$

После усреднения по ориентациям вектора необходимо произвести интегрирование по модулю вектора q. Подынтегральное выражение убывает теперь как $q^{6\sigma-6\gamma-1} = q^{-3}$ и интеграл расходится логарифмически.

Чтобы убрать эту расходимость предположим, что имеется маленький сдвиг $\varepsilon << 1$ колмогоровского индекса

$$\gamma = \frac{11}{6} - \varepsilon \tag{76}$$

Из (71) находим соответствующее значение индекса σ

$$\sigma = \frac{3}{2}(1-\varepsilon) \tag{77}$$

Для асимптотики подынтегрального выражения имеем тогда

$$q^{6\sigma-6\gamma-1} = q^{-3-3\varepsilon} \tag{78}$$

Интеграл по модулю q при $\varepsilon > 0$ сходится и при $\varepsilon << 1$ равен $\frac{1}{3\varepsilon}$.

Мы не учитывали импульсы в вершинах правого подграфа. Покажем, что в сумме диаграмм они всегда выносятся наружу из подграфа. Запишем вершину взаимодействия в виде (42):

$$S_{int} = -i \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} k_s \lambda_{ji}(\vec{q}-\vec{k})\varphi_i(\vec{q}-\vec{k})\varphi_s(-\vec{q})\varphi_j(\vec{k}) \tag{79}$$

Перепишем это выражение в более симметричном виде, введя три импульса интегрирования, в сумме равных нулю, и снабжая условно поля верхними индексами, чтобы различать способ их входжения в вершину. Делая замены

$$\vec{k} \to \vec{q_1}, \qquad -\vec{q} \to \vec{q_2}, \qquad \vec{q}-\vec{k} \to \vec{q_3}, \tag{80}$$

Находим

$$\frac{-i}{(2\pi)^6} \int d\vec{q_1} \int d\vec{q_2} \int d\vec{q_3} \delta(\vec{q_1}+\vec{q_2}+\vec{q_3})(q_1)_{s_2} \varphi^{(1)}_{s_1}(\vec{q_1})\varphi^{(2)}_{s_2}(\vec{q_2})\varphi^{(3)}_{s_3}(\vec{q_3})\lambda_{s_1 s_3}(\vec{q_3}) \tag{81}$$

Конкретный выбор протечки импульса в диаграмме отвечает соответствующему использованию δ-функции в (81).

Интересующему нас случаю отвечают вклады, в которых поле $\varphi^{(3)}_{s_3}(\vec{q_3})$ во всех вершинах правого подграфа находится внутри этого подграфа (чтобы множитель $\lambda_{s_1 s_3}(\vec{q_3})$ попал внутрь подграфа). Импульс $(q_1)_{s_2}$ в (81) не затрагивает переменной интегрирования в правом подграфе во вкладах, в которых поле $\varphi^{(1)}_{s_1}(\vec{q_1})$ во всех вершинах подграфа вынесено на внешние линии. Если в одной из вершин наружу вынесено поле $\varphi^{(2)}_{s_2}(\vec{q_2})$, то необходимая структура подынтегрального выражения будет только в сумме диаграмм. Вместо того, чтобы рассматривать такую сумму, рациональнее использовать форму записи действия в виде соотношения (43). Делая в (43) замены, получаем:

$$\frac{-i}{2(2\pi)^6} \int d\vec{q_1} \int d\vec{q_2} \int d\vec{q_3} \delta(\vec{q_1}+\vec{q_2}+\vec{q_3})(q_1)_{s_2} \varphi^{(1)}_{s_1}(\vec{q_1})\varphi^{(2)}_{s_2}(\vec{q_2})\varphi^{(3)}_{s_3}(\vec{q_3}) \cdot (\lambda_{s_3 s_1}(\vec{q_1}) - \lambda_{s_3 s_1}(-\vec{q_3})) \tag{82}$$

В диаграммной технике с вершиной (82) в каждой вершине диаграммы надо рассматривать всевозможные варианты расположения полей $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ (6 вариантов). В исходной диаграммной технике с действием (79) также было 6 вариантов – 3 варианта перечеркнуть одну из линий (это показывало положение поля $u = \lambda\varphi$), каждому из вариантов соответствовало два положения двух оставшихся полей φ, которые входят в (79) не симметрично.

В форме записи (82) вынесение поля $\varphi^{(1)}_{s_1}(\vec{q_1})$ на внешние хвосты подграфа не создает проблем – из подграфа выносится $(q_1)_{s_2}$, играющий роль внешнего импульса. При вынесении $\varphi^{(2)}_{s_2}(\vec{q_2})$ роль внешнего к подграфу импульса играет q_2; с учётом

$$\delta(\vec{q_1}+\vec{q_2}+\vec{q_3})$$

имеем

$$-\vec{q_3} = \vec{q_1}+\vec{q_2},$$

и в (82)

$$\lambda_{s_3 s_1}(\vec{q_1}) - \lambda_{s_3 s_1}(-\vec{q_3}) = \lambda_{s_3 s_1}(\vec{q_1}) - \lambda_{s_3 s_1}(\vec{q_1}+\vec{q_2}) = O(\vec{q_2}), \tag{83}$$

т.е. внешний импульс также выносится из подграфа. При вынесении на внешние хвосты подграфа $\varphi^{(3)}_{s_3}(\vec{q_3})$ роль внешнего импульса играет $\vec{q_3}$. С учётом $\delta(\vec{q_1}+\vec{q_2}+\vec{q_3})$ имеем $-\vec{q_3} = \vec{q_1}+\vec{q_2}$, поэтому в (82) $(q_1)_{s_2} = -(q_2)_{s_2} - (q_3)_{s_2}$. Учитывая условие поперечности

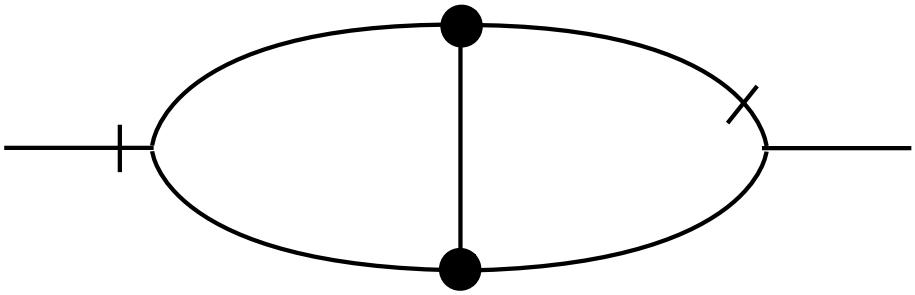
$$(q_2)_{s_2}\varphi^{(2)}_{s_2}(\vec{q_2}) = 0,$$

получаем

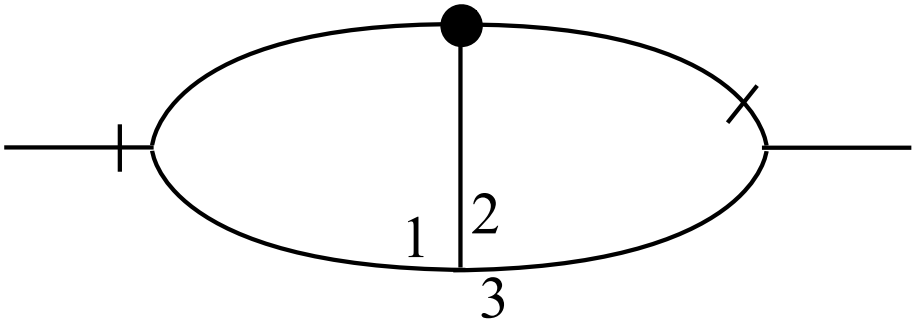
$$(q_1)_{s_2} = -(q_3)_{s_2},$$

и таким образом внешний импульс $\vec{q_3}$ также выносится из подграфа.

Рассмотрим диаграмму, в которой сохранено положение перечеркнутой линии на левом и правом конце диаграммы (как в D1), а жирная точка в оставшихся вершинах означает сумму вкладов со всевозможными положениями полей $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ и соответствующими вершинными множителями из (82)



Рассмотрим такой вариант расстановки полей в нижней вершине:

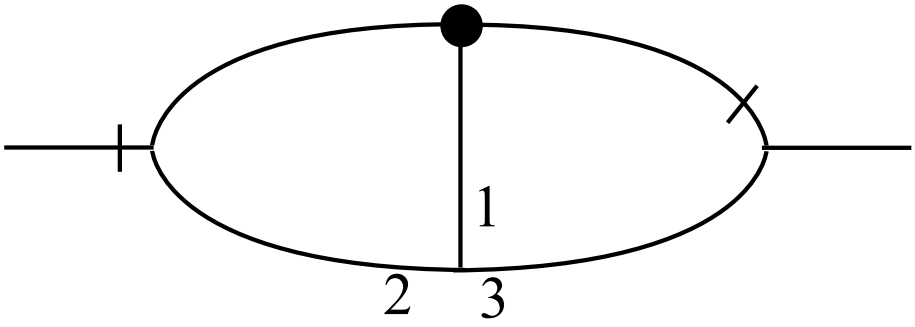


Принимая протечку импульсов как в (D1), имеем $\vec{q_1} = \vec{k}, \vec{q_3} = -\vec{q}, \vec{q_2} = \vec{q} - \vec{k}$. Роль импульса, втекающего в правый подграф, играет $\vec{q_1} = \vec{k}$. В этом варианте множитель $(q_1)_{s_2} = k_{s_2}$ сразу вынесен из правого подграфа, так что проблем нет. При этом в множителе

$$\lambda_{s_3 s_1}(\vec{q_1}) - \lambda_{s_3 s_1}(-\vec{q_3}) = \lambda_{s_3 s_1}(\vec{k}) - \lambda_{s_3 s_1}(-\vec{q})$$

вклад в интересующий нас вариант даёт только $-\lambda_{s_3 s_1}(-\vec{q})$ (перечеркивание линии в правом подграфе в старой интерпретации).

Рассмотрим теперь вариант

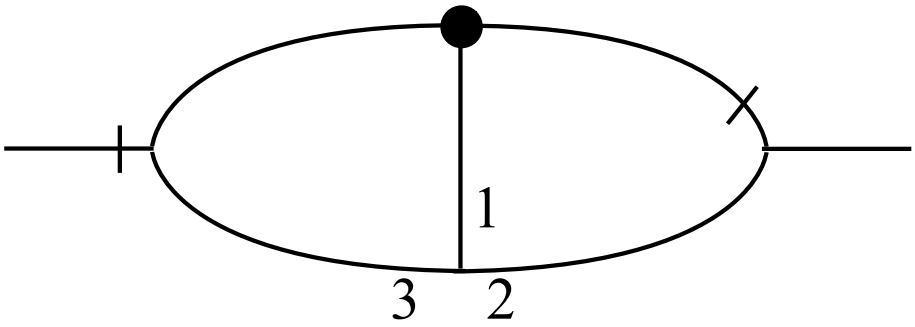


Здесь $\vec{q_2} = \vec{k}, \vec{q_3} = -\vec{q}, \vec{q_1} = \vec{q} - \vec{k}$. Тогда

$$\lambda_{s_3 s_1}(\vec{q_1}) - \lambda_{s_3 s_1}(-\vec{q_3}) = \lambda_{s_3 s_1}(\vec{q} - \vec{k}) - \lambda_{s_3 s_1}(\vec{q})$$

Эта разность обращается в ноль при нулевом втекающем импульсе $\vec{k}$, и вновь лишняя степень импульса выносится из диаграммы.

Оставшийся вариант



Здесь $\vec{q_3} = \vec{k}, \vec{q_2} = -\vec{q}, \vec{q_1} = \vec{q} - \vec{k}$. В множителе $(q_1)_{s_2} = q_{s_2} - k_{s_2}$ слагаемое q_{s_2} выпадает из условия поперечности и опять импульс выносится наружу из подграфа. В скобке

$$\lambda_{s_3 s_1}(\vec{q_1}) - \lambda_{s_3 s_1}(-\vec{q_3}) = \lambda_{s_3 s_1}(\vec{q} - \vec{k}) - \lambda_{s_3 s_1}(\vec{k})$$

надо учитывать только вклад $\lambda_{s_3 s_1}(\vec{q} - \vec{k})$.

Аналогичным образом устроены остальные три варианта в нижней и 6 вариантов в верхней вершине. Таким образом, получаем, что "лишние" степени циркулирующего в правом подграфе импульса действительно выносятся из подграфа, и мы могли их не учитывать, когда писали асимптотику подынтегрального выражения при больших q.

Особый разговор о правой вершине. Здесь по определению перечеркивание стоит внутри и вершина понимается в смысле (21). Вариант, когда наружу из диаграммы вынесено поле $\varphi^{(1)}$, сложности не представляет (вместе с этим полем вынесется и импульс). В случае, когда вынесено поле $\varphi^{(2)}$, надо сложить исходную диаграмму с такой же диаграммой, но с перечеркиванием в правой вершине на нижней линии. В такой сумме выделится наружу внешний импульс.

И так, мы показали, что если только правый подграф такого вида не равен нулю тождественно, то существует малый сдвиг от Колмогоровского скейлинга, и такой подграф имеет полюс по этому сдвигу. Легко понять, что в силу малости сдвига ε, именно всевозможные диаграммы такого вида (то есть с тремя перечёркиваниями в правом подграфе) и будут давать основной вклад в двухпетлевую часть диаграммного разложения. На их вычислении мы и сосредоточимся, воспринимая диаграммы без логарифмических расходимостей как малые поправки.

10. Двухпетлевой счёт

Нам необходимо вычислить всевозможные диаграммы вида

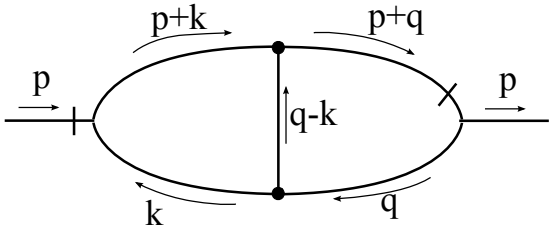


Рис. 1.

Таких диаграмм достаточно много – а именно, 72, так как импульсы в жирных вершинах могут быть расставлены любым из шести возможных способов, а в правой вершине – любым из двух. Мы можем ещё раз переопределить жирную вершину, сложив в ней все шесть вкладов, и переписать действие в правой вершине, также симметризовав её. Это сделает вершинные множители большими, зато оставит ровно одну диаграмму для вычисления.

$$\begin{gathered} S_3(S_{int}) = \frac{i}{2(2\pi)^6} \int\int\int d\vec{q_1} d\vec{q_2} d\vec{q_3} \delta(\vec{q_1} + \vec{q_2} + \vec{q_3}) \varphi^{(1)}_{s_1}(\vec{q_1}) \varphi^{(2)}_{s_2}(\vec{q_2}) \varphi^{(3)}_{s_3}(\vec{q_3}) \cdot \\ \cdot \big[(q_1)_{s_2} \cdot (\lambda_{s_3 s_1}(\vec{q_1}) - \lambda_{s_3 s_1}(-\vec{q_3})) + (q_1)_{s_3} \cdot (\lambda_{s_2 s_1}(\vec{q_1}) - \lambda_{s_2 s_1}(-\vec{q_2})) + \\ + (q_2)_{s_1} \cdot (\lambda_{s_3 s_2}(\vec{q_2}) - \lambda_{s_3 s_2}(-\vec{q_3})) + (q_2)_{s_3} \cdot (\lambda_{s_1 s_2}(\vec{q_2}) - \lambda_{s_1 s_2}(-\vec{q_1})) + \\ + (q_3)_{s_1} \cdot (\lambda_{s_2 s_3}(\vec{q_3}) - \lambda_{s_2 s_3}(-\vec{q_2})) + (q_3)_{s_2} \cdot (\lambda_{s_1 s_3}(\vec{q_3}) - \lambda_{s_1 s_3}(-\vec{q_1})) \big] \end{gathered} \tag{84}$$

После этого можно обратить внимание на то, что некоторые слагаемые в вершинных множителях можно опустить, так как они не дают вклад в логарифмически расходящуюся часть диаграммы. Это значительно уменьшит размер выражения. Для доказательства анонсированных в разделе 6 выводов мы будет вычислять

диаграмму при произвольных θ и χ, а не в выбранной нами модели максимального нарушения чётности. Разумеется, для получения результатов в нашей модели достаточно положить $\theta = \chi = 1$. В итоге мы хотим получить некое аналитическое выражение трёх параметров: $\varepsilon, \theta, \chi$.

Как было показано, нас интересует логарифмически расходящаяся в УФ-диапазоне часть теперь уже единственной диаграммы, которая при наличии малой сдвижки степенных показателей на ε представляет собой полюс по ε.

Эта полюсная часть представляет собой выражение вида

$$Diag = \frac{1}{3\varepsilon}\frac{1}{16\pi^3}a^3b^5p^{n3}(A \cdot P_{ij}(p) + B \cdot i\varepsilon_{ijs}p_s/p) \tag{85}$$

Степень a равняется трём, степень b – пяти, т.к. у нас три лямбда (одна у правой вершины и две внутры жирных вершин) и пять линий. Вынести эти константы за скобку важно, т.к. выражение для диаграммы является однородным по ним, и такая форма записи упростит решение системы уравнений. Функции A и B в такой форме не зависят от констант в линиях и зависят лишь от $\varepsilon, \theta, \chi$.

Схема двухпетлевого вычисления принципиально напоминает описанную выше схему вычисления однопетлевых ответов, но значительно сложнее неё технически. Главным образом это происходит из-за дополнительного шага: интегрирования правого подграфа по циркулирующему импульсу q. Приведём идейные шаги, которые позволяют вычислить двухпетлевой вклад в главном по ε приближении:

1. Записать выражение для правого подграфа в тензорном виде с открытыми значками, разложить его в ряд по циркулирующему импульсу q. Нас интересует лишь его логарифмически расходящаяся часть: линейно расходящаяся часть устраняется нормировкой – подходящим выбором свободного параметра φ_0, а сходящиеся части являются малыми поправками.

2. Учитывая, что во всех слагаемых все множители вида q_i с открытым значком находятся в числителе монома, произвести угловое интегрирование по формулам (73) - (75)

3. Интегрирование по модулю q элементарно и заключается просто в домножении выражения на $\frac{1}{3\varepsilon}$, как следует из (78).

4. Получившееся выражение состоит из слагаемых вида (66), поэтому дальнейшее вычисление можно произвести с помощью процедуры однопетлевого счёта.

Стоит отметить, что попытки "прямолинейного" решения задачи с помощью раскрытия скобочек и интегрирования всех получившихся выражений по формулам (73) - (75) обречены на провал – количество слагаемых сразу после интегрирования при таком подходе составляет гигантское число, в основном из-за экспоненциального роста количества слагаемых в симметризованной дельта-функции при увеличении количества её аргументов. Для решения данной проблемы некоторые дополнительные усовершенствования алгоритма были проведены, например, частичная перемена местами сворачивания значков и интегрирования по циркулирующему импульсу.

Техническая схема вычисления в общем осталась прежней и состоит из выполняющей интегрирование, сворачивание значков и преобразование в компактный вид ответа программы на языке form. Второй частью также выполняется текстовое преобразование ответа для преобразования вывода form'а в читаемый maple'ом вид и последующего анализа.

11. Результаты вычислений

Произведённый компьютерный расчёт позволил получить функции $A(\gamma, \theta, \chi)$ и $B(\gamma, \theta, \chi)$ в замкнутом аналитическом виде. Их итоговый размер после всех сокращений и упрощений занимает, к сожалению, несколько десятков экранов и не позволяет привести их здесь или сделать какие-то выводы на основании взгляда на них. С другой стороны, исследование их свойств средствами математического пакета maple не представляет проблем. Для демонстрации общего вида получившихся выражений мы приведём их значения на Колмогоровском индексе.

Функции A и B, записанные в аналитическом замкнутом виде в точке $\gamma = \frac{11}{6}$, оказались равными:

$$\begin{aligned} A = &-\frac{12283555887}{125565440}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^2\chi^2}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{77323563249}{502261760}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^3\chi}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{5295615651}{125565440}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^3\chi^3}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{8898906717}{125565440}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^4\chi^2}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} \\ &-\frac{7406287167}{502261760}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta\chi}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{1765205217}{125565440}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta\chi^3}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{21819451431}{502261760}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^2}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{583984731}{45660160}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^4}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} \end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned} B = &-\frac{16621188201}{627827200}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^3}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{1064475213}{89689600}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^5}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{406343979}{39239200}\frac{\Gamma(5/6)^3\chi^3}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{874204719}{31391360}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} \\ &-\frac{381814203}{12073600}\frac{\Gamma(5/6)^3\chi}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{81813567753}{627827200}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^2\chi}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{449849223}{12073600}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^2\chi^3}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{43241319}{445900}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta\chi^2}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} \\ &-\frac{416533779}{22422400}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^4\chi^3}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} + \frac{138844593}{22422400}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^5\chi^2}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{16918424667}{156956800}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^3\chi^2}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} - \frac{3285988701}{89689600}\frac{\Gamma(5/6)^3\theta^4\chi}{\pi^{3/2}\Gamma(2/3)^3} \end{aligned} \tag{87}$$

В приближённом виде они равняются

$$A = -10.176\theta^2\chi^2 - 16.014\theta^3\chi - 4.3869\theta^3\chi^3 - 7.3720\theta^4\chi^2 - 1.5339\theta\chi - 1.4623\theta\chi^3 - 4.5188\theta^2 - 1.3304\theta^4 \quad (88)$$

$$\begin{aligned} B = &-2.7538\theta^3 - 1.2345\theta^5 - 1.0772\chi^3 - 2.8969\theta - 3.2895\chi - 13.555\theta^2\chi - 3.8757\theta^2\chi^3 \\ &-10.087\theta\chi^2 - 1.9324\theta^4\chi^3 + 0.64411\theta^5\chi^2 - 11.212\theta^3\chi^2 - 3.8110\theta^4\chi \end{aligned} \quad (89)$$

Пользуясь обозначениями P для проектора, а Q для $i\varepsilon_{ijs}p_s/p$, можем без значков написать вклад этой расходящейся части в однородное уравнение (29):

$$(P + \theta Q)(AP + BQ) = P(A + \theta B) + Q(\theta A + B)$$

Нас интересуют структуры в скобках по отдельности.
Они обладают следующим набором свойств:

- Обнуляются при $\theta = 1; \chi = -1$
- Равны друг другу *точно* при $\theta = 1$
- Не равны друг другу при подстановке $X = -1$
- Не имеют корня $\theta = 1$

Особенно нас интересуют здесь второй и четвёртый пункты. Второй пункт является на самом деле просто следствием проекционных свойств оператора $P + Q$, которые были продемонстрированы выше. Четвёртный пункт, к сожалению, приводит к сильной внутренней несогласованности такого подхода.

При подстановке значений однопетлевого счёта для параметров θ и χ они дают значения

$$EXPR1 = \frac{42.3916806 \cdot \Gamma(\frac{5}{6})^3}{\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{2}{3})^3} \approx 4.4096$$

$$EXPR2 = \frac{42.1490654 \cdot \Gamma(\frac{5}{6})^3}{\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{2}{3})^3} \approx 4.3843$$

Оба выражения положительны.
Можно предположить, что они равны, а разница в пол процента проистекает из неточности подстановки параметров/погрешности компьютерного счёта.

Для продолжения анализа однородного уравнения в модели немаксимального нарушения чётности необходимо рассмотреть его ε-разложение. Приведём общие свойства ε - разложений уравнения (29) при двух структурах: P и Q (в однопетлевом приближении).

- Выражение при проекторе обнуляется тождественно при $\varepsilon = 0$.
- Выражение при Q раскладывается на множители как $(\theta^2 - 1)(625\theta + 384\chi)$ при $\varepsilon = 0$
- Оба выражения имеют корнями $\theta = 1$, $chi = -1$.

При подстановке параметров θ и χ первые члены разложения по ε численно оказываются равными 0.00468981724 и 0.00483923616, соответственно. Здесь разница составляет три процента, однако и ошибочность подстановки параметров становится более явной (так, в выражении при Q нулевой член разложения по ε не равен нулю уже в шестом знаке). Вновь можно предположить, что эти значения равны. Равенство этой пары значений, как и пары посчитанных выше значений, важно: если бы оно не выполнялось, два скалярных уравнения (по одному при каждой структуре, P и Q) предсказывали бы разные значения аномального скейлинга ε. Здесь этого, однако, не происходит.

Для того, чтобы записать квадратное уравнение на ε и вычислить его значение, осталось лишь вспомнить про константы a и b, которые стоят в разных количествах в выражении для однопетлевой и двухпетлевой диаграммы. Ко второй петле добавились два множителя лямбда и три линии, так что дополнительный множитель – a^2b^3. Именно это значение было определено в статье [6], и там оно равнялось

$$a^2b^3 = (4\pi)^{3/2}M^{-1}/(1 - \theta^2) \approx -292.63$$

Собирая вместе, мы получаем следующее:

$$-292.63 \cdot \frac{1}{1488.3\varepsilon} \cdot 4.40 + 0.0048\varepsilon = 0 \quad (90)$$

Что во всяком случае имеет положительный знак, но приводит к достаточно печальному результату

$$\varepsilon = \sqrt{180} \approx 13.4$$

Именно в выражении (90) обнуление двухпетлевого слагаемого либо вынесение из него множителем $1-\theta$ могло бы принципиально изменить ситуацию. Этого, однако, не произошло.

Из приведённых результатов можно сделать следующие выводы.

- Чем ближе значение θ к 1, тем б'ольшим будет становиться ε;
- Если θ сменит знак (что является требованием самосогласованной теории), то в уравнении (90) первое слагаемое также сменит знак, и ε станет чисто мнимым. Это, безусловно, противоречит его определению малой вещественной добавки к Колмогоровскому индексу.
- Система уравнений оказывается крайне неустойчивой по параметру θ. То есть небольшое изменение θ ведёт к значительным изменениям параметров a^2b^3, и в результате всего решения системы.

Попытки найти согласованные решения данной системы с $\theta < 1$ к успеху не привели. Это послужило отправной точкой к пересмотру выражений для обратного пропагатора и формулировке модели, рассматриваемой в данной работе. Модель максимального нарушения чётности позволяет рассмотреть другой корень однородного уравнения по $\theta - \theta = 1$, и обратный пропагатор оказывается определённым в этой точке.

Прежде чем приступить к формулировке результатов уже нашей модели, приведём ещё раз всю замкнутую систему уравнений, достаточную для определения параметров модели, и выведем строго оставшееся уравнение.

Первым уравнением системы является выражение для обратного пропагатора в нашей модели (59):

$$(G^{vv})^{-1}_{ij} = \frac{b^{-1}k^{2\gamma}}{4}(P_{ij} + i\varepsilon_{ijs}k_s/k) \tag{91}$$

Второе уравнение – уравнение (28):

$$(G^{vv})^{-1} = \varphi_0 k^2 - \Sigma^{vv} - \tilde{\lambda}^2\Sigma^{uu} - \tilde{\lambda}(\Sigma^{uv} + \Sigma^{vu}) \tag{92}$$

Это уравнение интересует нас в инерционном интервале, кроме того, у нас матрица парных корреляторов симметрична, как и сами сигмы, т.е. уравнение переходит в

$$(G^{vv})^{-1} = -\Sigma^{vv} - \tilde{\lambda}^2\Sigma^{uu} - 2\tilde{\lambda}\Sigma^{uv} \tag{93}$$

Это выражение представляет собой ряд теории возмущений по количеству петель.

$$(G^{vv})^{-1} = \Sigma^{I} + \Sigma^{II} + ..., \tag{94}$$

в котором мы вычислили первые два слагаемых:

$$\Sigma^{I} = (4\pi)^{-3/2}a^2b^2k^{2\gamma}(P_{ij} + Q_{ij})(\frac{-A^{vv} - B^{vv}}{2} - 2A^{uu} - 2B^{uu} - 2A^{uv} - 2B^{uv}) \tag{95}$$

$$\Sigma^{II} = \frac{4}{3}((4\pi)^{-3/2})^2a^4b^5k^{?}(P_{ij} + Q_{ij})(M_{II}) \tag{96}$$

Для замыкания системы воспользуемся уравнением (27) вблизи области накачки и при малой сдвижке от Колмогоровского показателя. Эта сдвижка будет носить формальный характер и никак не связана со аномальным скейлингом, предсказываемым нашей моделью. Мы будем рассматривать накачку, в инерционном интервале воспринимаемую как дельта-функцию, как степенную функцию с острым пиком вблизи нуля. (т.е. приблизим дельта-функцию степенной с малым носителем и единичным интегралом). Поэтому полученные равенства будут иметь смысл лишь при стремлении показателя ζ к нулю.

$$G^{vv}_{ij}(\Sigma^{uv}_{js} + \tilde{\lambda}_{jk}\Sigma^{uu}_{ks}) = d_{is}(k) \tag{97}$$

Как упоминалось в начале, данное выражение имеет смысл уравнение баланса энергии, когда записано со свёрнутыми значками. Запишем его в таком виде и определим вид d(k):

$$\int \frac{1}{(2\pi)^3}d_{ii}(k)dk = W \tag{98}$$

d(k) задаётся в виде $\zeta P_{ij}\cdot k^{\zeta-3}\cdot C$ из требования спонтанности появления нарушения чётности, отсюда найдём:

$$d_{ij}(k) = \frac{P_{ij}(k)}{2}\frac{(2\pi)^3}{4\pi}\zeta W k^{\zeta-3} \tag{99}$$

Легко убедиться, что интеграл по всем волновым числам k даёт для такой функции требуемое W.

Выражение (97) обнуляется в старшем порядке по ζ. Третье уравнение системы получается разложением (97) в ряд по ζ и взятием предела при $\zeta \to 0$. Это уравнение опять-таки представляет собой разложение в ряд теории возмущений по числу петель, или по безразмерному параметру a^2b^3.

$$\zeta(\Theta^I)'_\zeta + \zeta(\Theta^{II})'_\zeta = 2\pi^2 \zeta W k^{\zeta-3} \tag{100}$$

Осталось выразить искомую величину C_k через параметры системы.

$$G^{vv}_{ij}(k) = E_{ij}(k) =< v_i(k)v_j(-k) > \tag{101}$$

$$E(k) = \frac{1}{2}G^{vv}_{ii}(k) \tag{102}$$

$$E_1(k) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi^2}k^2 G^{vv}_{ii}(k) = \frac{1}{4\pi^2}k^2 \cdot 2bk^{-11/3} = \frac{b}{2\pi^2}k^{-5/3} \tag{103}$$

Отсюда получаем, что

$$C_k = \frac{b}{2\pi^2} \tag{104}$$

Эта система уравнений преподносит нам неприятный сюрприз. До того, как учитывать двухпетлевой – поправочный – вклад, мы можем решить её в однопетлевом приближении, и использовать параметры для подстановки в двухпетлевой вклад и малой корректировки. Однако оказывается, что при такой схеме действий двухпетлевой вклад многократно превышает однопетлевой по модулю, вследствие чего корректировка параметров никоим образом не является малой, а двухпетлевой вклад не может рассматриваться как поправка к однопетлевому. Само по себе это не является удивительным: уже на примере 0-мерной теории поля мы видим, что подобные ряды зачастую оказываются лежащими далеко за пределами собственного радиуса сходимости, иными словами, вычисление суммы ряда теории возмущений может являться отдельной нетривиальной задачей.

Финальная версия

Подытожим сделанные выше вычисления и полученные результаты. Во-первых, у нас есть система из трёх уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &G^{vv}_{ij}(\Sigma^{uv}_{js} + \tilde{\lambda}_{jk}\Sigma^{uu}_{ks}) = 0 \\ &(G^{vv})^{-1} = -\Sigma^{vv} - \tilde{\lambda}^2\Sigma^{uu} - 2\tilde{\lambda}\Sigma^{uv} \\ &G^{vv}_{ij}(\Sigma^{uv}_{js} + \tilde{\lambda}_{jk}\Sigma^{uu}_{ks}) = d_{is}(k) \end{aligned}\right\} \quad \text{Resulting eqs}$$

Каждое из уравнений представляет собой ряд теории возмущений по числу петель в диаграмме, или же по параметру a^2b^3. Однородное уравнение в первом порядке теории возмущений даёт Колмогоровский индекс $\gamma = 11/6$; второй порядок разложения при данном выборе параметра содержит логарифмические сингулярности, которые не удаётся устранить стандартной процедурой ренормировки. Это указывает на наличие аномального скейлинга: $g = 11/6 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Экспериментальные работы на настоящий момент не дают однозначного ответа на вопрос о наличии и величине аномального скейлинга. В любом случае, хорошая поддержка экспериментальными данными закона $5/3$ позволяет заключить, что отклонение от $\gamma = 11/6$ действительно должно быть малым.

Из получившейся системы трёх уравнений с тремя неизвестными мы должны определить значения ε, a, b. Вторые члены разложения, которые при правильном разложении в ряд исходной величины должны быть малыми поправками, оказываются не просто сравнимыми с первыми, но и многократно превосходящими их по модулю. Это указывает на то, что ряды, во-первых, расходятся, а во-вторых, носят не асимптотический характер, как обычно в диаграммных разложениях методов КТП [16], и следовательно, сумма первых нескольких членов не даст нам никакого приближения к настоящей сумме ряда, т.е. к исходной (неразложенной) величине. В качестве аналогии можно привести пример модели Крейчнана, в которой ряды теории возмущений носят степенной характер. К сожалению, специальный вид коррелятора не позволяет провести асимптотический анализ диаграммного разложения модели (например, инстантонный анализ) и получить точный результат о характере роста членов ряда. Получение выражений модели в трёхпетлевом приближении также кажется нетривиальной задачей, сопряжённой как с идейными трудностями, так и с чисто техническими: уже двухпетлевое выражение после всех эвристик и упрощений заняло несколько минут компьютерного счёта, по сравнению с тысячными долями секунды для однопетлевого. В некоторой попытке "спасти" неудачное разложение предположим степенной характер роста ряда теории возмущений. Это предположение безусловно верно для внешнего множителя диаграммного разложения: по $(4\pi)^{-3/2}a^2b^3$ рост степенной.

В этом случае наши ряды теории возмущений, очевидно, находятся за пределами собственного радиуса сходимости; Производящей функцей ряда со степенным ростом слагаемых является $\frac{1}{1+x}$. В то время, как настоящая обратная функция от такого ряда равняется $(x^{-1} - x^{-2} + x^{-3} - ...)$, мы, пользуясь неудачным разложением, получаем ряд вида $(1 - x + x^2 - x^3)$ и т.д. Отсюда понятно, как получить приближение к сумме ряда со вторым порядком точности.

Запишем полученные уравнения, выраженные через уже вычисленные величины, в т.ч. вычисленную в аналитическом виде полюсную (и наибольшую по модулю) часть двухпетлевого слагаемого.

$$(G^{vv})^{-1} = \varphi_0 k^2 - \Sigma^{vv} - \tilde{\lambda}^2 \Sigma^{uu} - \tilde{\lambda}(\Sigma^{uv} + \Sigma^{vu})$$

$$(G^{vv})^{-1} = \Sigma^I(\varepsilon) + \Sigma^{II}(\varepsilon) + ... \tag{105}$$

$$\Sigma^I = (4\pi)^{-3/2} a^2 b^2 k^{2\gamma} (P_{ij} + Q_{ij})(\frac{-A^{vv} - B^{vv}}{2} - 2A^{uu} - 2B^{uu} - 2A^{uv} - 2B^{uv}) \tag{106}$$

$$\Sigma^{II} = \frac{4}{3}((4\pi)^{-3/2})^2 a^4 b^5 k^? (P_{ij} + Q_{ij})(\frac{2A + 2B}{\varepsilon}) \tag{107}$$

Обозначим выражения в скобках за M_I и M_{II}, соответственно. Значение M_I в точке $\gamma = \frac{11}{6}$ оказывается равным $M_I = -6.518$. Вычисление M_{II} было проведено в общем случае; При $\theta = \chi = 1$ и $\gamma = 11/6$ оно равняется $M_{II} = -203.76$. Здесь стоит обратить внимание, что как первый, так и второй члены ряда оказываются отрицательными, причём второй сильно превосходит первый по модулю, что подтверждает наши выводы о характере роста ряда.

$$\Sigma^I + \Sigma^{II} + ... = (4\pi)^{-3/2} a^2 b^2 (P_{ij} + Q_{ij}) \Big[M_I + \frac{4}{3}(4\pi)^{-3/2} a^2 b^3 \frac{M_{II}}{\varepsilon} + ... \Big]$$

$$\Sigma^\Sigma \approx (4\pi)^{-3/2} a^2 b^2 (P_{ij} + Q_{ij}) \Big[\frac{M_I}{1 - \frac{4}{3}(4\pi)^{-3/2} a^2 b^3 \frac{M_{II}}{\varepsilon M_I}} \Big] \tag{108}$$

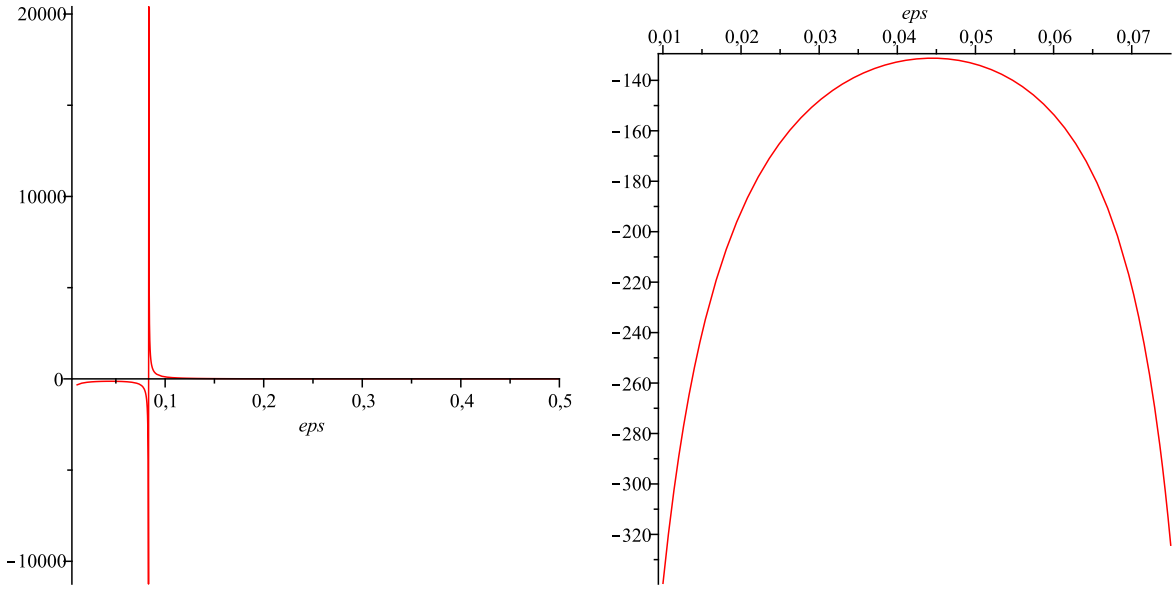
$$\frac{b^{-1} k^{2\gamma}}{4} (P_{ij} + Q_{ij}) = (4\pi)^{-3/2} a^2 b^2 k^{2\gamma} (P_{ij} + Q_{ij}) \cdot \Big[\frac{M_I}{1 - \frac{4}{3}(4\pi)^{-3/2} a^2 b^3 \frac{M_{II}}{M_I}} \Big]$$

$$a^2 b^3 = \frac{(4\pi)^{3/2}}{4} \frac{1 - \frac{4}{3}(4\pi)^{-3/2} a^2 b^3 \frac{M_{II}}{\varepsilon M_I}}{M_I} \tag{109}$$

Выводы, сделанные в предыдущем разделе про степенную зависимость параметров от W, остаются в силе (и параметр $a^2 b^3$ оказывается безразмерным по W и компенсирует степень диаграммы по внешнему импульсу k). Однако здесь мы уже не можем вычислить $a^2 b^3$ непосредственно из этого уравнения, т.к. как M_I, так и M_{II} являются функциями ε.

Аналогично происходит модификация уравнения с накачкой энергии.

Трудность представляет однородное уравнение, дающее в однопетлевом приближении Колмогоровский индекс, а в двухпетлевом являющееся замыкающим уравнением для определения параметра ε. Как из эксперимента, так и из модели ясно, что параметр ε – мал. Однако разложение однопетлевого ответа в ряд по ε начинается с линейного члена (в силу нуля на Колмогоровском индексе), а двухпетлевое слагаемое имеет полюс по ε, причём с большим множителем. Прямая попытка решить такое двухпетлевое уравнение даст значение ε порядка нескольких десятков, которое явно не является малой поправкой к $11/6$. Таким образом, с этим уравнением нужно проделать аналогичную предыдущим двум процедуру. В приближённом виде в однородном уравнении (в котором речь не может идти о сумме ряда, а может идти лишь о сходящемся ряде) такая процедура сводится просто к взятию обратного от второй петли. Двухпетлевое слагаемое имеет нетривиальное поведение вблизи нуля по ε. Приведём график $\frac{M_{II}(\varepsilon)}{3\varepsilon \cdot 2\pi^{3/2}}$ от параметра ε (нормировка выбрана удобной для сравнения с однопетлевым вкладом).



Этот график приводит зависимость двухпетлевого вклада от ε; в самом уравнении ещё присутствует зависимость оного от a^2b^3. Набор функций и поведение решений здесь достаточно нетривиальны, поэтому наиболее простым способом решения является итерационный.

Вычисляя a, b и ε из системы уравнений, получаем $\varepsilon = 0.0447$, то есть общее отклонение от Колмогоровского индекса равняется $2\varepsilon = 0.0894$. Параметр, стоящий при парном коррелляторе $b = 23.11$, и отсюда

$$C_k = 1.172$$

12. Заключение

В работе методами квантовой теории поля и статистической физики исследовалась теория развитой однородной изотропной турбулентности. Была предложена модель максимального нарушения чётности, аналогичная рассматриваемым в теории слабых взаимодействий. На основании уравнений согласования построена диаграммная техника и замкнутая система уравнений согласования на параметры модели, позволяющая определить важную с экспериментальной точки зрения величину – константу Колмогорова C_k. С помощью компьютерного счёта получены аналитические выражения для однопетлевых 1-неприводимых диаграмм модели. Решение уравнений согласования привело к колмогоровскому индексу степенной зависимости коррелятора полей скорости от волнового числа.

Проведён анализ ультрафиолетовых расходимостей двухпетлевых диаграмм модели. Продемонстрировано наличие аномального скейлинга (малого отклонения от Колмогоровских индексов). С помощью компьютерного счёта получены аналитические выражения для главного порядка ε-разложения двухпетлевых 1-неприводимых диаграмм модели. Решение уравнений согласования в двухпетлевом приближении дало следующие результаты для параметров модели:

Величина аномального скейлинга оказалась равной $\varepsilon = 0.0447$, т.е. итоговый индекс $G^{vv} \sim k^{-\frac{5}{3}+0.0894}$.

Значение константы Колмогорова, предсказанное в данной модели, равняется $C_k = 1.172$. Полученное значение константы имеет приемлемое соответствие с экспериментальными данными; проверка предсказания модели и определение величины аномального скейлинга требует проведения дальнейших экспериментов.

13. Приложение I

```
Symbol d, a, b, g, i, o, t, z, T, TH, X, Q, ASS, NOOO, PK, K, n1, n2, deg, eps;
Symbol Lg, Lo, L2o, Rg, Ro, R2o;
Dimension 3;
CFunction k, q;
Vectors p, q1, q2, q3;
Function P, V, L, S, E, Vv, Gvv, Guv, Guu, F;
Function Gl, Gr;
Function F0, F1p, F2p, F2d, F3p, F3d, F4pp, F4pd, F4dd, F5pp, F5pd, F5dd;
CFunction ddd, ddd2, ddd4, ddd6, ddd8, ddd10, ddd12, ddd14, ddd16;
CFunction kkk;
Indices i1 , i2 , i3 , i4 , i5 , i6 , i7 , i8 , i9 , i10 , i11 , i12 , i13 , i14 , i15 , i16 ;
Indices s1 , s2 , s3 , s4 , s5 , s6 , s7 , s8 , s9 , s10 , s11 , s12 , s13 , s14 , s15 , s16 ;
Indices t1 , t2 , t3 , t4 , t5 , t6 , t7 , t8 , t9 , t10 ;
Indices e1 , e2 , e3 , e4 , e5 , e6 , e7 , e8 ;
Off statistics;
*o here means sigma, g means g.

*Here Gvv is symmetrical relative to interchange of indices, as well as sign of impulse
since no parity violation is considered.
Local Euu = 1/2*V(-p,i1,i3,i5)*V(p,i2,i4,i6)*Gvv(i3,i4,e1,p+k)*Gvv(i6,i5,e2,k);
Local Euv1 = V(-p,i1,i3,i5)*V(-p-k,i4,i2,i6)*Guv(i3,i4,e1,p+k)*Gvv(i6,i5,e2,k);
Local Euv2 = V(-p,i1,i3,i5)*V(k,i6,i4,i2)*Gvv(i3,i4,e1,p+k)*Guv(i6,i5,e2,k);
Local Evv1 = V(p+k,i3,i1,i5)*V(k,i6,i4,i2)*Guv(i3,i4,e1,p+k)*Guv(i6,i5,e2,k);
Local Evv2 = V(p+k,i3,i1,i5)*V(-p-k,i4,i2,i6)*Guu(i3,i4,e1,p+k)*Gvv(i6,i5,e2,k);


id V(p?,i1?,i2?,i3?) = (i*p(i2)*d_(i1,i3) + i*p(i3)*d_(i1,i2));
id V(k,i1?,i2?,i3?) = (i*k(i2)*d_(i1,i3) + i*k(i3)*d_(i1,i2));
id V(-p-k,i1?,i2?,i3?) = (i*(-p(i2)-k(i2))*d_(i1,i3) + i*(-p(i3)-k(i3))*d_(i1,i2));
id V(p+k,i1?,i2?,i3?) = (i*(p(i2)+k(i2))*d_(i1,i3) + i*(p(i3)+k(i3))*d_(i1,i2));

*Once again some nasty tricks:
*Form cannot substitute variables as numbers, so I have to use different letters instead.
*R2o means, that Guu is proportional to PK^-(2*g)*PK^2*(2*o)
*Lo means, that something is proportional to K^-(2*g)*K^(2*o).
*For further explanation one may try reading the code. It's hard :)

id Guu(i1?,i2?,e1?,p+k) = R2o*((1+2*X*TH+X^2)*P(i1,i2,p+k) + (TH+2*X+TH*X^2)*E(i1,i2,e1,p+k));
id Guv(i1?,i2?,e1?,p+k) = Ro*((1+X*TH)*P(i1,i2,p+k) + (X+TH)*E(i1,i2,e1,p+k));
id Guv(i1?,i2?,e1?,k) = Lo*((1+X*TH)*P(i1,i2,k) + (X+TH)*E(i1,i2,e1,k));
id Gvv(i1?,i2?,e1?,p+k) = Rg*(P(i1,i2,p+k) + TH*E(i1,i2,e1,p+k));
id Gvv(i1?,i2?,e1?,k) = Lg*(P(i1,i2,k) + TH*E(i1,i2,e1,k));



id P(i1?,i2?,p+k) = (d_(i1,i2) - (p(i1) + k(i1))*(p(i2) + k(i2))*PK^2);
id P(i1?,i2?,k) = (d_(i1,i2) - k(i1)*k(i2)*K^2);

id E(i1?,i2?,e1?,p+k) = i*e_(i1,i2,e1)*(p(e1)+k(e1))*PK;
id E(i1?,i2?,e1?,k) = i*e_(i1,i2,e1)*(k(e1))*K;

*Integrating over k, assuming there are additional k^(-2*g) and (p+k)^(-2*g) on each summand


id k(i1?)*k(i2?)*k(i3?)*k(i4?)*k(i5?)*k(i6?) = kkk(6,i1,i2,i3,i4,i5,i6);
id k(i1?)*k(i2?)*k(i3?)*k(i4?)*k(i5?) = kkk(5,i1,i2,i3,i4,i5);
id k(i1?)*k(i2?)*k(i3?)*k(i4?) = kkk(4,i1,i2,i3,i4);
id k(i1?)*k(i2?)*k(i3?) = kkk(3,i1,i2,i3);
id k(i1?)*k(i2?) = kkk(2,i1,i2);
id k(i1?) = kkk(1,i1);
```

```
id i*i = -1;

*print Euv1;
.sort;

Local EuuP = 1/2*T*Euu*(d_(i1,i2) - p(i1)*p(i2));
Local EuuE = -1/2*T*Euu*e_(i1,i2,e8)*p(e8)*i;
Local Euv1P = 1/2*T*Euv1*(d_(i1,i2) - p(i1)*p(i2));
Local Euv1E = -1/2*T*Euv1*e_(i1,i2,e8)*p(e8)*i;
Local Euv2P = 1/2*T*Euv2*(d_(i1,i2) - p(i1)*p(i2));
Local Euv2E = -1/2*T*Euv2*e_(i1,i2,e8)*p(e8)*i;
Local Evv1P = 1/2*T*Evv1*(d_(i1,i2) - p(i1)*p(i2));
Local Evv1E = -1/2*T*Evv1*e_(i1,i2,e8)*p(e8)*i;
Local Evv2P = 1/2*T*Evv2*(d_(i1,i2) - p(i1)*p(i2));
Local Evv2E = -1/2*T*Evv2*e_(i1,i2,e8)*p(e8)*i;

contract;
id i*i = -1;
id p.p = 1;

repeat;
id kkk(n1?,?a,i1?,?b,i1?,?c) = kkk(n1-2,?a,?b,?c)*K^-2;
endrepeat;
.sort

*All indices MUST be contracted. If I have some left, it means, they are paired either in d_(i1,i1),
or in p(i1,i1).
*So, every e_(...) has three indices, each must be from somewhere symmetrical. So, it goes.
id e_(i1?,i2?,i3?) = 0;

.sort;
id K^n1?*PK^n2?*kkk(8,i1?,i2?,i3?,i4?,i5?,i6?,i7?,i8?) = NOOO;
id K^n1?*PK^n2?*kkk(7,i1?,i2?,i3?,i4?,i5?,i6?,i7?) = NOOO;
id K^n1?*PK^n2?*kkk(6,i1?,i2?,i3?,i4?,i5?,i6?) = NOOO;

id Lg*K^n1? = Gl(n1/2 + g);
id Lo*K^n1? = Gl(n1/2 + g - o);
id L2o*K^n1? = Gl(n1/2 + g - 2*o);

id Rg*PK^n2? = Gr(n2/2 + g);
id Ro*PK^n2? = Gr(n2/2 + g - o);
id R2o*PK^n2? = Gr(n2/2 + g - 2*o);

id T*Gl(?a)*Gr(?b)*kkk(5,i1?,i2?,i3?,i4?,i5?) = F5pp(?a, ?b)*p(i1)*p(i2)*p(i3)*p(i4)*p(i5) +
F5pd(?a, ?b)*(d_(i1,i2)*p(i3)*p(i4)*p(i5) + d_(i1,i3)*p(i2)*p(i4)*p(i5) +
d_(i1,i4)*p(i2)*p(i3)*p(i5) + d_(i1,i5)*p(i2)*p(i3)*p(i4) + d_(i2,i3)*p(i1)*p(i4)*p(i5) +
d_(i2,i4)*p(i1)*p(i3)*p(i5) + d_(i2,i5)*p(i1)*p(i3)*p(i4) + d_(i3,i4)*p(i1)*p(i2)*p(i5) +
d_(i3,i5)*p(i1)*p(i2)*p(i4) + d_(i4,i5)*p(i1)*p(i2)*p(i3)) + F5dd(?a, ?b)*(p(i1)*
(d_(i2,i3)*d_(i4,i5) + d_(i2,i4)*d_(i3,i5) + d_(i2,i5)*d_(i3,i4)) + p(i2)*
(d_(i1,i3)*d_(i4,i5) + d_(i1,i4)*d_(i3,i5) + d_(i1,i5)*d_(i3,i4)) + p(i3)*
(d_(i2,i1)*d_(i4,i5) + d_(i2,i4)*d_(i1,i5) + d_(i2,i5)*d_(i1,i4)) + p(i4)*
(d_(i2,i3)*d_(i1,i5) + d_(i2,i1)*d_(i3,i5) + d_(i2,i5)*d_(i3,i1)) + p(i5)*
(d_(i2,i3)*d_(i4,i1) + d_(i2,i4)*d_(i3,i1) + d_(i2,i1)*d_(i3,i4)));

id T*Gl(?a)*Gr(?b)*kkk(4,i1?,i2?,i3?,i4?) = F4pp(?a, ?b)*p(i1)*p(i2)*p(i3)*p(i4) + F4pd(?a, ?
b)*(d_(i1,i2)*p(i3)*p(i4) + d_(i1,i3)*p(i2)*p(i4) + d_(i1,i4)*p(i2)*p(i3) +
d_(i2,i3)*p(i1)*p(i4) + d_(i2,i4)*p(i1)*p(i3) + d_(i3,i4)*p(i1)*p(i2)) + F4dd(?a, ?
b)*dd_(i1,i2,i3,i4);

id T*Gl(?a)*Gr(?b)*kkk(3,i1?,i2?,i3?) = F3p(?a, ?b)*p(i1)*p(i2)*p(i3) + F3d(?a, ?b)*
(d_(i1,i2)*p(i3) + d_(i1,i3)*p(i2) + d_(i2,i3)*p(i1));

id T*Gl(?a)*Gr(?b)*kkk(2,i1?,i2?) = F2p(?a, ?b)*p(i1)*p(i2) + F2d(?a, ?b)*d_(i1,i2);
```

```
id T*Gl(?a)*Gr(?b)*kkk(1,i1?) = F1p(?a, ?b)*p(i1);

id T*Gl(?a)*Gr(?b)*kkk(0) = F0(?a, ?b);

id T*Gl(?a)*Gr(?b) = F0(?a, ?b);

.sort;

id p.p = 1;

print EuuP+s;
print EuuE;
print Euv1P+s;
print Euv1E;
print Euv2P+s;
print Euv2E;
print Evv1P+s;
print Evv1E;
print Evv2P+s;
print Evv2E;

.end
```

Список литературы

[1] Kolmogorov, A.N., 1941. *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large Reynolds numbers*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 30

[2] A.S. Monin, A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics:Mechanics of Turbulence*, Dover, Mineola, NY, 2007

[3] K.R. Sreenivasan, *Phys. Fluids*, **7**, 2778 (1995).

[4] Kolmogorov, A.N., 1962. *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*, J. Fluid Mech. vol. 13.

[5] Л.Ц. Аджемян, М.Ю. Налимов, ТМФ том 91 №2 (1992), 294-308.

[6] L. Ts. Adzhemyan, M. Hnatic, M. Stehlic, *J. Phys II France*, **5**:7 (1995), 1077-1092

[7] Л. Ц. Аджемян, М. Гнатич, М.В. Компаниец, ТМФ том 176 №1, 2013.

[8] Wyld H.W. *Ann.Phys.* **14** (1961) 143.

[9] Kraichnan R.H. *J. Fluid Mech.* **5** (1959) 497.

[10] A.A. Migdal, *Modern Phys. Lett. A*, **6**:11 (1991), 1023-1043.

[11] E. Kit, A. Tsinober, J.L. Balint, J.M. Wallace, E. Levich, *Phys. Fluids*, **30**:11 (1987), 3323-3325.

[12] J.M. Wallace, J.L. Balint, L. Ong, *Phys. Fluids A*, **4**:9 (1992), 2013, 14pp.

[13] M. Thiele, W.-C. Müller, *J. Fluid Mech.*, **637** (2009), 425-442.

[14] C. Morize, F. Moisy, *Phys. Fluids*, **18**:6 (2006), 065107, 9pp

[15] Y. Morinishi, K. Nakabayashi, S.Q. Ren *Phys. Fluids*, **13**:10 (2001), 2912-2922

[16] Васильев А.Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. – Издательство ПИЯФ, Санкт-Петербург, 1998.

[17] Cristoph Sieg – Notes on the calculation of loop integrals. Niehls Bohr International Academy, Copenhagen, Denmark. Lecture materials

Содержание

1. Введение **1**

2. Модель максимальной хаотичности **1**

3. Уравнения согласования **4**

4. Модель с нарушенной чётностью **5**

5. Отсутствие ИК-расходимостей **6**

6. Максимальное нарушение чётности **8**

7. Математическая подготовка **10**

8. Однопетлевой счёт **12**

9. Анализ УФ-расходимостей **14**

10.Двухпетлевой счёт **17**

11.Результаты вычислений **18**

12.Заключение **24**

13.Приложение I **25**

Список литературы **28**