

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Кафедра статистической физики
Направление «Физика»



ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ФЕРМИ-СИСТЕМАХ СО СТАРШИМИ СПИНАМИ

Магистерская диссертация студента

_____ Калагова Георгия Алибековича

Научный руководитель:

_____ д. ф.- м. н., проф. Налимов М.Ю.

Рецензент:

_____ к. ф.-м. н., доцент Комарова М.В.

Санкт-Петербург

2015

Оглавление

Введение	3
1 Квантовые системы при конечных температурах	8
1.1 Статистическая сумма как интеграл по путям	8
1.2 Взаимодействие частиц при низких энергиях	9
1.3 ИК-эффективная теория	11
1.4 Мультипликативная ренормировка	13
2 Асимптотики высоких порядков разложений в эффективной модели	15
2.1 Инстантонный подход	15
2.2 Исследование РГ уравнений	18
3 Описание фазового перехода	23
3.1 РГ анализ составных операторов	23
3.2 Температура перехода	27
Заключение	28
Список литературы	30

Введение

Низкие температуры открывают дверь в одну из наиболее богатых областей физики – физики конденсированного состояния. Принципиальным здесь является понимание природы коллективного поведения системы, микроскопических явлений, которые формируют картину на макроскопических масштабах, критического состояния и т.д. Изучение и анализ многочастичных коррелированных систем фермиевских частиц, например охлажденных газов в магнитных/оптических ловушках, служат полигоном для разработки методов и исследования таких актуальных проблем, как сверхпроводимость при высоких температурах, переход Мотта (металл-изолятор), переход изолятор-сверхпроводник и т.д. (см. [1]).

Многие важнейшие физические характеристики критического состояния различных систем могут быть получены на основе анализа некоторой простой модели. Когда такое возможно, говорят об универсальности. В этом смысле системы можно разделить на классы, внутри каждого класса они являются эквивалентными с точки зрения их критического поведения. Обычно за принадлежность к тому или иному классу отвечает размерность системы и её симметрия. Так, например, две совершенно различные системы: планарный магнетик и сверхпроводящая пленка – описываются одной моделью $X\bar{Y}$ и относятся к одному классу универсальности с симметрией $O(2)$. Как известно, феноменологическая теория для описания критического поведения или непрерывного фазового перехода была развита в работах Л.Ландау, где он впервые ввёл понятие параметра порядка фазового перехода. В контексте сверхпроводящего перехода в электронных системах или сверхтекучего перехода в ^3He (спин частицы $s = 1/2$), параметром порядка является аномальное среднее полевых операторов $\Phi = \sum_{\mathbf{p}} \langle \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{p}) \hat{\Psi}_{\downarrow}(-\mathbf{p}) \rangle$. Переход этот соответствует образованию связанных состояний на фермиевской поверхности и щели $\sim |\Delta|^2$ в спектре куперовских квазичастиц. Разумеется, системы фермионов с $s = 1/2$ не являются единственными исследуемыми объектами. Существует частицы, обладающие высшим спином $s > 1/2$, например ^{87}Sr с ядерным спином $s = 9/2$; ^{173}Yb , спин которого $s = 5/2$, и множество других атомов и их изотопов [2, 3]. Коллективы подобных частиц/атомов могут быть описаны $U(N)$ -симметричным взаимодействием [4],

где $N = 2s + 1$ – число возможных проекций спина на ось квантования. Также подобная симметрия может иметь место и в моделях коллективных явлений в твёрдых телах, где из-за особенностей зонной структуры и геометрии электроны проводимости могут эффективно описываться многокомпонентными волновыми функциями, т.е. приобретают так называемые псевдоспиновые степени свободы [5]. Процессы куперовского спаривания и магнетизм в упомянутых системах активно сейчас изучаются [6–11].

В одной из подобных работ [12] авторы рассматривали микроскопический гамильтониан с локальным $U(N)$ -симметричным парным взаимодействием в рамках мацубаровского формализма. Данная модель анализировалась в окрестности точки фазового перехода T_c . Под точкой фазового перехода здесь и далее подразумевается температура T_c , при которой в уравнении Дайсона на одетый пропагатор появляются аномальные решения, т.е. возникает нетривиальный параметр порядка. В окрестности T_c было построено эффективное действие S_{LG} в виде функционала Ландау-Гинзбурга. Эффективный функционал Ландау, вообще говоря, содержит все степени параметра порядка. При описании фазовых переходов обычно оставляют лишь члены типа Φ^4 . Более высокие порядки оказываются несущественными в критическом режиме $p \rightarrow 0$ (ИК-область), где ведущую роль играют длинноволновые флуктуации, определяющие макроскопические свойства системы – термодинамику. Несущественность того или иного члена определяется его канонической размерностью. Ренормгрупповой анализ позволяет показать, что при приближении к точке фазового перехода эти члены вносят всё меньший и меньший вклад в вычисляемые величины, и главной остаётся лишь нелинейность Φ^4 . Такая модель анализировалась методами квантовополевой ренормализационной группы в рамках однопетлевых расчётов. Было установлено, что при $N \geq 4$ в модели отсутствуют устойчивые фиксированные точки (ф.т.) уравнений ренормгруппы (РГ). Авторы [12] показали, что при $N \geq 4$ критически флуктуации выводят систему из устойчивого состояния – происходит флуктуационный срыв непрерывного фазового перехода к переходу первого рода. Однако это результаты лишь однопетлевых вычислений. Известно, что существуют модели, в которых учёт старших порядков ТВ существенно влияет на критическое поведение. В качестве примеров можно привести т.н. C -модель критической динамики [13], киральные трехмерные модели и разнообразные спиновые системы с анизотропией [14–18]. Как оказалось, подобный флуктуационный срыв типичен именно для моделей с многокомпонентным параметром порядка. Такое поведение часто встречается в магнитных системах, например, при антиферромагнитном переходе порядок-беспорядок. Общего ответа на вопрос о типе перехода исходя лишь из свойств симметрии не существует. Напри-

мер, модель описывающая антиферромагнетик $NbSn_3$ не содержит устойчивых ф.т., хотя эксперимент показывает непрерывность параметра порядка, но, вместе с тем, он не обнаруживает критического рассеяния нейтронного излучения, что свойственно для непрерывных переходов, см., например, Ю.Изюмов, В.Сыромятников «Фазовые переходы и симметрия кристаллов» и ссылки на оригинальные работы.

Возвращаясь к описанным выше моделям, в которых отсутствуют устойчивые ф.т. и флуктуации разрушают устойчивость системы, заметим, что потеря устойчивости происходит в момент, когда функционал Ландау S_{LG} перестаёт быть положительно определённым – происходит смена знака перед членом Φ^4 . После этого все функциональные интегралы с весом $\exp(-S_{LG})$ разойдутся. Этот факт, разумеется, фиктивный, поскольку S_{LG} может содержать положительно определённые члены высших порядков типа Φ^6 . Они хоть и являлись ИК-несущественными для РГ анализа, теперь они важны для обеспечения устойчивости в критическом режиме. Таким образом, описание переходов первого рода и вычисление ключевых физических характеристик этих переходов *требует включения в рассмотрение членов старших степеней*.

Анализ самих фиксированных точек сводится к анализу отрезков некоторых разложений, в виде которых положения ф.т. вычисляются. Широко используемым является ε -разложение в методе ренормгруппы в пространстве размерности $4-\varepsilon$. В методе РГ в реальном пространстве используются так называемые псевдо- ε -разложения. Так или иначе это неполные разложения, известные лишь до некоторой степени параметра разложения ε . Например, для $O(N)$ -симметричной модели Φ^4 до ε^5 [19]. При получении количественных результатов в реальных размерностях необходимо класть формально малый параметр ε равным 1 или 2. Кроме того, подобные разложения имеют нулевой радиус сходимости и являются лишь асимптотическими. Факт расходимости рядов ТВ и отсутствие действительно малого параметра разложения вносит существенные, но решаемые проблемы в теоретические исследования. Эти проблемы могут быть решены методами обобщённого суммирования Бореля [19,20]. Другие методы суммирования малоэффективны из-за быстрого роста коэффициентов разложения с их номером.

В [12] показано, что РГ уравнения на ренормгрупповой поток можно построить в виде ε -разложений. Анализ критического поведения модели сводится к исследованию фазового портрета системы РГ уравнений в ИК-области. Здесь также возникает проблема аналитичности разложений ТВ. Для численного исследования фазовых траекторий следует использовать методы борелевского пересуммирования, а также *информацию об асимптотике высоких порядков ТВ (АВП)*.

Целью данной работы является анализ критического поведения, типа фазового перехода и спаривания в $U(N)$ -симметричной модели фермионов [12]; вычисление температуры перехода системы в сверхтекучее/сверхпроводящее состояние.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследовать аналитические свойства рядов теории возмущения в ИК-эффективной модели для возможности анализа фазовых портретов РГ уравнений;
2. Включить в рассмотрение высшие степени параметра порядка в функционал Ландау-Гинзбурга и провести мультипликативную ренормировку этих членов;
3. Исследовать РГ уравнения на включенные члены, рассматривая последние в качестве составных операторов;
4. Получить уравнение на температуру T_c перехода системы в упорядоченное состояние и оценить величину T_c .

Научная новизна:

1. Впервые проведен инстантонный анализ многозарядной модели, флуктуации в которой выводят системы из устойчивого состояния;
2. Было выяснено влияние тензорной природы параметра порядка на АВП;
3. С помощью борелевского суммирования и использования АВП было показано, что при $N \geq 4$ система подвергается фазовому переходу первого рода, по крайней мере, в 3d-пространстве;
4. Впервые на основе РГ анализа было показано, что температура этого перехода близка к температуре непрерывного фазового перехода, предсказываемого теорией среднего поля Ландау.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: семинарах кафедры статистической физики СПбГУ; международной студенческой конференции «Sciense and Progress 2014»; XIX Международной научной конференции молодых учёных и специалистов, Дубна 2015; Школе ПИЯФ НИЦ КИ по физике конденсированного состояния 2015; 12-й Курчатовской молодежной научной школы, Москва 2014.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации входят в статьи, которые изданы/находятся в печати в журналах, рекомендованных ВАК [21], [22]; в тезисах докладов соответствующих конференций.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 32 страницы и 6 рисунков. Список литературы содержит 33 наименования.

Глава 1

Квантовые системы при конечных температурах

1.1 Статистическая сумма как интеграл по путям

В качестве основы будем рассматривать систему нерелятивистских фермионов, которые взаимодействуют друг с другом посредством парного центрального потенциала. Оператор Гамильтона для неё имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = - \int d\mathbf{x} \psi_{\alpha}^{\dagger} \frac{\Delta}{2m} \psi_{\alpha} + \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}) \psi_{\gamma}^{\dagger}(\mathbf{y}) U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi_{\gamma}(\mathbf{y}) \psi_{\alpha}(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

поля $\psi_{\alpha}, \psi_{\alpha}^{\dagger}$ – операторы уничтожения и рождения частицы в спиновом состоянии α в точке \mathbf{x} , по повторяющимся индексам подразумевается суммирование и $\alpha = \overline{1, N}$ – число возможных проекций спина частицы. Здесь предполагается независимость межчастичного взаимодействия от спиновых состояний частиц, что отражено в скалярности потенциала. Основным объектом статистического описания равновесных систем является функция распределения Гиббса, которая дает вероятность нахождения системы в состоянии с энергией $E_{\mathcal{N}}$ и числом частиц \mathcal{N} . В квантовом случае её аналогом является матрица плотности

$$\hat{\rho} = \mathcal{Z}^{-1} e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})}, \quad (1.2)$$

здесь и далее $\hbar = k_B = 1$, μ – химический потенциал системы, $\beta \equiv 1/T$ – обратная температура. Условие нормировки $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$ приводит к выражению для большой статистической суммы

$$\mathcal{Z}(\beta, \mu) = \text{tr} e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})}. \quad (1.3)$$

Оператор Гамильтона системы известен, поэтому возникает вопрос о вычислении статистической суммы, как функции температуры и химического потенциала. Видно, что элемент матрицы плотности $\exp(-\beta\hat{H}')$, где $\hat{H}' \equiv \hat{H} - \mu\hat{N}$, внешне напоминает матричные элемент оператора эволюции $\exp(-it\hat{H}')$ частицы, описываемой гамильтонианом \hat{H}' , которая переходит из начального состояния в конечное за промежуток времени $t = -i\beta$. Ядро оператора эволюции представимо функциональным интегралом и даётся известной формулой Фейнмана-Каца

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle \sim \int D\varphi e^{iS}, \quad (1.4)$$

где S – классическое действие частицы. Таким образом, элемент матрицы плотности можно рассматривать как элемент оператора эволюции частицы в мнимом времени. Эта аналогия приводит к выражению для статистической суммы (1.5) системы, которая описывается гамильтонианом (1.1)

$$\mathcal{Z} \sim \int D\psi D\psi^\dagger \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int dx \mathcal{L}\right). \quad (1.5)$$

В “классическом” лагранжиане \mathcal{L} величины $\psi_\alpha, \psi_\alpha^\dagger$ теперь имеют смысл не операторов поля, а грассмановых функций. Кроме того, на эти функции накладываются антипериодические граничные условия по отношению к параметру τ

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}, \tau) = -\psi_\alpha(\mathbf{x}, \tau + \beta), \quad \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, \tau) = -\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, \tau + \beta), \quad (1.6)$$

а сам лагранжиан имеет вид [23, 24]

$$\mathcal{L}(\psi^\dagger, \psi) = \psi_\alpha^\dagger \partial_\tau \psi_\alpha + \mathcal{H}'. \quad (1.7)$$

1.2 Взаимодействие частиц при низких энергиях

Изучаемые в данной работе системы, естественно, рассматриваются как вырожденные. Для фермионных теорий под вырожденным газом (или вырожденной жидкостью) понимается газ, находящийся при температурах $T \ll T_F$, где T_F – фермиевская температура. Здесь уместно напомнить про связь энергии с температурой – $10000K \approx 1eV$. Таким образом, если говорить о реальных квантовых жидкостях или газах, которые демонстрируют фазовые переходы, то речь идет о температурах, не превосходящих нескольких градусов шкалы Кельвина. Например, непрерывный сверхпроводящий переход в Pb происходит при $T_c \approx 7K$, а сверхтекучесть в системах ультрахолодных фермиевских

атомов ${}^6\text{Li}$ наблюдается при $T_c \sim 10^{-6}\text{K}$. Характерные энергии при этом оказываются чрезвычайно малыми – $meV \div \mu eV$. В этом смысле процесс взаимодействия – столкновение мы будем называть медленным. Как известно при медленных столкновениях, основной вклад в амплитуду рассеяния даёт гармоникой, отвечающей нулевому угловому моменту, т.е. рассеяние происходит в s -канале и является изотропным. Решение задачи рассеяния в первом борновском приближении приводит к выражению, для амплитуды рассеяния [25]

$$f_{\mathbf{k}} = -\frac{m}{4\pi} \int U(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (1.8)$$

где \mathbf{k} – переданный импульс. В процессах упругого рассеяния, естественно, участвуют частицы, находящиеся в сферическом слое вокруг ферми-поверхности $|\mathbf{p} - \mathbf{p}_F| \ll p_F$, а после рассеяния занимают свободные состояния в этом слое, поэтому $|\mathbf{k}| < 2p_F$. Допустим, потенциалу можно приписать характерный радиус действия r_0 , что обычно возможно в многочастичных системах, например, из-за экранировки. Тогда в случае $p_F r_0 \ll 1$ подынтегральную экспоненту в (1.8) можно заменить единицей, что приводит к независимости амплитуды s -рассеяния $a_s \equiv -f_{\mathbf{k}=0}$ ни от направления, ни от скорости. Условие $p_F r_0 \ll 1$ имеет прозрачную физическую интерпретацию и, как видно, отражает слабую неидеальность рассматриваемой системы или, другими словами, малую плотность системы. В экспериментах с квантовыми газами плотности достигают значений $n \sim 10^{14}\text{cm}^{-3}$.

Все величины, вычисляемые в рамках описанных выше приближений, строятся в виде ряда теории возмущения по параметру $a_s p_F \ll 1$, т.е. взаимодействие описывается лишь одним параметром a_s , причем все остальные детали потенциала здесь несущественны. Этот факт приводит к понятию псевдопотенциала. Мы можем выбрать в качестве потенциала наиболее удобную функцию, которая даёт тоже значение длины рассеяния a_s . Обычно при исследовании критических свойств системы, где преобладают длинноволновые корреляции, микроскопическая структура взаимодействия не существенна и здесь в качестве псевдопотенциала выбирается потенциал нулевого радиуса

$$U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lambda \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.9)$$

$\lambda = 4\pi a_s/m$, случаю притяжения, который мы в дальнейшем и рассматриваем, отвечает отрицательно значение длины рассеяния, например, для ${}^6\text{Li}$ $a_s \approx -2.3 \cdot 10^3 \text{Å}$. Связь константы λ с экспериментально измеряемым параметром a_s справедлива лишь в трехмерном пространстве. В $2d$ -пространстве, мы будем считать λ известным параметром. Обычно он задаётся характеристика-

ми оптической решетки, если речь идет об исследовании двумерных систем ферми-газов. Еще раз отметим малые параметры теории вырожденного слабо-неидеального фермиевского-газа

$$\frac{T}{T_F} \ll 1, \quad a_s p_F \ll 1. \quad (1.10)$$

Электроны в твердом теле также естественно рассматривать как вырожденную ферми-жидкость. Эффективное притяжение здесь обеспечивается их взаимодействием с тепловыми колебаниями решетки. Такой механизм приводит к куперовскому спариванию электронов с антипараллельными спинами и импульсами и, как результат, к низкотемпературной сверхпроводимости в металлах. В рамках модели БКШ, процессы рассеяния фононов и электронов происходят в малой окрестности ферми-поверхности толщины $\sim \omega_D$. Причем дебаевская частота ω_D мала по сравнению с фермиевской энергией электронов $\omega_D/\varepsilon_F \ll 1$, что соответствует упругому рассеянию.

1.3 ИК-эффективная теория

Основываясь на вышеизложенном, запишем лагранжиан системы

$$\mathcal{L}(\psi^\dagger, \psi) = \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_t - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi_\alpha + \frac{\lambda}{2} \psi_\alpha^\dagger \psi_\gamma^\dagger \psi_\gamma \psi_\alpha. \quad (1.11)$$

Как известно из теории БКШ, сверхпроводящий фазовый переход происходит в точке T_c , когда в уравнении Дайсона появляются аномальные решения $-\langle \psi_\alpha \psi_\gamma \rangle$ и $\langle \psi_\alpha^\dagger \psi_\gamma^\dagger \rangle$. Из грассмановой природы переменных следует, что $\alpha \neq \gamma$, а поскольку среднее вычисляется в одной точке, то в импульсном представлении это соответствует спариванию частиц с противоположными импульсами. Построить теорию среднего поля и петлевые поправки к ней в рамках введенного параметра порядка позволяет преобразование Хаббарда-Стратоновича [12]. Оно основано на представлении члена $\exp(\psi \psi \psi^\dagger \psi^\dagger)$ в виде гауссова интегрирования по вспомогательным полям

$$\mathcal{L}(\psi^\dagger, \psi, \chi, \chi^\dagger)_{HS} = \psi_\alpha^\dagger \left(\partial_t - \frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \psi_\alpha + \frac{1}{2\lambda} \text{tr} \chi \chi^\dagger - \frac{1}{2} \psi_\alpha^\dagger \chi_{\alpha\gamma} \psi_\gamma^\dagger - \frac{1}{2} \psi_\alpha \chi_{\alpha\gamma}^\dagger \psi_\gamma. \quad (1.12)$$

Комплексные антисимметричные матричные поля размера $N \times N$ χ, χ^\dagger несут смысл коллективных переменных. Их введение можно понимать как процедуру сокращения статистического описания. Уравнения Швингера приводят к

связи новых бозонных полей χ, χ^\dagger с фермионными [12]

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\alpha\gamma}^\dagger + \lambda \psi_\alpha^\dagger \psi_\gamma^\dagger \rangle &= 0, \\ \langle \chi_{\gamma\alpha} - \lambda \psi_\alpha \psi_\gamma \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Видно, что средние значения новых полей суть параметр порядка.

Квадратичная по фермиевским переменным форма (1.12) допускает гауссово интегрирование, что приводит к бозонному описанию. Результатом интегрирования будет определитель этой квадратичной формы, который следует раскладывать по полям χ, χ^\dagger и их градиентам. Таким образом, существенную в ИК-области ($|T - T_c| \ll T_c$ и $\mathbf{p} \rightarrow 0$) часть бозонного действия можно записать в виде функционала Ландау-Гинзбурга [12]

$$S_{LG} = \frac{\beta}{2\lambda} \text{tr} \chi \chi^\dagger + \frac{1}{2} \text{diagram} + \frac{1}{4} \text{diagram} + \dots, \quad (1.13)$$

волнистые линии соответствуют матричным переменным χ, χ^\dagger , жирные линии обозначают затравочный фермионный пропагатор $(i\omega_s - \varepsilon_{\mathbf{p}})^{-1} \delta_{\alpha\gamma}$, $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2 / (2m) - \mu$. Взятие следа в петлях подразумевается. Эти графики допускают аналитическое вычисление при низких температурах $T \ll T_F$. Так ампутированная четыреххвостка на нулевых импульсах и частотах даётся выражением

$$\left[\text{diagram} \right]_{amp} = \sum_{\omega_s} \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\omega_s^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2)^2} = \frac{7\nu_F \beta}{8(\pi T)^2} \zeta(3), \quad (1.14)$$

аналогично вычисляется двуххвостка без внешних хвостов на импульсе \mathbf{p}

$$\left[\text{diagram} \right]_{amp} = -\frac{\beta}{2} \nu_F \ln \frac{\gamma \delta}{\pi T} + \mathbf{p}^2 \frac{7\nu_F v_F^2 \beta}{96(\pi T)^2} \zeta(3) + O(\mathbf{p}^4). \quad (1.15)$$

Последний граф содержит логарифмическую УФ-расходимость, которая физически обрезается параметром δ . Процессы рассеяния происходят в области размытости фермиевского распределения, толщина которой порядка δ . Для твердых тел $\delta = 2\omega_D$, в атомных системах $\delta = 0.49 T_F$ [26]. Формулы (1.14, 1.15) написаны в главном порядке по T/δ . В приведенных выражениях $\nu_F = m^2 v_F / (2\pi^2)$ – 3d-плотность состояний на поверхности Ферми (без учета спинового вырождения), v_F – фермиевская скорость, $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана, $\ln \gamma \approx 0,577$ – постоянная Эйлера-Маскерони, $\omega_s = \pi T(2s + 1)$, где $s \in \mathbb{Z}$. Растяжением полей можно привести функционал (1.13) к форме [12]

$$S_{LG} = \text{tr} \chi^\dagger (\mathbf{p}^2 + \tau_0) \chi + \frac{g_{01}}{4} \text{tr}(\chi \chi^\dagger) \text{tr}(\chi \chi^\dagger) + \frac{g_{02}}{4} \text{tr}(\chi \chi^\dagger \chi \chi^\dagger). \quad (1.16)$$

В духе теории фазовых переходов Ландау, свободная энергия раскладывается по степеням параметра порядка, которые представляют собой инварианты относительно действия некоторой группы симметрии. В нашем случае группа $U(N)$. Видно, что кроме члена $\text{tr}(\chi\chi^\dagger\chi\chi^\dagger)$ инвариантом того же порядка является структура $\text{tr}(\chi\chi^\dagger)\text{tr}(\chi\chi^\dagger)$, поэтому она также должна быть включена в рассмотрение. Естественно на этом этапе считать $g_{01} = 0$, этот заряд будет генерироваться лишь в ходе ренормировки. Преобразования ренормализационной группы “двигают” параметры $\{\tau, \bar{g}_1, \bar{g}_2\}$ с точки $\{\tau_0, g_{01}, g_{02}\}$ вдоль некоторых кривых и тем самым определяют значения констант связи на различных масштабах температуры. В случае непрерывного фазового перехода по мере приближения температуры к критической, заряды приходят в фиксированную точку и остаются далее в ней. На область, в которой находятся траектории бегущих констант связи накладываются условия связанные с устойчивостью системы в критическом режиме. Под устойчивостью имеется в виду положительная определённость действия (1.16), что необходимо для сходимости континуального интеграла. Критерием устойчивости является условие [12]

$$\bar{g}_2 + N\bar{g}_1 > 0, \quad \bar{g}_2 > 0. \quad (1.17)$$

1.4 Мультипликативная ренормировка

Теория (1.16) мультипликативно ренормируема. Ренормированное действие модели имеет вид

$$S_R = Z_\chi^2 \text{tr} \chi^\dagger (-\Delta) \chi + Z_\tau Z_\chi^2 \tau \text{tr} \chi^\dagger \chi + Z_{g_1} Z_\chi^4 M^\varepsilon \frac{g_1}{4} (\text{tr} \chi \chi^\dagger)^2 + Z_{g_2} Z_\chi^4 M^\varepsilon \frac{g_2}{4} \text{tr} \chi \chi^\dagger \chi \chi^\dagger. \quad (1.18)$$

Это выражение может быть получено ренормировкой

$$g_{0j} \rightarrow g_j M^\varepsilon Z_{g_j}, \quad \chi \rightarrow \chi Z_\chi, \quad \tau_0 \rightarrow \tau Z_\tau, \quad (1.19)$$

где параметр M – ренормировочная масса; g_1, g_2 – безразмерные ренормированные заряды. В работе используется размерная регуляризация, $\varepsilon = 4 - d$ – отклонение размерности пространства от логарифмической размерности теории. В качестве схемы ренормировок – минимальные вычитания (MS -схема) [13]. В MS -схеме все константы ренормировки Z_ϑ имеют вид главной части ряда Лорана по параметру ε

$$Z_\vartheta = 1 + \frac{Z_\vartheta^1}{\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),$$

здесь Z_ϑ^1 обозначает вычет в простом полюсе по ε соответствующей константы ренормировки, $\vartheta = (g_j, \tau, \chi)$. РГ-функции, коэффициенты РГ-уравнения, определяются равенствами

$$\beta_{g_j} = \tilde{D}_M Z_{g_j}, \quad \gamma_\vartheta = \tilde{D}_M \ln Z_\vartheta, \quad (1.20)$$

где \tilde{D}_M оператор дифференцирования $M\partial_M$ при фиксированных затравочных параметрах, β_{g_j} – бета-функции зарядов g_j ; γ_ϑ – аномальные размерности параметров ϑ . В схеме MS РГ-функции связаны с вычетами в простых полюсах констант ренормировок соотношениями [13] $\beta_{g_j} = -g_j(\varepsilon + \gamma_{g_j})$, $\gamma_\vartheta = -g_k \partial_k Z_\vartheta^1$. РГ-уравнение приводит к известным [13] уравнениям на бегущие константы связи

$$\partial_\xi \bar{g}_i = \frac{\beta_{g_i}}{2 + \gamma_\tau}, \quad \bar{g}_i|_{\xi=0} = g_i, \quad \text{где } \xi \equiv \ln \frac{\tau}{M^2}. \quad (1.21)$$

Обычно инфракрасное (ИК) поведение $\xi \rightarrow -\infty$ определяется наличием устойчивых фиксированных точек (ф.т.) (g_1^*, g_2^*) , которые являются нулями бета-функций $\beta_{g_i}(g_1^*, g_2^*) = 0$ для всех i . Тип ф.т. определяется матрицей $\omega_{ij} \equiv \partial_{g_j} \beta_{g_i}(g_1^*, g_2^*)$. Ф.т. является ИК-устойчивой, если матрица ω положительно определена. Однако, как было показано в [12], используя однопетлевое ренормгрупповое приближение, устойчивые ф.т. не существуют в модели при $N \geq 4$. В случае $N = 2$ такая точка существует, что приводит к универсальности в системе и соответствует непрерывному фазовому переходу в системах фермиевских частиц со спином $1/2$. Как уже отмечалось, в [12] указано, что не только положение фиксированных точек и соответствующие критические индексы, но и сами уравнения на инвариантные заряды (1.21) можно построить в форме стандартного ε -разложения

$$\partial_\xi \bar{g}_i = -\bar{g}_i + \sum_{J=0}^K \varepsilon^J \beta_i^{(J)}(\bar{g}_1, \bar{g}_2), \quad i = 1, 2 \quad (1.22)$$

$$\bar{g}_i|_{\xi=0} = g_i,$$

явные выражения для $\beta_i^{(J)}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ даются вычислением расходимостей 1-неприводимых $J + 1$ петлевых графов. Результаты трёхпетлевых вычислений приведены в [21], а пятипетлевых в [22]. Для исследования уравнений типа (1.22) при физических значениях $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$, то есть с большим параметром разложения, необходимо проводить обобщенное суммирование ряда. Такое пересуммирование реализуется с помощью преобразования Бореля, которое требует знание АВП разложения (1.22), т.е. информацию о поведении $\beta_i^{(J)}(g_1, g_2)$ при $J \rightarrow \infty$.

Глава 2

Асимптотики высоких порядков разложений в эффективной модели

2.1 Инстантонный подход

подавляющее большинство теорий, содержащих нелинейные члены связанные с взаимодействием, не имеют точных решений. Главным инструментом при этом становится теория возмущения, основанная на существовании в теории малого параметра. В теории (1.16) малыми будут считаться параметры g_{0i} . Это, как можно показать, верно в вырожденном случае. Например, в $3d$ -пространстве $g_{02} \sim p_F(T/T_F)^3$. Все величины вычисляются пертурбативно в виде рядов по этим малым параметрам. При этом можно надеяться, что каждое следующее приближение невелико по сравнению с предыдущим. Оправдывается ли эта надежда? Впервые идея о том, что ряды теории возмущения (ТВ) в КЭД расходятся, была высказана Ф.Дайсоном [27]. Позже Л.Липатовым [28] был предложен метод поиска коэффициентов C_m разложения рядов ТВ при больших номерах $m \rightarrow \infty$. Было доказано, что эти ряды имеют нулевой радиус сходимости, $C_m \sim a^m m! m^b$, где a, b – некоторые константы. Если в КЭД число вычисленных членов ещё не позволяет увидеть факт расходимости, что связано с малостью параметра разложения, то в теории фазовых переходов и критических явлений это видно, начиная с младших порядков ТВ. Основными величинами здесь являются критические индексы и скейлинговые функции [20], которые вычисляются в рамках ε -разложений.

Для исследования разложений ТВ в рассматриваемой модели (1.16) мы будем применять метод Липатова, основанный на методе перевала в континуальном интеграле. Распространение этой идеи на $O(N)$ -симметричную модель Φ^4 было сделано в работах [29, 30]. Этот метод позволяет исследовать аналитические свойства ε -разложений для аномальных размерностей и скейлинговых

функций, а также строить поправки по $1/m$ к главному члену асимптотик. В работе [31] был разработан последовательный способ нахождения асимптотик разложений констант ренормировки в схеме минимальных вычитаний для векторной Φ^4 теории. Для этого рассматриваются частично-ренормированные гриновские функции, в которых произведены вычитания расходящихся подграфов вплоть до порядка $m - 1$. Способ оказался удобным и был использован в [32] для исследования критических показателей скалярной Φ^3 модели. Анализ асимптотических разложений в многозарядных теориях был проведен в [33] для неравновесных динамических моделей.

В рассматриваемой теории (1.16) мы будем интересоваться не разложением по каждому заряду в отдельности, а асимптотикой петлевых разложений. Естественно при этом считать, что константы связи одного порядка малости. Поэтому в действии 1.16 можно сделать замену $g_{0i} = zg_i$. Таким образом, интересоваться мы будем разложением по параметру z .

Ультрафиолетовые расходимости в MS -схеме имеют вид полюсов по регуляризатору ε . А в качестве схемы ренормировки – схема минимальных вычитаний [20]. Предполагается [31], что гриновские функции в теории ренормированы вплоть до порядка $m - 1$. В методе континуального интегрирования $2s$ -хвостая полная функция Грина определяется выражением

$$G_{2s}(z, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2s}) = W^{-1} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\chi^\dagger \chi(\mathbf{x}_1) \chi(\mathbf{x}_2)^\dagger \dots \chi(\mathbf{x}_{2s-1}) \chi(\mathbf{x}_{2s})^\dagger e^{-S_R}, \quad (2.1)$$

$$W = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\chi^\dagger e^{-S_R}.$$

согласно [28] асимптотика коэффициентов $G_{2s}^{(m)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2s})$ разложения функции $G_{2s}(z, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2s})$ по z может быть найдена с помощью интегрального представления Коши

$$G_{2s}^{(m)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2s}) = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz G_{2s}(z, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2s})}{(-z)^{m+1}}, \quad (2.2)$$

где γ замкнутый контур вокруг нуля в комплексной плоскости z , S_R – ренормированное безмассовое действие. Такая формула позволяет использовать метод перевала при $m \rightarrow \infty$ в размерности $d = 4$. Подставим (2.1) в (2.2) и сделаем масштабирование переменных: $g_i \rightarrow g_i/m$, $\chi \rightarrow \sqrt{m}\chi$, $\chi^\dagger \rightarrow \sqrt{m}\chi^\dagger$. После чего получим подынтегральное выражение вида $\exp(-mJ)$, где введено обозначение $J(\chi, \chi^\dagger, z) \equiv S_R + \ln(-z)$. Вариационные уравнения для этого функционала отно-

сительно его переменных имеют вид

$$\begin{aligned}
& -\Delta\chi + \frac{zg_1}{2}\chi \operatorname{tr} \chi\chi^\dagger + \frac{zg_2}{2}\chi\chi^\dagger\chi = 0, \\
& -\Delta\chi^\dagger + \frac{zg_1}{2}\chi^\dagger \operatorname{tr} \chi\chi^\dagger + \frac{zg_2}{2}\chi^\dagger\chi\chi^\dagger = 0, \\
& \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{zg_1}{4} (\operatorname{tr} \chi\chi^\dagger)^2 + \frac{zg_2}{4} \operatorname{tr} \chi\chi^\dagger\chi\chi^\dagger \right\} = -1.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Для реализации метода перевала в ведущем порядке контрчлены в действии оказываются несущественными по $1/m$. Антисимметричные функции-матрицы χ, χ^\dagger можно привести к блочно-диагональному виду унитарными преобразованиями, поэтому далее будем считать, что они состоят из $p = N/2$ блоков

$$\chi = \operatorname{diag}(s_1\sigma, \dots, s_p\sigma), \quad \chi^\dagger = -\operatorname{diag}(s_1^*\sigma, \dots, s_p^*\sigma), \tag{2.4}$$

где $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$ – двумерный антисимметричный тензор, а $s_j(\mathbf{x})$ некоторые функции подлежащие определению. Принимая это во внимание, напомним систему уравнения на неизвестные $s_j(\mathbf{x})$

$$-\Delta s_i(\mathbf{x}) + zg_1 \sum_{k=1}^p |s_k(\mathbf{x})|^2 s_i(\mathbf{x}) + \frac{zg_2}{2} |s_i(\mathbf{x})|^2 s_i(\mathbf{x}) = 0. \tag{2.5}$$

В качестве анзаца возьмем функции являющиеся решением подобных уравнений в скалярном случае [28]

$$s_i(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_i y^{-1}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 + y^2}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

Зависимость решения от произвольных параметров \mathbf{x}_0 и y связано с инвариантностью теории (1.16) относительно трансляций и растяжений соответственно. Такая подстановка приводит к системе алгебраических уравнений на амплитуды α_i

$$8\alpha_i + zg_1 \sum_{k=1}^p |\alpha_k|^2 \alpha_i + \frac{zg_2}{2} |\alpha_i|^2 \alpha_i = 0. \tag{2.7}$$

Видно, что существует w тривиальных решений $\alpha_i = 0$, где $w \in \{0, \dots, p-1\}$, а также n ненулевых $|\alpha_i|^2 = -16/(2nzg_1 + zg_2)$, где $n \in \{p, \dots, 1\}$. Фазы амплитуд α_i не фиксируются и являются произвольными параметрами отражающими инвариантность относительно глобальных калибровочных преобразований. Общее число нулевых мод в теории $N^2 - 2N + n + 5$. Весь произвол при вычислениях фиксируется методом Фаддеева-Попова [28], который также приводит к “закону равномерного распределения”: каждая нулевая мода вносит \sqrt{m} в асимптотику.

Для определения перевальной точки z_{st} необходимо воспользоваться последним уравнением (2.3)

$$z_{st}(n) = -\frac{4n}{3} \frac{1}{2ng_1 + g_2}, \quad (2.8)$$

в итоге $|\alpha_j|^2 = 12/n$.

Знание инстантона и стационарного значения параметра разложения (2.8) позволяет найти асимптотику вычета $[G_{2s}^m]$ в простом полюсе по ε частично ренормированной функции Грина G_{2s} . Последняя в свою очередь приводит [31] к асимптотике петлевых разложений для ренормгрупповых бета-функций (??)

$$\beta_j^{(m)}(g_1, g_2) = \text{const}_j (-a)^m m! m_n^b (1 + O(1/m)), \quad (2.9)$$

где const_j – несущественные для дальнейшего анализа числовые множители; $b_n = (N^2 - 2N + n + 11)/2$; $a = \max_n |a(n)|$, $a(n) = -1/z_{st}(n)$. Из равенства (2.8) видно, что $a(n)$ меняются вместе с зарядами g_j , поэтому главный вклад в асимптотику (2.9) вносит наибольший по модулю $a(n)$, остальные вносят экспоненциально малый вклад и должны быть отброшены в рассматриваемом приближении.

Суммируя полученные выше результаты, приходим к заключению, что и в исследуемой полевой модели 1.16 пертурбативные разложения носят асимптотический характер. Ещё раз обратим внимание на факт зависимости коэффициентов $\beta_j^{(m)}(g_1, g_2)$ от положения зарядов на фазовой плоскости (g_1, g_2) . Этот факт окажется решающим при анализе ренормгрупповых потоков в модели.

2.2 Исследование РГ уравнений

Общая идеология пересуммирования по Борелю-Леруа [19,20] заключается в следующем: пусть некая величина, в нашем случае $\beta(z)_i$, представима степенным рядом по z с коэффициентами, имеющими при $J \rightarrow \infty$ вид (2.9)

$$\beta(z)_i = \sum_{J \geq 0} z^J \beta_i^{(J)}, \quad (2.10)$$

тогда ей сопоставляется функция $B(z)$, определяемая следующим равенством

$$B(z)_i = \sum_{J \geq 0} B_i^{(J)} z^J, \quad B_i^{(J)} = \frac{\beta_i^{(J)}}{\Gamma(J + b + 1)}, \quad (2.11)$$

где $\Gamma(J)$ – гамма-функция Эйлера, b – произвольный параметр. Обратное преобразование позволяющее восстановить функцию $\beta(z)_i$ по её образу $B(z)$ задано

формулой

$$\beta(z)_i = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^b B(z)_i, \quad (2.12)$$

Таким образом, знание асимптотики (2.9) вместе с некоторыми предположениями об аналитических свойствах $B(z)$ позволяет пересуммировать ряд (2.10). Нетрудно заметить, что при $J \rightarrow \infty$ коэффициенты $B^{(J)} \sim (-a)^J J^{b_n - b}$. Это означает, что такой ряд сходится в круге, радиус которого определяется a , следовательно функция $B(z)$ является аналитической в этой области.

Известны разные схемы преобразования Бореля-Леруа, использующие различные параметры в качестве подгоночных [19, 20]. Мы будем использовать так называемую схему конформного Борель-Леруа-преобразования, как наиболее точно контролируруемую с точки зрения знания АВП. Она содержит минимум свободных параметров и приводит к наиболее точным результатам. Особенность нашей задачи заключается в том, что положение полюсов Борель-образа исследуемых β функций зависит от соотношения зарядов g_1 и g_2 , то есть от конкретной точки в плоскости (g_1, g_2) , в которой рассматривается система.

Рассмотрим случай $N = 4$, что физически соответствует, например, фермионам со спином $3/2$. Существует два типа инстантонов: с одним ненулевым блоком $a(1) = 3/4(2g_1 + g_2)$; и с двумя $a(2) = 3/8(4g_1 + g_2)$. С эволюцией инвариантных зарядов по уравнениям (1.22) параметры $a(1)$, $a(2)$ меняются не только по абсолютной величине, но и по знаку. Им соответствуют разные области в плоскости (g_1, g_2) , с различными свойствами сходимости ряда для $B(z)$.

Область I: если инвариантные заряды удовлетворяют условию $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 > 0$, то $|a(1)| > |a(2)|$. Ближайшая к нулю сингулярность располагается в точке $z = -R_1 = -1/a(1)$;

Область II: если инвариантные заряды удовлетворяют условию $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 \leq 0$, то $|a(2)| > |a(1)|$. В этом случае ближайшая сингулярность $B(z)$ располагается уже на положительной полуоси в точке $z = R_2 = 1/|a(2)|$.

Таким образом, вся плоскость (\bar{g}_1, \bar{g}_2) разделена прямой $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 = 0$. Выше этой границы аналитические свойства борелевского образа определяются наиболее вырожденным инстантоном, то есть инстантоном с одним ненулевым блоком. Ниже границы – невырожденным инстантоном.

Пусть инвариантные заряды находятся в области I. Именно здесь находятся физические стартовые значения инвариантных зарядов, то есть ренормированные заряды теории. При этом контур интегрирования в (2.12) пересекает область аналитичности функции $B(z)$ в точке R_1 . Проблема аналитического продолжения во внешность круга сходимости решается методом конформного отображения [19, 20].

Обычно конформное отображение комплексной плоскости выбирают в виде [20]

$$u(z) = \frac{\sqrt{1+az} - 1}{\sqrt{1+az} + 1} \Leftrightarrow z(u) = \frac{4u}{a(u-1)^2}. \quad (2.13)$$

Равенство $u(z) = O(z)$ при $z \rightarrow 0$ позволяет переразложить ряд (2.11) по переменной u

$$\begin{aligned} B(z)_i &= \sum_{J \geq 0} B_i^{(J)} z^J = \sum_{J \geq 0} U_i^{(J)} u^J, \\ U_i^{(0)} &= B_i^{(0)}, \quad U_i^{(J)} = \sum_{m=1}^J B_i^{(m)} (4/a)^m C_{J+m-1}^{J-m}, \quad J \geq 1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

тогда преобразование Бореля-Леруа приобретает вид

$$\beta(z)_{g_i} = \sum_{J \geq 0} U_i^{(J)} \int_0^\infty dt t^b e^{-t} u(zt)^J. \quad (2.15)$$

Произвольный параметр пересуммирования b из соображения ускорения сходимости рядов принято фиксировать условием $b = b_n + 3/2$ [19, 20].

Пользуясь полученной асимптотической формулой (2.9) для коэффициентов ϵ -разложения и выражением (2.15) можно окончательно написать пересуммированные РГ-уравнения на инвариантные заряды

$$\begin{aligned} \partial_\xi \bar{g}_i &= -\bar{g}_i + \sum_{N=0}^K U_i^{(N)} \int_0^\infty dt t^b e^{-t} u(\epsilon t)^N, \\ \bar{g}_i|_{\xi=0} &= g_i. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае $U_i^{(N)}$ и $u(t)$ являются функциями \bar{g}_i .

Численное решение системы (2.16) осуществлялось следующим образом. Выбрав начальную точку в плоскости зарядов (g_1, g_2) , определяем соответствующий радиус сходимости и производим в соответствии с изложенным в предыдущем разделе пересуммирование правых частей уравнений (2.16). Затем, пользуясь конечно-разностной схемой Рунге-Кутты 4-го порядка, находим новые значения инвариантных зарядов, для которых повторяем процедуру пересуммирования. И так далее.

В качестве примера исследовались решения системы (2.16) при $N = 4$. Приведены две траектории, соответствующие различным начальным данным при $d = 3$ – Рис.(2.1.а) и при $d = 2$ – Рис.(2.1.б). Область положительной определённости действия (1.16) не закрашена. Результаты численного анализа показывают, что при $d = 3$ траектории инвариантных зарядов, стартующих с различных на-

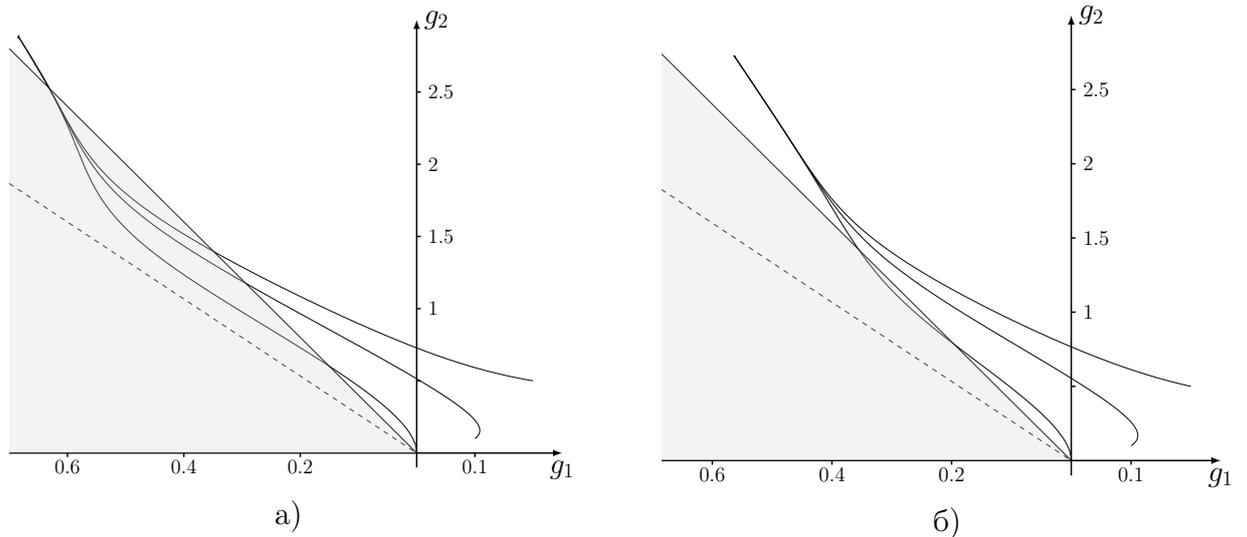


Рисунок 2.1: Траектории инвариантных зарядов с различными начальными условиями: а) при $d = 3$ и $N = 4$; б) при $d = 2$ и $N = 4$; пунктирная линия – граница применимости метода пересуммирования.

чальных значений, пересекают границу области устойчивости (1.17) при некотором значении $\xi = \xi_0$, при котором в системе появляются метастабильные состояния. Похожее поведение наблюдается и при $N > 4$.

Рис.2.2 показывает, как траектории инвариантных зарядов зависят от количества учтенных петель в процессе пересуммирования при $d = 3$. Видно, что последовательность траекторий сходится к некоторой одной, которая практически совпадает с траекторией, полученной в пятипетлевом приближении. Это позволяет сделать вывод о том, что потеря устойчивости системы будет происходить и при учёте более высоких порядков ТВ. Также пятипетлевые результаты позволяют вычислить параметр ξ_0 и гарантируют, что он практически не будет меняться в старших порядках.

Также отметим, что в рамках численного анализа нам удалось обнаружить устойчивую ф.т. Согласно [21] фиксированные точки РГ уравнений отсутствовали в одно- двух- и трехпетлевых приближениях. Ф.т. возникает уже в 4-петлевом приближении за границей области устойчивости. Однако в 5-петлевом приближении её положение существенно меняется, и она переходит в область устойчивости системы. Конечно, такое поведение не позволяет нам сделать заключение о том, что РГ уравнения действительно имеют устойчивую ф.т.

В двумерной системе $d = 2$ ИК-устойчивые ф.т. также были обнаружены в 4- и 5-петлевом приближении. Но в отличие от трехпетлевого анализа [21] только некоторые траектории покидают область устойчивости, согласно Рис.(2.1.б). Это траектории, которые начинаются с очень малых значений ренормированных зарядов. Здесь не приходится говорить о какой-либо универсальности:

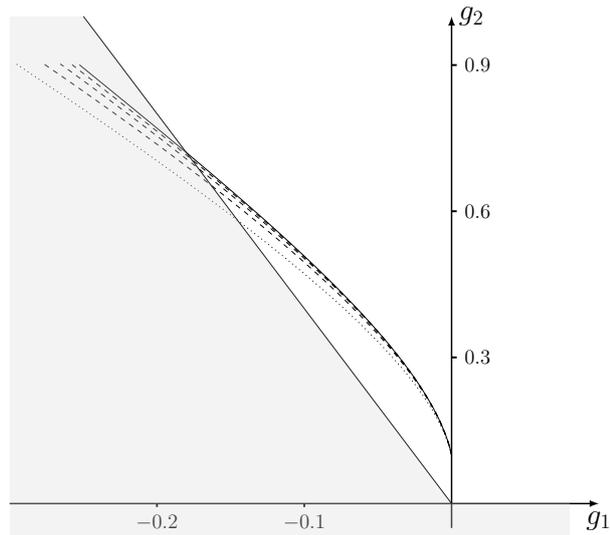


Рисунок 2.2: Траектории инвариантных зарядов с различным числом учтенных петель диаграмм при $d = 3$ и $N = 4$: 1-петлевое приближение – точечная (нижняя) линия, 5-петлевое приближение – сплошная (верхняя) линия.

в зависимости от значения ренормированных зарядов, в системе может произойти переход первого рода, либо непрерывный фазовый переход. Такие заключения можно сделать исходя из максимально доступных на сегодня пяти-петлевых расчётов ренормгрупповых функций.

Полученные решения будут справедливы, пока будет верным представление (2.15), т.е. во всей области I. Далее, когда заряд попадает в область II, сингулярность $B(z)$ переходит на положительную полуось, т.е. на контур интегрирования. Это уже не позволяет использовать конформ-борель преобразование в форме (2.15).

Ситуация принципиально не меняется при рассмотрении $N > 4$. Например, при $N = 6$ в теории появляются уже три типа инстантонов. В этом случае плоскость (g_1, g_2) будет делиться на большее число областей, чем при $N = 4$. Отметим лишь, что до границы устойчивости и в некоторой окрестности после неё при любых N главный вклад в асимптотику вносит наиболее вырожденный инстантон с $n = 1$. Можно полагать, что если фазовый переход первого типа действительно имеет место, то он происходит вблизи границы устойчивости. По этой причине пересуммирование достаточно проводить лишь с $a = a(1)$.

Глава 3

Описание фазового перехода

3.1 РГ анализ составных операторов

Во введении отмечалось, что потеря устойчивости системы является признаком того, что в ней может произойти фазовый переход первого рода. Однако, параметр $\xi = \xi_0$, при котором это происходит, не определяет температуру фазового перехода. При достижении ξ_0 в системе появляются лишь метастабильные состояния. Чтобы ответить на вопрос, когда эти состояния с конденсатом станут устойчивыми, т.е. чтобы определить температуру перехода, необходимо провести более детальный анализ разложения Ландау (1.16). Из-за того, что нелинейные члены ($\sim \chi^4$) действия (1.16) не являются положительно определёнными, необходимо включать следующие порядки ($\sim \chi^6$) в петлевом разложении (1.13).

Рассмотрим расширенное эффективное действие, т.е. действие (1.16) с добавкой члена $F_3 \equiv \text{tr}(\chi^\dagger \chi)^3$. В процедуре ренормировки в $4 - \varepsilon$ схеме F_3 будет рассмотрен как составной оператор с канонической размерностью $\Delta_3 = 6 - 3\varepsilon$. Кроме того, существуют составные операторы $F_2 \equiv \text{tr}(\chi^\dagger \chi)^2 \text{tr}(\chi^\dagger \chi)$ и $F_1 \equiv (\text{tr} \chi^\dagger \chi)^3$ с такой же размерностью, как и F_3 , поэтому они могут смешиваться в процессе ренормировки. Таким образом, член $\lambda_{0j} F_j / 36$ должен быть включен в эффективное действие (1.16), здесь λ_{0j} затравочные однородные источники. Для такой расширенной модели можно ввести ренормированные источники λ_i используя определение $\lambda_{0j} = Z_{jk} \lambda_k M^{2\varepsilon-2}$, где $Z_{jk} = \delta_{jk} + Z_{jk}^1 / \varepsilon + O(1/\varepsilon^2)$. Матрица Z является функцией ренормированных зарядов g_i . Бета-функция параметров λ_j имеет вид

$$\beta_{\lambda_j} = -(2\varepsilon - 2)\lambda_j + \lambda_i g_k \frac{\partial}{\partial g_k} Z_{ij}^1. \quad (3.1)$$

Матрица Z была вычислена в однопетлевом приближении, что даёт следующий результат для бета-функций

$$\beta_{\lambda_1} = 2(1 - \varepsilon)\lambda_1 + g_1 \left[\frac{3}{4}\lambda_1(N^2 - N + 14) + \lambda_2(N - 1) + \frac{3}{4}\lambda_3 \right] + \frac{3}{2}g_2 [\lambda_1(N - 1) + \lambda_2], \quad (3.2)$$

$$\beta_{\lambda_2} = 2(1 - \varepsilon)\lambda_2 + \frac{1}{4}g_1 [\lambda_3(6N - 9) + \lambda_2(N^2 - N + 38)] + \frac{3}{2}g_2 [6\lambda_1 + \lambda_2(N - 2) + 3\lambda_3], \quad (3.3)$$

$$\beta_{\lambda_3} = 2(1 - \varepsilon)\lambda_3 + \frac{15}{2}g_1\lambda_3 + \frac{3}{2}g_2 [\lambda_3(N - 4) + 4\lambda_2], \quad (3.4)$$

растяжение зарядов $g_i \rightarrow g_i 16\pi^2$ подразумевается.

Заметим, что для ренормировки операторов F_i должно быть учтено полное семейство составных операторов с одинаковыми каноническими размерностями при $d = 4$. Это семейство включает следующие структуры

$$f_{41} = \text{tr}(\Delta\chi^+\chi\chi^+\chi) + \text{tr}(\chi^+\Delta\chi\chi^+\chi), \quad f_{42} = \text{tr}(\partial_i\chi^+\chi\partial_i\chi^+\chi) + \text{tr}(\chi^+\partial_i\chi\chi^+\partial_i\chi), \quad (3.5)$$

$$f_{43} = \text{tr}(\Delta\chi^+\chi) \text{tr}(\chi^+\chi) + \text{tr}(\chi^+\Delta\chi) \text{tr}(\chi^+\chi), \quad f_{44} = \text{tr}(\partial_i\chi^+\chi) \text{tr}(\partial_i\chi^+\chi) + \text{tr}(\chi^+\partial_i\chi) \text{tr}(\chi^+\partial_i\chi),$$

$$f_2 = \text{tr}(\Delta\chi^+\Delta\chi), \quad f_{45} = \text{tr}(\partial_i\chi^+\partial_i\chi) \text{tr}(\chi^+\chi),$$

вдобавок к самим F_i . Канонические размерности этих операторов $d[f_2] = d + 2$ и $d[f_{4i}] = 2d - 2$. Однако, в нашем анализе мы ограничимся рассмотрением лишь операторов F_i . Вклад членов (3.5) мы обсудим ниже.

Как было показано [12], величина $\beta \equiv \langle \chi \rangle$ является параметром порядка рассматриваемой модели. Ненулевые значения β приводили к фазовому переходу в сверхтекучее состояние. Значение β может быть вычислено минимизацией свободной энергии $-\Gamma$. В рамках среднего поля Ландау функционал $-\Gamma$ имеет вид

$$-\Gamma = \tau \text{tr} \beta^\dagger \beta + \frac{g_{01}}{4} (\text{tr} \beta \beta^\dagger)^2 + \frac{g_{02}}{4} \text{tr} \beta \beta^\dagger \beta \beta^\dagger + \frac{\lambda_{01}}{36} (\text{tr} \beta \beta^\dagger)^3 + \frac{\lambda_{02}}{36} \text{tr} (\beta \beta^\dagger)^2 \text{tr} \beta \beta^\dagger + \frac{\lambda_{03}}{36} \text{tr} (\beta \beta^\dagger)^3. \quad (3.6)$$

Схематически он представлен на Рис.(3.1). Поля β β^\dagger могут быть сведены к пфаффовоу форме унитарными преобразованиями (2.4). Имея это в виду, мы можем написать условие, при котором в системе происходит фазовый переход

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} \Gamma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta_j^*} \Gamma = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \forall j = 0, \dots, N/2. \quad (3.7)$$

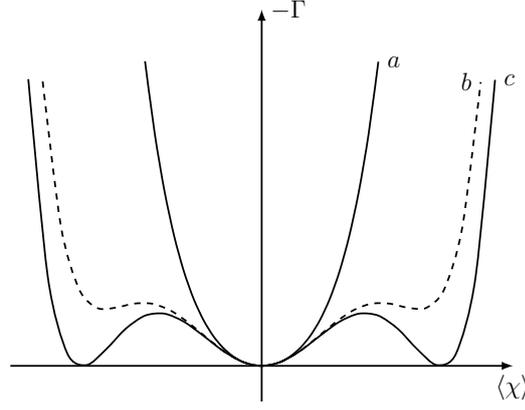


Рисунок 3.1: Свободная энергия как функция параметра порядка: a – неупорядоченное состояние, b – метастабильное состояние, c – “сверхтекучее” состояние.

Очевидно, петлевые поправки к среднеполевому приближению (3.6) содержат ИК-сингулярности. Они могут быть учтены в рассмотрении методом ренормализационной группы. Это приводит к тому, что заряды g_{0j}, λ_{0j} в (3.6) должны быть заменены на инвариантные константы связи $\bar{g}_j, \bar{\lambda}_j$, которые зависят от параметра τ . После такой операции вклады старших порядков дают лишь ε -поправки к приближению среднего поля.

Введём безразмерные переменные $z_j \equiv \beta_j/M^{d_\beta}, s \equiv \tau/M^2$, где $d_\beta = 1 - \varepsilon/2$ – каноническая размерность поля β . Напишем РГ уравнения на соответствующие инвариантные переменные

$$\partial_\xi \bar{g}_j = \frac{\beta_{g_j}}{2 + \gamma_\tau}, \quad \bar{g}_j|_{\xi=0} = g_j, \quad (3.8)$$

$$\partial_\xi \bar{\lambda}_j = \frac{\beta_{\lambda_j}}{2 + \gamma_\tau}, \quad \bar{\lambda}_j|_{\xi=0} = \lambda_j, \quad (3.9)$$

$$\partial_\xi \bar{z}_j = -\bar{z}_j \frac{\Delta_\beta + \gamma_\beta}{2 + \gamma_\tau}, \quad \bar{z}_j|_{\xi=0} = z_j, \quad (3.10)$$

объединяя эти уравнения с условиями (3.7) и (3.6), мы получим

$$|\bar{z}_j|^2 = -\frac{9}{2} \frac{2n\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{4n^2\bar{\lambda}_1 + 2n\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3}, \quad (3.11)$$

$$\tau = \frac{9}{16} \frac{(2n\bar{g}_1 + \bar{g}_2)^2}{4n^2\bar{\lambda}_1 + 2n\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3}, \quad (3.12)$$

где n число ненулевых блоков в пфаффовой форме параметра порядка. Таким образом, при уменьшении τ инвариантные заряды пересекают границу устойчивости, и новое решение (3.11) уравнения стационарности (3.7) возникает. Поле появившегося конденсата содержит два ненулевых блока, $n = 2$. Уравнение (3.12) определяет значение параметра $\tau = \tau_c$, при котором происходит фазовый переход. Для решения уравнения (3.12) необходимо знать траектории РГ урав-

нений (3.8) и (3.9). Аналогично (1.22) мы можем переписать уравнения (3.9) в форме ε -разложения, после чего они должны быть пересуммированы

$$\partial_\xi \bar{\lambda}_i = -\frac{2\varepsilon - 2}{\varepsilon} \bar{\lambda}_i + \sum_{J=0}^K \varepsilon^J \bar{\lambda}_j L_{ji}^{(J)}(\bar{g}_1, \bar{g}_2), \quad (3.13)$$

$$\bar{\lambda}_i|_{\xi=0} = \lambda_i,$$

коэффициенты $L_{ji}^{(J)}$ могут быть восстановлены по соответствующим бета-функциям (3.2, 3.3, 3.4). Для борелевского суммирования необходимо знать их асимптотику высоких порядков. Вычисление $L_{ji}^{(J)}$ связано с ренормировкой б-хвостых 1-неприводимых функций Грина ($\sim (\sqrt{J})^6$) со вставкой составного оператора $F_j \sim (\sqrt{J})^6$, поэтому $L_{ji}^{(J)} / (\sqrt{J})^{6+6} \sim B_i^{(J)} / (\sqrt{J})^4$. Теперь мы можем пересуммировать уравнения (3.13) по формуле (2.15). Результаты численного решения показаны на Рис.(3.2.а) и Рис(3.2.б). Пользуясь этими решениями, мы можем найти корень уравнения (3.12). Величина ξ_t этого корня практически неотличима от значения ξ_0 , при котором происходит нарушение устойчивости.

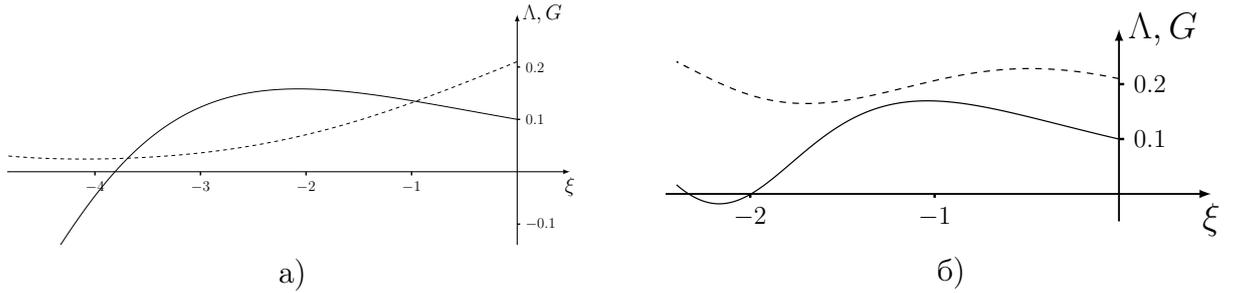


Рисунок 3.2: Траектории «эффективных» зарядов $\Lambda \equiv 4n^2 \bar{\lambda}_1 + 2n \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3$ (пунктирная линия) и $G \equiv 2n \bar{g}_1 + \bar{g}_2$ (сплошная линия); а) при $d = 3$ и $n = 2$; б) при $d = 2$ и $n = 2$.

Обсудим влияние операторов f_i (3.5) на полученные результаты. Существует ряд причин, по которым мы не вычисляли контрчлены для f_i :

- вклады этих членов малы по сравнению со вкладом операторов F_i , поскольку в реальных размерностях f_i более несущественны, чем F_i , в ИК-области;
- инстантонный анализ показывает, что вклады старших порядков от f_i следующего порядка малости по $1/J$ по сравнению с F_i .

Подводя итоги, отметим, что фазовый переход первого рода в рассматриваемой системе происходит при температурах $\tau_t > 0$ выше, чем те $\tau_{cl} = 0$, которые предсказываются теорией Ландау для непрерывных фазовых переходов.

3.2 Температура перехода

Оценим температуру перехода первого рода в трехмерной системе $d = 3$. На основе численных расчетов было обнаружено, что в достаточно широком диапазоне констант связи $g_i \approx 10^{-5} \div 0.1$ отношение $\zeta_0 \equiv \tau_t/g_2^2 \approx 2 \div 3$, где τ_t корень уравнения (3.12). Предполагая малость зарядов $g_1 \sim g_2 \ll 1$, мы можем считать, что выполнено равенство $Z_\tau/Z_{g_2}^2 \approx 1$, где константы ренормировки имеют вид $Z_m = 1 + O(g_j)$. Это приводит к соотношению $\tau_0/g_{02}^2 = \zeta_0$. Используя явные выражения для затравочных параметров в функционале Ландау-Ганзурга (1.16), которые даются вкладками соответствующих петлевых диаграмм (1.14, 1.15), получим уравнение на температуру перехода T_t

$$1 - \lambda\nu_F \ln \frac{\gamma\delta}{\pi T_t} = \lambda\nu_F \left(\frac{T_t}{T_F} \right)^4 A \quad (3.14)$$

где A безразмерная амплитуда, $A \equiv 6912\pi^6\zeta_0/(7\zeta(3))$. Уравнение это справедливо при малых длинах рассеяния $\lambda\nu_F \sim a_s p_F \ll 1$ и при низких температурах $T_t \ll \delta$.

Предположим, что температура T_t близка к температуре T_{cl} , которая предсказывается для непрерывных фазовых переходов [26] и удовлетворяет уравнению $1 - \lambda\nu_F \ln(\gamma\delta/\pi T_{cl}) = 0$. Разность температур обозначим за $\Delta T \equiv T_t - T_{cl}$. Близость этих температур означает, что $\Delta T/T_{cl} \ll 1$. Используя уравнение (3.14), получим

$$\frac{\Delta T}{T_{cl}} = \zeta_0 \frac{6912\pi^6}{7\zeta(3)} \left(\frac{T_{cl}}{T_F} \right)^4. \quad (3.15)$$

Если говорить об электронах в твёрдом теле, где обычно $T_{cl} \sim 0.1\omega_D$, а $\omega_D \sim 0.01T_F$, то для относительного отклонения температуры получим $\Delta T/T_{cl} \sim 10^{-6}$. Если иметь в виду систему фермиевских атомов, где $T_{cl} \sim 0.01T_F$, то $\Delta T/T_{cl} \sim 10^{-2}$. Видно, что разность эта действительно небольшая. Уточнить значения T_t можно непосредственным решением уравнения (3.14), однако при малых длинах рассеяния результат практически не изменится.

Заключение

Подведем итоги. Мы исследовали критические свойства $U(N)$ -симметричной модели фермионов с локальным притягивающим взаимодействием. Эта модель может быть реализована в фермиевской системе частиц с N спиновыми степенями свободы. Наш анализ был сфокусирован на влиянии числа спиновых компонент на поведение системы вблизи точки фазового перехода. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. На основе метода перевала в функциональном интеграле были исследованы свойства рядов теории возмущения в эффективной полевой модели. Было обнаружено нетривиальное поведение (2.9) разложений. Обсуждено влияние матричной структуры инстантона на АВП. Показано, что главный вклад в область фазового перехода вносят инстантонные решения с одним нетривиальным блоком.
2. С помощью информации об АВП проведено пересуммирование по Борелю ренормгрупповых уравнений, используя пятипетлевые РГ функции, вычисленные в [22]. Доказано, что в трехмерной системе термодинамические флуктуации приводят к фазовому переходу первого рода. Для двумерной системы оказалось недостаточно пятипетлевой точности для борелевского пересуммирования, поэтому сделать заключение о типе перехода или вообще о его существовании не представляется возможным.
3. В работе были проведён РГ анализ составных операторов $(\chi\chi^\dagger)^3$ в однопетлевом приближении, однако позже в [22] точность довели до трёх петель. Решение пересуммированных трехпетлевых РГ уравнений на соответствующие константы связи показало, что получаемые при этом величины практически не отличаются от вычислений с использованием однопетлевого приближения. Также показано, что температура, при которой происходит переход в сверхтекучее состояние, близка к температуре, при которой происходит нарушение устойчивости системы. Это позволяет сделать вывод о том, что метастабильное состояние практически мгновенно становится устойчивой новой фазой.

4. Приведены оценки (3.15) для температуры перехода T_t . При выполнении условий применимости наших рассуждений: малость длины рассеяния и вырожденность системы – обнаруженное значение T_t совпадает с известной оценкой температуры для непрерывного фазового перехода

$$T_{cl} = \frac{\gamma\delta}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\lambda\nu_F}\right),$$

с хорошей точностью. Это и объясняет тот факт, что во всех теоретических работах, в частности, упомянутых в списке литературы и касающихся ультрахолодных фермиевских систем, температура вычисляется этой формулой и не противоречит оценкам, полученным в экспериментах.

Благодарности. Профессорам и преподавателям Физического факультета СПбГУ, чьи лекции и занятия были интересны, полезны и красочны для меня, выражаю своё восхищение и благодарность за их труд, эрудицию, профессионализм и тёплое отношение к студентам. Приношу глубокую благодарность и признательность моему научному руководителю и Другу профессору Михаилу Юрьевичу Налимову за наше сотрудничество и его отношение ко мне. Благодарю Иванову Эллу, Куликова Анатолия, Волгина Игоря и Дьяконова Игоря – моих одногруппников, с которыми мне посчастливилось обучаться.

Список литературы

1. Superconductivity. Conventional and Unconventional Superconductors / Ed. by K.H. Bennemann, J.B. Ketterson. — Springer, 2008. — Vol. 1. — 1584 p.
2. Wu C. Exotic many-body physics with large-spin fermi gases // Physics. — 2010. — Vol. 3.
3. Bohn J. L. Cooper pairing in ultracold ^{40}K using feshbach resonances // Physical Review A. — 2000. — Vol. 61, no. 053409.
4. Cazalilla M. A. Ultracold fermi gases with emergent $SU(N)$ symmetry // Rep. Prog. Phys. — 2014. — Vol. 77, no. 124401.
5. Katsnelson M. Graphene. Carbon in Two Dimensions. — 2 edition. — Cambridge : Cambridge University Press, 2012. — 786 p.
6. Ho T.-L., Yip S. Pairing of fermions with arbitrary spin // Physical Review Letters. — 1999. — Vol. 82, no. 2.
7. Ozawa T., Baym G. Population imbalance and pairing in the $BCS-BEC$ crossover of three-component ultracold fermions // Physical Review A. — 2010. — Vol. 82, no. 063615.
8. Cherng R., Refael G., Demler E. Superfluidity and magnetism in multicomponent ultracold fermions // Physical Review Letters. — 2007. — Vol. 99, no. 130406.
9. Cazalilla M. A., Ho A. F., Ueda M. Ultracold gases of ytterbium: ferromagnetism and mott states in an $SU(6)$ fermi system // New Journal of Physics. — 2009. — Vol. 11, no. 103033.
10. Honerkamp C., Hofstetter W. BCS pairing in fermi systems with N different hyperfine states // Physical Review B. — 2004. — Vol. 70, no. 094521.
11. Honerkamp C., Hofstetter W. Ultracold fermions and the $SU(N) - HubbardModel$ // Physical Review Letters. — 2004. — Vol. 92, no. 170403.

12. Komarova M. V., Nalimov M. Y., Honkonen J. Temperature green's functions in fermi systems: The superconducting phase transition // Theor. and Math. Phys. — 2013. — Vol. 176, no. 1. — P. 906.
13. Vasil'ev A. The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics.
14. Calabrese P., Parruccini P., Sokolov A. Critical thermodynamics of a three-dimensional chiral model for $n > 3$ // Physical Review B. — 2003. — Vol. 68, no. 094415.
15. Calabrese P., Orlov E., Parruccini P., Sokolov A. Chiral critical behavior of frustrated spin systems in two dimensions from five-loop renormalization-group expansions // Physical Review B. — 2003. — Vol. 67, no. 024413.
16. Calabrese P., E.V., Parruccini P., Sokolov A. Chiral phase transitions: Focus driven critical behavior in systems with planar and vector ordering // Physical Review B. — 2002. — Vol. 66, no. 180403.
17. Antonenko S., Sokolov A., Varnashev K. Chiral transitions in three-dimensional magnets and higher-order ε -expansion // Phys.Letters A. — 1995. — Vol. 208, no. 161.
18. Antonenko S., Sokolov A., Varnashev K. Phase transitions in anisotropic superconducting and magnetic systems with vector order parameter: three-loop renormalization group analysis // Phys.Rev. B. — 1994. — Vol. 49, no. 15902.
19. Kleinert H., Schulte-Frohlinde V. Critical Properties of Φ^4 -Theories. — Springer, 2008. — Vol. 1. — 584 p.
20. Zinn-Justin J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. — 4 edition. — Oxford : Clarendon Press, 2002. — 1074 p.
21. Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Y. Renormalization-group study of a superconducting phase transition: Asymptotic behavior of higher expansion orders and results of three-loop calculations // Theor. and Math. Phys. — 2014. — Vol. 181, no. 2. — P. 1448.
22. Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Y. Renormalization-group studing of a superconducting $U(N)$ -phase transition using five loops calculations. // Nuclear Phys.B, in print.
23. Altland A., Simons B. Condensed Matter Field Theory. — 2 edition. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 786 p.

24. Tsvetik A. Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics. — 2 edition. — Cambridge : Cambridge University Press, 2007. — 380 p.
25. Taylor J. Scattering Theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions. — Dover Publications, 2006. — 512 p.
26. Gor'kov L., Melik-Barkhudarov T. K. Contribution to the theory of superfluidity in an imperfect fermi gas // J. Exptl. Theoret. Phys. — 1961. — Vol. 40. — P. 1452.
27. Dyson F. J. Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics // Phys. Rev. — 1956. — Vol. 85. — P. 631.
28. Lipatov L. N. Divergence of the perturbation-theory series and the quasi-classical theory // JETP. — 1977. — Vol. 72. — P. 411.
29. Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Perturbation theory at large order. I: the Φ^{2N} interaction // Phys. Rev. D. — 1977. — Vol. 15. — P. 1544.
30. Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Perturbation theory at large order. II: role of the vacuum instability // Phys. Rev. D. — 1977. — Vol. 15. — P. 1588.
31. Komarova M. V., Nalimov M. Y. Asymptotic behavior of renormalization constants in higher order of perturbation expansions for the $(4 - \varepsilon)$ -dimensionally regularized $O(N)$ -symmetric Φ^4 theory // Theor. and Math. Phys. — 2001. — Vol. 126, no. 3. — P. 339.
32. Kalagov G. A., Nalimov M. Y. Higher-order asymptotics and critical indexes in the Φ^3 theory // Nuclear Physics B. — 2014. — Vol. 884. — P. 672.
33. Honkonen J., Komarova M. V., Nalimov M. Y. Instantons for dynamic models from B to H // Nuclear Physics B. — 2005. — Vol. 714, no. 3. — P. 292.