

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Физический факультет  
Кафедра статистической физики

Выпускная квалификационная работа магистра

Кравченко Сергей Сергеевич

**Квазиклассический анализ спектра магнонов в решетке с  
основным скирмионным состоянием**

Научный руководитель:  
проф., д.ф.-м.н.  
Аристов Д.Н.

Рецензент:  
проф., д.ф.-м.н.  
Уздин В.М.

Санкт-Петербург 2014

# Содержание

1	Введение	2
2	Континуальная теория взаимодействия спинов в двумерной решетке спинов	3
3	Вывод уравнения на скирмион из решеточной модели	7
4	Учет взаимодействия Дзялошинского-Мории	8
5	Получение спектрального уравнения	10
6	Заключение	11
7	Приложение	12
	Литература	15

# 1 Введение

В недавнее время было экспериментально установлено, что в тонких пленках магнетиков с сильной перпендикулярной анизотропией типа легкая ось вектор намагниченности, при определенных условиях, может образовывать вихревые кластеры. Импульсным воздействием магнитного поля лабиринтная структура доменных стенок в тонких пленках преобразуются в структуры особого типа, такие как спиральные домены и домены с высокой степенью трансляционной и ориентационной упорядоченности [2].

Статическая стабильность и нелинейность – отличительная особенность таких кластеров. Такие структуры являются долгоживущими и не исчезают при выключении магнитного поля. Из-за этого свойства магнитные структуры центрированных доменов и спиралевидных структур могут рассматриваться как дефекты, возбуждаемые накачкой энергии в магнитоупорядоченную среду и релаксирующие в термодинамически равновесное состояние в течение долгого времени. Как было показано в работе [1], такие конфигурации спинов удовлетворяют локальному минимуму энергии обменного взаимодействия.

Каждой такой конфигурации можно сопоставить топологический индекс  $q$ , который определяет её класс. Если рассматривать двумерную решетку спинов, то положение каждого спина в решетке можно отождествить с точкой на сфере  $\tilde{S}^2$ . Направлению спина можно сопоставить точку на сфере  $S^2$ . Отображения  $F : S^2 \rightarrow \tilde{S}^2$  разбиваются на классы со своим  $q$ . Для индекса  $q$  есть явная формула, которая для вектора  $\mathbf{M} = (\sin \theta \cos \psi, \sin \theta \sin \psi, \cos \theta)$  запишется как

$$q = \frac{1}{4\pi} \int \sin \theta(\mathbf{r}) d\theta(\mathbf{r}) d\psi(\mathbf{r})$$

Откуда видно, что  $q$  - число раз, которое сфера  $S^2$  покрывается при отображении. Зная  $q$ , можно оценить нижние значения энергии для метастабильных состояний:

$$H \geq 4J\pi q$$

Очевидно, что для однородного ферромагнетика  $q = 0$ . Такое состояние ферромагнетика называют топологически тривиальным.

Скирмион – кольцевидная спиновая структура с противоположными направлениями спинов в центре и на границе (рис.1). Как можно убедиться из формулы (1) скирмионы имеют топологический индекс  $q = 1$ .

Зная  $q$ , можно оценить нижние значения энергии для метастабильного состояния, как было показано в работе [1]. Экспериментальное подтверждение существования долгоживущих топологически нетривиальных двумерных кольцевидных спиновых структур – скирмионов [8–10] с  $q = 1$ , вызвало большой интерес. Скирмионы больших радиусов (порядка 100 периодов решетки) экспериментально наблюдались в тонких пленках TbFeCo [11]. Теоретические исследования таких структур проводились в работах [1, 2, 7, 12–15].

Целью этой работы является проанализировать квазиклассическим методом спектр магнонов, приняв за основное состояние скирмионную конфигурацию

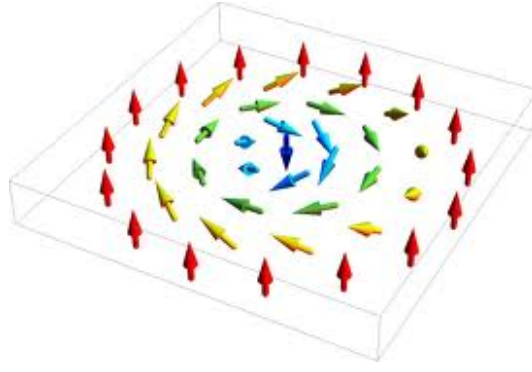


Рис. 1: Скирмионная спиновая структура.

спинов. Следует отметить, что предыдущие работы ограничивались классическим рассмотрением спиновой динамики в данной задаче.

## 2 Континуальная теория взаимодействия спинов в двумерной решетке спинов

Рассмотрим виды взаимодействий между спинами в узлах решетки, так как характер взаимодействий влияет на взаимную ориентацию спинов. Пусть вектор  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, характеризующий направление намагниченности. Тогда обменное взаимодействие можно представить в следующем виде:

$$H_J = \frac{1}{2}\Gamma \int \nabla \mathbf{n} \nabla \mathbf{n} dr \quad (1)$$

где константа  $\Gamma$  – положительная величина, это взаимодействие выстраивает спины вдоль одного направления, однако выделенного направления нет. Еще есть вклад обменного взаимодействия Дзялошинского-Мории:

$$H_{DM} = D \int d^2x \mathbf{n} [\nabla \times \mathbf{n}]$$

Этот вклад ненулевой в том случае, когда поле кристаллической решетки несимметрично относительно инверсии.

Анизотропный вклад:

$$H_\xi = -\xi^{-2} \int d^2x n_z^2$$

и вклад внешнего магнитного поля:

$$H_z = -\Delta_z \int \frac{d^2x}{a^2} \mathbf{n}_z(\mathbf{x})$$

выделяют направления, вдоль которых выгодно выстраиваться спином. Причем не обязательно, чтобы направления двух последних вкладов совпадали.

Дальнодействующее диполь-дипольное взаимодействие:

$$H_D = \frac{\Omega}{4\pi} \int d^2x d^2x' \left[ \frac{\mathbf{n}(x)\mathbf{n}(x')}{r^3} - \frac{3[\mathbf{n}(x)\mathbf{r}][\mathbf{n}(x')\mathbf{r}]}{r^5} \right]$$

этот вклад мал по энергии, в сравнении с обменным взаимодействием, для соседних спинов. Однако это взаимодействие является дальнедействующим, поэтому учет этого вклада в двумерных системах может объяснить причину возникновения нетривиальных спиновых структур.

В нашем рассмотрении будут квазидвумерные системы, таковыми являются тонкие пленки из 2-8 монослоев. Намагниченность таких пленок прямым образом зависит от их толщины. В толстых пленках, порядка десяти и выше монослоев, намагниченность направлена вдоль плоскости. В очень тонких пленках, от одного до пяти монослоев, намагниченность перпендикулярно плоскости. В слоях с промежуточным числом монослоев направленность спинов зависит от температуры: при низких температурах спины выстраиваются перпендикулярно плоскости, при высоких – параллельно. Экспериментально в работе [4] был обнаружен обратимый реорганизационный фазовый переход от одного состояния к другому при температурах 230-270 К. Возникновение перпендикулярной намагниченности объясняется нарушением симметрии в гранецентрированных кубических решетках у поверхности пленки, которое приводит к одноосной анизотропии типа легкая ось. Этот эффект тем сильнее, чем тоньше пленка. Это было подтверждено численными расчетами, откуда было заключено, что основное состояние для ферромагнетика – это когда все спины направлены перпендикулярно плоскости. Явление перемагничивания при повышении температуры объясняется конкурирующими вкладами анизотропии и диполь-дипольного взаимодействия, которые зависят от температуры. Эффективная величина,  $\lambda_e$ , включает чистый вклад  $\lambda$ , и короткодействующий вклад диполь-дипольного взаимодействия  $\Omega_s$ , который имеет противоположный знак. Коэффициент  $\lambda$  не зависит от числа слоев  $N$ , в то время как  $\Omega_s$  пропорционально  $N$ . Тогда эффективная анизотропия переписется в виде:

$$\lambda_e = \lambda - N\Omega/a$$

где  $\Omega = 4\pi g\mu^2/a^4$  – коэффициент при диполь-дипольном взаимодействии,  $\mu$  – магнетон Бора,  $a$  – постоянная решетки,  $g$  – фактор Ланде. В работе [5] сделана оценка энергии анизотропного вклада:  $\lambda a^2 \approx 22K$ . Которая должна быть сравнимой с энергией диполь-дипольного взаимодействия:  $\Omega a \approx 2.4K$ . При определенном выборе числа монослоев,  $N \approx \lambda a/\Omega$ ,  $\lambda_e$  становится порядка  $\Omega/a$ . Для  $N > \lambda a/\Omega$  вектора намагниченности лежат вдоль плоскости при нуле температуры. Как было показано в работе [6] диполь-дипольное взаимодействие при перпендикулярной намагниченности стремится перестроить спины в доменную полосовую структуру. В качестве решения задачи на минимизацию гамильтониана:

$$H = H_J + H_\xi + H_D$$

был взят анзац доменных стенок. Было показано, что такое решение является энергетически выгоднее, чем решение с однородным расположением спинов. Также был найден оптимальный период доменных стенок, который зависит от температуры. При понижении температуры период стремится к бесконечности, что соответствует однородному состоянию. Позже, по аналогии с этой работой,

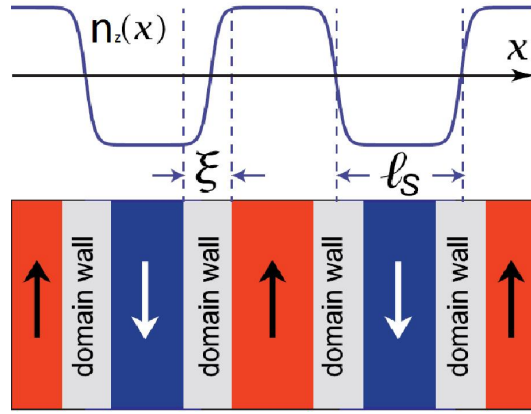


Рис. 2: Схематическая иллюстрация полосового доменного ферромагнетика.  $\xi$  – характерная ширина доменной стенки,  $l_s$  – характерная ширина домена,  $n_z$  – компонента намагниченности, направленная перпендикулярно пленки.

японский автор [3] использовал анзацное скирмионное решение для минимизации

$$H = H_J + H_\xi + H_D + H_z \quad (2)$$

с разнонаправленными спинами в центре и на границе: Здесь  $\sigma(\mathbf{r})$  – направление

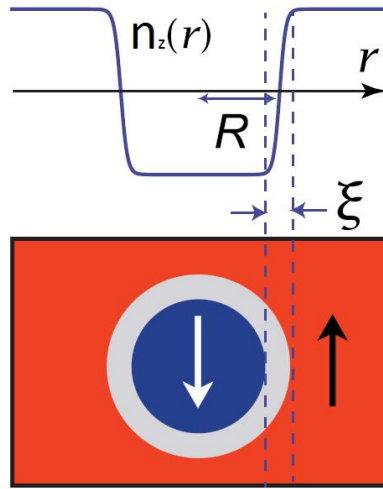


Рис. 3: Иллюстрация скирмионной структуры как кольцевидного спинового домена.  $\xi$  – характерная ширина доменной стенки,  $R$  – характерный радиус,  $n_z$  – компонента намагниченности, направленная перпендикулярно пленке.

намагниченности, перпендикулярное образцу. Минимизируя (2), было получено уравнение на радиус скирмиона.

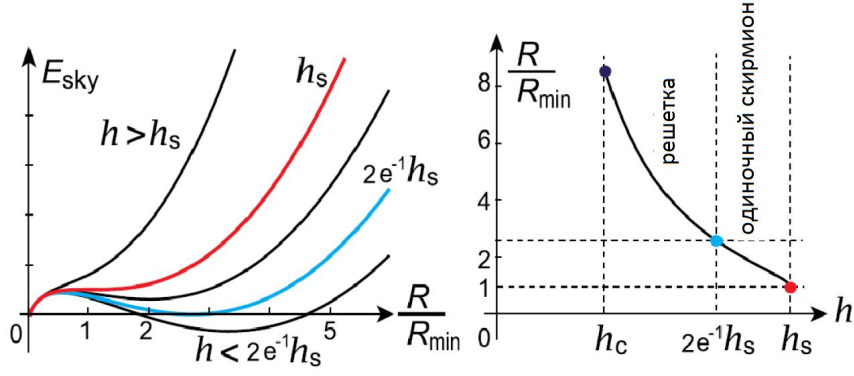


Рис. 4: Зависимость организации спиновых структур от внешнего магнитного поля

Оказалось, что скирмион стабилен при значении внешнего поля ниже некоторой пороговой величины  $h_s$ . При  $h < 2e^{-1}h_s$  минимум энергии скирмиона проседает ниже основного состояния и спинам выгодно перестроиться в решетку скирмионов.

Покажем, что для обменного взаимодействия, скирмионная конфигурация спинов является экстремальной. Запишем подынтегральное выражение (1) в цилиндрических координатах:

$$\nabla \mathbf{n} \nabla \mathbf{n} = \left( \frac{d\beta}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{d\beta}{d\phi} \right)^2 + \sin^2 \beta \left[ \left( \frac{d\alpha}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{d\alpha}{d\phi} \right)^2 \right]$$

Используя условие на скирмион:

$$\begin{cases} \frac{d\beta}{d\phi} = 0 \\ \frac{d\alpha}{d\phi} = 1; \frac{d\alpha}{dr} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Приходим к упрощенному виду гамильтониана (1):

$$H = \frac{1}{2} \Gamma \int_0^\infty \left[ \left( \frac{d\beta}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 \beta \right] r dr$$

минимизируя интеграл по  $\beta$ , получаем зависимость:

$$\beta = 2 \operatorname{arcctg} \left( \frac{r}{r_0} \right)$$

которая вместе с условием (3) дает экстремальное решение для (1).

### 3 Вывод уравнения на скирмион из решеточной модели

Рассмотрим гамильтониан с обменным взаимодействием:

$$H = - \sum_{\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j} J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{S}_{\mathbf{r}_i} \mathbf{S}_{\mathbf{r}_j} \quad (4)$$

Перепишем гамильтониан (4) в локальном базисе, где ненулевая только z-компонента в равновесии. Пересчет компонент спина от локального базиса к обычному, в котором направление осей не меняется с положением, задается матрицей  $U(\mathbf{r})$ :

$$U = e^{\alpha \sigma_3} e^{\beta \sigma_1} e^{\gamma \sigma_3}$$

где  $\sigma_3, \sigma_1$  – генераторы группы вращения,  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы Эйлера. Тогда гамильтониан (4) в новом базисе запишется в виде:

$$H = - \sum_{\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j} J(\mathbf{n}) \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{r}_i} R(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}) \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{r}_j} \quad (5)$$

$\mathbf{n} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ,  $R(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}) = U^{-1}(\mathbf{r}_i) U(\mathbf{r}_i + \mathbf{n})$ .

Так как обменный интеграл  $J(\mathbf{n})$  – быстро убывающая функция расстояния  $\mathbf{n}$ , то матрицу  $R^{k,j}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ , можно представить в виде разложения:

$$R^{lk}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = I + \chi_{1,j}^{lk}(\mathbf{r}) n^j + \chi_{2,jm}^{lk}(\mathbf{r}) n^j n^m \quad (6)$$

где:

$$\begin{cases} \chi_{1,j}^{lk}(\mathbf{r}) = U^{il}(\mathbf{r}) \nabla^j U^{ik}(\mathbf{r}) \\ \chi_{2,jm}^{lk}(\mathbf{r}) = U^{il}(\mathbf{r}) \nabla^j \nabla^m U^{ik}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

Тогда гамильтониан (5) с учетом этого разложения переписывается в виде:

$$\sum_{\mathbf{r}, \mathbf{n}} J(\mathbf{n}) \tilde{S}^l (I + \chi_{1,j}^{lk}(\mathbf{r}) n^j + \chi_{2,jm}^{lk}(\mathbf{r}) n^j n^m) \tilde{S}^k \quad (7)$$

Необходимое условие на равновесность спиновой конфигурации – сонаправленность суммарного поля, создаваемого соседними атомами с направлением спина в данном узле:

$$\begin{cases} \sum_{\mathbf{n}} J(\mathbf{n}) R^{3j}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0 \\ \sum_{\mathbf{n}} J(\mathbf{n}) R^{j3}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0 \end{cases} \quad \text{где } j = 1, 2 \quad (8)$$

Явный вид зависимости матриц  $U, \chi_{1,j}^{lk}, \chi_{2,jm}^{lk}$  от углов Эйлера известен, условие (8) должно определить координатные зависимости углов Эйлера от положения



в решетке. Также можно отметить, что условие (8) не дает никаких ограничений на матрицу  $\chi_{1,j}^{lk}$ , так как мы предполагаем, что  $J(\mathbf{n})$  - четная функция, то при суммировании по решетке  $\sum_{\mathbf{n}} J(\mathbf{n})\mathbf{n} = 0$ . В пределе длинных волн,  $J(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{n}} J(\mathbf{n})$ , представится в виде разложения:

$$J(\mathbf{q}) \simeq -J(0) - \frac{1}{2}Cq^2 \quad (9)$$

При такой зависимости формула на равновесие частично упрощается:

$$\chi_{2,jj}^{3k}(\mathbf{r}) = 0, \quad k = 1, 2$$

что эквивалентно условию на комплекснозначную величину:

$$\chi_2^{\dagger} = \chi_{2,jj}^{31} + i\chi_{2,jj}^{32} = 0$$

откуда получаем:

$$\chi_2^{\dagger} = e^{i\gamma} \cdot (2 \cos \beta \nabla \alpha \nabla \beta + \sin \beta \Delta \alpha + i(\Delta \beta - \sin \beta \cos \alpha (\nabla \alpha)^2)) \quad (10)$$

требуя  $\chi_2^{\dagger} = 0$  и подставляя условие на одиночный скирмион с центром в  $\mathbf{r} = 0$  (3), мы приходим к уравнению:

$$\beta = 2 \operatorname{arccctg} \left( \frac{r}{r_0} \right), \alpha + \alpha_0 = \phi \quad (11)$$

$r_0$  – некий размерный параметр, откуда получаем явные зависимости направления спина от координат в соответствии с [12]:

$$S_x = \frac{2rr_0}{r^2 + r_0^2} \cos(\alpha + \alpha_0), \quad S_y = \frac{2rr_0}{r^2 + r_0^2} \sin(\alpha + \alpha_0), \quad S_z = \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}$$

Отметим, что  $r_0$  и начальная фаза  $\alpha_0$  не могут быть определены в этом подходе.

## 4 Учет взаимодействия Дзялошинского-Мории

Целью этого раздела получить уравнение на равновесие по аналогии с симметричным обменным взаимодействием с учетом вклада обмена Дзялошинского-Мории. Рассмотрим решеточную модель. Проведем аналогичный вычисления, как в случае только обменного взаимодействия. Добавка к гамильтониану будет:

$$H_D = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{n}} D_{\mathbf{n}} [\mathbf{S}(\mathbf{r}), \mathbf{S}(\mathbf{r} + \mathbf{n})]$$

где выражение в квадратных скобках – векторное произведение. Вектор Дзялошинского - Мории  $\mathbf{D}_{\mathbf{n}}$  – сонаправлен с вектором  $\mathbf{n}$ , соединяющим узлы решетки спинов.

По аналогии вывода уравнения на скирмион в случае только симметричного

обменного взаимодействия, рассмотрим спины в новом локальном базисе, где ненулевая только z-компонента. Тогда  $H_D$  запишется в таком виде:

$$H_D = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{n}} \left( D_{\mathbf{n}} \left[ U(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{S}}, U(\mathbf{r} + \mathbf{n}) \tilde{\mathbf{S}} \right] \right) = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{n}} \left( D_{\mathbf{n}} \left[ U(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{S}}, (U(\mathbf{r}) + (\mathbf{n}, \nabla) U(\mathbf{r})) \tilde{\mathbf{S}} \right] \right) =$$

$$\sum_{\mathbf{r}, \mathbf{n}} \left( U^{-1}(\mathbf{r}) D_{\mathbf{n}} \left[ \tilde{\mathbf{S}}, U^{-1}(\mathbf{r}) (\mathbf{n}, \nabla) U(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{S}} \right] \right) = \sum_{j, \mathbf{r}, \mathbf{n}} n^j \left( U^{-1}(\mathbf{r}) D_{\mathbf{n}} \left[ \tilde{\mathbf{S}}, \chi_{1,j}(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{S}} \right] \right)$$

$U$  – матрица перехода к локальному базису. Это выражение можно переписать в виде:

$$H_D = \tilde{\mathbf{S}} G \tilde{\mathbf{S}}$$

где

$$G = F_x \cdot \chi_{1,x} + F_y \cdot \chi_{1,y}$$

где  $F_i^{jk}$  – матрица, представленная суммой:

$$\sum_{i,l} \epsilon_{ijk} U^{-1il}(\mathbf{r}) D_{\mathbf{n}}^l$$

$D_{\mathbf{n}}^l$  – вектор с ненулевой  $l$ -ой компонентой,  $l = x, y$ ,  $\epsilon_{ijk}$  – антисимметричный тензор. Тогда требование сонаправленности суммарного поля, наведенного на спин соседними спинами, выглядит так:

$$\chi_2^{31}(\mathbf{r}) + G^{31}(\mathbf{r}) + i (\chi_2^{32}(\mathbf{r}) + G^{32}(\mathbf{r})) = 0$$

которое приводит к уравнениям:

$$-D \cos \alpha \sin^2 \beta \frac{d\alpha}{dx} + D \sin \alpha \sin^2 \beta \frac{d\alpha}{dy} - \left( \frac{d^2 \beta}{dx^2} + \frac{d^2 \beta}{dy^2} \right) + \sin \beta \cos \beta \left( \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\alpha}{dy} \right)^2 \right)$$

$$D \cos(\alpha) \sin \beta \frac{d\beta}{dx} - D \sin \alpha \sin \beta \frac{d\beta}{dy} - \sin \beta \left( \frac{d^2 \alpha}{dx^2} + \frac{d^2 \alpha}{dy^2} \right) - 2 \cos \beta \left( \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dy} \right)$$

– от вещественной и от мнимой части соответственно. Переходя к полярным координатам, дифференциальные операторы переишутся в виде:

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2}$$

$$\mathbf{e}_x \frac{d}{dx} + \mathbf{e}_y \frac{d}{dy} = \frac{1}{r} \left( \mathbf{e}_\phi \frac{d}{d\phi} + \mathbf{e}_r \frac{d}{dr} \right)$$

Подставляя условие на скирмион (3), получим уравнения:

$$-D \sin^2 \beta (\nabla \alpha, \mathbf{e}_{-\alpha}) - \frac{1}{r^2} C \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial \rho^2} + \sin \beta \cos \beta \right) = 0$$

$$D \sin^2 \beta (\nabla \beta, \mathbf{e}_{-\alpha}) = 0$$

$\mathbf{e}_{-\alpha} = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$  – двумерный вектор.

К этим уравнениям можно прийти путем вариации классической энергии  $H = H_J + H_{DM}$ . Результаты вычислений подтверждают полученные уравнения.

## 5 Получение спектрального уравнения

Перейдем к изучению спиновой динамики кристалла. В нашем рассмотрении Гейзенберговский спиновый гамильтониан (4) с обменным интегралом  $J(\mathbf{r})$ , представленный в виде разложения (7).

Зная явный вид матрицы  $U$  и зависимости углов Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  от положения в решетке из уравнений (3) и (11), мы получаем явные выражения для матриц  $\chi_{1,j}^{lk}(\mathbf{r})$  и  $\chi_{2,jm}^{lk}(\mathbf{r})$ . Подставляя эти выражения в (7) и используя бозонное представление Малеева-Дайсона для спиновых операторов, сохраняющее коммутационные соотношения  $[\tilde{S}^i, \tilde{S}^j] = i\epsilon_{ijk}\tilde{S}^k$ :

$$\begin{aligned}\tilde{S}_j^z &= s - a_{\mathbf{r}_j}^+ a_{\mathbf{r}_j} \\ \tilde{S}_j^+ &= \sqrt{2s} a_{\mathbf{r}_j} \\ \tilde{S}_j^- &= \sqrt{2s} \left( a_{\mathbf{r}_j} - \frac{1}{2s} a_{\mathbf{r}_j}^+ a_{\mathbf{r}_j} a_{\mathbf{r}_j} \right)\end{aligned}\quad (12)$$

где  $s$  - спин атома,  $[a_{\mathbf{r}_j} a_{\mathbf{r}_j}^+] = 1$ , мы приходим к гамильтониану (7) в бозонном представлении.

В дальнейшем мы делаем два упрощения: мы будем рассматривать длинноволновые возбуждения, тогда  $J(\mathbf{q})$  представится формулой (9), и запишем (7) в Фурье-компонентах, используя квазиклассический предел большого спина  $s$ :

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\mathbf{q}}^x &\simeq \frac{1}{2}(\tilde{S}_{\mathbf{q}}^+ + \tilde{S}_{\mathbf{q}}^-) = \frac{\sqrt{2s}}{2} \sum_{\mathbf{r}_j} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} (a_{\mathbf{r}_j}^+ + a_{\mathbf{r}_j}) = \frac{\sqrt{2s}}{2} (a_{-\mathbf{q}}^+ + a_{\mathbf{q}}) \\ \tilde{S}_{\mathbf{q}}^y &\simeq \frac{1}{2}(\tilde{S}_{\mathbf{q}}^+ - \tilde{S}_{\mathbf{q}}^-) = \frac{\sqrt{2s}}{2} \sum_{\mathbf{r}_j} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} (a_{\mathbf{r}_j} - a_{\mathbf{r}_j}^+) = \frac{\sqrt{2s}}{2} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^+) \\ \tilde{S}_{\mathbf{q}}^z &= s\delta(\mathbf{q}) - \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

получим в главном порядке по  $s$ :

$$\begin{aligned}H &= \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{r}} \frac{C e^{(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathbf{r}}}{r^2} [\mathbf{r}, \mathbf{q}_2] \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2} s (a_{\mathbf{q}_1} a_{-\mathbf{q}_2}^+ - a_{-\mathbf{q}_1}^+ a_{\mathbf{q}_2}) \\ &+ \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{r}} \frac{C e^{(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathbf{r}}}{r^2} s (a_{\mathbf{q}_1} a_{-\mathbf{q}_2}^+ + a_{-\mathbf{q}_1}^+ a_{\mathbf{q}_2}) + \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{r}} \frac{8r_0^2 C s e^{i\mathbf{q}_2\mathbf{r}}}{(r^2 + r_0^2)^2} a_{\mathbf{q}_1}^+ a_{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathbf{r}} C \mathbf{q}_2^2 s (a_{-\mathbf{q}_1}^+ a_{\mathbf{q}_2} + a_{\mathbf{q}_2}^+ a_{\mathbf{q}_1} + \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2))\end{aligned}\quad (13)$$

Следует отметить, что данное выражение было получено в длинноволновом приближении, которое предполагает использование формулы (9). Переходя в координатное представление, получим выражение:

$$H = \int d\mathbf{r} \left( \frac{Cs}{r^2} a_{\mathbf{r}}^+ a_{\mathbf{r}} - \frac{8Cs r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2} a_{\mathbf{r}}^+ a_{\mathbf{r}} - C s a_{\mathbf{r}}^+ \nabla^2 a_{\mathbf{r}} + \frac{2Cs(r^2 - r_0^2)}{r^2(r^2 + r_0^2)} a_{\mathbf{r}}^+ L_z a_{\mathbf{r}} \right)$$

Из которого можно получить уравнение на эволюцию операторов  $a$ ,  $a^+$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_{\mathbf{r}} = [H, a_{\mathbf{r}}]$$

откуда получаем:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_{\mathbf{r}} = C_s \left( \frac{1}{r^2} - \frac{8r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{L_z^2}{r^2} + \frac{2(r^2 - r_0^2) L_z}{r^2 (r^2 + r_0^2)} \right) a_{\mathbf{r}}$$

где  $L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$ , и спектральное уравнение  $\psi$ :

$$C_s \left( \frac{1}{r^2} - \frac{8r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{L_z^2}{r^2} + \frac{2(r^2 - r_0^2) L_z}{r^2 (r^2 + r_0^2)} \right) \psi = \epsilon \psi$$

которое можно решить численно. Нас интересует нахождение аналитических решений этого уравнения. Из симметричных соображений, должно быть решение, отвечающее нулевой энергии. Можно убедиться, что есть множество решений с  $\epsilon = 0$ , отвечающих разным собственным значениям оператора  $L_z$ , где  $m$  – целое число:

$$\psi_m \propto \frac{r^{1-m}}{r_0^2 + r^2}$$

Нас интересуют несингулярные квадратично интегрируемые функции. Такое решение имеет вид:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{r_0}{r^2 + r_0^2}$$

для  $m = 1$ .

## 6 Заключение

Для вычисления квантового спектра в системе со скирмионным основным состоянием был использован метод квазиклассического квантования. Такой подход широко известен и описан в монографии [16]. Суть метода заключается в том, что равновесная конфигурация намагниченности (скирмион), возникающая при анализе локального минимума действия считается классическим вакуумом. Квантование действия над таким вакуумом приводит к понятию спектра возбуждений. В обычной ситуации однородной намагниченности этот подход ведет к стандартным волнам намагниченности – спиновым волнам или магнонам. Аналогичный анализ для скирмионной структуры в настоящее время отсутствует.

Квантовые спины этой работе описаны в рамках бозонного представления Малеева-Дайсона. При определенной спиральности такой структуры было воспроизведено скирмионное решение и был получен набор бозонных слагаемых. Линейные по бозонам члены отсутствуют, что соответствует равновесному положению

“вакуума”), а квадратичные дают спектр магнонов. Такой анализ был проведен для одиночного скирмиона, в результате которого было получено уравнение на волновую функцию магнона.

В дальнейшем предполагается обобщение на случай скирмионной решетки и получение наблюдаемых восприимчивостей, которое является нетривиальным в силу того, что для него требуется знание волновых функций магнонов. Неколлинеарность равновесной намагниченности, приводит к нетривиальному виду волновых функций и необычным структурным факторам для компонент тензора магнитной восприимчивости. Знание этого тензора необходимо для описания экспериментов по рассеянию нейтронов.

Выражаю благодарность за многочисленные полезные обсуждения и замечания своему научному руководителю Д. Н. Аристову.

## 7 Приложение

В этом разделе представлены матрицы, фигурирующие в разложении 6. простые соотношения для матриц  $\chi_{1,j}$ ,  $\chi_2$  таковы:

$$\begin{cases} \chi_{1,j} = U^{-1} \nabla^j U \\ \chi_2 = U^{-1} \Delta U \end{cases}$$

где  $U$  – матрица, характеризующая переход от локального базиса, в котором ось  $z$  сонаправлена с направлением спина, к обычному:

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - \sin(\alpha) \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma) & -\cos(\alpha) \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \cos(\gamma) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \sin(\gamma) & \cos(\alpha) \cos(\gamma) - \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(\gamma) & \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\gamma) \sin(\beta) & \sin(\beta) \sin(\gamma) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  – углы Эйлера, зависящие от координат. Матрица с первыми производными:

$$\chi_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\beta) \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\gamma}{dx} & \cos(\gamma) \frac{d\alpha}{dx} \sin(\beta) - \frac{d\beta}{dx} \sin(\gamma) \\ -\cos(\beta) \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\gamma}{dx} & 0 & \cos(\gamma) \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dx} \sin(\beta) \sin(\gamma) \\ \frac{d\beta}{dx} \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \frac{d\alpha}{dx} \sin(\beta) & -\cos(\gamma) \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx} \sin(\beta) \sin(\gamma) & 0 \end{pmatrix}$$

Имеем двухмерную решетку, тогда в нашем случае будут две матрицы с первыми производными такого же вида, соответствующие координатам  $x$  и  $y$ . Матрица со вторыми производными имеет вид:

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left( - (2 \cos(2\beta) \sin^2(\gamma) + \cos(2\gamma) + 3) \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 + \left( 4 \frac{d\beta}{dx} \sin(\beta) \sin(2\gamma) - 8 \cos(\beta) \frac{d\gamma}{dx} \right) \frac{d\alpha}{dx} - 4 \left( \left( \frac{d\gamma}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\beta}{dx} \right)^2 \sin^2(\gamma) \right) \right. \\ \left. - \cos(\beta) \frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \sin(\gamma) \left( \cos(\gamma) \left( \left( \frac{d\beta}{dx} \right)^2 - \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \sin^2(\beta) \right) + 2 \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dx} \sin(\beta) \sin(\gamma) \right) \right. \\ \left. 2 \cos(\gamma) \frac{d\beta}{dx} \frac{d\gamma}{dx} - \cos(\gamma) \frac{d^2\alpha}{dx^2} \sin(\beta) + \left( \frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d\alpha}{dx} \left( \cos(\beta) \frac{d\alpha}{dx} + 2 \frac{d\gamma}{dx} \right) \sin(\beta) \right) \sin(\gamma) \right) \\ \frac{1}{4} \left( - (2 \cos(2\gamma) \sin^2(\beta) + \cos(2\beta) + 3) \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 - 8 \left( \cos(\beta) \frac{d\gamma}{dx} + \cos(\gamma) \frac{d\beta}{dx} \sin(\beta) \sin(\gamma) \right) \frac{d\alpha}{dx} - 4 \left( \cos^2(\gamma) \left( \frac{d\beta}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\gamma}{dx} \right)^2 \right) \right) \\ \left. \left( 2 \frac{d\beta}{dx} \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d^2\alpha}{dx^2} \sin(\beta) \right) \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \left( \frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d\alpha}{dx} \left( \cos(\beta) \frac{d\alpha}{dx} + 2 \frac{d\gamma}{dx} \right) \sin(\beta) \right) \right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\beta) \sin(\beta) \sin(\gamma) \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 + 2 \cos(\beta) \cos(\gamma) \frac{d\beta}{dx} \frac{d\alpha}{dx} + \cos(\gamma) \frac{d^2\alpha}{dx^2} \sin(\beta) - \frac{d^2\beta}{dx^2} \sin(\gamma) \\ & \cos(\gamma) \left( \frac{d^2\beta}{dx^2} - \cos(\beta) \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \sin(\beta) \right) + \left( 2 \cos(\beta) \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dx} + \frac{d^2\alpha}{dx^2} \sin(\beta) \right) \sin(\gamma) \\ & - \left( \frac{d\beta}{dx} \right)^2 - \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \sin^2(\beta) \end{aligned}$$

Выпишем только два элемента  $\chi$  матрицы в виде суммы:

$$\chi_2^{3,1} + i\chi_2^{3,2} = e^{i\gamma} \left( \sin(\beta) \left( \frac{d^2\alpha}{dx^2} - i \cos(\beta) \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \right) + i \frac{d^2\beta}{dx^2} + 2 \cos(\beta) \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dx} \right)$$

равенство нулю которой дает нам уравнение на равновесность:

$$\begin{aligned} \Delta\beta - \sin\beta \cos\beta (\nabla\phi)^2 &= 0 \\ \Delta\alpha \sin(\beta) + 2\nabla\alpha \nabla\beta \cos(\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Делая соответствующие замены и переходя к цилиндрическим координатам, получим выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dx^2} &\rightarrow \frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2\alpha}{d\phi^2} + \frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} \\ \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dx} &\rightarrow \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dy} = \frac{1}{r^2} \frac{d\alpha}{d\phi} \frac{d\beta}{d\phi} + \frac{d\alpha}{dr} \frac{d\beta}{dr} \end{aligned}$$

и подставляя условия на скирмион:

$$\begin{cases} \frac{\partial\beta}{\partial\phi} = 0 \\ \frac{\partial\alpha}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial\alpha}{\partial\phi} = \pm 1 \end{cases} \quad (15)$$

приходим из (14) к уравнению вида:

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial\rho^2} = \sin\beta \cos\beta \quad (16)$$

где  $\rho = \ln \frac{r}{r_0}$ , откуда следует

$$\beta = 2 \operatorname{arcctg}(e^{\pm\rho})$$

второе уравнение из (14) выполняется автоматически. Учтя полученную зависимость  $\beta$  от  $\rho$  и подставляя условие на скирмион (15), получаем матрицы  $\chi_1$  для компонент  $\rho$  и  $\phi$ :

$$\chi_1(\rho) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{sech}(\rho) \\ 0 & \operatorname{sech}(\rho) & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\chi_1(\rho) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & \tanh(\rho) & \operatorname{sech}(\rho) \\ -\tanh(\rho) & 0 & 0 \\ -\operatorname{sech}(\rho) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

матрица со вторыми производными с учетом условия на скримион (15) в координатах  $\rho$  и  $\phi$  имеет вид:

$$\chi_2(\rho) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2\operatorname{sech}(\rho)\tanh(\rho) & -2\operatorname{sech}^2(\rho) \end{pmatrix} \quad (19)$$

Далее эти выражения подставляются в гамильтониан (7), что приводит к выражению (13) с учетом (9).

# Список литературы

1. *Белавин А. А., Поляков А. М.* Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики 1975. Т. 22, № 10, С. 503-506
2. *Кандаурова Г. С., Свидерский А. Э.* Возбужденное состояние и спиральная динамическая доменная структура в магнитном кристалле // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики 1988. Т. 47, № 8, С. 410–412
3. *Motohiko Ezawa* Giant Skyrmions Stabilized by Dipole-Dipole Interactions in Thin Ferromagnetic Films // Physical Review Letters 2010. 105, 197202
4. *Pappas D.P., Kaemper K.P., and Hopster H.* Reversible transition between perpendicular and in-plane magnetization in ultrathin films // 1990. Physical Review Letters 64, 3179
5. *Gay J.G. and Richter R.* Spin Anisotropy of Ferromagnetic Films // Physical Review Letters 1986. 56, 2728
6. *Kashuba A. B., Pokrovsky V. L.* Stripe domain structures in a thin ferromagnetic film // Physical Review B 1993. 48, 14
7. *Petrova O., Tchernyshyov O.* Spin waves in a skyrmion crystal // Physical Review B 2011. 84, 214433
8. *Muhlbauer S., Binz B., Jonietz F. et al.* Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet // Science 2009. 323, 915
9. *Yu X. Z., Onose Y., Kanazawa N., Park J. H. et al.* Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal // Nature 2010. 465, 901
10. *Yu X. Z., Kanazawa N., Onose Y. et al.* Near room-temperature formation of a skyrmion crystal in thin-films of the helimagnet FeGe // Nature Materials 2011. 10, 106
11. *Ogasawara T., Iwata N., Murakami Y. et al.* // Applied Physics Letters 2009. 94, 162507
12. *Abanov A., Pokrovsky V. L.* Skyrmion in a real magnetic film // Physical Review B 1998. V. 58, N 14
13. *Ezawa M.* Giant Skyrmions Stabilized by Dipole-Dipole Interactions in Thin Ferromagnetic Films // Physical Review Letters 2010. 105, 197202
14. *Mochizuki M.* Spin-Wave Modes and Their Intense Excitation Effects in Skyrmion Crystals // Physical Review Letters 2012. 108, 267601



15. *Han J. H., Zang J., Yang Z. et al.* Skyrmion lattice in a two-dimensional chiral magnet // Physical Review B 2010. 82, 094429
16. *Rajaraman R.* Solitons and instantons // 1982.