

Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

Кафедра Статистической физики



**Автомодельное решение задачи о росте капли при учете  
стефановского течения и тепловых эффектов.**

Бакалаврская работа студента

дневного отделения

**Дружинина Александра Павловича**

Научный руководитель:

д. ф. н., проф. **Кучма А.Е.**

Рецензент:

д. ф. н., проф. **Щекин А.К.**

## Оглавление

1. Постановка задачи.....	3
2. Выражения для потоков и уравнение для концентрации пара .....	3
3. Скорость гидродинамического течения парогазовой смеси .....	6
4. Приближенные выражения для концентрации пара и температуры среды.....	7
5. Приближенное выражение для скорости гидродинамического течения.....	11
6. Заключение .....	14
7. Список литературы.....	15

## 1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается автомодельный режим диффузионного роста капли при учете тепловых эффектов конденсации и гидродинамического течения окружающей каплю парогазовой среды, содержащей пересыщенный пар конденсирующегося вещества и пассивный газ-носитель.

Нестационарный рост капли при учете стефановского течения в изотермическом случае был подробно описан в [1]. В этой работе было построено автомодельное решение для профиля концентрации конденсирующегося вещества и получено выражение для скорости роста размера капли при учете зависимости от концентрации коэффициента диффузии молекул пара. Основные соотношения, описывающие режим автомодельного роста капли в неизотермическом случае получены в [2]. Соответствующая система уравнений для профилей концентрации пара и температуры окружающей каплю среды содержит в качестве параметров температуру капли и скорость роста ее размера. Эти две величины, как показано в [2], определяются самосогласованным образом с использованием уравнений баланса тепла и числа частиц пара.

В условиях, когда концентрация конденсирующегося пара является малой по сравнению с концентрацией пассивного газа, решение полученной в [2] системы уравнений может быть найдено последовательными приближениями. При этом в качестве основного приближения для профилей концентрации пара и температуры используются зависимости, получаемые в пренебрежении стефановским течением парогазовой смеси. Для следующего шага необходимо с использованием этих зависимостей найти профиль скорости гидродинамического течения окружающей каплю среды, вызванного как поглощением частиц пара растущей каплей, так и тепловым ее разогревом за счет выделяющегося при конденсации пара тепла, что и является задачей настоящей работы.

## 2. Выражения для потоков и уравнение для концентрации пара

Изложим кратко, следуя [2], основные соотношения для потоков частиц при конденсационном росте капли в двухкомпонентной газовой смеси, состоящей из пересыщенного пара (компонент 1) с концентрацией частиц  $n_1$  и пассивного газа (компонент 2) с концентрацией частиц  $n_2$ .

Исходными являются выражения для плотностей диффузионных потоков массы пара и пассивного газа в системе отсчета, где равна нулю сумма диффузионных потоков массы [3]:

$$\vec{i}_1 = -\rho D(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T),$$

$$\vec{i}_2 = \rho D(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T)$$

Здесь  $m_1$  и  $m_2$  - массы частицы пара и пассивного газа соответственно,  $c = \frac{n_1 m_1}{n_1 m_1 + n_2 m_2}$  -

массовая доля пара,  $n_1$  и  $n_2$  - локальные концентрации частиц пара и пассивного газа,

$\rho = n_1 m_1 + n_2 m_2$ ,  $D$  - коэффициент диффузии частиц пара,  $k_T$  - коэффициент термодиффузии,  $T$  - локальная температура

Приведенные выражения для плотностей диффузионных потоков можно эквивалентным образом переписать как

$$\vec{i}_1 = -D \frac{m_1 m_2}{\rho} (n \nabla n_1 - n_1 \nabla n) - \rho D \frac{k_T}{T} \nabla T, \quad (2.1a)$$

$$\vec{i}_2 = -D \frac{m_1 m_2}{\rho} (n \nabla n_2 - n_2 \nabla n) + \rho D \frac{k_T}{T} \nabla T, \quad (2.16)$$

где  $n = n_1 + n_2$  - полная локальная концентрация частиц в окружающей каплю среде.

Для дальнейшего удобно перейти в систему отсчета, в которой равна нулю сумма плотностей диффузионных потоков частиц. В этой системе для плотностей потоков частиц имеем

$$\vec{J}_1 = \frac{\vec{i}_1}{m_1} + n_1 \vec{u}, \quad (2.2a)$$

$$\vec{J}_2 = \frac{\vec{i}_2}{m_2} + n_2 \vec{u}, \quad (2.26)$$

где  $\vec{u}$  - локальная скорость новой системы относительно старой. Из условия  $\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = 0$  следует

$$\vec{u} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 n} \vec{i}_1, \quad \vec{J}_1 = -\vec{J}_2 = \frac{\rho}{m_1 m_2 n} \vec{i}_1. \quad (2.3)$$

С использованием выражений (2.1a) и (2.16) получаем

$$\vec{J}_1 = -D \left( \nabla n_1 - \frac{n_1}{n} \nabla n + \frac{\rho^2}{m_1 m_2 n} \frac{k_T}{T} \nabla T \right), \quad (2.4a)$$

$$\vec{J}_2 = -D \left( \nabla n_2 - \frac{n_2}{n} \nabla n - \frac{\rho^2}{m_1 m_2 n} \frac{k_T}{T} \nabla T \right). \quad (2.46)$$

Из условия механического равновесия:

$$P = nk_B T = const, \quad (2.5)$$

где  $P$  - давление парогазовой смеси,  $k_B$  - постоянная Больцмана, получаем:

$$\frac{\nabla n}{n} = - \frac{\nabla T}{T}$$

Выражения для потоков в лабораторной (связанной с каплей) системе отсчета:

$$\vec{j}_1 = -D \left[ \nabla n_1 + n_1 \left( 1 + \frac{\rho^2}{m_1 m_2 n_2 n} k_T \right) \frac{\nabla T}{T} \right] + n_1 \vec{v}, \quad (2.6a)$$

$$\vec{j}_2 = -D \left[ \nabla n_2 + n_2 \left( 1 - \frac{\rho^2}{m_1 m_2 n_2 n} k_T \right) \frac{\nabla T}{T} \right] + n_2 \vec{v}. \quad (2.66)$$

где  $\vec{v}$  - локальная гидродинамическая скорость среды относительно капли.

Плотность потока  $\vec{j}_1$  и концентрация частиц пара  $n_1$  связаны уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_1 = 0 \quad (2.7)$$

Для коэффициентов диффузии и термодиффузии полагаем:

$$D = D_0 f(n_1, T),$$

$$k_T = k_T(n_1, T).$$

В случае  $\frac{n_1}{n} \ll 1$  и, соответственно,  $\frac{T - T_0}{T_0} \ll 1$ , можно считать

$$f(n_1, T) = 1 + \varepsilon \frac{n_1}{n(T)} + \gamma \frac{T - T_0}{T_0} \quad (\varepsilon \sim 1 \quad \gamma \approx \frac{3}{2}),$$

$$1 + \frac{\rho^2}{m_1 m_2 n_1 n} k_T \equiv F(n_1, T) \approx \text{const}.$$

Перепишем (2.6а):

$$j_1 = -D_0 f(n_1, T) \left[ \frac{\partial n_1(r, t)}{\partial r} + F(n_1, T) \frac{n_1}{T} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right] + n_1(r, t) v(r, t) \quad (2.8)$$

С использованием в (2.8) приближенных выражений для функций  $f(n_1, T)$  и  $F(n_1, T)$ , из уравнения неразрывности (2.7) получается [2]:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = D_0 \Delta n_1(r, t) + D_0 \left[ \frac{\varepsilon}{n(T_0)} \left( n_1 \Delta n_1(r, t) + \left( \frac{\partial n_1(r, t)}{\partial r} \right)^2 \right) + F \frac{n_1}{T_0} \Delta T(r, t) + \frac{\gamma + F}{T_0} \frac{\partial n_1(r, t)}{\partial r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right] - n_1(r, t) \text{div} \vec{v}(r, t) - v(r, t) \frac{\partial n_1(r, t)}{\partial r} \quad (2.9)$$

Граничные условия для концентрации пара и температуры:

$$T(R, t) = T_d(t), \quad T_d - \text{температура капли} \quad (2.10)$$

$$T(r, t) = T_0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

$$n_1(R, t) = n_\infty(T_d(t))$$

$$n_1(r, t) = n_0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Для решения нелинейного уравнения (2.9) на концентрацию частиц пара, необходимо знать скорость гидродинамического течения  $v(r, t)$ , а также нестационарный профиль температуры  $T(r, t)$ . Имея в виду предполагаемую малость концентрации пара по сравнению с концентрацией пассивного газа и соответствующую малость отклонения температуры среды от начального значения, можно решать это уравнение последовательными приближениями. С этой целью следует во все слагаемые в правой части (2.9), кроме первого, подставить решения уравнения диффузии для частиц пара и уравнения теплопроводности для температуры, в которых не учитывается гидродинамическое течение парогазовой смеси. При этом и для скорости течения среды можно в правой части (2.9) использовать соответствующее приближенное выражение.

### 3. Скорость гидродинамического течения парогазовой смеси

Получим, следуя [2], выражение для скорости  $v(r, t)$  гидродинамического течения парогазовой смеси вокруг растущей капли.

Рассмотрим подвижную сферу радиуса  $R_1(t)$ , окружающую каплю, и пусть

$$\dot{R}_1(t) = v(r, t) , \quad (3.1)$$

где  $v(r, t)$  - гидродинамическая скорость течения среды.

Суммарное число частиц внутри этой остается постоянным во времени, так что

$$\frac{4\pi}{3} n_l R^3(t) + 4\pi \int_{R(t)}^{R_1(t)} r_1^2 n(T(r_1, t)) dr_1 = const , \quad (3.2)$$

где  $n_l$  - концентрация частиц в капле,  $R(t)$  - радиус капли,  $n(T)$  - общая концентрация частиц пара и пассивного газа, за начало сферической системы отсчета взят центр капли.

Дифференцируем соотношение (3.2) по времени и получаем:

$$n_l R^2 \dot{R} + n(T(R_1)) R_1^2 \dot{R}_1 - n(T(R)) R^2 \dot{R} + \int_R^{R_1} \frac{dn}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} r_1^2 dr_1 = 0 , \quad (3.3)$$

где  $\dot{R}$  - скорости роста радиуса капли.

Из постоянства давления (условие механического равновесия):

$$n(T) = n(T_0) \frac{T_0}{T}$$

После подстановки этого выражения в (3.3) и при условии, что температура капли равна  $T_d$ , получаем:

$$v(r) = \dot{R} \frac{R^2}{r^2} \frac{T}{T_d} \left( 1 - \frac{n_l T_d}{n(T_0) T_0} + \frac{T_d}{\dot{R} R^2} \int_R^r \frac{\partial T}{\partial t} \frac{r_1^2}{T^2} dr_1 \right) \quad (3.4)$$

Ниже, в разделе 5, мы подробно рассмотрим это выражение в используемом при решении уравнения (2.9) приближении.

Найдем также выражение для скорости роста радиуса капли  $\dot{R}(t)$ .

Уравнения баланса числа частиц пара дает

$$n_l \dot{R}(t) = - \left[ j_1(R(t), t) - n_1(R(t), t) \dot{R}(t) \right] \quad (3.5)$$

В этом выражении для потока имеем:

$$j_1 = -D_0 f(n_1, T) \left[ \frac{\partial n_1(r, t)}{\partial r} + F(n_1, T) \frac{n_1}{T} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right] + n_1(r, t) v(r, t)$$

После подстановки в уравнение для баланса числа частиц пара выражения для потока частиц пара и скорости гидродинамического течения на границе капли имеем:

$$n_l \dot{R}(t) = D_0 f(n_\infty, T_d) \left[ \frac{\partial n_1(R, t)}{\partial r} + F(n_\infty, T_d) \frac{n_\infty}{T_d} \frac{\partial T(R, t)}{\partial r} \right] -$$

$$- n_1(R(t), t) \dot{R}(t) \left( 1 - \frac{n_l T_d}{n(T_0) T_0} \right) + n_1(R(t), t) \dot{R}(t)$$

После подстановки  $f(n_\infty, T_d)$  и сокращений это выражение можно переписать в виде:

$$\dot{R} = \frac{D_0}{n_l} \frac{1 + \varepsilon \frac{n_\infty(T_d)}{n_0} + \gamma \frac{T_d - T_0}{T_0}}{1 - \frac{T_d}{T_0} \frac{n_\infty(T_d)}{n(T_0)}} \left[ \frac{\partial n_1(R, t)}{\partial r} + F(n_\infty, T) \frac{n_\infty}{T_d} \frac{\partial T(R, t)}{\partial r} \right]$$

#### 4. Приближенные выражения для концентрации пара и температуры среды

Найдем выражения для профилей концентрации пара и температуры.

Напишем уравнения диффузии:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial n_1}{\partial r} \right) \quad (4.1)$$

Перейдем к автомодельной переменной

$$s = \frac{r}{R} \quad (4.2)$$

Запишем соотношения для производных:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = - \frac{\dot{R}}{R} s \frac{\partial n_1}{\partial s}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial r} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial n_1}{\partial s}$$

Перепишем уравнение диффузии с автомодельной переменной:

$$n''(s) + \left( \frac{2}{s} + bs \right) n'(s) = 0 . \quad (4.3)$$

Решением этого уравнения будет:

$$n_1(r, t) = n_1(s) = n_0 + (n_\infty(T_d) - n_0) \frac{\int_1^\infty \frac{dz}{z^2} \exp(-\frac{b}{2} z^2)}{\int_1^\infty \frac{dz}{z^2} \exp(-\frac{b}{2} z^2)} \quad (4.4)$$

где

$$b = \frac{n_0 - n_\infty(T_d)}{n_1} \quad (b \ll 1) \quad (4.5)$$

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) , \quad (4.6)$$

где  $k$  - коэффициент температуропроводности парогазовой смеси ( $k \sim D$ ).

Автомодельным решением уравнения теплопроводности будет:

$$T(r, t) = T(s) = T_0 + (T_d - T_0) \frac{\int_1^\infty \frac{dz}{z^2} \exp(-\frac{D_0 b}{2k} z^2)}{\int_1^\infty \frac{dz}{z^2} \exp(-\frac{D_0 b}{2k} z^2)} , \quad (4.7)$$

где  $T_d$  - температура капли и  $T_0$  - температура на бесконечном удалении от капли.

Уравнение теплового баланса:

$$qD \frac{\partial n}{\partial s} = \chi \frac{\partial T}{\partial s} , \quad (4.8)$$

где  $q$  - теплота конденсации на одну молекулу,  $\chi$  - коэффициент теплопроводность парогазовой смеси.

Выражения для производных:

$$n_1'(s) = - \frac{n_\infty(T_d) - n_0}{\int_1^\infty \frac{dz}{z^2} \exp(-\frac{b}{2} z^2)} \frac{1}{s^2} \exp(-\frac{b}{2} s^2)$$



$$T'(s) = - \frac{T_d - T_0}{\int_1^{\infty} \frac{dz}{z^2} \exp(-\frac{D_0 b}{2k} z^2)} \frac{1}{s^2} \exp(-\frac{D_0 b}{2k} s^2)$$

Для производных у поверхности капли получим:

$$T'(1) \approx T_0 - T_d \text{ при } \frac{D_0 b}{k} \ll 1$$

$$n'_1(1) \approx n_{\infty}(T_d) - n_0 \text{ при } b \ll 1$$

Перепишем уравнение теплового баланса:

$$qD(n_0 - n_{\infty}(T_d)) = \chi(T_d - T_0) \quad (4.9)$$

Привлекая формулу Клапейрона-Клаузиуса:

$$n_{\infty}(T_d) = n_{\infty}(T_0) \exp\left(\frac{q}{k_B T_0} \frac{T_d - T_0}{T_0}\right), \quad (4.10)$$

запишем уравнение для определения температуры капли в виде

$$qD(n_0 - n_{\infty}(T_0) \exp\left(\frac{q}{k_B T_0} \frac{T_d - T_0}{T_0}\right)) = \chi(T_d - T_0) \quad (4.11)$$

Решим данное уравнение численно для капли воды в воздухе при атмосферном давлении и температуре  $T_0 = 300K$ .

Рассмотрим систему в следующих условиях:

$$\frac{q}{k_B T_0} \approx 17,9$$

$$n_{\infty}(T_0) = 1,6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$$

$$n_0 = 8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3} \text{ (пересыщение водяного пара в воздухе равно 4)}$$

$$D = 0,205 \text{ см}^2/\text{с}$$

$$\chi = 2,62 \cdot 10^3 \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$$

$$k = 0,222 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$$

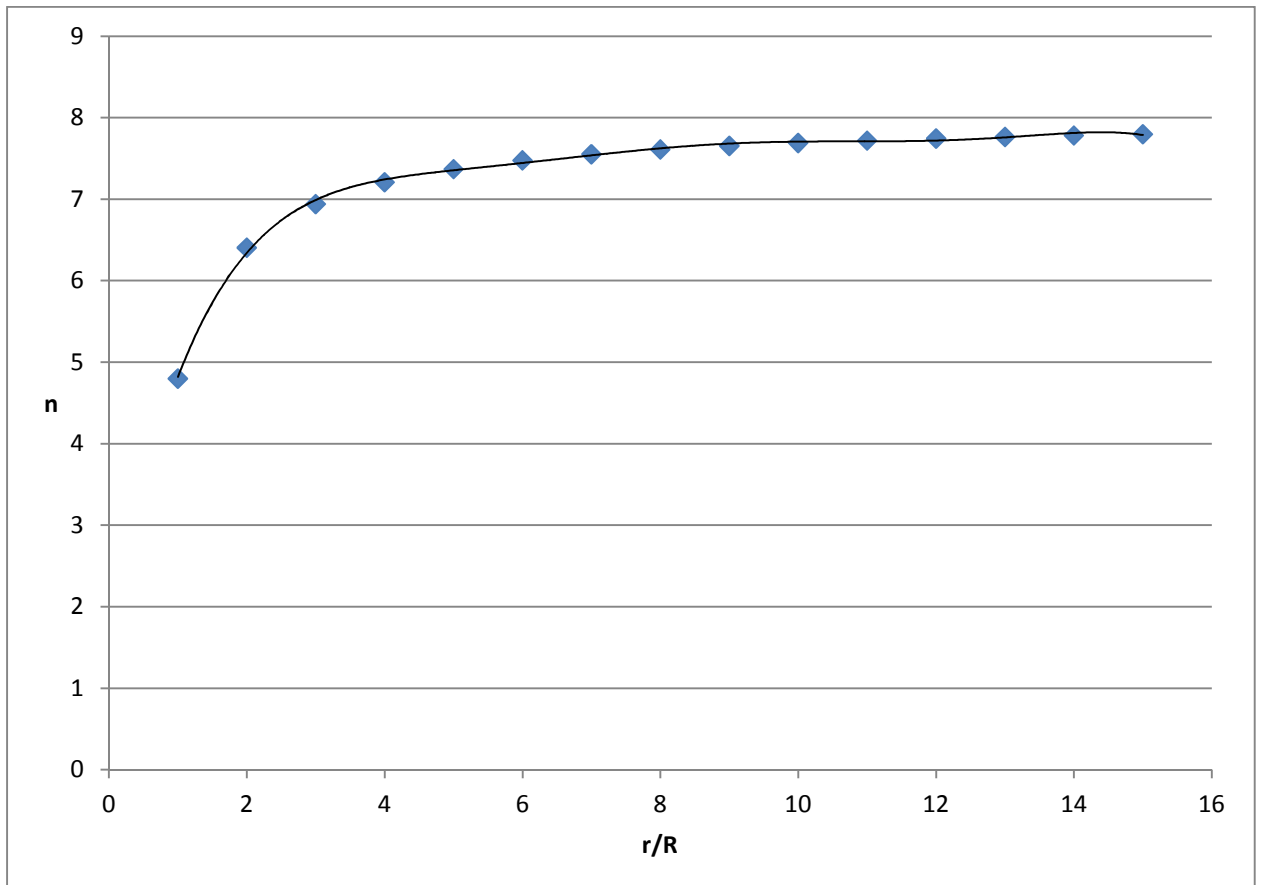
$$b = 0,97 \cdot 10^{-5}$$

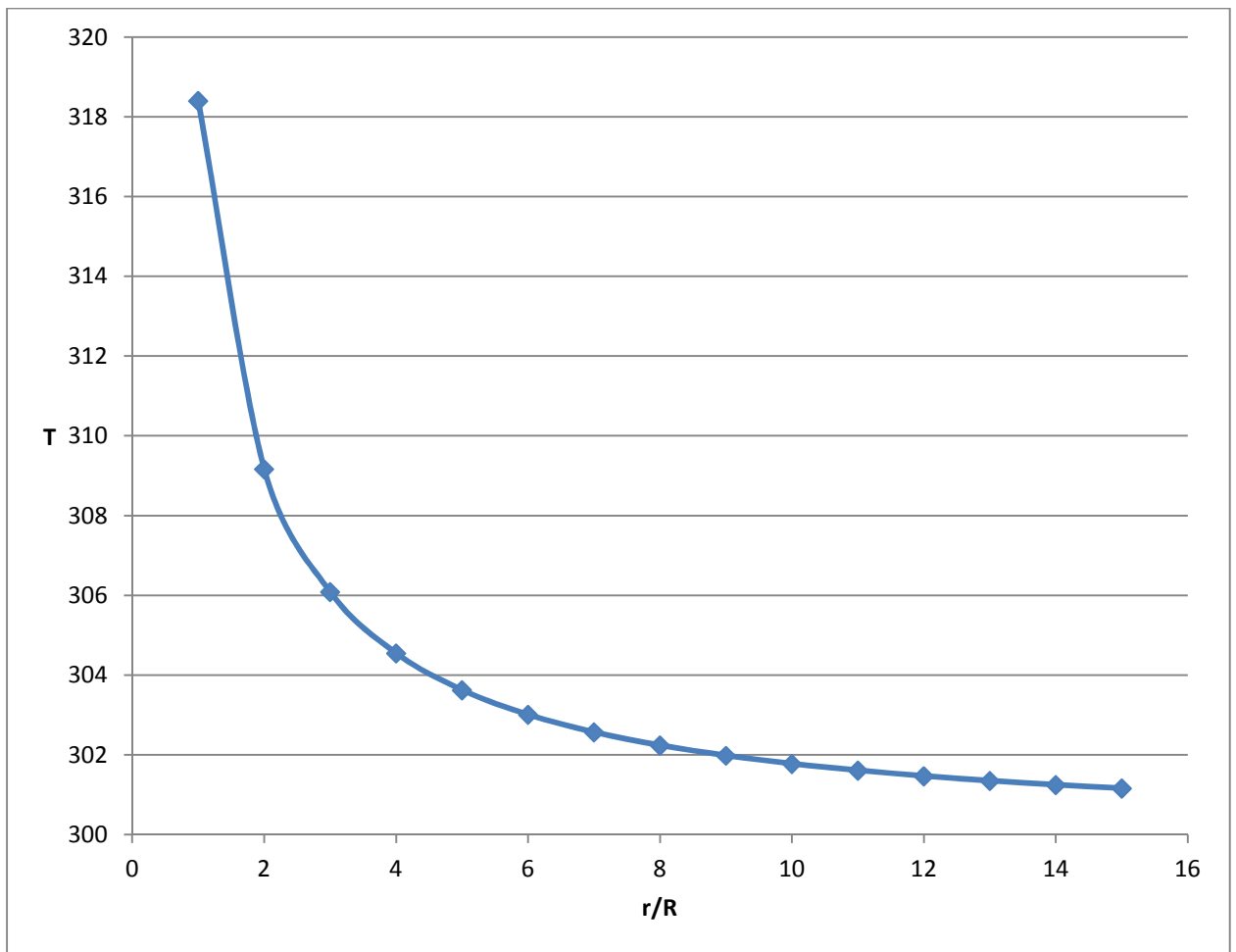
Получаем  $T_d - T_0 = 18,4K$

Для концентрации водяного пара у поверхности капли получим:

$$n_\infty(T_d) = 4,8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}.$$

Ниже приведены графики для профилей концентрации пара и температуры, полученных с учетом найденных значений концентрации пара у поверхности капли и температуры капли (концентрация пара в единицах  $10^{17} \text{ см}^{-3}$ , температура среды в градусах Кельвина):





## 5. Приближенное выражение для скорости гидродинамического течения

Перейдем в выражении (2) к автомодельной переменной:

$$v(s) = \dot{R} \frac{1}{s^2} T(s) \left[ \frac{1}{T_d} - \frac{n_l}{T_0 n(T_0)} - \int_1^s ds \cdot s^3 \frac{T'(s)}{T^2(s)} \right] \quad (5.1)$$

Требуемое приближенное выражение получается из (5.1) при подстановке выражения для производной  $T'(s)$ , следующего из (4.7):

$$T'(s) = -\frac{T_d - T_0}{\int_1^{\infty} \frac{dz}{z^2} \exp\left(-\frac{D_0 b}{2k} z^2\right)} \frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{D_0 b}{2k} s^2\right) \approx -(T_d - T_0) \frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{D_0 b}{2k} s^2\right)$$

Одновременно в (5.1) положим  $T(s) = T_0$ , так как  $T(s)$  отличается от  $T_0$  максимум на 6.13%.

В результате выражение для скорости принимает вид

$$\begin{aligned} v(s) &= \dot{R} \frac{1}{s^2} \left[ 1 - \frac{n_l}{n(T_0)} + \frac{T_d - T_0}{T_0} \int_1^s ds \cdot s \cdot \exp\left(-\frac{D_0 b}{2k} s^2\right) \right] = \\ &= \dot{R} \frac{1}{s^2} \left[ 1 - \frac{n_l}{n(T_0)} + \frac{T_d - T_0}{T_0} \frac{k}{D_0 b} \left( \exp\left(-\frac{D_0 b}{2k}\right) - \exp\left(-\frac{D_0 b}{2k} s^2\right) \right) \right] \approx \\ &\approx \dot{R} \frac{1}{s^2} \left[ 1 - \frac{n_l}{n(T_0)} + \frac{T_d - T_0}{T_0} \frac{k}{D_0 b} \left( 1 - \exp\left(-\frac{D_0 b}{2k} s^2\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

При небольшом расстоянии от капли, где  $s \ll 1/b^{1/2}$ , среда будет течь в сторону капли, при этом

$$v(s) \approx -\dot{R} \frac{1}{s^2} \frac{n_l}{n(T_0)}. \quad (5.3)$$

Отметим, что в изотермическом приближении [1] это выражение для скорости (стефановское течение) имеет место во всей внешности капли.

На достаточном удалении от капли, когда  $s \gg 1/b^{1/2}$ , получаем

$$v(s) \approx \dot{R} \frac{1}{s^2} \frac{n_l}{n(T_0)} \left( \frac{q}{c_p T_0} - 1 \right), \text{ где } \frac{q}{c_p T_0} \approx 5,1. \quad (5.4)$$

Построим график функции

$$\frac{v(s)}{\dot{R}} = \frac{1}{s^2} \left[ 1 - \frac{n_l}{n(T_0)} - \frac{T_d - T_0}{T_0} \frac{k}{D_0 b} \left( 1 - \exp\left(-\frac{D_0 b}{2k} s^2\right) \right) \right] \quad (5.5)$$

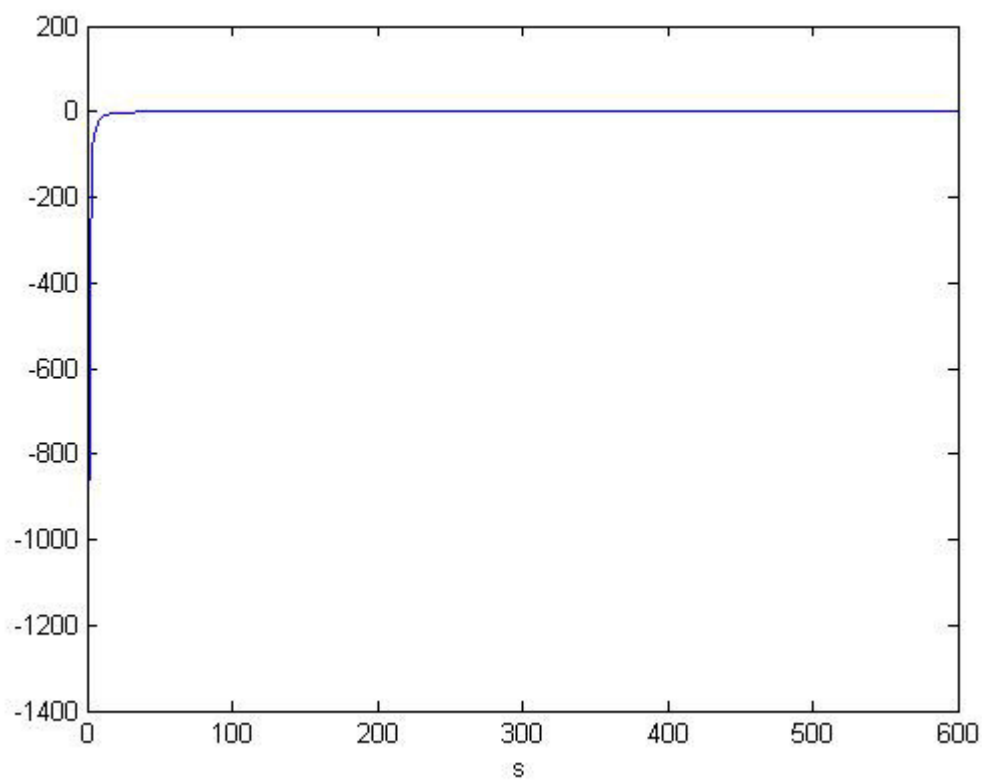
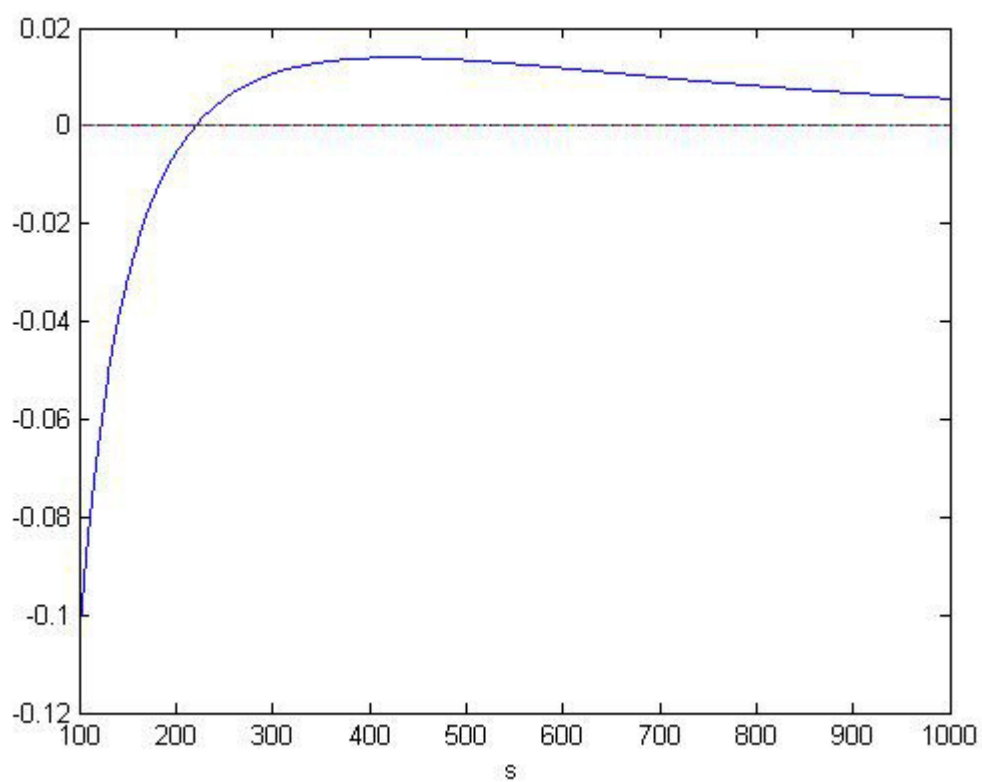
Из уравнения баланса тепла с принятой оценкой

$$\frac{q}{c_p T_0} = \frac{T_d - T_0}{T_0} \frac{k}{D_0 b} \frac{n_l}{n(T_0)} \quad (5.6)$$

Следовательно:

$$\frac{v(s)}{\dot{R}} \approx -\frac{1}{s^2} \frac{n_l}{n(T_0)} \left[ 1 - \frac{q}{c_p T_0} \left( 1 - \exp\left(-\frac{D_0 b}{2k} s^2\right) \right) \right] \quad (5.7)$$

Непосредственно график  $\frac{v(s)}{\dot{R}}$ :



Скорость течения меняет направление на противоположное на расстоянии около 220 радиусов капли и имеет максимум на расстоянии около 426 радиусов капли.

## 6. Заключение

Проведенное рассмотрение гидродинамического течения газовой среды является необходимым этапом в построении детального описания автомодельного режима роста капли в бинарной парогазовой смеси при учете тепловых эффектов конденсации. Для конкретной ситуации конденсации водяного пара в атмосферных условиях в работе получена и графически проиллюстрирована зависимость скорости течения среды от расстояния до центра растущей капли. При учете тепловыделения эта зависимость, в отличие от получаемой в изотермическом приближении, является немонотонной, так что на некотором расстоянии от капли направление течения меняется на противоположное.

## 7. Список литературы

1. А.Е.Кучма, А.К.Щекин «Автомодельный режим роста капли при учете стефановского течения и зависимости коэффициента диффузии от состава парогазовой среды» Коллоид. журн. 2012. Т. 74. №2. С.231.
2. A.E. Kuchma and A.K. Shchekin. «Heat effects at self-similar regime of droplet diffusion growth and the vapor-gas outflow» 2012 European Aerosol Conference in Granada, poster C-WG10S1P36, Spain, Sunday 2nd - Friday 7th September 2012 EAC2012Book, 381 pdf.  
A.E. Kuchma , A.K. Shchekin «The self-similar regime of droplet growth with account of non-isothermal condensation and nonstationary gas flows» XVI Research Workshop “Nucleation Theory and Applications”, Dubna, 2012
3. Д.А. Франк-Каменецкий «Диффузия и теплопередача в химической кинетике».- М.: Наука, 1987.