

Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет
Кафедра статистической физики



ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В ЯЧЕЙКАХ КИРАЛЬНЫХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Бакалаврская работа студента
дневного отделения

_____ **Дивинского Бориса Борисовича**

Научный руководитель:

_____ д.ф.-м.н., проф. **Романов В.П.**

Рецензент:

_____ д.ф.-м.н., проф. **Аксенова Е.В.**

Санкт-Петербург
2014

Оглавление

Введение	2
1 Описание структуры кирального жидкого кристалла во внешнем электрическом поле	4
2 Оптические свойства одноосной неоднородной среды	6
3 Индикатриса однократного рассеяния и коэффициент экстинкции	13
4 Методы компьютерного моделирования	16
5 Анализ полученных результатов	17
Заключение	23
Литература	25

Введение

Одной из интересных проблем в физике жидких кристаллов (ЖК) является исследование ориентационной структуры во внешних электрических и магнитных полях, значительно превышающих порог Фредерикса. С практической точки зрения это обусловлено использованием жидких кристаллов в дисплеях, системах передачи информации и в разнообразных оптических устройствах.

Существенная особенность жидкокристаллических систем во внешних полях состоит в том, что их оптические характеристики, как правило, не постоянны, а меняются по толщине образца. Поскольку большинство таких систем обладает сильной оптической анизотропией, то возникает задача расчета интенсивностей и траекторий лучей, проходящих через такие системы, а также установления связи аномалий в распространении света с особенностями структуры среды. Это позволяет изучать изменение локальной структуры жидких кристаллов в зависимости от приложенного внешнего поля. Теоретически проблема распространения света, падающего под углом на анизотропную среду с произвольным направлением оптических осей, решалась различными методами. Интенсивно используются численные методы [1]. Большое внимание уделяется точным и приближенным аналитическим методам, методу взаимодействующих мод и методам геометрической оптики.

Особенности распространения света также изучались экспериментально. В частности, исследовалась внутренняя рефракция луча в холестерике за счет пространственного изменения направления оптической оси в среде. Впервые искривление траектории необыкновенного луча в слое ЖК со спиральной структурой было обнаружено и объяснено в работе [2]. В работе [3] была разработана методика исследования распределения директора в неоднородно ориентированном слое ЖК, основанная на измерении зависимости от угла падения интенсивности света, отраженного от ячейки с жидким кристаллом. Эта зависимость обусловлена интерференцией луча, отраженного на границе стекло – жидкий кристалл, и луча, претерпевшего рефракцию внутри ячейки. Для гомеопланарной структуры эта методика была использована в работах [4]. Также измерялась интенсивность света, прошедшего через ячейку.

Аналитическое описание изменения структуры жидких кристаллов во внешних полях представляет собой достаточно сложную проблему, особенно в случае

достаточно сильных полей, превышающих порог Фредерикса. Изучению эффекта Фредерикса уделяется большое внимание как для достаточно простых систем, так и для более сложных ситуаций, таких как наличие флексоэлектрического эффекта [4].

Особенно детально исследовался эффект Фредерикса в нематических жидких кристаллах (НЖК). Однако значительное внимание уделяется также исследованию холестерических жидких кристаллов (ХЖК). Наличие пространственной геликоидальной структуры делает проблему описания перехода во внешних полях математически более сложной. Впервые переход Фредерикса в ХЖК был рассмотрен Лесли [5]. Интересно отметить, что, в отличие от нематиков, в киральных системах между описаниями эффекта Фредерикса в электрическом и магнитном поле имеется существенное различие. Причина состоит в том, что электрическое поле в холестериках неоднородно. Детально эта проблема рассматривалась во многих работах, например в [6].

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию распространения света в холестерических жидких кристаллах во внешнем электрическом поле, превышающем порог Фредерикса. Путем минимизации свободной энергии изучалось искажение структуры холестерика и связанные с этим особенности распространения необыкновенного луча. Исследовалась внутренняя рефракция луча в холестерике за счет пространственного изменения направления оптической оси в среде. В частности, получена зависимость от приложенного напряжения минимального угла падения, при котором свет еще не проходит через ячейку. Так же с помощью численного интегрирования были построены траектории луча в жидком кристалле в приближении геометрической оптики и рассчитана зависимость интенсивности луча от угла падения с учетом потерь на рассеяние на флуктуациях директора. Часть полученных результатов сравнивались с экспериментальными данными.

1. Описание структуры кирального жидкого кристалла во внешнем электрическом поле

Рассмотрим ячейку холестерического жидкого кристалла во внешнем электрическом поле. Будем считать, что поле направлено вдоль оси спирали. Введем декартову систему координат с плоскостью (x, y) перпендикулярной оси спирали. Считаем, что плоский слой холестерического жидкого кристалла заключен между плоскостями $z = l_1$ и $z = l_2$. Толщина слоя $L = l_2 - l_1$. В каждой плоскости $z = \text{const}$ система предполагается однородной, то есть вектор директора $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(z)$. Оптические свойства ячейки определяются пространственным распределением директора. Это распределение находится из условия минимума свободной энергии. Свободная энергия F_{tot} жидкого кристалла может быть представлена в виде суммы трех слагаемых

$$F_{tot} = F_e + F_f + F_{sf}. \quad (1)$$

Первое слагаемое описывает энергию искажения в объеме

$$F_e = \frac{S_{\perp}}{2} \int_{l_1}^{l_2} [K_{11}(\text{div } \mathbf{n})^2 + K_{22}(\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} + q_0)^2 + K_{33}(\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n})^2] dz, \quad (2)$$

где S_{\perp} – площадь поверхности верхней и нижней грани ячейки, K_{11}, K_{22}, K_{33} – модули Франка, $p_0 = \pi/q_0$ – шаг спирали. Второе слагаемое описывает вклад внешнего поля:

$$F_f = -\frac{S_{\perp}}{2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{4\pi} dz. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{D} = \varepsilon_{\perp 0} \mathbf{E} + \varepsilon_{a0} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$ – вектор электрической индукции, $\varepsilon_{a0} = \varepsilon_{\parallel 0} - \varepsilon_{\perp 0}$ – анизотропия диэлектрической проницаемости, а $\varepsilon_{\parallel 0}$ и $\varepsilon_{\perp 0}$ – диэлектрические проницаемости вдоль и поперек вектора директора \mathbf{n} соответственно. Индекс “0” указывает, что диэлектрическая проницаемость берется на частоте приложенного внешнего электрического поля.

Последний член суммы (1) представляет собой поверхностную энергию

$$F_{sf} = \frac{S_{\perp}}{2} \sum_{j=1,2} w_j(\mathbf{n}(l_j), \mathbf{n}^{0(j)}), \quad (4)$$

где $\mathbf{n}(l_j)$ ($j = 1, 2$) – значения вектора директора на границах, вектора $\mathbf{n}^{0(j)}$ направлены вдоль соответствующих осей легкого ориентирования, а w_j – это скалярные функции от двух единичных векторов.

Для дальнейших вычислений вектор директора удобно записать в виде

$$\mathbf{n}(z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (5)$$

где углы θ и ϕ являются функциями z , $\theta = \theta(z)$ и $\phi = \phi(z)$. Тогда выражение (2) переписывается в виде

$$F_e = \frac{V}{2} K_{22} q_0^2 + \frac{S_{\perp}}{2} \int_{l_1}^{l_2} [A(\theta)(\theta')^2 + B(\theta)(\phi')^2 - 2C(\theta)\phi'] dz, \quad (6)$$

где $V = S_{\perp} L$ – объем системы,

$$A(\theta) = K_{11} \sin^2 \theta + K_{33} \cos^2 \theta, \quad (7)$$

$$B(\theta) = \sin^2 \theta (K_{22} \sin^2 \theta + K_{33} \cos^2 \theta), \quad (8)$$

$$C(\theta) = q_0 K_{22} \sin^2 \theta. \quad (9)$$

Вклад внешнего поля (3) примет вид

$$F_f = \frac{S_{\perp}}{2} \int_{l_1}^{l_2} G(\theta) dz. \quad (10)$$

В этом выражении

$$G(\theta) = -D_z^2 g(\theta) / 4\pi, \quad (11)$$

где

$$g(\theta) = (\varepsilon_{\perp 0} + \varepsilon_{a0} \cos^2 \theta)^{-1}. \quad (12)$$

Если считать, что на поверхности жидкого кристалла подано напряжение U , то

$$U = \int_{l_1}^{l_2} E_z(z) dz = D_z \int_{l_1}^{l_2} g(\theta) dz. \quad (13)$$

Таким образом, полевой вклад записывается в виде [6]

$$F_f = -\frac{S_{\perp} U^2}{8\pi \int_{l_1}^{l_2} g(\theta) dz}. \quad (14)$$

2. Оптические свойства одноосной неоднородной среды

Распространение света в холестерическом жидком кристалле определяется тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(z)$. Он связан с вектором директора соотношением

$$\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{\perp} \delta_{lk} + \varepsilon_a n_l(z) n_k(z). \quad (15)$$

Здесь $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$, ε_{\parallel} и ε_{\perp} – диэлектрические проницаемости вдоль и поперек директора $\mathbf{n}(z)$.

Как известно, поле монохроматической волны описывается уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = ik_0 \hat{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -ik_0 \hat{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (16)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} – вектора напряженности электрического и магнитного полей, $k_0 = \omega/c$, ω – круговая частота, c – скорость света в вакууме, $\hat{\mu}$ – тензор магнитной проницаемости. Будем рассматривать немагнитную среду, т. е. $\mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Исключая вектор напряженности магнитного поля из системы (16), получаем волновое уравнение для вектора \mathbf{E}

$$(\text{rot rot} - k_0^2 \hat{\varepsilon}(z)) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (17)$$

Применим преобразование Фурье по поперечным к оси z координатам

$$f(\mathbf{k}_{\perp}, z) = \int d\mathbf{r}_{\perp} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp}}. \quad (18)$$

Без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_z)$, т. е. волновой вектор лежит в плоскости xz . Тогда уравнение (17) может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} \partial_z^2 & 0 & -ik_{\perp} \partial_z \\ 0 & \partial_z^2 - k_{\perp}^2 & 0 \\ -ik_{\perp} \partial_z & 0 & -k_{\perp}^2 \end{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{k}_{\perp}, z) + k_0^2 \hat{\varepsilon}(z) \mathbf{E}(\mathbf{k}_{\perp}, z) = 0, \quad (19)$$

где $\partial_z = \partial/\partial z$. Это уравнение описывает распространение света в среде с произвольным распределением направления оптической оси. Введем характерный

масштаб изменения этого направления

$$\zeta = \left\langle \frac{\partial |\hat{\varepsilon}|}{\partial z} \right\rangle^{-1}. \quad (20)$$

Будем считать, что свойства среды мало меняются на расстояниях порядка длины световой волны λ , т. е. $\zeta \gg \lambda$. Если ввести безразмерную переменную $\xi = z/\zeta$, то систему (19) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\xi E_z + \frac{\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{zz}} \partial_\xi E_y - \Omega \varepsilon_{zz}^{-1} \left(i \frac{k_0}{k_\perp} \varepsilon_{zx}^2 - i \frac{k_\perp}{k_0} \varepsilon_{xx} - \Omega^{-1} \partial_\xi \varepsilon_{zx} \right) E_x - \\ - \Omega \varepsilon_{zz}^{-1} \left(i \frac{k_0}{k_\perp} \varepsilon_{zx} \varepsilon_{zy} - i \frac{k_\perp}{k_0} \varepsilon_{xy} - \Omega^{-1} \partial_\xi \varepsilon_{zy} \right) E_y - \\ - \Omega \varepsilon_{zz}^{-1} \left(i \frac{k_0}{k_\perp} \varepsilon_{zx} \varepsilon_{zz} - i \frac{k_\perp}{k_0} \varepsilon_{xz} - i \frac{k_\perp}{k_0} \varepsilon_{zx} - \Omega^{-1} \partial_\xi \varepsilon_{zz} \right) E_z = 0 \\ (\partial_\xi^2 - \frac{k_\perp^2}{k_0^2} \Omega^2) E_y + \Omega^2 (\varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z) = 0 \\ \partial_\xi E_x - i \frac{k_\perp}{k_0} \Omega E_z + i \frac{k_0}{k_\perp} \Omega (\varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z) = 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

Здесь $\Omega = k_0 \zeta = 2\pi \zeta / \lambda$ – большой параметр. При получении системы (21) мы выразили из третьего уравнения системы (19) производную $\partial_\xi E_x$ через компоненты поля. Дифференцируя полученное соотношение еще раз по ξ , мы нашли вторую производную $\partial_\xi^2 E_x$. В результате получается первое уравнение системы (21), не содержащее вторых производных. Систему (21) можно записать в виде дифференциального уравнения первого порядка для четырехкомпонентного вектора Φ

$$\partial_\xi \Phi = i\Omega \hat{D} \Phi + \hat{F} \Phi, \quad (22)$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ -i\Omega^{-1} \partial_\xi E_y \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Здесь \hat{D} и \hat{F} – матрицы размерности 4×4

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

с элементами

$$\begin{aligned}
d_{11} &= -\frac{k_0}{k_\perp} \varepsilon_{zx}, & d_{12} &= -\frac{k_0}{k_\perp} \varepsilon_{zy}, & d_{13} &= \frac{k_\perp}{k_0} - \frac{k_0}{k_\perp} \varepsilon_{zz}, \\
d_{31} &= \varepsilon_{zz}^{-1} \left(\frac{k_0}{k_\perp} \varepsilon_{zx}^2 - \frac{k_\perp}{k_0} \varepsilon_{xx} \right), & d_{32} &= \varepsilon_{zz}^{-1} \left(\frac{k_0}{k_\perp} \varepsilon_{zx} \varepsilon_{zy} - \frac{k_\perp}{k_0} \varepsilon_{xy} \right), \\
d_{33} &= \varepsilon_{zz}^{-1} \left(\frac{k_0}{k_\perp} \varepsilon_{zx} \varepsilon_{zz} - \frac{k_\perp}{k_0} \varepsilon_{xz} - \frac{k_\perp}{k_0} \varepsilon_{zx} \right), & d_{34} &= -\varepsilon_{zz}^{-1} \varepsilon_{zy}, \\
d_{41} &= \varepsilon_{yx}, & d_{42} &= \varepsilon_{yy} - \frac{k_\perp^2}{k_0^2}, & d_{43} &= \varepsilon_{yz}; \\
f_{31} &= \varepsilon_{zz}^{-1} \partial_\xi \varepsilon_{zx}, & f_{32} &= \varepsilon_{zz}^{-1} \partial_\xi \varepsilon_{zy}, & f_{33} &= \varepsilon_{zz}^{-1} \partial_\xi \varepsilon_{zz}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Уравнения (19), (22) удобно решать методом ВКБ [8]. В низшем порядке по параметру Ω решение можно записать в виде

$$\mathbf{E}_\pm^{(j)}(\mathbf{r}) = A_\pm^{(j)}(\mathbf{k}_\perp; z, z_0) \mathbf{e}_\pm^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z) \exp \left(i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + i \int_{z_0}^z k_{z\pm}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z') dz' \right). \tag{26}$$

Оно описывает распространение четырех волн в анизотропной среде, двух в положительном направлении z и двух – в отрицательном. Здесь $A_\pm^{(j)}$ – амплитуды волн, $\mathbf{e}_\pm^{(j)}$ – единичные вектора поляризации, индекс $j = 1, 2$ нумерует нормальные волны. Поперечная компонента волнового вектора k_\perp определяется углом падения θ_i света на среду, $k_\perp = k_0 \sqrt{\varepsilon} \sin \theta_i$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды, из которой луч попадает на анизотропную систему. Продольная компонента $k_{z\pm}^{(j)}$ волнового вектора связана с собственными значениями λ_l , $l = 1, \dots, 4$, матрицы \hat{D} соотношением

$$k_{z\pm}^{(j)} = k_0 \lambda_l. \tag{27}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
&\lambda^4 - \lambda^3(d_{11} + d_{33}) + \lambda^2(d_{11}d_{33} - d_{34}d_{43} - d_{42} - d_{31}d_{13}) + \\
&+ \lambda(d_{11}d_{34}d_{43} + d_{11}d_{42} - d_{32}d_{43} + d_{42}d_{33} - d_{41}d_{12} - d_{41}d_{13}d_{34}) + \\
&+ (d_{11}d_{32}d_{43} - d_{11}d_{42}d_{33} - d_{31}d_{12}d_{43} + d_{31}d_{42}d_{13} + d_{41}d_{12}d_{33} - d_{41}d_{32}d_{13}) = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Это уравнение фактически представляет собой уравнение Френеля для диэлектрического эллипсоида с произвольной ориентацией. При его решении ограничимся случаем одноосной среды. В нашем случае одноосная среда описывается вектором директора \mathbf{n} , совпадающим с направлением оптической оси. Вектор директора определен в уравнении (5) через полярный и азимутальный углы, θ и ϕ , в выбранной системе координат. Локально одноосный тензор диэлектриче-

ской проницаемости (15) принимает вид

$$\hat{\varepsilon}(z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \phi \sin^2 \theta & \varepsilon_a \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta & \varepsilon_a \cos \phi \sin \theta \cos \theta \\ \varepsilon_a \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta & \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \phi \sin^2 \theta & \varepsilon_a \sin \phi \sin \theta \cos \theta \\ \varepsilon_a \cos \phi \sin \theta \cos \theta & \varepsilon_a \sin \phi \sin \theta \cos \theta & \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Решение уравнения на собственные значения (28) дает

$$\lambda_{1,3} = \pm \sqrt{\alpha \varepsilon_{\perp}}, \quad (30)$$

$$\lambda_{2,4} = \frac{1}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta} \left[-\sqrt{\varepsilon_{\perp}(1 - \alpha)} \varepsilon_a \sin \theta \cos \theta \cos \phi \pm \right. \\ \left. \pm \varepsilon_{\perp} \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \left(\alpha + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}} \cos^2 \theta \right) + (1 - \alpha) \varepsilon_a \sin^2 \theta \sin^2 \phi} \right], \quad (31)$$

где

$$\alpha = 1 - k_{\perp}^2 / (k_0^2 \varepsilon_{\perp}).$$

Формулы (49) и (31) позволяют построить поверхности волновых векторов для обыкновенной и необыкновенной волн. Для обыкновенной волны выражения (27) и (49) дают

$$k_z^2 + k_{\perp}^2 = \varepsilon_{\perp} k_0^2, \quad (32)$$

т. е. поверхность волновых векторов представляет собой сферу. Для фиксированного угла падения, то есть заданного k_{\perp} , компонента k_z не зависит от z и луч распространяется прямолинейно. Для необыкновенного луча выражения (27) и (31) дают следующее уравнение для поверхности волновых векторов

$$\frac{k_z^2 (\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta)}{k_0^2 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} + 2 \frac{k_z k_{\perp} \varepsilon_a \sin \theta \cos \theta \sin \phi}{k_0^2 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} + \\ + \frac{k_{\perp}^2 (\varepsilon_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_a \sin^2 \theta \sin^2 \phi)}{k_0^2 \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta)} = 1. \quad (33)$$

Эта поверхность представляет собой наклонный эллипсоид вращения, сечение которого представлено на Рис. 1. Ориентация эллипсоида определяется углами $\phi(z)$ и $\theta(z)$. При этом в зависимости от значения k_{\perp} в уравнении (33) возможны различные типы решений $k_z = k_z(k_{\perp}, \phi, \theta)$. Значению $k_{\perp 1}$ соответствуют два волновых вектора \mathbf{k}_1^+ и \mathbf{k}_1^- . Они соответствуют лучам, распространяющимся в направлении возрастания и убывания z . Значение $k_{\perp 2}$ дает вырожденное решение \mathbf{k}_2 и соответствует точке поворота. Значению $k_{\perp 3}$ соответствуют комплексные решения уравнения (33).

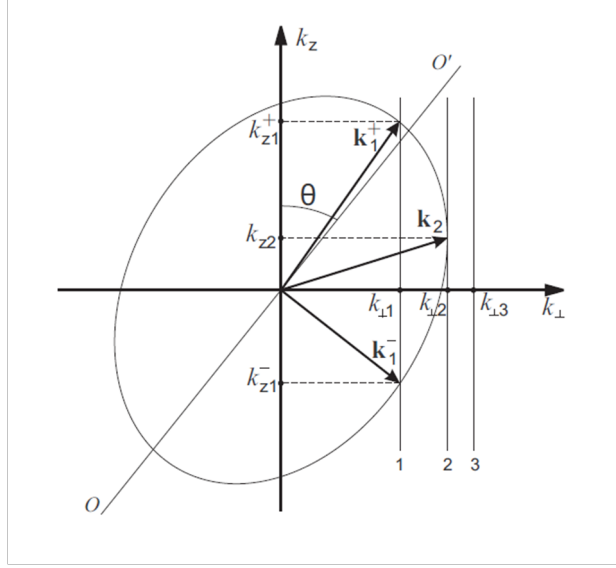


Рис. 1: Сечение поверхности волновых векторов необыкновенной волны при некотором значении z плоскостью, содержащей оси x и z . OO' – оптическая ось. Вертикальные линии 1, 2, 3 фиксируют значение поперечной компоненты волнового вектора k_{\perp} . Пересечение линии 1 с эллипсом дает два решения для распространяющихся волн \mathbf{k}_{\perp}^{\pm} . Касание эллипса линией 2 соответствует вырождению решения в точке поворота и одному волновому вектору \mathbf{k}_2 . Линия 3 не пересекает эллипс, то есть при заданном $k_{\perp 3}$ имеет место экспоненциально затухающее решение внутри запрещенной зоны.

Физический смысл точки поворота можно пояснить, если найти в этой точке вектор Пойнтинга \mathbf{S} , определяющий направление распространения лучей. Вектор Пойнтинга определяется следующим соотношением

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi k_0} (\mathbf{k}E^2 - \mathbf{E}^*(\mathbf{E} \cdot \mathbf{k})), \quad (34)$$

где $\mathbf{E} = E\mathbf{e}$, \mathbf{e} – единичный вектор, определяющий поляризацию волны. Для необыкновенного луча

$$\mathbf{e} = \frac{(\mathbf{k}/k)\varepsilon_{\parallel} \cos \psi - \mathbf{n}(\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \psi)}{\sin \psi (\varepsilon_{\parallel}^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi)}. \quad (35)$$

Здесь ψ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{n}

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}{k} = \frac{k_{\perp} \sin \theta \cos \phi + k_z \cos \theta}{\sqrt{k_{\perp}^2 + k_z^2}}.$$

В точке поворота происходит вырождение собственных значений матрицы \hat{D} и $\lambda_2 = \lambda_4$. Последнее равенство, как видно из (31), выполняется при условии

$$\sqrt{\varepsilon_{\parallel} \left(\alpha + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\perp}} \cos^2 \theta \right) + (1 - \alpha) \varepsilon_a \sin^2 \theta \sin^2 \phi} = 0. \quad (36)$$

Тогда в точке поворота, как следует из соотношений (31) и (27), компонента

$$k_{z\pm}^{(2)} = -\frac{k_{\perp}}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta} \varepsilon_a \sin \theta \cos \theta \cos \phi.$$

Если использовать явный вид (29) для тензора $\hat{\varepsilon}$ и учесть, что мы приняли $k_{\perp} = k_x$, то нетрудно показать, что в точке поворота $S_z = 0$. Физически это проявляется в развороте луча, то есть внутреннем отражении. Для комплексных решений уравнения (33) компонента S_z также равна 0 и за счет мнимого вклада в k_z амплитуды лучей экспоненциально затухают. Однако при попадании луча в область, где k_z становится вещественным, волна продолжает распространяться. В оптике и акустике такой эффект принято называть просачиванием. Область, где k_z имеет мнимый вклад, соответствует запрещенным зонам.

Рассмотрим далее траектория луча $\mathbf{r}(z) = (x(z), y(z), z)$. Явное выражение для лучевого вектора необыкновенной волны $\mathbf{S}^{(e)}$ можно найти, если подставить (35) в (34).

Лучевой вектор параллелен касательной к данному лучу в каждой точке луча. Отсюда

$$x'(z) = \frac{s_x(z)}{s_z(z)}, \quad y'(z) = \frac{s_y(z)}{s_z(z)}. \quad (37)$$

Используя явный вид $\mathbf{S}^{(e)}$, найдем

$$\frac{s_x}{k_0} = \beta - e_x \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2} \cos \psi \varepsilon_a \sin \psi}{\sqrt{\varepsilon_a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi}} \quad (38)$$

$$\frac{s_y}{k_0} = -e_y \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2} \cos \psi \varepsilon_a \sin \psi}{\sqrt{\varepsilon_a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi}} \quad (39)$$

$$\frac{s_z}{k_0} = \lambda - e_z \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2} \cos \psi \varepsilon_a \sin \psi}{\sqrt{\varepsilon_a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi}}, \quad (40)$$

где $[s_i]_{i=x,y,z}$ — это компоненты вектора $\mathbf{s} = \mathbf{k} - \mathbf{e}(\mathbf{k}, \mathbf{e})$, отличающегося на постоянный множитель от вектора (34); λ — собственное число (36), а $\beta = n_g \sin \theta_1$.

В этих обозначениях

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{1}{\sin \psi \sqrt{\varepsilon_a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi}} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}} \varepsilon_a \cos \psi - \sin \theta \cos \phi (\varepsilon_a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi) \right), \\
e_y &= \frac{1}{\sin \psi \sqrt{\varepsilon_a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi}} \left(-\sin \theta \sin \phi (\varepsilon_a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi) \right) \text{ и} \\
e_z &= \frac{1}{\sin \psi \sqrt{\varepsilon_a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi}} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}} \varepsilon_a \cos \psi - \cos \theta (\varepsilon_a^2 \cos^2 \psi + \varepsilon_{\perp}^2 \sin^2 \psi) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом интегрируя уравнения (37) можно получить траекторию необыкновенного луча в слое холестерического жидкого кристалла.

3. Индикатриса однократного рассеяния и коэффициент экстинкции

Флуктуации тензора диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$, вызванные флуктуациями директора, представляются в виде

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) - \varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \\ &= \varepsilon_a [n_\alpha^0 \delta n_\beta(\mathbf{r}) + n_\beta^0 \delta n_\alpha(\mathbf{r})],\end{aligned}\quad (41)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \varepsilon_\perp \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_a n_\alpha^0 n_\beta^0$ — равновесный тензор диэлектрической проницаемости, \mathbf{n}^0 — среднее направление вектора директора, $\delta\mathbf{n} = \mathbf{n} - \mathbf{n}^0$.

Фурье-образ корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости $B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) = k_0^4 \langle \delta\varepsilon_{\alpha\mu} \delta\varepsilon_{\nu\beta}^* \rangle(\mathbf{q})$ связан с флуктуациями директора соотношением

$$\begin{aligned}B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) &= k_0^4 \varepsilon_a^2 \sum_{l=1}^2 \langle |\delta n_l(\mathbf{q})|^2 \rangle (a_{l\mu} a_{l\nu} n_\alpha^0 n_\beta^0 + \\ &+ a_{l\mu} a_{l\beta} n_\alpha^0 n_\nu^0 + a_{l\alpha} a_{l\nu} n_\mu^0 n_\beta^0 + a_{l\alpha} a_{l\beta} n_\mu^0 n_\nu^0).\end{aligned}\quad (42)$$

Здесь для дальнейшего удобства введен коэффициент k_0^4 , k_0 — волновое число в вакууме. Для каждого вектора \mathbf{q} введены единичные векторы $\mathbf{a}_1(\mathbf{q}_\perp) = \mathbf{q}_\perp / q_\perp$ и $\mathbf{a}_2(\mathbf{q}_\perp) = \mathbf{n}^0 \times \mathbf{a}_1(\mathbf{q}_\perp)$, \mathbf{q}_\parallel и \mathbf{q}_\perp — компоненты вектора \mathbf{q} вдоль и поперек \mathbf{n}^0 , $\langle |\delta n_l(\mathbf{q})|^2 \rangle$ — средний квадрат фурье-компонент флуктуаций директора [10, 11]

$$\langle |\delta n_l(\mathbf{q})|^2 \rangle = \frac{k_B T}{K_{ll} q_\perp^2 + K_{33} q_\parallel^2 + \chi_a H^2}, \quad l = 1, 2, \quad (43)$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают статистическое усреднение, K_{jj} — модули Франка, $j = 1, 2, 3$, T — температура, k_B — постоянная Больцмана, χ_a — анизотропия магнитной восприимчивости, H — напряженность постоянного внешнего магнитного поля.

В НЖК индикатриса однократного рассеяния, обусловленного флуктуаци-

ями директора, в общем случае имеет вид [9]

$$I_{(i)}^{(s)} = I_{(i)}^0 \frac{V}{(4\pi)^2 R^2} \frac{1}{n^{(i)} \cos \delta^{(i)}} \frac{n^{(s)}}{\cos^3 \delta^{(s)}} \times \\ \times f_{(s)}^2 e_\alpha^{(s)} e_\beta^{(s)} B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) e_\mu^{(i)} e_\nu^{(i)}, \quad (44)$$

где индексы (i) и (s) обозначают тип падающей и рассеянной волны, (o) — обыкновенная и (e) — необыкновенная, V — рассеивающий объем, R — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения, $\mathbf{q} = \mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}$, $\mathbf{k}^{(s)}$ и $\mathbf{k}^{(i)}$ — волновые векторы рассеянного и падающего света, $\mathbf{e}^{(s)}$ и $\mathbf{e}^{(i)}$ — векторы поляризации рассеянного и падающего света, $I_{(i)}^0$ — интенсивность (модуль вектора Пойнтинга $\mathbf{S}_{(i)}$) падающего света

$$I_{(i)}^0 = |\mathbf{S}_{(i)}| = \frac{c}{4\pi} E_{(i)}^{02} n^{(i)} \cos \delta^{(i)}.$$

Здесь $E_{(i)}^0$ — амплитуда падающего поля, c — скорость света в вакууме. В формуле (44) коэффициенты имеют вид

$$n^{(o)} = \sqrt{\varepsilon_\perp}, \quad n^{(e)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp + \varepsilon_a \cos^2 \theta_e}}, \quad (45)$$

$$\cos \delta^{(o)} = 1, \quad \cos \delta^{(e)} = \frac{\varepsilon_\parallel \cos^2 \theta_e + \varepsilon_\perp \sin^2 \theta_e}{\left(\varepsilon_\parallel^2 \cos^2 \theta_e + \varepsilon_\perp^2 \sin^2 \theta_e\right)^{1/2}}, \quad (46)$$

$$f_{(o)} = 1, \quad f_{(e)}^2 = \frac{1}{\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp^2} \left(\varepsilon_\perp \sin^2 \theta_e + \varepsilon_\parallel \cos^2 \theta_e\right) \times \\ \times \left(\varepsilon_\perp^2 \sin^2 \theta_e + \varepsilon_\parallel^2 \cos^2 \theta_e\right), \quad (47)$$

$$\mathbf{e}^{(o)} = \mathbf{n} \times \mathbf{s}^{(o)}, \\ \mathbf{e}^{(e)} = \frac{\mathbf{s}^{(e)} \varepsilon_\parallel \cos \theta_e - \mathbf{n} \left(\varepsilon_\parallel \cos^2 \theta_e + \varepsilon_\perp \sin^2 \theta_e\right)}{\sin \theta_e \left(\varepsilon_\parallel^2 \cos^2 \theta_e + \varepsilon_\perp^2 \sin^2 \theta_e\right)^{1/2}}, \quad (48)$$

θ_e — угол между волновым вектором необыкновенной волны $\mathbf{k}^{(e)}$ и вектором директора, $\mathbf{s}^{(j)} = \mathbf{k}^{(j)}/k^{(j)}$, $j = i, s$ — единичный вектор, направленный вдоль волнового вектора.

Будем считать, что в системе отсутствует собственное поглощение. Тогда длина свободного пробега фотона связана с коэффициентом экстинкции соотношением

$$l_{(j)}(\mathbf{s}^{(j)}) = \frac{1}{\tau_{(j)}(\mathbf{s}^{(j)})}.$$

Коэффициент экстинкции определяется интенсивностью рассеяния в полный телесный угол, и для одноосной среды имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{(i)}(\mathbf{k}^{(i)}) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{e_\alpha^{(i)} e_\beta^{(i)}}{n^{(i)} \cos^2 \delta^{(i)}} \times \\ &\times \sum_{s=o,e} \int d\Omega_{\mathbf{k}^{(s)}} B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) \frac{n^{(s)} e_\mu^{(s)} e_\nu^{(s)}}{\cos^2 \delta^{(s)}}. \end{aligned} \quad (49)$$

4. Методы компьютерного моделирования

Рассмотрим искажение ориентационной структуры холестерика во внешнем поле и проанализируем оптические характеристики получающейся структуры. При расчетах структуры жидкого кристалла мы учитывали, что в экспериментально исследуемой ячейке ориентант был подобран таким образом, что граничные условия с достаточной степенью точности можно было считать жесткими. Ориентационная структура рассчитывалась методом прямой минимизации свободной энергии (6), (14). Для решения данной задачи этот метод оказывается более эффективным, чем численное решение системы интегродифференциальных уравнений Эйлера – Лагранжа. Интегральные члены в этих уравнениях возникают за счет неоднородности электрического поля внутри жидкого кристалла. При рассмотрении внешнего магнитного поля эти уравнения, естественно, являются дифференциальными.

Поскольку при рассматриваемых условиях эксперимента допустимы жесткие граничные условия, находить распределения ориентаций директора во внешнем поле, превышающем порог Фредерикса, путем минимизации свободной энергии (1) можно одним из двух способов. Один состоит том, что мы раскладываем функции $\theta(z)$ и $\phi(z)$, определяющие локальную ориентацию директора, в ряд Фурье. Далее, ограничиваясь некоторым конечным числом членов ряда, можно свести задачу минимизации свободной энергии к определению коэффициентов разложения этих рядов. Другой способ состоит в использовании системы уравнений Эйлера – Лагранжа для углов $\theta(z)$ и $\phi(z)$. С помощью этой системы можно выразить, например, угол $\phi(z)$ через $\theta(z)$. В этом случае задача минимизации упрощается, поскольку сводится к определению коэффициентов разложения только для одной функции. Функция $\phi(z)$ находится из уравнения связи [7]. Естественно, оба подхода дают совпадающие результаты.

5. Анализ полученных результатов

На Рис. 2 показаны зависимости углов ориентации директора θ и ϕ от z для разных значений приложенного напряжения. При расчетах мы использовали следующие значения модулей Франка: $K_{11} = 1.1 \cdot 10^{-6}$ дин, $K_{33} = 0.99K_{11}$, $K_{22} = 0.38 \cdot 10^{-6}$ дин. Обратим внимание, что при напряжениях, превышающих пороговое, происходит заметное изменение угла наклона директора θ . Что касается угла ϕ , то полученные зависимости слабо отличаются от линейной $\phi = q_0 z$.

На Рис. 3 для данного угла падения, то есть фиксированного \mathbf{k}_\perp , на плоскости (θ, ϕ) приведена кривая 1, описывающая семейство точек поворота. Эта кривая построена на основании уравнения (36), связывающего три величины k_\perp , θ и ϕ . Также на этом рисунке приведены кривые, описывающие распределение директора при трех разных значениях приложенного напряжения. Кривая 2 пересекается с кривой 1, что соответствует наличию запрещенной зоны между точками B_1 и B_2 . Кривая 3 касается кривой 1 в точке A . Эта ситуация соответствует тому, что при данном угле падения и при данном напряжении будет наблюдаться предельный угол рефракции. Кривая 4 не пересекается с кривой 1, что значит, что при данном значении напряжения луч с данным углом падения свободно проходит сквозь ячейку. Обратим внимание, что точка касания находится в середине ячейки при $\phi = 0$. В общем случае это не так. На Рис. 4 видно, что уже при напряжениях порядка $U = 2.0$ В точка поворота начинает смещаться в сторону границы ячейки.

Траектории лучей, соответствующих трем возможным ситуациям, показаны на Рис. 5.

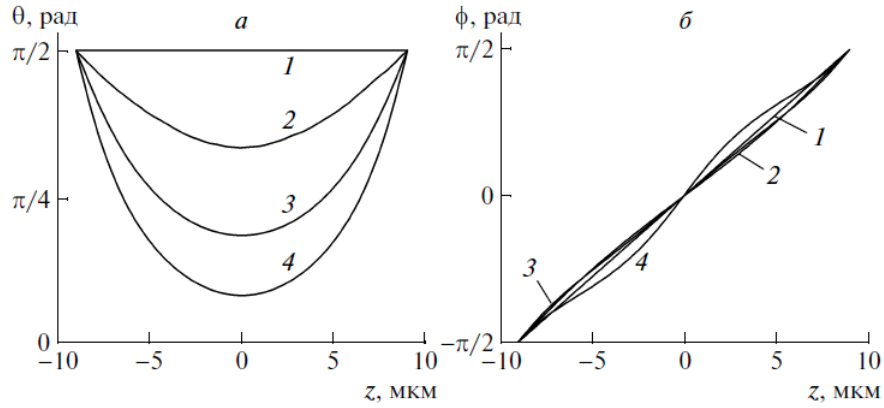


Рис. 2: Зависимость углов $\theta(z)$ (а) и $\phi(z)$ (б) в 180° ячейке кирального жидкого кристалла при отсутствии поля и при напряжениях, превышающих порог Фредерикса. При расчетах использовались следующие значения параметров: толщина ячейки $L = 18$ мкм, $K_{11} = 1.1 \cdot 10^{-6}$ дин, $K_{22} = 0.38 \cdot 10^{-6}$ дин, $K_{33} = 0.99K_{11}$, $\varepsilon_{||0} = 17.7$, $\varepsilon_{\perp 0} = 6.5$. Начало отсчета оси z выбрано в середине ячейки, то есть жидкий кристалл занимает пространство $-L/2 \leq z \leq L/2$. Кривые 1: $U = 0$, кривые 2: $U = 1.55$ В, кривые 3: $U = 1.8$ В, кривые 4: $U = 2.2$ В.

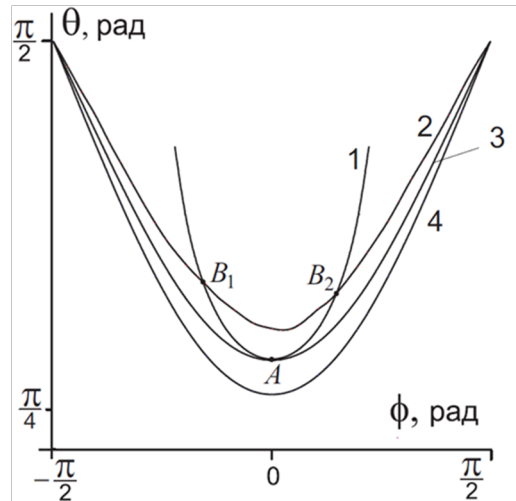


Рис. 3: Иллюстрация возможных ситуаций, возникающих при распространении необыкновенного луча в киральном жидком кристалле при разных значениях приложенного напряжения. Кривая 1 построена для угла падения $\delta = 68.5^\circ$, показателя преломления стекла $n_g = 1.7002$ и длины световой волны $\lambda = 632.8$ нм, что соответствует $k_{\perp} = 1.57 \cdot 10^5$ см $^{-1}$. Кривые 2, 3 и 4 иллюстрируют ориентационную структуру и получены для напряжений 1.58 В, 1.61 В и 1.65 В.

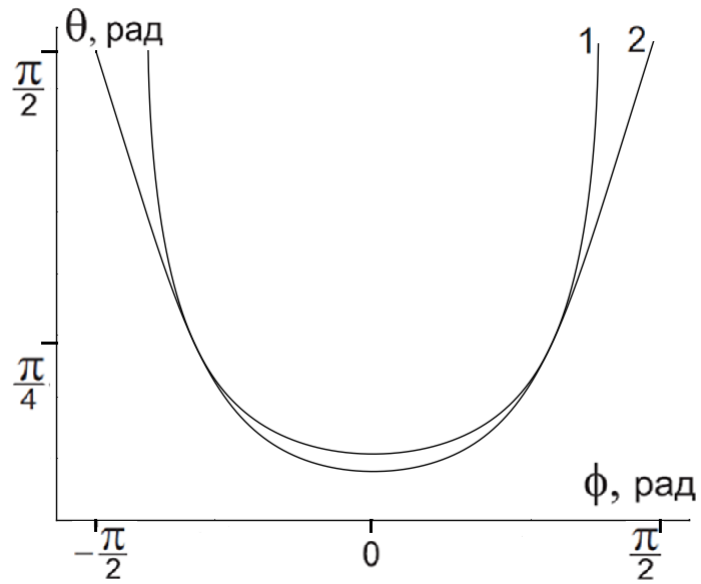


Рис. 4: Кривая 1 построена для угла падения $\delta = 78.2^\circ$, кривая 2 - для напряжения 2.0 В .

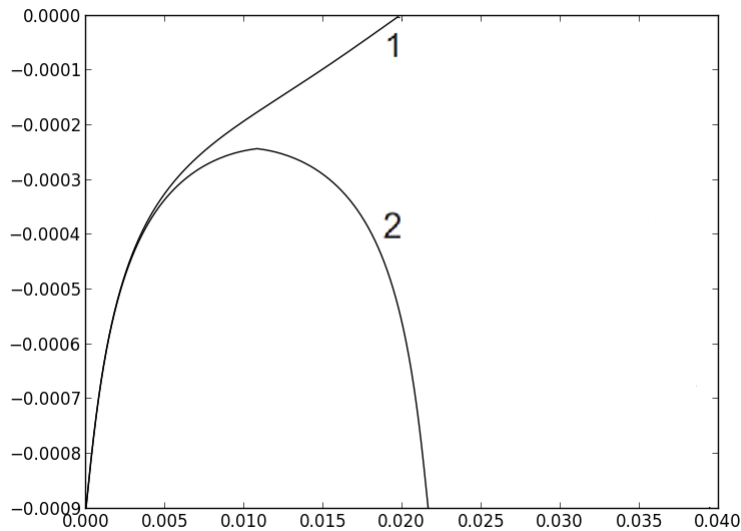


Рис. 5: Показаны траектории лучей, соответствующие двум углам падения при напряжении $U = 1.7 \text{ В}$: $\delta = 72.4^\circ$ - нет запрещенных зон, луч проходит сквозь ячейку (1), $\delta = 72.45^\circ$ - отражение луча (2).

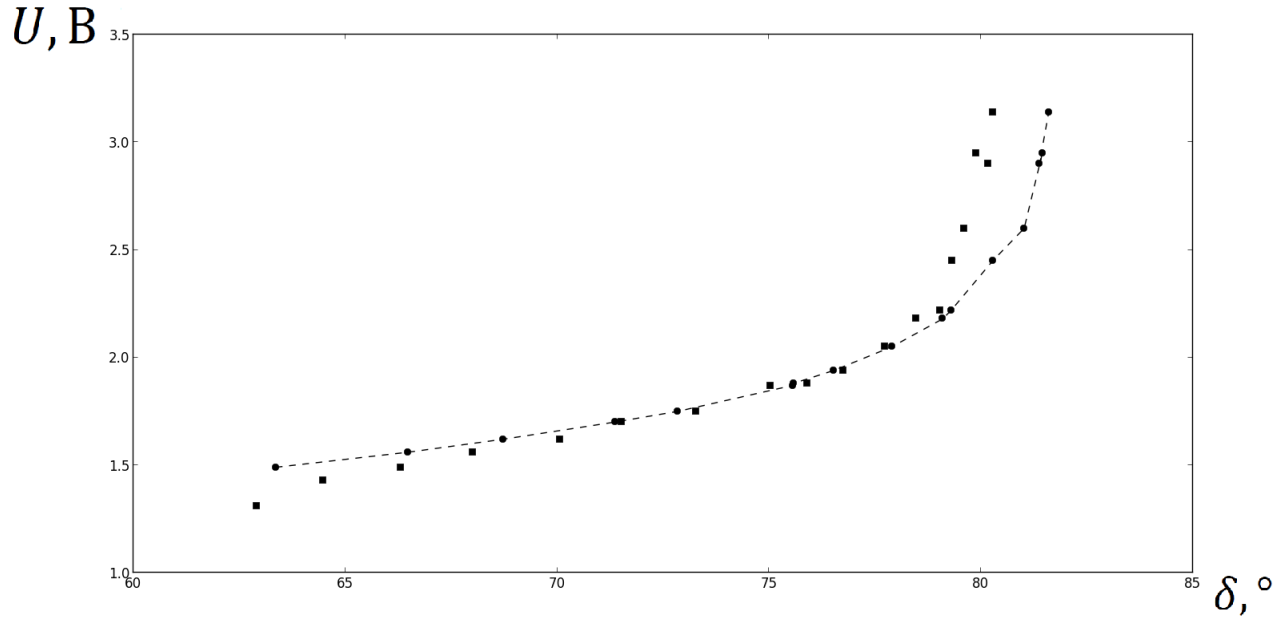


Рис. 6: Связь между предельным углом рефракции и минимальным напряжением пропускания. Квадратики – экспериментальные данные, штриховая линия – расчет с учетом неоднородности электрического поля.

Теоретическая зависимость минимального напряжения пропускания от предельного угла рефракции была получена следующим образом. Для каждого напряжения U путем минимизации свободной энергии была построена кривая на плоскости (ϕ, θ) , описывающая ориентационную структуру жидкого кристалла. Затем с помощью уравнения (36) на той же плоскости находилось семейство точек поворота. Далее определялось такое k_{\perp} , при котором кривые касались друг друга. Но найденному k_{\perp} вычислялся угол падения необыкновенного луча δ на границу раздела стекло – жидкий кристалл. Полученная таким образом зависимость $U(\delta)$ приведена в виде штриховой линии на Рис. 6. Видно, что экспериментальная и теоретическая кривые достаточно хорошо согласуются между собой. Причиной некоторого расхождения теоретических и экспериментальных кривых связана с тем, что при расчетах пришлось использовать большое число параметров, описывающих упругие, диэлектрические и оптические свойства жидкого кристалла. Причем некоторые из этих параметров были известны с недостаточной точностью, например, K_{22} .

Так же исследовалась зависимость интенсивности луча от угла падения при фиксированном напряжении. Для этого использовалась формула $I = I_0 \exp^{-\int \tau dl}$, где интеграл берется вдоль траектории луча, которую можно найти по формулам (37), а τ - это экстинкция (49).

Эта зависимость при $U = 1.75$ В приведена на Рис. 7. В этом случае предельный угол $\delta_{pr} = 73.9^\circ$. При меньших углах луч свободно проходит через ячейку, а при больших – разворачивается где-то в слое ЖК. Возможные траектории показаны на Рис. 7. Как видно, при увеличении угла падения до предельного, длина траектории луча увеличивается, следовательно отношение интенсивностей уменьшается. При увеличении угла от предельного, длина траектории уменьшается вследствие того, что точка поворота луча начинает сдвигаться из середины к границе ячейки. То есть отношение интенсивностей начинает возрастать.

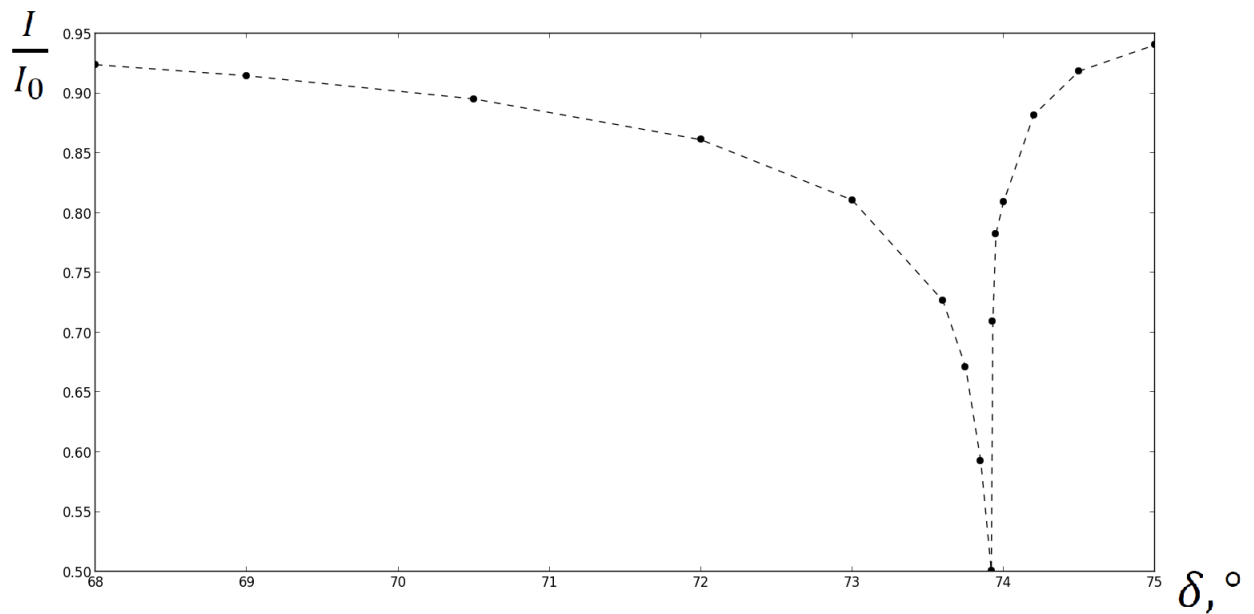


Рис. 7: Зависимость интенсивности от угла падения при $U = 1.75$ В.

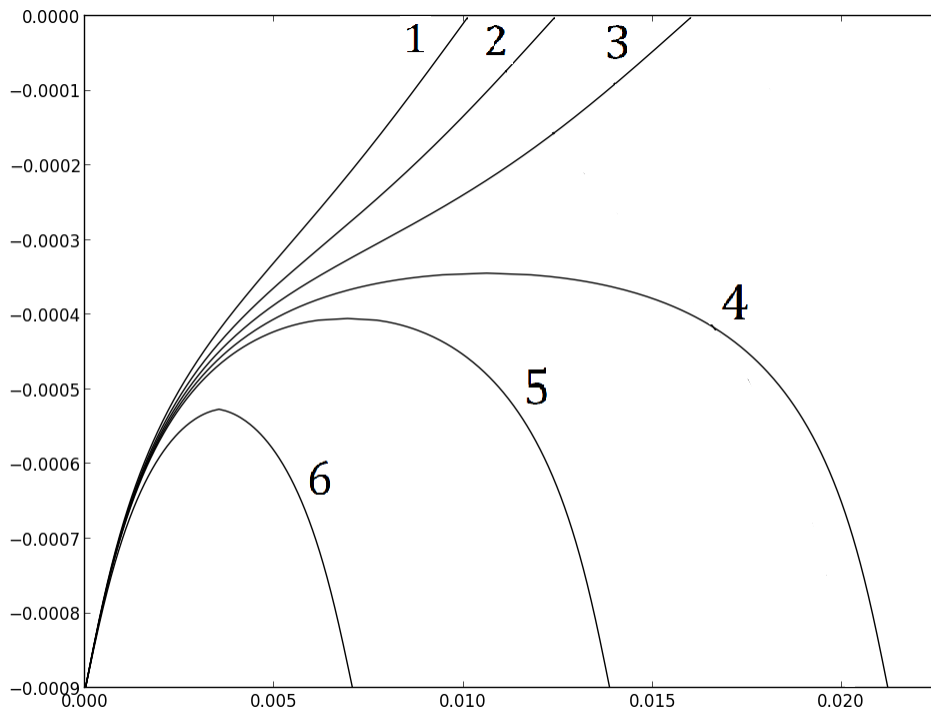


Рис. 8: Траектории лучей в ЖК при $U = 1.75$ В. Кривая 1 – угол падения $\delta = 73.6^\circ$, кривая 2 – $\delta = 73.75^\circ$, кривая 3 – $\delta = 73.85^\circ$, кривая 4 – $\delta = 73.93^\circ$, кривая 5 – $\delta = 74^\circ$, кривая 6 – $\delta = 74.5^\circ$

Заключение

Было исследовано прохождение необыкновенного луча через ячейку с киральным жидким кристаллом во внешнем электрическом поле. Экспериментально была изучена зависимость минимального угла падения, при котором луч еще не проходит через кристалл, от приложенного напряжения. Теоретическая обработка полученных результатов сводилась к определению ориентационной структуры путем минимизации свободной энергии жидкого кристалла и исследованию оптических свойств ячейки при известной структуре. Достаточно хорошее согласие теории с экспериментом показало, что развитый подход может оказаться полезным в изучении физических свойств жидких кристаллов. В принципе он позволяет изучать локальную ориентационную структуру жидких кристаллов во внешних полях.

Рассмотренная в данном эксперименте ячейка с закруткой в 180 градусов и жесткими граничными условиями является простейшей для теоретического анализа, поскольку в этой ситуации внутреннее отражение необыкновенного луча с ростом угла падения при любых напряжениях начинается в середине образца. Для ячейки с произвольным углом закрутки задача становится более сложной, поскольку траектория луча и положение точки поворота могут оказаться достаточно сложными функциями внешнего электрического поля.

Автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям В.П.Романову и Е.В.Аксеновой за их советы, внимание и терпение, без которых не возможно было бы написание этой работы.

Литература

- [1] Qi Hong, T.X.Wu, and Shin-Tson Wu, *Liquid Crystals* 30, 367 (2003).
- [2] V. Freedericksz, V. Zwetkoff, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* 6, 5 (1934).
- [3] M. Warenghem, M. Ismaili, and D. Hector, *J. de Phys III* 2, 765 (1992).
- [4] C.V. Brown and N.J. Mottram, *Phys. Rev. E* 68, 031702 (2003).
- [5] F.M. Leslie, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 12, 57 (1970).
- [6] D.W. Berreman and W.R. Heffner, *Journal of Applied Physics* 52, 3032 (1981).
- [7] A.Yu. Val'kov, E.V. Aksenova, and V.P. Romanov, *Phys. Rev. E* 87, 022508 (2013).
- [8] Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, *Математические методы физики*, Атомиздат, Москва (1972).
- [9] M. Lax, D.F. Nelson, *Proc. of III Rochester Conference on Coherent and Quantum Optics*, Plenum, New York, 415 (1973).
- [10] P.G. de Gennes, J.Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1993).
- [11] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика, ч. 1*, Наука, Москва (1976).