

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



Билоус Павел Юрьевич

**Методы теории возмущений для получения
аналитических оценок опционов**

Квалификационная работа на соискание степени
бакалавра физики

Научный руководитель: _____ д.ф.-м.н., профессор А.Ю. Вальков

Рецензент: _____ ст. преподаватель СПб филиала НИУ
«Высшая школа экономики» А.В. Косенко

Санкт-Петербург
2014

Содержание

1	Введение	3
2	Логнормальная модель изменения цены актива	5
3	Точные аналитические формулы для оценки спред-опциона из двух активов	7
3.1	Обобщение на случай области интегрирования в виде произвольной полуплоскости	12
4	Приближенные аналитические формулы для оценки спред-опциона	14
4.1	Рассмотренные численные примеры.	14
4.2	Аппроксимация гауссовым распределением	15
4.3	Метод Кирка: приближение цены спред-опциона формулой Маргрейба	17
4.4	Приближение области интегрирования полуплоскостью .	18
5	Сравнение результатов	23

1 Введение

Для хеджирования¹ рисков и создания новых возможностей для участников рынка используются производные финансовые инструменты — деривативы (derivatives) [1]. Одним из них является опцион [1, 2]. Опцион дает право его обладателю приобрести или продать актив, на который выписан опцион, в будущем по заранее установленной цене K (страйковой цене — цене реализации/исполнения). Опцион выписывается условно в момент времени $t = 0$ на срок T , по истечение которого держатель опциона может воспользоваться правом покупки или продажи соответственно актива по цене K . Для колл-опциона, дающего право на покупку, этим правом пользуются, когда цена актива S в момент времени T больше K , таким образом, держатель опциона получает очевидную прибыль, равную $S - K$. Для опциона на продажу — пут-опциона — ситуация противоположная. Поскольку ситуация с точки зрения возможных прибылей и убытков по опциону не симметричная покупатель платит продавцу премию. Расчет справедливой величины премии является одной из важнейших задач количественной теории финансов.

Разновидностью опционов, получивших распространение на различных рынках, но играющих особую роль на рынках сырьевых товаров, являются спред-опционы. Они относятся к опционам на несколько базовых активов. Здесь держатель спред-опциона получает право на одновременную покупку первого актива и продажу второго по цене K . В этом случае держатель получает прибыль, если разница цен первого актива и второго к моменту истечения жизни спред-опциона $S_1(T) - S_2(T)$ превышает страйковую цену K .

Данная работа сконцентрирована на проблеме получения оценки спред-опционов. Основная трудность заключается в том, что в отличие от стандартного опциона на один базовый актив, по которому ответ дается известной формулой Блэка-Шоулза, точного решения в аналитической форме (точнее сформированного из стандартных функций) не существует. Приходится вычислять сложный интеграл по сложной области либо используя численные методы, либо путем построения ана-

¹Хеджирование (от англ. hedge — страховка, гарантия) — открытие сделок на одном рынке для компенсации воздействия ценовых рисков равной, но противоположной позиции на другом рынке. Обычно хеджирование осуществляется с целью страхования рисков изменения цен путём заключения сделок на срочных рынках. *Материал из Википедии — свободной энциклопедии*

литического приближения. Второй подход в большинстве случаев предпочтительнее из-за потребности получения оценки в ограниченные временные рамки и необходимости оценивать частные производные цены по различным факторам для хеджирования позиций. Даже в простейшем случае спред-опциона на два актива эта проблема актуальна в настоящее время [3, 4].

В работе, на примере спред-опциона из двух активов рассмотрены способы получения аналитических приближенных формул для оценки его стоимости при логнормальном распределении цен базовых активов. Вместе с известными приближениями, в работе рассматривается новое приближение, еще не нашедшее отражения в литературе.

2 Логнормальная модель изменения цены актива

Развитие цены актива во времени является стохастическим процессом, т.е. таким процессом, который развивается во времени случайным образом. При этом, то, как цена будет изменяться, не зависит от того, как она развивалась до этого момента². Это предположение кажется разумным, потому что в ином случае по пройденному ценой пути было бы возможно предсказывать наиболее вероятное дальнейшее ее движение: вверх или вниз. Это, в свою очередь, породило бы арбитражную возможность, которая автоматически убирается трейдерами.

Поскольку, в общем случае ничего более об исследуемом процессе неизвестно, используем подходящий модельный стохастический процесс, удовлетворяющий заявленным требованиям.

Рассмотрим Винеровский процесс. Формально, величина z следует Винеровскому процессу, если:

1. $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$, где ϵ — случайная величина, имеющая нормальное распределение $N(0, 1)$.
2. Δz , отвечающие двум разным коротким интервалам времени Δt , независимы.

Отсюда, в частности, для математического ожидания \mathbb{E} и дисперсии D Винеровской случайной величины получаем:

$$\mathbb{E}(\Delta z) = 0, \quad D(\Delta z) = \Delta t.$$

Рассмотрим временной интервал длиной T , разбитый на достаточно маленькие временные промежутки Δt . Рассмотрим разность $z(T) - z(0)$, где $T = N \cdot \Delta t$. Тогда

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t},$$

$$\mathbb{E}(z(T) - z(0)) = 0,$$

$$D(z(T) - z(0)) = N \cdot \Delta t = T.$$

Обобщенный Винеровский процесс имеет вид:

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dz,$$

²Случайные величины с таким свойством называются в теории случайных процессов мартингалами

где a, b — константы.

Следующим шагом обобщения является процесс Ито:

$$dx = a(x, t) \cdot dt + b(x, t) \cdot dz.$$

Для данного процесса справедлива Лемма Ито, которая утверждает, что для $G = G(x, t)$ верно:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b \cdot dz.$$

С экономической точки зрения логично условиться, что предполагаемый сдвиг ΔS цены S за короткий промежуток времени Δt пропорционален цене. Стандартное отклонение от ΔS за тот же промежуток тоже пропорционально S . Таким образом модель изменения цены берется как:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

причем в качестве μ принято брать безрисковую процентную ставку r .

Если использовать в качестве G случайную величину $G = \ln S$, то тогда:

$$dG = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz.$$

Полученный результат означает, что случайная величина ΔG , отвечающая изменению за промежуток времени T , распределена нормально со средним $(r - \frac{1}{2} \sigma^2) T$ и дисперсией $\sigma^2 T$.

Если логарифм случайной величины распределен нормально, то говорят, что сама величина имеет логнормальное распределение. И, соответственно, раз логарифм цены актива $\ln S$ имеет нормальное распределение, то распределение S является логнормальным.

3 Точные аналитические формулы для оценки спред-опциона из двух активов

Исследуемой моделью распределения цен является логнормальное распределение, достаточно широко используемое при моделировании стохастического поведения цен [1]. Если изменение цены первого актива за время T является случайной величиной ξ_1 , распределенной логнормально, то величина $\eta_1 = \ln \xi_1$ имеет нормальное распределение со средним a_1 и дисперсией σ_1 . Аналогично для второго актива: случайная величина $\eta_2 = \ln \xi_2$ распределена нормально со средним a_2 и дисперсией σ_2 . В общем случае случайные величины η_1 и η_2 предполагаются зависимыми.

Матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

является матрицей ковариаций случайных величин η_1 и η_2 , $\rho \in [-1; 1]$ — коэффициент корреляции между ними.

Из выше сказанного следует, что совместная плотность распределения вероятностей случайных величин $x_1 = \eta_1 - a_1$ и $x_2 = \eta_2 - a_2$ имеет вид:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right\}. \quad (1)$$

Для установления цены спред-опциона s со страйковой ценой K необходимо усреднить платежную функцию P (pay-off function), которая показывает, какую прибыль получает держатель спред-опциона со страйковой ценой K , с весом $\rho(\mathbf{x})$. Для спред-опциона она имеет вид:

$$P(\mathbf{x}) = e^{-rT} \max \{ A_1 e^{x_1} - A_2 e^{x_2} - K, 0 \}. \quad (2)$$

Таким образом, необходимо вычислить двойной интеграл I и умножить его на e^{-rT} :

$$I = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int_{\Omega} d\mathbf{x} (A_1 e^{x_1} - A_2 e^{x_2} - K) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \quad (3)$$

где область

$$\Omega = \{ \mathbf{x} | A_1 e^{x_1} > A_2 e^{x_2} + K \} \quad (4)$$

определяет множество точек (x_1, x_2) , на котором подынтегральное выражение положительно.

В данной модели

$$\sigma_i \equiv \sigma_{i0}\sqrt{T}, \quad a_i \equiv \ln S_{i0} + (r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)T, \quad (5)$$

где S_{i0} — цена i -го актива в начальный момент времени $t = 0$, когда заключается соглашение на покупку или продажу опциона i -го актива, $t = T$ — страйковое время (время исполнения контракта). Таким образом A_i определяется равенством:

$$A_i = S_{i0}e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_{i0}^2)T}. \quad (6)$$

Удобно ввести величины F_i такие, что

$$A_i = F_i e^{-\frac{\sigma_i^2}{2}}.$$

Тогда величины F_i и σ_i задаются независимо друг от друга, потому что в явном виде F_i равно

$$F_i = S_{i0}e^{rT} \quad (7)$$

и является математическим ожиданием цены i -го актива по истечению времени T .

Аналитически интеграл (3) берется в двух случаях.

В первом из них $A_2 = 0$, что соответствует простому опциону (а не спред-опциону) и приводит к одномерному интегралу:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int_{\Omega} d\mathbf{x} (A_1 e^{x_1} - K) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\times \int_{\ln K - \ln A_1}^{+\infty} dx_1 (A_1 e^{x_1} - K) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{x_1^2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} + \frac{\rho x_1 x_2}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} - \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}} dx_2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\ln K - \ln A_1}^{+\infty} dx_1 (A_1 e^{x_1} - K) e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln A_1}{\sigma_1}}^{+\infty} dx (A_1 e^{\sigma_1 x} - K) e^{-\frac{x^2}{2}} = \end{aligned}$$

$$= A_1 e^{\frac{\sigma_1^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln A_1 - \ln K + \sigma_1^2}{\sigma_1}\right) - K \Phi\left(\frac{\ln A_1 - \ln K}{\sigma_1}\right),$$

где

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

— функция Лапласа, широко используемая в приложениях теории вероятностей.

С учетом определений (5), (6) мы получаем известную формулу Блэка-Шоулза [5]

$$c = S_{10} \Phi\left(\frac{\ln S_{10} - \ln K + (r + \frac{1}{2}\sigma_{10}^2)T}{\sigma_{10}\sqrt{T}}\right) - e^{-rT} K \Phi\left(\frac{\ln S_{10} - \ln K + (r - \frac{1}{2}\sigma_{10}^2)T}{\sigma_{10}\sqrt{T}}\right).$$

Во втором случае $K = 0$. В этом случае результат будет даваться интегралом:

$$I = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int_{\Omega_0} d\mathbf{x} (A_1 e^{x_1} - A_2 e^{x_2}) e^{-\frac{1}{2}\frac{x_1^2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} + \frac{\rho x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2(1-\rho^2)} - \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}},$$

где область

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} | x_1 - x_2 > -a\}, \quad a = \ln \frac{A_1}{A_2}.$$

Выполним замену переменных:

$$x = \frac{x_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho x_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}, \quad y = \frac{x_2}{\sigma_2}.$$

Соответствующий этой замене якобиан равен $\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{\det \Sigma}$. Получим

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1} (A_1 e^{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2} + \sigma_1\rho y} - A_2 e^{\sigma_2 y}) e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2} dx dy,$$

где

$$\Omega_1 = \{(x, y) | \sigma_1\sqrt{1-\rho^2}x - (\sigma_2 - \sigma_1\rho)y > -a\}.$$

Проинтегрируем слагаемые в этой формуле по отдельности. Для первого слагаемого имеем:

$$\frac{A_1}{2\pi} \int_{\Omega_1} e^{\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} x + \sigma_1 \rho y} e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2} dx dy = \frac{A_1 e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2}}{2\pi} \int_{\Omega_2} e^{-\frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2} dz,$$

где

$$\Omega_2 = \{z | \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} z_1 - (\sigma_2 - \sigma_1 \rho) z_2 > -a - \sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho\}.$$

Из Рис. 1 видно ³, что после поворота системы координат $(z_1, z_2) \rightarrow (z'_1, z'_2)$ значение интеграла определяется величиной d_1 — расстоянием от начала координат до границы:

$$d_1 = \frac{|a + \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho}} = \frac{|a + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + \frac{1}{2}\sigma^2|}{\sigma},$$

где

$$\sigma \equiv \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho}.$$

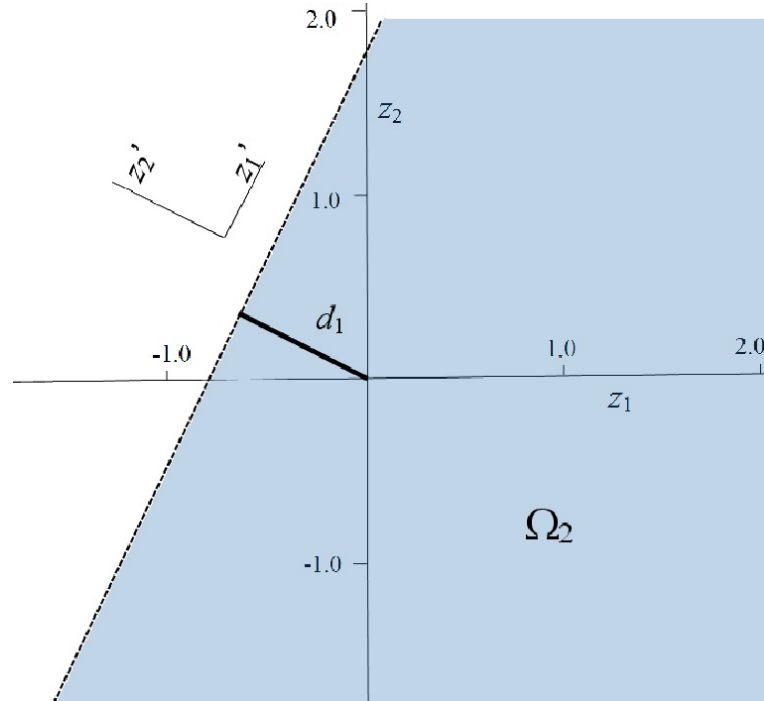


Рис. 1: Область Ω_2 .

³Этот рисунок построен для основного числового примера (12) из раздела 4.1.

Тогда для первого слагаемого получаем значение:

$$\frac{A_1 e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2}}{2\pi} \int_{\Omega_2} e^{\frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2} d\mathbf{z} = A_1 e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2} \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right).$$

Для второго слагаемого аналогично имеем:

$$\frac{A_2}{2\pi} \int_{\Omega_1} e^{\sigma_2 y} e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2} dx dy = \frac{A_2 e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2}}{2\pi} \int_{\Omega_3} e^{-\frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2} d\mathbf{z},$$

где

$$\Omega_3 = \{\mathbf{z} | \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} z_1 - (\sigma_2 - \sigma_1 \rho) z_2 > -a + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho\}.$$

Значение данного интеграла определяется величиной d_2 — расстояние от начала координат до границы:

$$d_2 = \frac{|a\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2\rho|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}} = \frac{|a + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \frac{1}{2}\sigma^2|}{\sigma}.$$

Результат для второго слагаемого имеет вид:

$$\frac{A_2 e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2}}{2\pi} \int_{\Omega_3} e^{-\frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2} d\mathbf{z} = A_2 e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2} \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right).$$

Окончательно, мы приходим к формуле:

$$I = F_1 \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right) - F_2 \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right).$$

Подставляя в полученный ответ определения (5), (7) и умножая его на дисконтирующий фактор e^{-rT} мы получаем формулу Маргрейба [6, 7] для цены спред-опциона из двух активов с нулевой страйковой ценой $K = 0$:

$$c = S_{10} \Phi(d_+) - S_{20} \Phi(d_-), \quad (8)$$

где

$$d_{\pm} = \frac{\ln(S_{10}/S_{20}) \pm \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}.$$

3.1 Обобщение на случай области интегрирования в виде произвольной полуплоскости

Отметим общность между обоими случаями: и для формулы Блека-Шолуза и для формулы Маркгрейба областями интегрирования в двумерном пространстве (x_1, x_2) являются полуплоскости. Получим общий ответ

$$\hat{I} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int_{\Xi} d\mathbf{x} (A_1 e^{x_1} - A_2 e^{x_2} - K) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

для случая, когда область интегрирования Ξ является произвольной полуплоскостью:

$$\Xi = \{\mathbf{x} | (\mathbf{k}, \mathbf{x}) > a\}. \quad (9)$$

Введем симметричную матрицу $C = \Sigma^{\frac{1}{2}}$ ($C^T = C$) и выполним замену $\mathbf{x} = C\mathbf{z}$.

$$\hat{I} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Xi_1} d\mathbf{z} \left(A_1 e^{C_{11}z_1 + C_{12}z_2} - A_2 e^{C_{12}z_1 + C_{22}z_2} - K \right) e^{-\frac{\mathbf{z}^2}{2}},$$

где область интегрирования записывается в виде:

$$\Xi_1 = \{\mathbf{z} | (k_1 C_{11} + k_2 C_{12})z_1 + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22})z_2 > a\}.$$

Выполняя в интеграле \hat{I} почленное интегрирование получим:

$$\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int_{\Xi} d\mathbf{x} (A_1 e^{x_1} - A_2 e^{x_2} - K) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})} \\
&= A_1 e^{\frac{c_{11}^2 + c_{12}^2}{2}} \Phi \left(\frac{k_1(C_{11}^2 + C_{12}^2) + k_2(C_{11}C_{12} + C_{12}C_{22}) - a}{\sqrt{k_1^2(C_{11}^2 + C_{12}^2) + k_2^2(C_{12}^2 + C_{22}^2) + 2k_1k_2(C_{11}C_{12} + C_{12}C_{22})}} \right) \\
&\quad - A_2 e^{\frac{c_{12}^2 + c_{22}^2}{2}} \Phi \left(\frac{k_1(C_{11}C_{12} + C_{12}C_{22}) + k_2(C_{12}^2 + C_{22}^2) - a}{\sqrt{k_1^2(C_{11}^2 + C_{12}^2) + k_2^2(C_{12}^2 + C_{22}^2) + 2k_1k_2(C_{11}C_{12} + C_{12}C_{22})}} \right) \\
&\quad - K \Phi \left(\frac{-a}{\sqrt{k_1^2(C_{11}^2 + C_{12}^2) + k_2^2(C_{12}^2 + C_{22}^2) + 2k_1k_2(C_{11}C_{12} + C_{12}C_{22})}} \right) \\
&= A_1 e^{\frac{\Sigma_{11}}{2}} \Phi \left(\frac{k_1\Sigma_{11} + k_2\Sigma_{12} - a}{\sqrt{k_1^2\Sigma_{11} + k_2^2\Sigma_{22} + 2k_1k_2\Sigma_{12}}} \right) - A_2 e^{\frac{\Sigma_{22}}{2}} \Phi \left(\frac{k_1\Sigma_{12} + k_2\Sigma_{22} - a}{\sqrt{k_1^2\Sigma_{11} + k_2^2\Sigma_{22} + 2k_1k_2\Sigma_{12}}} \right) \\
&\quad - K \Phi \left(\frac{-a}{\sqrt{k_1^2\Sigma_{11} + k_2^2\Sigma_{22} + 2k_1k_2\Sigma_{12}}} \right) \\
&= F_1 \Phi \left(\frac{k_1\sigma_1^2 + k_2\rho\sigma_1\sigma_2 - a}{\sqrt{k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + 2k_1k_2\rho\sigma_1\sigma_2}} \right) - F_2 \Phi \left(\frac{k_1\rho\sigma_1\sigma_2 + k_2\sigma_2^2 - a}{\sqrt{k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + 2k_1k_2\rho\sigma_1\sigma_2}} \right) \\
&\quad - K \Phi \left(\frac{-a}{\sqrt{k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + 2k_1k_2\rho\sigma_1\sigma_2}} \right). \quad (10)
\end{aligned}$$

Эта формула будет использоваться в следующих разделах работы.

4 Приближенные аналитические формулы для оценки спред-опциона

Интеграл (3) можно свести к однократному интегралу, содержащему спецфункции:

$$I = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int_{\Omega} d\mathbf{x} (A_1 e^{x_1} - A_2 e^{x_2} - K) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

где $\Omega = \{\mathbf{x} | A_1 e^{x_1} > A_2 e^{x_2} + K\}$. Замена переменных

$$x_1 = \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} x + \sigma_2 \rho y, \quad x_2 = \sigma_2 y$$

приводит к новой области интегрирования

$$\Omega_1 = \{(x, y) | x > g(y)\},$$

где

$$g(y) = \frac{\ln(A_2 e^{\sigma_2 y} + K) - \ln A_1 - \sigma_1 \rho y}{\sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Следовательно

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{g(y)}^{+\infty} dx (A_1 e^{\sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} x + \sigma_1 \rho y} - A_2 e^{\sigma_2 y} - K) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

Проводя интегрирование по x , получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy (A_1 e^{\sigma_1 \rho y + \frac{\sigma_1^2(1 - \rho^2)}{2}} \Phi(\sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} - g(y)) - A_2 e^{\sigma_2 y} \Phi(-g(y)) - K \Phi(-g(y))) e^{-\frac{y^2}{2}}. \quad (11)$$

Эта форма удобна для численного интегрирования, которое мы будем использовать ниже для контроля точности получаемых приближенных аналитических формул.

4.1 Рассмотренные численные примеры.

В данной работе будут рассмотрены несколько численных примеров. Во всех из них

$$F_1 = 55, \quad F_2 = 45, \quad \rho = 0.3.$$

остаются фиксированными.

Главным примером, который приближается неплохо всеми изучаемыми ниже методами, будет случай:

$$\sigma_1 = 0.55, \sigma_2 = 0.35, K = 5. \quad (12)$$

Изображения и графики в дальнейшем будут относиться именно к этому примеру.

Численное интегрирование по формуле (11) дает значение:

$$I_N(0.55, 0.35, 5) \approx 13.95665700,$$

где в скобках как параметры используются $\sigma_1 = 0.55$, $\sigma_2 = 0.35$ и $K = 5$.

Три следующих примера, также полученные численным интегрированием, позволят нам далее качественно оценить, какой из приближенных аналитических методов подходит наиболее хорошо при увеличении волатильностей σ_1 , σ_2 и страйковой цены K поочередно:

$$I_N(2, 0.35, 5) \approx 37.45355464,$$

$$I_N(0.55, 2, 5) \approx 33.88178164,$$

$$I_N(0.55, 0.35, 30) \approx 5.707268535.$$

4.2 Аппроксимация гауссовым распределением

В этом разделе рассматривается простейший метод оценки опционов, основанный на аппроксимации логнормального распределения каждого актива гауссовым распределением. После этого можно воспользоваться формулой, впервые предложенной Башалье [8].

Как говорилось в разделе 3 об аналитическом вычислении интеграла, на данный момент известен только один вид области, по которому интеграл (3) берется аналитически — полуплоскость (а в общем многомерном случае — полупространство). Реальная область интегрирования $\Omega = \{\mathbf{x} | A_1 e^{x_1} > A_2 e^{x_2} + K\}$ не является полуплоскостью.

Интегралу (3) соответствует платежная функция $P(\mathbf{x})$ в виде (2). В этой модели распределения цен активов предполагается логнормальными. Идея метода Башалье состоит в попытке заменить (приблизить) логнормальные распределения цен $S_i(T)$ гауссовыми,

$$S_i \approx B_i x_i + C_i,$$

и интегрировать их с тем же весом (1). Платежная функция в таком приближении будет иметь вид:

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{x}) &= e^{-rT} \max \{B_1x_1 + C_1 - B_2x_2 - C_2 - K, 0\} = \\ &= e^{-rT} \max \{B_1x_1 - B_2x_2 - \tilde{K}, 0\}, \end{aligned}$$

где $\tilde{K} = K + C_2 - C_1$.

Интеграл, которым в таком приближении будет аппроксимироваться формула (3), равен:

$$I_B = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int_{\Omega_4} d\mathbf{x} (B_1x_1 + C_1 - B_2x_2 - C_2 - K) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \quad (13)$$

где область интегрирования

$$\Omega_4 = \{\mathbf{x} | B_1x_1 + C_1 > B_2x_2 + C_2 + K\}.$$

Подберем B_i и C_i , так чтобы гауссовы случайные величины $B_ix_i + C_i$ были по возможности ближе к логнормальным случайным величинам S_i . Мы воспользуемся так называемым методом моментов, по которому у этих величин должны совпадать средние и дисперсии:

$$\mathbb{E}(A_ie^{x_i}) = \mathbb{E}(B_ix_i + C_i), \quad D(A_ie^{x_i}) = D(B_ix_i + C_i),$$

$i = 1, 2$. В данном случае

$$\mathbb{E}(A_ie^{x_i}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \int d\mathbf{x} (A_ie^{x_i}) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})} = A_ie^{\frac{\sigma_i^2}{2}} = F_i,$$

$$D(A_ie^{x_i}) = \mathbb{E}(A_i^2e^{2x_i}) - \mathbb{E}(A_ie^{x_i})^2 = A_i^2e^{\sigma_i^2}(e^{\sigma_i^2} - 1) = F_i^2(e^{\sigma_i^2} - 1),$$

$$\mathbb{E}(B_ix_i + C_i) = C_i, \quad D(B_ix_i + C_i) = \sigma_i^2 B_i^2.$$

Применяя метод моментов, получаем:

$$B_i = \frac{F_i}{\sigma_i} \sqrt{e^{\sigma_i^2} - 1}, \quad C_i = F_i.$$

Интеграл (13) берется по полуплоскости и вычисляется в замкнутой

форме:

$$I_B = \sqrt{\frac{B_1^2\sigma_1^2 + B_2^2\sigma_2^2 - 2B_1B_2\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(C_1 - C_2 - K)^2}{2(B_1^2\sigma_1^2 + B_2^2\sigma_2^2 - 2B_1B_2\rho\sigma_1\sigma_2)}\right\} + \\ + (C_1 - C_2 - K)\Phi\left(\frac{C_1 - C_2 - K}{\sqrt{B_1^2\sigma_1^2 + B_2^2\sigma_2^2 - 2B_1B_2\rho\sigma_1\sigma_2}}\right). \quad (14)$$

Результаты расчета по формулам данного приближения для рассматриваемых в разделе 4.1 наборов данных имеют вид:

$$I_B(0.55, 0.35, 5) \approx 15.35887596, \\ I_B(2, 0.35, 5) \approx 161.3264374, \\ I_B(0.55, 2, 5) \approx 130.6395378, \\ I_B(0.55, 0.35, 30) \approx 5.129198005.$$

4.3 Метод Кирка: приближение цены спред-опциона формулой Маргрейба

В данном разделе изучается другой способ аппроксимации интеграла (3), методология которого, как и в предыдущем разделе, заключается в изменении платежной функции.

Данный метод, предложенный Кирком [9], состоит в аппроксимации суммы $S_2(T) + K$ логнормальным распределением, используя метод моментов. Таким образом в этом методе $A_2e^{x_2} + K$ заменяется на $Ae^{\alpha x_2}$, и, соответственно, приближаем платежную функцию (2) новой:

$$P_2(\mathbf{x}) = e^{-rT} \max\{A_1e^{x_1} - Ae^{\alpha x_2}, 0\}.$$

При этом A и α находятся по методу моментов:

$$\mathbb{E}(A_2e^{x_2} + K) = \mathbb{E}(Ae^{\alpha x_2}), \quad D(A_2e^{x_2} + K) = D(Ae^{\alpha x_2}).$$

Имеем:

$$\mathbb{E}(A_2e^{x_2} + K) = A_2e^{\frac{\sigma_2^2}{2}} + K = F_2 + K, \quad \mathbb{E}(Ae^{\alpha x_2}) = Ae^{\frac{\alpha^2\sigma_2^2}{2}},$$

$$D(A_2e^{x_2} + K) = \mathbb{E}((A_2e^{x_2} + K)^2) - \mathbb{E}(A_2e^{x_2} + K)^2 = \\ = A_2^2e^{\sigma_2^2}(e^{\sigma_2^2} - 1) = F_2^2(e^{\sigma_2^2} - 1),$$

$$D(Ae^{\alpha x_2}) = \mathbb{E}(A^2 e^{2\alpha x_2}) - (\mathbb{E}(Ae^{\alpha x_2}))^2 = A^2 e^{\alpha^2 \sigma_2^2} (e^{\alpha^2 \sigma_2^2} - 1).$$

Результатом метода моментов является:

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_2} \sqrt{\ln \left(1 + \frac{F_2^2 (e^{\sigma_2^2} - 1)}{(F_2 + K)^2} \right)}, \quad A = (F_2 + K) \left(1 + \frac{F_2^2 (e^{\sigma_2^2} - 1)}{(F_2 + K)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Остается приближенно вычислить интеграл (3), воспользовавшись формулой Маркгрейба (8):

$$\begin{aligned} I_K &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \Sigma}} \int_{\Omega_5} d\mathbf{x} (A_1 e^{x_1} - Ae^{\alpha x_2}) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1} \mathbf{x}, \mathbf{x})} = \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \tilde{\Sigma}}} \int_{\Omega_6} d\mathbf{z} (A_1 e^{z_1} - Ae^{z_2}) e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}, \mathbf{z})}, \end{aligned}$$

где области $\Omega_5 = \{\mathbf{x} | A_1 e^{x_1} > Ae^{\alpha x_2}\}$, $\Omega_6 = \{\mathbf{z} | A_1 e^{z_1} > Ae^{z_2}\}$, а матрица $\tilde{\Sigma}$ получается заменой σ_2 на $\alpha \sigma_2$ в матрице Σ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} I_K &= A_1 e^{\frac{\sigma_1^2}{2}} \Phi \left(\frac{\ln \frac{A_1}{A} + \sigma_1^2 - \alpha \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \alpha^2 \sigma_2^2 - 2\alpha \rho \sigma_1 \sigma_2}} \right) - \\ &\quad - Ae^{\frac{\alpha^2 \sigma_2^2}{2}} \Phi \left(\frac{\ln \frac{A_1}{A} + \alpha \rho \sigma_1 \sigma_2 - \alpha^2 \sigma_2^2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \alpha^2 \sigma_2^2 - 2\alpha \rho \sigma_1 \sigma_2}} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

Формула (15) дает следующие численные результаты для рассматриваемых (из раздела 4.1) наборов данных :

$$I_K(0.55, 0.35, 5) \approx 13.96605540,$$

$$I_K(2, 0.35, 5) \approx 37.45136557,$$

$$I_K(0.55, 2, 5) \approx 36.51076969,$$

$$I_K(0.55, 0.35, 30) \approx 5.70863811.$$

Априори ясно, что приближение Кирка должно хорошо работать при малых K , а его применимость при больших K вызывает сомнения.

4.4 Приближение области интегрирования полуплоскостью

Напомним, что цена спред-опциона определяется интегралом (3),

$$I = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \Sigma}} \int_{\Omega} d\mathbf{x} (A_1 e^{x_1} - A_2 e^{x_2} - K) e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1} \mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

где интегрирование ведется по области $\Omega = \{\mathbf{x} | A_1 e^{x_1} > A_2 e^{x_2} + K\}$ (Рис. 2)

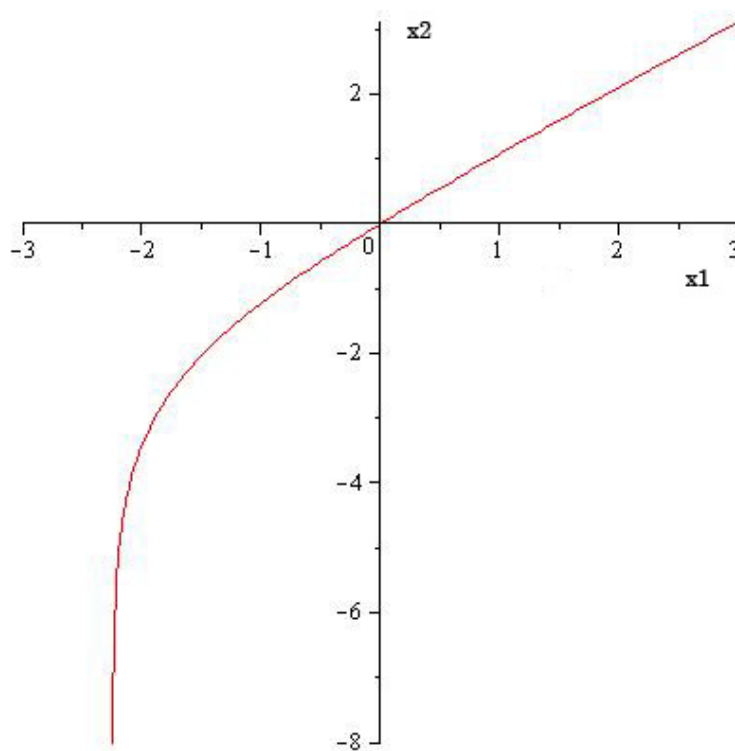


Рис. 2: Область интегрирования Ω .

Т.к. аналитически интеграл I по данной области не вычисляется, мы приблизим область интегрирования полуплоскостью. Тогда, воспользовавшись формулой (10), можно получить приближенный ответ в аналитической форме. Данная идея была предложена в работах Кармоны и Дарлемана [10, 11, 3], где для нахождения оптимальной полуплоскости предлагалось численная оптимизация получаемого результата I на максимум по параметрам, определяющим граничную полуплоскость. Недостатком этого метода являются проблемы, возникающие в ряде случаев с нахождением оптимальной полуплоскости численными методами [12]. Идея, основанная на замене границы полуплоскостью, далее использовалась также и в работах [12, 4, 13], где плоская граница выбиралась достаточно простым образом (по правилу касания к реальной границе в точке с координатой $x_2 = 0$), однако учитывались поправки второго порядка к ее форме границы (т.е. кривизна границы).

Мы, предлагаем свой метод в котором объединяются перечисленные

выше идеи, но каждая из них реализована иным образом:

- Исходная оптимальная полуплоскость, определяется условием касания ее к границе области интегрирования, в оптимальной точке.
- Кроме того, мы используем параллельный сдвиг этой полуплоскости, чтобы учесть поправки на кривизну границы.

Первым шагом будет нахождение оптимальной полуплоскости, граница которой касается границы области Ω : $l = \{\mathbf{x} | A_1 e^{x_1} = A_2 e^{x_2} + K\}$. Интегрирование берется с весом $\rho(\mathbf{x})$ (1), поэтому выберем точкой касания ту, которая имеет вероятностный максимальный вес, или, что то же самое, минимум квадратичной формы $(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Выразим x_1 через x_2 на границе l ,

$$x_1 = \ln \left(\frac{A_2 e^{x_2} + K}{A_1} \right),$$

и введем $s(x_2)$, пропорциональную $(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} s(x_2) &= \frac{1}{2}(1 - \rho^2)(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\rho x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} = \\ &= \frac{1}{2\sigma_1^2} \ln^2 \left(\frac{A_2 e^{x_2} + K}{A_1} \right) - \frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} \ln \left(\frac{A_2 e^{x_2} + K}{A_1} \right) x_2 + \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}. \end{aligned}$$

Чтобы найти \mathbf{x} , находящийся на границе области интегрирования, и отвечающий минимуму квадратичной формы $(\Sigma^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x})$, установим ноль производной $\frac{ds}{dx_2}$ методом Ньютона.

Согласно этому методу корень для функции $f(x)$ точка x_* такая, что $f(x_*) = 0$, ищется итерационно:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Прежде всего, необходимо иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx_2} &= \left(\frac{A_2}{\sigma_1^2(A_2 + K e^{-x_2})} - \frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \ln \left(\frac{A_2 e^{x_2} + K}{A_1} \right) - \\ &\quad - \frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \frac{A_2 x_2}{A_2 + K e^{-x_2}} + \frac{x_2}{\sigma_2^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dx_2^2} = & \frac{1}{\sigma_1^2} \frac{A_2 K e^{-x_2}}{(A_2 + K e^{-x_2})^2} \ln \left(\frac{A_2 + K e^{-x_2}}{A_1} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{\rho x_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \left(\frac{A_2}{A_2 + K e^{-x_2}} \right)^2 - \frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \frac{A_2 (2 + x_2)}{A_2 + K e^{-x_2}} + \frac{1}{\sigma_2^2}. \end{aligned}$$

Для применения данного метода к $f(x_2) = ds/dx_2$ возьмем в качестве нулевого приближения $x_2 = 0$.

Далее из-за того, что не обойтись без численных методов, мы проиллюстрируем шаги алгоритма Ньютона на конкретном примере конкретного примера. В качестве этого примера мы возьмем наш основной случай (12):

$$F_1 = 55, F_2 = 45, \sigma_1 = 0.55, \sigma_2 = 0.35, \rho = 0.3, K = 5,$$

на примере которого и будут проделаны необходимые действия. Для других случаев будут приведены только окончательные результаты.

Результатом итераций точки $x_2 = 0$ является точка:

$$\begin{aligned} x_2 = x_* &= -0.1719556241 \times 10^{-3}, \\ x_1 = x_1(x_*) &= 0.8326342639 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Аппроксимирующая полуплоскость, касающаяся области интегрирования Ω_0 в этой точке выражается как:

$$x_1 - x_1'(x_*) \cdot x_2 > x_1(x_*) - x_1'(x_*)x_*,$$

что численно дает:

$$x_1 - 0.8943346134x_2 > 0.0009864201305. \quad (16)$$

На данном этапе имеется все необходимое для аппроксимации по формуле (10), результат которой равен:

$$I_P \approx 13.11888748.$$

Следующим шагом будет параллельный сдвиг полученной полуплоскости (16). Чтобы понять, по какому принципу следует это делать, отметим следующее ключевое свойство области интегрирования Ω в (4) [11]:

Область (4) отвечает максимуму интеграла (3) среди всех возможных областей интегрирования.

Объяснение заключается в том, что, поскольку это та самая область, в которой подынтегральное выражение положительно, то какую бы иную область интегрирования для интеграла (3) не использовать, в интеграл либо будет вносить вклад участки, где $P(\mathbf{x}) < 0$, тем самым понижая значение интеграла, либо/и мы не будем добирать участки интегрирования, где $P(\mathbf{x}) > 0$, что опять-таки понижает значение интеграла. В итоге результат для другой области всегда получится заведомо меньше истинного.

Если сдвигать полуплоскость

$$x_1 - 0.8943346134x_2 > a,$$

варьируя a , то можно максимизировать результат аппроксимации, приблизившись тем самым ближе к истинному результату.

Искать максимум будем тем же способом, что и максимум $s(x_2)$, начиная с $a_0 = 0.0009864201305$, т.е. стартуя с найденной ранее полуплоскости (16).

Результатом итераций является точка $a = 0.006492691953$ (Рис. 3 показывает, какой полуплоскостью аппроксимируется область Ω).

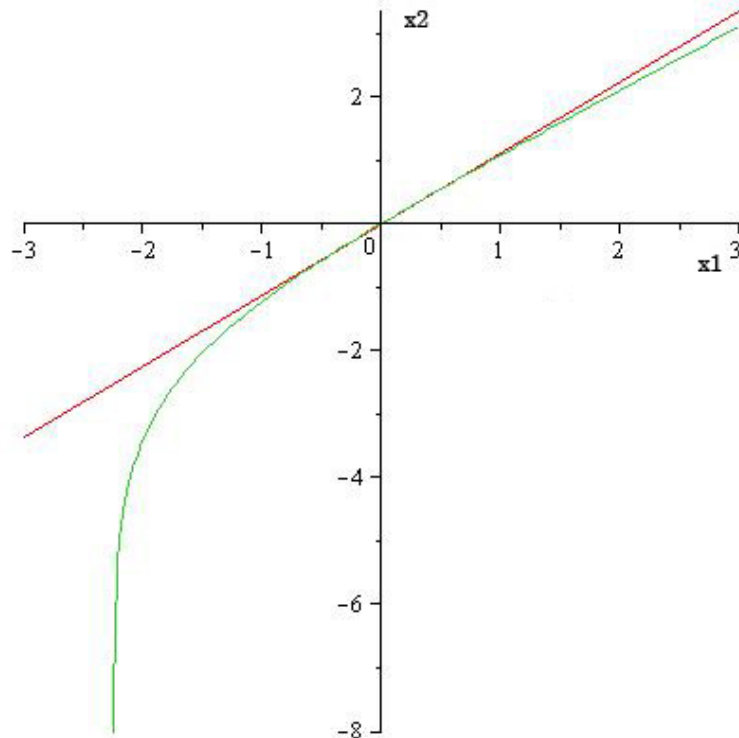


Рис. 3: Аппроксимирующая полуплоскость.

Важно отметить, что a всегда будет увеличиваться в сравнении с первоначальным a_0 . При этом полуплоскость как бы наезжает на Ω , тем самым не учитывая срезанную часть Ω , где $P(\mathbf{x})$ положительна, и одновременно уменьшая область, в которой $P(\mathbf{x})$ отрицательно. Суммарный эффект дает увеличение I_P , дальнейшее увеличение a , будет его уменьшать.

И окончательно, данная аппроксимация для примера (12) дает:

$$I_P(0.55, 0.35, 5) \approx 13.95562837.$$

Далее аналогично находятся:

$$I_P(2, 0.35, 5) \approx 37.45335741,$$

$$I_P(0.55, 2, 5) \approx 33.87924592,$$

$$I_P(0.55, 0.35, 30) \approx 5.698671376.$$

5 Сравнение результатов

В таблице 1 сравниваются результаты оценки опционов, произведенные по приближенным формулам (I_B , I_K , I_P) с точным результатом, найденным численным интегрированием (I_N). Сравнение проводится по четырем наборам параметров.

Параметры			Результаты				Ошибки		
s_1	s_2	K	I	I_B	I_K	I_P	I_B	I_K	I_P
0,55	0,35	5	13,956657	15,4	13,97	13,956	10,05%	6,73%	0,74%
2	0,35	5	37,453554	161	37,451	37,4534	330,0%	0,006%	0,0005%
0,55	2	5	33,881781	131	36,5	33,879	285,0%	7,76%	0,007%
0,55	0,35	30	5,7072685	5,13	5,709	5,699	10,10%	0,024%	0,15%

Таблица 1: Сравнение оценок спред-опционов различными приближенными аналитическими методами. Везде используются параметры $F_1 = 55$, $F_2 = 45$, $\rho = 0,3$.

Видно, что худшим методом является аппроксимация логнормального распределения распределением Гаусса (формула Башалье) — она очень чувствительна к волатильностям и применима, только пока они достаточно малы. Для объяснения этого факта рассмотрим как соотносится плотность распределения цены первого актива по принятой логнормальной модели и по ее аппроксимации распределением Гаусса.

Ниже будет использоваться простой факт, известный в теории вероятностей. Если величина ξ имеет плотность распределения $\rho_\xi(x)$ на

промежутке Ω , а величина $\eta = f(\xi)$, то ее плотность распределения равна $\rho_\eta(y) = \rho_\xi(g(y))g'(y)$ на промежутке $f(\Omega)$, где $g(y) = f^{-1}(y)$.

Согласно принятой модели, распределение цены первого актива $\rho_1(x)$ является логнормальным, а аппроксимирующее распределение $\hat{\rho}_1(x)$ — нормальным. Плотности их распределений равны:

$$\rho_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1 x} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \ln A_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\},$$

$$\hat{\rho}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}F_1\sqrt{e^{\sigma_1^2} - 1}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - F_1)^2}{2F_1^2(e^{\sigma_1^2} - 1)} \right\}.$$

Максимумы этих распределений находятся в точках $x = F_1 e^{-\frac{3}{2}\sigma_1^2}$ и $x = F_1$ соответственно, а сами максимумы равны $\frac{e^{\sigma_1^2}}{\sqrt{2\pi}F_1\sigma_1}$ и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}F_1\sqrt{e^{\sigma_1^2} - 1}}$. При увеличении волатильности цены первого актива плотности распределений $\rho_1(x)$ и $\hat{\rho}_1(x)$ начинают значительно различаться: максимум первого распределения располагается левее и выше, второго — правее и ниже. Различие между распределениями хорошо видно на Рис. 4, который отвечает основному численному примеру (12).

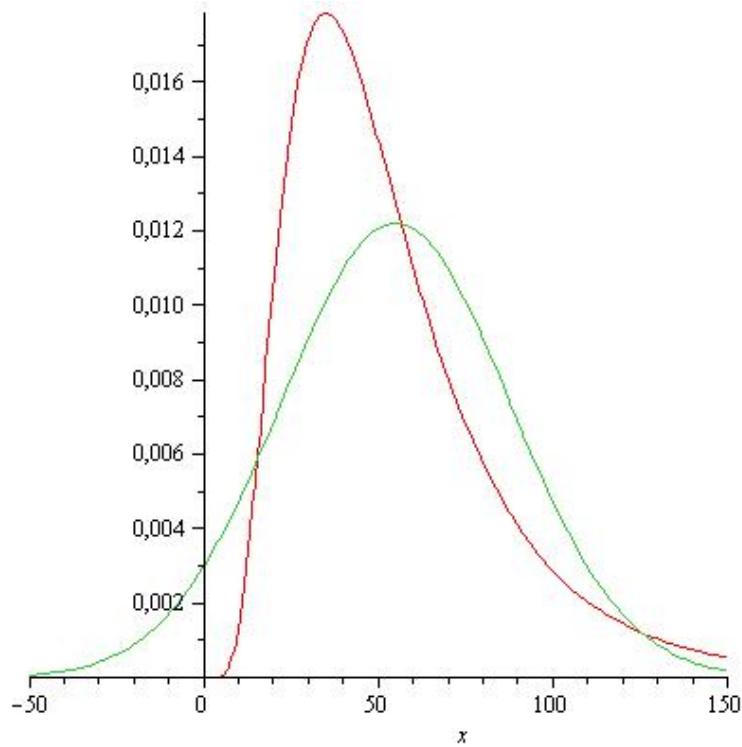


Рис. 4: Плотности распределений $\rho_1(x)$ и $\hat{\rho}_1(x)$.

Видно, что плотности распределений достаточно сильно отличаются. Для второго численного примера плотности становятся наглядно совершенно не сопоставимыми, поэтому аппроксимация в этом случае является заведомо несостоятельной.

Замечательным фактом является то, что приближение Кирка I_K работает достаточно хорошо даже при больших страйках K , что изначально было совсем не очевидно. С другой стороны заранее было очевидно, что эта аппроксимация будет в большей степени зависеть от волатильности второго актива, чем от первого, т.к. именно он приближается другим распределением, а функция распределения первого остается неизменной (точной).

Но почти во всех случаях лучшую аппроксимацию дает предложенный метод приближения области интегрирования Ω полуплоскостью, которая при увеличении волатильности дает даже лучшую точность.

Благодарности

Выражаю особую благодарность своему научному руководителю — Валькову Алексею Юрьевичу за постановку интересной и новой для меня темы исследования, связанной с применениями стохастических методов в экономике, а также полезные советы по преодолению трудностей, возникавших в большом количестве на первых порах.

Я благодарю коллектив кафедры статистической физики СПбГУ за дружественную атмосферу и постоянную поддержку.

Выражаю также благодарность рецензенту Александру Владимировичу Косенко, который взял на себя труд прочитать мою квалификационную работу и сделал ряд полезных замечаний, которые будут способствовать плодотворному продолжению работы в данном направлении.

Список литературы

- [1] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives and DerivaGem CD Package*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, 8th edition, 2012.
- [2] Ton Vorst. Prices and hedge ratios of average exchange rate options. *International Review of Financial Analysis*, 1(3):179–193, 1992.
- [3] René Carmona and Valdo Durrleman. Generalizing the black-scholes formula to multivariate contingent claims. *Journal of Computational Finance*, 9(2):43–67, 2006.
- [4] Minqiang Li, Shi-Jie Deng, and Jieyun Zhou. Closed-form approximations for spread option prices and greeks. *The Journal of Derivatives*, 15(3):58–80, 2008.
- [5] Fischer Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):167–179, 1976.
- [6] William Margrabe. The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of Finance*, 33(1):177–186, 1978.
- [7] Stanley Fisher. Call option pricing when the exercise price is uncertain, and valuation of index bonds. *Journal of Finance*, 33:169–176, 1978.
- [8] Louis Bachelier. Theorie de la speculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17(3):21–86, 1900.
- [9] E. Kirk. *Managing Energy Price Risk*, chapter Correlation in energy markets, pages 71–78. Risk Publications, Enron Capital & Trade Resources, London, 1995.
- [10] René Carmona and Valdo Durrleman. Pricing and hedging spread options in a lognormal model. Technical report, Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, Princeton, 2003.
- [11] René Carmona and Valdo Durrleman. Pricing and hedging spread options. *SIAM Review*, 45(4):627–685, 2003.

- [12] Minqiang Li, Shi-Jie Deng, and Jieyun Zhou. Closed-form approximations for spread option prices and greeks. SSRN, November 2006.
- [13] Minqiang Li, Jieyun Zhou, and Shi-Jie Deng. Multi-asset spread option pricing and hedging. *Quantitative Finance*, 10(3):305–324, 2010.