

Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет  
Кафедра статистической физики



**Анализ эффективности различных методов расчёта  
многочленовых диаграмм Фейнмана**

Бакалаврская работа студента  
дневного отделения

\_\_\_\_\_ **Куликова Анатолия Борисовича**

Научный руководитель:

\_\_\_\_\_ д.ф.-м.н., профессор **Аджемян Л.Ц.**

Рецензент:

\_\_\_\_\_ к.ф.-м.н., доцент **Комарова М.В.**

# 1. Введение

Данная работа посвящена различным методам вычисления многопетлевых фейнмановских диаграмм теории  $\phi^4$  и анализу их сравнительной эффективности. Необходимость вычисления фейнмановских диаграмм в высоких порядках теории возмущений вызвана как потребностями квантовой теории поля, так и статистической физики. Наибольший успех достигнут в этой области в теории  $\phi^4$ , в которой вычисления доведены до пятипетлевой точности, что позволило рассчитать критические показатели теории фазовых переходов в пятом порядке  $\varepsilon$ -разложения. Расчет произведен аналитически в 1993 году, однако с тех пор все попытки продвинуться в более высокие порядки не увенчались успехом. Это стало стимулом для разработки численных алгоритмов расчета диаграмм. В настоящее время существует значительное количество подходов как аналитических вычислений, так и численных. Назовем такие из них, как расчет с помощью так называемых G-функций, сведение диаграмм к мастер-интегралам (метод “интегрирования по частям”), метод Sector Decomposition, метод полиномов Гегенбауэра и т.д. Как показала практика, ни один из этих методов не является столь эффективным, чтобы с его помощью провести 6-петлевой расчет, каждый из них обладает преимуществом при расчете определенного типа диаграмм, так что наиболее рационально использовать их в совокупности. К сожалению, в настоящее время не существует обзора (или монографии), в котором была бы описана вся совокупность современных методов расчета многопетлевых диаграмм и дана оценка их сравнительной эффективности. Настоящая работа является попыткой сделать некоторый шаг в этом направлении. Она исходит из того, что описание многих эффективных приемов расчета содержится в монографии [1] и желательно было бы дополнить ее содержание дальнейшим современным развитием этих приемов, а также описанием новых. Будут рассмотрены 2 метода – так называемый метод G-функций и метод, основанный на использовании полиномов Гегенбауэра. Первый из них фактически представлен в [1] (там он не носит современного названия) и дальнейший прогресс связан здесь с использованием  $R^*$ -операции, позволяющей существенно расширить класс диаграмм, к которым он применим. Метод полиномов Гегенбауэра в [1] не представлен. Мы рассмотрели применение этих методов для всех диаграмм вплоть до 3-петлевого приближения. Оказалось, что для некоторых диаграмм метод полиномов Гегенбауэра решает задачу намного проще, чем это сделано в [1]. Он оказывается весьма эффективным и для определенного типа диаграмм в старших порядках теории возмущений, что продемонстрировано на трех пятипетлевых диаграммах. В то же время он обладает очевидными недостатками, не позволяющими производить эффективный расчет для диаграмм общего вида. Что касается метода G-функций, то изложенные в работе результаты подтверждают его несомненную эффективность для известного класса диаграмм, но рассмотрение сочетания этого метода с использованием  $R^*$ -операции оказалось вне рамок настоящей работы.

## 2. Модель. Используемые обозначения

Будет рассмотрена стандартная  $\phi^4$ -модель в пространстве размерности  $D = 4 - 2\varepsilon$ . Базовое действие такой модели имеет вид

$$S = -\frac{1}{2}(m^2\phi^2 + (\partial\phi)^2) - \frac{1}{4!}g\phi^4, \quad (1)$$

где  $\phi = \phi(\mathbf{x})$  и все необходимые интегрирования по  $\mathbf{x}$  подразумеваются. Будут рассматриваться безмассовые диаграммы с  $m = 0$ . В этом случае пропагатор  $\langle\phi\phi\rangle$  в импульсном представлении дается выражением

$$\langle\phi\phi\rangle = \frac{1}{k^2} \quad (2)$$

Следуя [2], мы будем использовать несколько нестандартные преобразования Фурье с заменой  $\mathbf{k}$  на  $2\mathbf{k}$ , в которых

$$\int e^{2i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^D k = \pi^D \delta(\mathbf{x}). \quad (3)$$

В таких обозначениях

$$\frac{1}{k^{2\alpha}} = \frac{\Gamma(\lambda + 1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)\pi^{\lambda+1}} \int \frac{e^{2i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^D x}{x^{2(\lambda+1-\alpha)}}, \quad (4)$$

где введена величина

$$\lambda \equiv 1 - \epsilon, \quad (5)$$

так что

$$D = 2(\lambda + 1).$$

Полагая в (4)  $\alpha = 1$ , получаем для пропагатора (2) в координатном представлении

$$\langle \phi \phi \rangle = \frac{\Gamma(\lambda)}{\pi^{\lambda+1}} \frac{1}{x^{2\lambda}} \quad (6)$$

### 3. Счёт с помощью G-функций

Метод G-функций подразумевает регуляризацию с помощью внешнего импульса и безмасшовость линий. Будем записывать выражение для диаграммы в импульсном представлении. В процессе вычисления с помощью данного метода мы будем видоизменять диаграмму (в частности, промежуточные диаграммы не будут, вообще говоря, диаграммами теории  $\phi^4$ ), поэтому обобщим понятие линии: линии с весом  $\alpha$  будет соответствовать пропагатор  $\frac{1}{p^{2\alpha}}$ , где  $p$  - суммарный импульс, протекающий по линии. В координатном представлении такой пропагатор равен

$$\frac{\Gamma(\lambda + 1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)\pi^{\lambda+1}} \frac{1}{x^{2(\lambda+1-\alpha)}} \quad (7)$$

Основная идея метода заключается в переходах между координатным и импульсным представлениями с использованием преимуществ одного и другого вида записи. Способ отчасти аналогичен вычислению сопротивления электрической схемы через выражения для последовательного и параллельного соединения резисторов.

Можем для двух параллельно идущих линий диаграммы заметить:

$$\text{Diagram} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{k^{2\alpha}(k-p)^{2\beta}} = \quad (8)$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda + 1 - \alpha)\Gamma(\lambda + 1 - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(2\pi)^D} \int \frac{dx e^{2ipx}}{x^{2(2\lambda+2-\alpha-\beta)}} = \quad (9)$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda + 1 - \alpha)\Gamma(\lambda + 1 - \beta)\Gamma(\alpha + \beta - \lambda - 1)\pi^{\lambda+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(2\lambda + 2 - \alpha - \beta)(2\pi)^D} \frac{1}{p^{2(\alpha+\beta-\lambda-1)}} \quad (10)$$

Это равенство записывается как

$$\text{Diagram} = G(\alpha, \beta) \cdot \frac{1}{p^{2(\alpha+\beta-\lambda-1)}}, \quad \text{где } G\text{-функция определяется как} \quad (11)$$

$$G(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\lambda + 1 - \alpha)\Gamma(\lambda + 1 - \beta)\Gamma(\alpha + \beta - \lambda - 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(2\lambda + 2 - \alpha - \beta)(4\pi)^{\lambda+1}} \quad (12)$$

Таким образом, мы перешли для рассматриваемой пары линий в координатное представление, вычислили там интеграл по циркулирующему импульсу в явном виде, после чего обратно перешли в импульсное представление. Количество линий и петель в диаграмме при этом уменьшилось на одну. В результате нескольких таких операций может оказаться, что какая-то вершина диаграммы будет иметь степень 2, т.е. две проходящие через неё линии будут иметь одинаковый импульс. Легко видеть, что при замене этой пары линий и вершины между ними

одной линией с весом, равным сумме весов исходных линий, выражение для диаграммы в импульсном представлении не изменится. Количество линий и вершин при этом вновь уменьшится на одну.

Для некоторого класса диаграмм, чередуя эти операции, можно свести всю диаграмму к произведению G-функций и одной линии. Такое выражение сравнительно просто разложить в ряд, пользуясь выражением для разложения в ряд гамма-функции:

$$\ln\Gamma(1-x) = \gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \zeta(n) x^n \quad (13)$$

$\gamma$  здесь - постоянная Эйлера, она же  $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n)$ , она же 0,5772156649 [3]

Продемонстрируем вычисление нескольких диаграмм в явном виде.

### 3.1. 1 петля

$$\text{Diagram} = G(1, 1) \cdot \frac{1-\lambda}{p^{2\epsilon}} = \frac{1}{p^{2\epsilon}} \frac{\Gamma^2(\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{(4\pi)^{\lambda+1}\Gamma(2\lambda)} = \frac{1}{(4\pi)^2} (4\pi)^\epsilon p^{-2\epsilon} e^{2\ln\Gamma(1-\epsilon)+\ln\Gamma(\epsilon)-\ln\Gamma(2-2\epsilon)} \quad (14)$$

Обозначим показатель экспоненты как  $pow$  (введём общее обозначение для удобства записи вычислений)

Вычислим диаграмму с точностью до линейного члена.

$$pow = 2\ln\Gamma(1-\epsilon) + \ln\Gamma(\epsilon) - \ln\Gamma(2-2\epsilon) = 2\gamma\epsilon + \ln\frac{1}{\epsilon} - \gamma\epsilon - \ln(1-2\epsilon) - 2\gamma\epsilon = 2\epsilon - \gamma\epsilon + \ln\frac{1}{\epsilon} \quad (15)$$

Пользуемся разложением всего попало в ряд Тейлора, в т.ч.  $a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a + \frac{1}{2!} \epsilon^2 \ln^2 a + \dots$

$$I = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} (1 + \epsilon \ln 4\pi) (1 - 2\epsilon \ln p) (1 + 2\epsilon - \gamma\epsilon) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + 2 - \gamma + \ln \frac{4\pi}{p^2} + O(\epsilon) \right) \quad (16)$$

В частности, KR' - операция (см. [1]) от данной диаграммы равняется

$$\boxed{\text{Diagram}} = \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad (17)$$

### 3.2. 2 петли

Глаз

$$\text{Diagram} = G(1, 1) \times_{1,1}^{1-\lambda} = G(1, 1) \times_{1,1}^{2-\lambda} \quad (18)$$

$$I = G(1, 1) G(2-\lambda, 1) \cdot \frac{2-2\lambda}{p^{4\epsilon}} \quad (19)$$

$$I = \frac{1}{p^{4\epsilon}} \left( \frac{\Gamma^2(\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(2\lambda)} \frac{1}{(4\pi)^{2(\lambda+1)}} \frac{\Gamma(2\lambda-1)\Gamma(\lambda)\Gamma(2-2\lambda)}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(3\lambda-1)} \right) \quad (20)$$

Вновь логарифмируем и вносим под знак экспоненты все гамма-функции (чтобы воспользоваться разложением в ряд).

$$pow = 3\ln\Gamma(1-\varepsilon) + \ln\Gamma(\varepsilon) + \ln\Gamma(2\varepsilon) + \ln\Gamma(1-2\varepsilon) - \ln\Gamma(2-2\varepsilon) - \ln\Gamma(1+\varepsilon) - \ln\Gamma(2-3\varepsilon) = \quad (21)$$

$$= 3\gamma\varepsilon + \ln\frac{1}{\varepsilon} - \gamma\varepsilon + \ln\frac{1}{2\varepsilon} - 2\gamma\varepsilon + 2\gamma\varepsilon + 2\varepsilon - 2\gamma\varepsilon + \gamma\varepsilon + 3\varepsilon - 3\gamma\varepsilon = \ln\frac{1}{2\varepsilon^2} - 2\gamma\varepsilon + 5\varepsilon \quad (22)$$

$$I = \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{1}{2\varepsilon^2} (1 + 2\varepsilon\ln 4\pi)(1 - 4\varepsilon\ln p)(1 - 2\gamma\varepsilon + 5\varepsilon) \quad (23)$$

$$I = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{5}{2} - \gamma + \ln 4\pi - 2\ln p \right) + O(\varepsilon^0) \right) \quad (24)$$

KR'-операция от диаграммы получается при вычитании расходимости (она тут одна),

$$\boxed{\text{Diagram}} = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{5}{2} - \gamma + \ln 4\pi - 2\ln p \right) \right) - \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \cdot \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 2 - \gamma + \ln \frac{4\pi}{p^2} \right) = \quad (25)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^4} \left( -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \right) \quad (26)$$

**Две петли подряд**

$$\text{Diagram} = G^2(1, 1) \cdot \frac{1-\lambda}{\varepsilon} \frac{1-\lambda}{\varepsilon} = G^2(1, 1) \cdot \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2} \quad (27)$$

$$I = \frac{1}{(4\pi)^{4-2\varepsilon} p^{4\varepsilon}} \frac{\Gamma^4(\lambda)\Gamma^2(1-\lambda)}{\Gamma^2(2\lambda)} \quad (28)$$

$$pow = 4\gamma\varepsilon + \ln\frac{1}{\varepsilon^2} - 2\gamma\varepsilon + 4\varepsilon - 2\gamma 2\varepsilon = \ln\frac{1}{\varepsilon^2} + 4\varepsilon - 2\gamma\varepsilon \quad (29)$$

$$I = \frac{1}{\varepsilon^2 (4\pi)^4} (1 - 4\varepsilon\ln p)(1 + 2\varepsilon\ln 4\pi)(1 + 4\varepsilon - 2\gamma\varepsilon) \quad (30)$$

$$I = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} (4 - 2\gamma + 2\ln 4\pi - 4\ln p) + O(\varepsilon^0) \right) \quad (31)$$

Здесь две одинаковые подрасходимости. Вычитая их, получим

$$\boxed{\text{Diagram}} = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} (4 - 2\gamma + 2\ln 4\pi - 4\ln p) \right) - 2 \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \cdot \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 2 - \gamma + \ln \frac{4\pi}{p^2} \right) = \quad (32)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^4} \left( -\frac{1}{\varepsilon^2} \right) \quad (33)$$

### 3.3. 3 петли

Выражения оказываются несложными, но достаточно громоздкими, поэтому их вычисление логично автоматизировать. В качестве калькулятора был использован математический пакет Maple. Запись диаграммы через G-функции и выделение подрасходимостей проводились вручную, непосредственно вычисление и разложение в ряд - средствами пакета. Приведём список результатов для всех диаграмм до трёх петель включительно.


Сначала приведём общий список диаграмм с нумерацией и выпишем их подрасходимости:

Диаграмма:

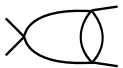
Подрасходимости:

1. 


-

2. 

$$2 \cdot \boxed{\text{Diagram 1}} \cdot \text{Diagram 1}$$

3. 

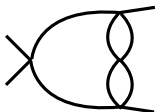
$$\boxed{\text{Diagram 1}} \cdot \text{Diagram 1}$$

4. 

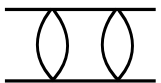
$$3 \cdot \boxed{\text{Diagram 1}} \cdot \text{Diagram 2} + 2 \cdot \boxed{\text{Diagram 2}} \cdot \text{Diagram 1} - \boxed{\text{Diagram 1}}^2 \cdot \text{Diagram 1}$$

5. 

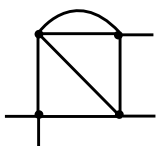
$$\boxed{\text{Diagram 1}} \cdot \text{Diagram 3} + \boxed{\text{Diagram 1}} \cdot \text{Diagram 2} + \boxed{\text{Diagram 3}} \cdot \text{Diagram 1} - \boxed{\text{Diagram 1}}^2 \cdot \text{Diagram 1}$$

6. 

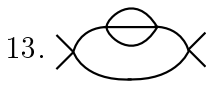
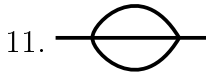
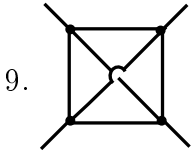
$$2 \cdot \boxed{\text{Diagram 1}} \cdot \text{Diagram 3} + \boxed{\text{Diagram 2}} \cdot \text{Diagram 1}$$

7. 

$$2 \cdot \boxed{\text{Diagram 1}} \cdot \text{Diagram 3} - \boxed{\text{Diagram 1}}^2 \cdot \text{Diagram 1}$$

8. 

$$\boxed{\text{diagram 1}} \cdot \text{diagram 2} + \boxed{\text{diagram 3}} \cdot \text{diagram 4}$$



$$\boxed{\text{diagram 1}} \cdot \text{diagram 2} + 2 \cdot \boxed{\text{diagram 3}} \cdot \text{diagram 4}$$

$$2 \cdot \boxed{\text{diagram 1}} \cdot \text{diagram 2}$$

$$\boxed{\text{diagram 1}} \cdot \text{diagram 2}$$

Теперь приведём выражения для них через G-функции и итоговые результаты для полюсной части:

Выражение через G-функции:

Выражение для полюсной части:

1.  $G(1, 1)p^{-2\epsilon}$

$$\frac{1}{\epsilon}$$

2.  $G^2(1, 1)p^{-4\epsilon}$

$$-\frac{1}{\epsilon^2}$$

3.  $G(1, 1) \times_{1,1}^{1,1-\lambda} = G(1, 1) \times_{1,1}^{2-\lambda} = G(1, 1)G(2-\lambda, 1)p^{-4\epsilon}$

$$-\frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon}$$

$$4. G^3(1, 1)p^{-6\epsilon}$$

$$\frac{1}{2\epsilon^3}$$

$$5. G^2(1, 1)G(2 - \lambda, 1)p^{-6\epsilon}$$

$$\frac{1}{2\epsilon^3} - \frac{1}{2\epsilon^2}$$

$$6. G^2(1, 1) \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} 1-\lambda \\ \text{---} \\ 1-\lambda \end{array} = G^2(1, 1) \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} 3-2\lambda \\ \text{---} \\ 1 \end{array} = G(3 - 2\lambda, 1)p^{-6\epsilon}$$

$$\frac{1}{3\epsilon^3} - \frac{1}{3\epsilon^2} - \frac{1}{3\epsilon}$$

$$7. G^2(1, 1)G(3 - 2\lambda, 1)p^{-6\epsilon}$$

$$\frac{1}{3\epsilon^3} - \frac{1}{3\epsilon^2} - \frac{1}{3\epsilon}$$

$$8. G(1, 1)G(2 - \lambda, 1)G(3 - 2\lambda, 1)p^{-6\epsilon}$$

$$\frac{1}{6\epsilon^3} - \frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{2}{3\epsilon}$$

9. NO!

?

10. NO!

?

$$11. G(1, 1)G(2 - 2\lambda, 1)p^{2-4\epsilon}$$

$$-\frac{1}{4\epsilon}$$

$$12. G^2(1, 1)G(2 - 2\lambda, 1)p^{2-6\epsilon}$$

$$\frac{1}{6\epsilon^2} - \frac{1}{12\epsilon}$$

$$13. G(1, 1)G(1 - \lambda, 1)G(3 - 2\lambda, 1)p^{-6\epsilon}$$

$$\frac{1}{6\epsilon^2} - \frac{3}{8\epsilon}$$

“NO!” означает здесь, что диаграмму нельзя посчитать данным методом. Действительно: в 9й диаграмме нету ни пар параллельных линий, ни вершин степени 2; в диаграмме 10 мы можем совершить лишь один шаг, после чего вновь получим неупрощаемую диаграмму.<sup>1</sup> Отнесем эти диаграммы к классу “неприводимых”, который определяется как множество диаграмм, не сводимых к тривиальной никакой последовательностью операций убирания вершины степени 2 и замены пары параллельных линий на одну. Довольно очевидно, что с ростом количества петель количество таких неприводимых диаграмм будет стремительно увеличиваться. Таким

<sup>1</sup>диаграмма 10 допускала бы расчет методом G-функций, если можно было бы сменить направление протечки внешнего импульса. Этому препятствуют возникающие при этом инфракрасные расходимости – наличие двух линий с одинаковым импульсом в безмассовой теории. Эта трудность преодолевается с помощью R\* операции, что позволяет расширить класс диаграмм, к которым применим метод G-функций



образом, мотивированным оказывается рассмотрение альтернативных способов выделения полюсов в многопетлевых диаграммах Фейнмана. Среди этих способов можно упомянуть Sector Decomposition для диаграммы в Фейнмановском представлении, Gegenbauer polynomial x-space technique и другие.

Стоит отметить, что для диаграмм, принадлежащих классу приводимых, метод G-функций является наиболее быстрым и простым в использовании. Действительно, расписывание выражения через G-функции не составляет никакого труда; непосредственно вычисление полюсов даже для десятипетлевой диаграммы на современных компьютерах происходит практически мгновенно. Также, мы заведомо не можем получить никаких противоречий, т.к. поддиаграмма приводимой диаграммы также является приводимой.

## 4. Счёт с помощью разложения по полиномам Гегенбауэра

В основе этой техники (GPXT, Gegenbauer polynomial x-space technique) (см. [4], [2], [5]) лежит разложение подынтегрального выражения, записанного, как видно из названия, в x-представлении, по семейству ортогональных полиномов, являющихся обобщением полиномов Лежандра на произвольные размерности (в том числе нецелые). После (одновременно с) такого разложения мы переходим к интегрированию выражения по сферическим координатам, и в нём радиальные и угловые интегралы удачно разделяются.

### 4.1. Полиномы Гегенбауэра

Приведём общие определения и основные используемые свойства полиномов Гегенбауэра. Более подробное описание можно найти в [6], [7].

Ультрасферические полиномы Гегенбауэра  $C_n^\lambda(t)$  вводятся как множество ортогональных на  $[-1;1]$  полиномов с весовой функцией  $h(t) = (1 - t^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ ,  $\lambda > -\frac{1}{2}$ . Как известно, весовая функция на отрезке однозначно определяет семейство полиномов.<sup>2</sup>

Полиномы Гегенбауэра являются обобщением полиномов Лежандра (ортогональны на  $[-1;1]$  с весовой функцией  $h(t) \equiv 1$ ) и частным случаем многочленов Якоби (ортогональны на  $[-1;1]$  с весовой функцией  $h(t) = (1 - t)^\alpha(1 + t)^\beta$ )

Полиномы Гегенбауэра можно также определить через производящую функцию:

$$\frac{1}{(1 - 2\chi t + \chi^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(t) \chi^n \tag{34}$$

Легко видеть, что  $C_0^\lambda(t) = 1 \forall t$ .

Определим явный вид для  $C_n^\lambda(1)$ , который нам позже понадобится.

$$t = 1 \Rightarrow \frac{1}{(1 - 2\chi t + \chi^2)^\lambda} = \frac{1}{(1 - \chi)^{2\lambda}} = f(\chi) \tag{35}$$

$$f(\chi) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \chi + \frac{1}{2!} f''(0) \chi^2 + \dots = 1 + 2\lambda \chi + \frac{(2\lambda)(2\lambda + 1)}{2!} \chi^2 + \dots \tag{36}$$

Отсюда видно, что

$$C_n^\lambda(1) = \frac{\Gamma(2\lambda + n)}{n! \Gamma(2\lambda)} \tag{37}$$

В дальнейшем при интегрировании мы будем пользоваться сферической системой координат, в которой совокупность угловых интегрирований будет обозначаться как интеграл по

---

<sup>2</sup>аргумент  $t$  полиномов Гегенбауэра имеет смысл  $t = \cos\theta$ , где  $\theta$  – полярный угол сферической системы координат  $D$ -мерного пространства. В этой системе интеграл по  $\theta$  входит с весом  $\int_0^\pi d\theta \sin\theta^{D-2} \dots$ , что в терминах  $t = \cos\theta$  с учетом  $D/2 = \lambda + 1$  дает  $\int_{-1}^1 dt (1 - t^2)^{\lambda - 1/2}$ , откуда и следует вид весовой функции

ориентациям единичного вектора  $\hat{x} = \mathbf{x}/x$ , а в дифференциал  $d\hat{x}$  будем считать включенным весовой множитель, так, чтобы было  $\int d\hat{x} = 1$ . Тем самым такой интеграл обозначает не интегрирование по углам, а усреднение. Элемент объема запишется тогда в виде

$$d^D x = \Omega_{D-1} x^{D-1} dx d\hat{x}, \quad (38)$$

где

$$\Omega_{D-1} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} - \text{объём (D-1)-мерной единичной сферы.} \quad (39)$$

Удобно также перейти к переменной  $r = x^2$ , тогда (38) перейдет в

$$d^D x = \frac{1}{2} \Omega_{D-1} r^\lambda dr d\hat{x} \quad (40)$$

Разложим пропагатор (6) по полиномам Гегенбауэра. Запишем  $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 = x_1^2 + 2\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 + x_2^2$  и рассмотрим случай  $x_1 > x_2$ , тогда  $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 = x_1^2(1 - 2\chi t + \chi^2)$ , где  $\chi \equiv x_2/x_1$ ,  $t \equiv \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2$ . Сравнивая (6) и (34), получаем

$$\frac{1}{(x_1 - x_2)^{2\lambda}} = \frac{1}{\max_{12}^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2) \left(\frac{\min_{12}}{\max_{12}}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (41)$$

$$\text{Мы обозначили } \min_{ij} = \min(r_i, r_j), \max_{ij} = \max(r_i, r_j) \quad (42)$$

Ортогональность полиномов (34) означает, что

$$\int_{-1}^1 dt (1 - t^2)^{\lambda-1/2} C_n^\lambda(t) C_m^\lambda(t) \sim \delta_{n,m}. \quad (43)$$

Для дальнейшего очень важным будет более общее свойство ортогональности:

$$\int d\hat{y} C_n^\lambda(\hat{x}\hat{y}) C_m^\lambda(\hat{y}\hat{z}) = \frac{\lambda}{\lambda + n} \delta_{n,m} C_n^\lambda(\hat{x}\hat{z}). \quad (44)$$

Отсюда, для интегрирования одного полинома верно

$$\int d\hat{x}_1 C_n^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_2) = \delta_{0n}. \quad (45)$$

Мы будем исходить из выражения в координатном представлении. Инфракрасная регуляризация будет производиться с помощью обрезания области интегрирования при больших значениях переменных (при больших  $r$ , после перехода в сферические координаты).<sup>3</sup> В координатном представлении количество интегрирований по вершинам на одну меньше, чем само количество вершин. Это даёт нам произвол в выборе переменных. Мы будем всегда распоряжаться им одинаково: вычитать переменную, соответствующую одной из вершин, изо всех остальных. Это эквивалентно приравниванию этой выделенной переменной нулю. Вершину, соответствующую обнулённой переменной, будем называть *корневой*. От удачности выбора *корневой* вершины, в частности, зависит, сколько пропагаторов придётся раскладывать по полиномам Гегенбауэра. В общем случае мы будем выбирать либо вершину наибольшей степени, либо обладающую определённой симметрией.

Начнём последовательно вычислять диаграммы.

---

<sup>3</sup>интересующая нас полюсная часть диаграммы с  $R'$ -операцией не зависит от вида ИК-регуляризации, при условии, что она сделана единообразно во всех слагаемых  $R'$ -операции

## 4.2. 1 петля

$$I = \frac{\Gamma^2(\lambda)}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D x}{x^{4\lambda}} = \frac{\Gamma^2(\lambda)}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \Omega_{D-1} \int \frac{dr d\hat{x}}{r^\lambda} \quad (46)$$

$$I = \frac{\Gamma^2(\lambda)}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^R dr r^{-\lambda} = \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{(4\pi)^{2-\varepsilon} \Gamma(2-\varepsilon)} \frac{R^{1-\lambda}}{1-\lambda} = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{(4\pi)^{2-\varepsilon} (1-\varepsilon)} \frac{R^\varepsilon}{\varepsilon} \quad (47)$$

$$pow = \gamma\varepsilon + \frac{\pi^2}{12}\varepsilon^2 \quad (\text{считаем до второй поправки}) \quad (48)$$

$$I = \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} (1 + \varepsilon \ln 4\pi R + \frac{\varepsilon^2}{2} \ln^2 4\pi R) (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) (1 + \gamma\varepsilon + \gamma^2 \varepsilon^2 + \frac{\pi^2}{12} \varepsilon^2) = \quad (49)$$

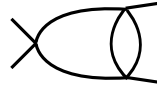
$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + (\gamma + 1 + \ln 4\pi R) + \varepsilon \left( \frac{\pi^2}{12} + \gamma^2 + 1 + \frac{\ln^2 4\pi R}{2} + \gamma + (\gamma + 1) \ln 4\pi R \right) + O(\varepsilon^2) \right) \quad (50)$$

И неувидительно (но весьма приятно), что выражение для полюсной части диаграммы совпадает с оным, полученным через G-функции.

$$\boxed{\text{fish}} = \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \quad (51)$$

## 4.3. 2 петли

Глаз



Выбирая в качестве базы любую из двух вершин степени три, можем записать:

$$I = \frac{\Gamma^4(\lambda)}{(4^2 \pi^4)^{(\lambda+1)}} \int \int dx_1 dx_2 \frac{1}{x_1^{2\lambda} x_2^{4\lambda} (x_2 - x_1)^{2\lambda}} \quad (52)$$

Перейдём к сферическим координатам, разложив знаменатель по полиномам Гегенбауэра.

$$I = \frac{\Gamma^4(\lambda)}{(4^2 \pi^4)^{(\lambda+1)}} \frac{1}{2^2} \Omega_{D-1}^2 \int \int d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 dr_1 dr_2 r_2^{-\lambda} \frac{1}{\max_{12}^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_2) \left( \frac{\min_{12}}{\max_{12}} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (53)$$

Вид нормировочного множителя перед интегралами не зависит от вида диаграммы, а зависит лишь от числа его петель  $L$  и числа его линий  $P$ . Обозначая его как  $N_\lambda(L, P)$ , запишем: (у глаза  $L = 2$  петли и  $P = 4$  линии)

$$N_\lambda(L, P) = \frac{\Gamma^P(\lambda)}{(2^{2L} \pi^P)^{\lambda+1}} \frac{1}{2^{P-L}} \Omega_{D-1}^{P-L} \quad (54)$$

$$N_\lambda(L, P) = \frac{\Gamma^P(\lambda)}{(2^{2L} \pi^P)^{\lambda+1}} \frac{1}{2^{P-L}} \frac{2^{P-L} \pi^{(P-L)(\lambda+1)}}{\lambda^{P-L} \Gamma(\lambda)^{P-L}} = \frac{\Gamma^L(\lambda)}{(4\pi)^{L(\lambda+1)} \lambda^{P-L}} \quad (55)$$

Кроме этого, видно, что интегралы по  $d\hat{x}$  и  $dr$  разделяются, и мы будем записывать угловую часть выражения как  $A_\lambda$ , радиальную как  $R_\lambda$

Тогда выражение для глаза будет выглядеть как

$$I = N_\lambda(2, 4) \sum_{n=0}^{\infty} A_\lambda R_\lambda, \quad (56)$$

При этом как  $A_\lambda$ , так и  $R_\lambda$  можно определять непосредственно из вида диаграммы.

Досчитаем. Используя соотношение ортогональности (45) и условие нормировки  $\int d\hat{x} = 1$ , можем записать:

$$A_\lambda = \int d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 C_n^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_2) = \int d\hat{x}_1 \left( \int d\hat{x}_2 C_n^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_2) \right) = \delta_{0n} \quad (57)$$

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 dr_2 r_2^{-\lambda} \frac{1}{\max_{12}^\lambda} \quad (\text{суммирование ушло, } n = 0) \quad (58)$$

$$R_\lambda = \int_0^R dr_2 \int_0^{r_2} dr_1 r_2^{-2\lambda} + \int_0^R dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 r_2^{-\lambda} r_1^{-\lambda} = \dots \quad (59)$$

$$\dots = \frac{R^{2-2\lambda}}{2} \frac{2-\lambda}{(1-\lambda)^2} \quad (60)$$

$$I = \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{(4\pi)^{4-2\varepsilon} (1-\varepsilon)^2} \frac{R^{2\varepsilon}}{2} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2} \quad (61)$$

$$I = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} (\ln 4\pi R + \frac{3}{2} + \gamma) + O(\varepsilon^0) \right) \quad (62)$$

$$\boxed{\text{Diagram 1}} = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} (\ln 4\pi R + \frac{3}{2} + \gamma) \right) - \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + (\gamma + 1 + \ln 4\pi R) \right) \quad (63)$$

$$\boxed{\text{Diagram 2}} = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \right) \quad (64)$$

**Две петли подряд**



Выбираем корневой центральную вершину, тогда по полиномам вообще не придётся ничего раскладывать.

$$I = N_\lambda(2, 4) A_\lambda R_\lambda \quad (65)$$

$$A_\lambda = \int d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 1 = 1 \quad (66)$$

$$R_\lambda = \int_0^R \int_0^R dr_1 dr_2 \frac{r_1^\lambda r_2^\lambda}{r_1^{2\lambda} r_2^{2\lambda}} = \left( \int_0^R dr r^{-\lambda} \right)^2 = \quad (67)$$

$$= \left( \frac{R^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right)^2 = \frac{R^{2\varepsilon}}{\varepsilon^2} \quad (68)$$

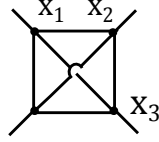
$$I = \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{(4\pi)^{4-2\varepsilon} (1-\varepsilon)^2} \frac{R^{2\varepsilon}}{\varepsilon^2} \quad (69)$$

$$I = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} (2\ln 4\pi R + 2 + 2\gamma) + O(\varepsilon^0) \right) \quad (70)$$

$$\boxed{\text{Diagram 3}} = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} (2\ln 4\pi R + 2 + 2\gamma) \right) - 2 \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + (\gamma + 1 + \ln 4\pi R) \right) \quad (71)$$

$$\boxed{\text{Diagram 4}} = \frac{1}{(4\pi)^4} \left( -\frac{1}{\varepsilon^2} \right) \quad (72)$$

#### 4.4. Вычисление трёхпетлевой пирамиды



$$I = N_\lambda(3, 6) \sum_{n,m,l} A_\lambda R_\lambda \quad (73)$$

В качестве базы выбрана левая нижняя вершина. Три линии из этой вершины к вершинам, соответствующим  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  и  $\hat{x}_3$ , раскладывать по полиномам не требуется. Линии, зависящие от разностей  $\hat{x}_i - \hat{x}_j$ , разложим в соответствии с выражением (41). Используя затем общее соотношение ортогональности (44), запишем:

$$A_\lambda = \int d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 d\hat{x}_3 C_n^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_2) C_m^\lambda(\hat{x}_2 \hat{x}_3) C_l^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) = \left(\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)^2 C_n^\lambda(1) \delta_{nm} \delta_{nl} \quad (74)$$

$$R_\lambda = \int dr_1 dr_2 dr_3 \frac{r_1^\lambda r_2^\lambda r_3^\lambda}{r_1^\lambda r_2^\lambda r_3^\lambda} \frac{1}{\max_{12}^\lambda \max_{23}^\lambda \max_{13}^\lambda} \left(\frac{\min_{12} \min_{23} \min_{13}}{\max_{12} \max_{23} \max_{13}}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (75)$$

Из симметрии диаграммы очевидно, что все шесть секторов будут одинаковыми. Поэтому результат будет равен сектору  $r_1 > r_2 > r_3$ , умноженному на 6. Отсюда,

$$R_\lambda = 6 \int_0^R dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \int_0^{r_2} dr_3 r_1^{-2\lambda} r_2^{-\lambda} r_3^n r_2^{n/2} r_1^{-n} r_2^{-n/2} = \quad (76)$$

$$= 6 \int_0^R dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 r_1^{-n-2\lambda} r_2^{-\lambda} \frac{r_2^{n+1}}{n+1} = \quad (77)$$

$$= 6 \int_0^R dr_1 r_1^{-n-2\lambda} \frac{r_1^{n+2-\lambda}}{(n+1)(n+2-\lambda)} = \frac{6}{(n+1)(n+2-\lambda)} \frac{R^{3\epsilon}}{3\epsilon} \quad (78)$$

$$I = N_\lambda(3, 6) \sum_n \left(\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)^2 C_n^\lambda(1) \frac{6}{(n+1)(n+2-\lambda)} \frac{R^{3\epsilon}}{3\epsilon} \quad (79)$$

Легко увидеть, что полученное выражение имеет полюс первого порядка по  $\epsilon$ , а значит, все поправки старших порядков можно опустить. Тогда

$$\boxed{\text{Diagram}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^6} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{6}{(n+1)(n+1)} \frac{1}{3\epsilon} = \quad (80)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^6} \frac{2}{(n+1)^3} = \frac{1}{(4\pi)^6} \cdot 2\zeta(3) \quad (81)$$

#### 4.5. Вычисление трёхпетлевых диаграмм в общем; формулировка трудностей для бóльшего количества петель

При вычислении трёх- и многопетлевых диаграмм можно встретить следующий набор трудностей. Во-первых, при неудачном выборе корневой вершины (а в большем количестве петель - и при любом) не все полиномы Гегенбауэра удаётся сократить, используя соотношения ортогональности (44) или (45). Вследствие этого, внутри остающейся суммы может оказаться полюс,

который не удаётся извлечь оттуда простыми методами. Во-вторых, может оказаться, что в интегрирование по вершине входят три полинома, что также не даёт возможности использовать соотношения ортогональности.

Одну из обозначенных проблем отчасти помогает решить представление произведения двух полиномов Гегенбауэра одинакового веса и с одинаковым аргументом в виде т.н. разложения Клебша-Гордона (см. [2]). Это разложение выглядит как:

$$C_n^\lambda(x)C_m^\lambda(x) = \sum_{\substack{i=|m-n| \\ \frac{i+m+n}{2} \in N}}^{m+n} D_\lambda(m, n, i)C_i^\lambda(x), \text{ где} \quad (82)$$

$$D_\lambda(m, n, i) = \frac{i!(i + \lambda)\Gamma(\frac{m+n+i}{2} + 2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)\Gamma(\frac{m+n+i}{2} + \lambda + 1)\Gamma(i + 2\lambda)} \frac{\Gamma(\frac{-m+n+i}{2} + \lambda)\Gamma(\frac{m-n+i}{2} + \lambda)\Gamma(\frac{m+n-i}{2} + \lambda)}{\Gamma(\frac{-m+n+i}{2} + 1)\Gamma(\frac{m-n+i}{2} + 1)\Gamma(\frac{m+n-i}{2} + 1)} \quad (83)$$

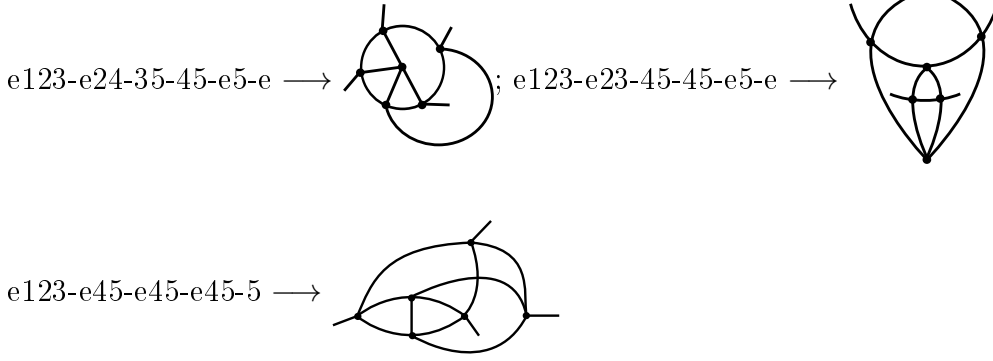
Стоит отметить, что каждое применение этого выражения увеличивает общее количество суммирований на два. С учётом громоздкого вида функции  $D_\lambda(m, n, i)$ , это даёт практически несчитаемое выражение даже после избавления от всех полиномов Гегенбауэра.

Таким образом, к сожалению, оказывается, что простой вид вычислений диаграмм методом ГРХТ в малом количестве петель оказывается скорее исключением, и для диаграмм с бóльшим количеством петель мы вновь будем получать сложные и громоздкие выражения.

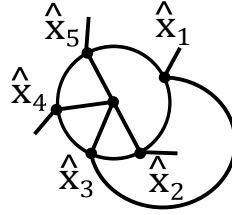
Однако можно сделать предположение, что есть класс диаграмм, в которых применение метода ГРХТ оказывается оправданным. Это диаграммы без подрасходимостей, т.е. имеющие только полюс первого порядка. Отметим следующее: вычисленная выше трёхпетлевая пирамида является диаграммой именно такого вида. Более того, диаграммы без подрасходимостей являются наиболее сложными для аналитического счёта другими способами. Так, методом G-функций их посчитать невозможно, т.к. они очевидно являются 1-неприводимыми. И напоследок, при вычислении полюсной части такой диаграммы мы можем опускать все поправки следующих степеней по  $\varepsilon$ . В частности, при применении в диаграмме такого вида разложения Клебша-Гордона множитель  $D_\lambda(m, n, i)$  можно считать тождественно равным единице, что существенно упрощает (и вообще делает возможными) вычисления.

## 5. Пятипетлевые диаграммы без подграфов

Рассмотрим в качестве применения метода GPXT пятипетлевые диаграммы, не имеющие существенных подграфов. Их три:



### 5.1. Первая диаграмма



$$I = N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1, \dots, n_6} A_\lambda R_\lambda \quad (84)$$

$$A_\lambda = C_{n_1}(\hat{x}_1 \hat{x}_2) C_{n_2}(\hat{x}_2 \hat{x}_3) C_{n_3}(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_4}(\hat{x}_3 \hat{x}_4) C_{n_5}(\hat{x}_4 \hat{x}_5) C_{n_6}(\hat{x}_5 \hat{x}_1) \quad (85)$$

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \dots dr_5 (r_1 \dots r_5)^\lambda (r_2 r_3 r_4 r_5)^{-\lambda} \left( \frac{1}{\max_{12} \max_{23} \max_{34} \max_{45} \max_{51} \max_{13}} \right)^\lambda. \quad (86)$$

$$\cdot \left( \frac{\min_{12}}{\max_{12}} \right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \left( \frac{\min_{23}}{\max_{23}} \right)^{\frac{n_2}{2}} \cdot \left( \frac{\min_{13}}{\max_{13}} \right)^{\frac{n_3}{2}} \cdot \left( \frac{\min_{34}}{\max_{34}} \right)^{\frac{n_4}{2}} \cdot \left( \frac{\min_{45}}{\max_{45}} \right)^{\frac{n_5}{2}} \cdot \left( \frac{\min_{15}}{\max_{15}} \right)^{\frac{n_6}{2}} \quad (87)$$

$$A_\lambda : \int d\hat{x}_4 d\hat{x}_5 C_{n_4} C_{n_5} C_{n_6} \rightarrow \left( \frac{\lambda}{n_4 + \lambda} \right)^2 C_{n_4}(\hat{x}_3 \hat{x}_1) \delta_{n_4 n_5} \delta_{n_4 n_6} \quad (88)$$

$$\int d\hat{x}_2 C_{n_1} C_{n_2} \rightarrow \left( \frac{\lambda}{n_1 + \lambda} \right) C_{n_1}(\hat{x}_1 \hat{x}_3) \delta_{n_1 n_2} \quad (89)$$

И выражение приобретает вид

$$N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1, n_3, n_4} A_\lambda R_\lambda; \quad (90)$$

$$A_\lambda = \int d\hat{x}_1 d\hat{x}_3 C_{n_1}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_3}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_4}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) \left( \frac{\lambda}{n_4 + \lambda} \right)^2 \frac{\lambda}{n_1 + \lambda} \quad (91)$$

Это соответствует трём параллельным линиям в диаграмме, и напрямую применить свойство ортогональности мы не можем. Воспользуемся разложением Клебша-Гордона, представив  $C_{n_1}^\lambda$  и  $C_{n_3}^\lambda$  в виде суммы.

$$C_{n_1}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_3}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) = \sum_{\substack{i=|n_1-n_3| \\ \frac{i+n_1+n_3}{2} \in \mathbb{N}}}^{n_1+n_3} D_\lambda(n_1, n_3, i) C_i^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) \quad (92)$$

Так как нас интересует лишь коэффициент при полюсе, можно оставить лишь первый член в разложении  $D_\lambda(n_1, n_3, i) = 1 + O(\varepsilon)$  по степеням  $\varepsilon$  (это видно из (83)). Аналогично, все  $\lambda$  заменяем на единицы. Выражение принимает вид

$$N_\lambda(5, 10) \sum_{n_4, n_1, n_3, i} A_\lambda R_\lambda; \quad (93)$$

$$A_\lambda = \int d\hat{x}_1 d\hat{x}_3 C_i^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_4}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) \left(\frac{\lambda}{n_4 + \lambda}\right)^2 \frac{\lambda}{n_1 + \lambda} \quad (94)$$

$$\int d\hat{x}_1 d\hat{x}_3 C_i^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_4}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) = \frac{\lambda}{i + \lambda} C_i^\lambda(1) \delta_{in_4} = \delta_{in_4} \quad (95)$$

$$I = N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \sum_{\substack{i=|n_1-n_3| \\ \frac{i+n_1+n_3}{2} \in N}}^{n_1+n_3} \left(\frac{\lambda}{n_4 + \lambda}\right)^2 \frac{\lambda}{n_1 + \lambda} R_\lambda \quad (96)$$

Учитывая все применения  $\delta$ -символов, перепишем  $R_\lambda$ :

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \dots dr_5 r_1^\lambda \left( \frac{1}{\max_{12} \max_{23} \max_{34} \max_{45} \max_{51} \max_{13}} \right)^\lambda. \quad (97)$$

$$\cdot \left( \frac{\min_{12} \min_{23}}{\max_{12} \max_{23}} \right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \left( \frac{\min_{13}}{\max_{13}} \right)^{\frac{n_3}{2}} \cdot \left( \frac{\min_{34} \min_{45} \min_{15}}{\max_{34} \max_{45} \max_{15}} \right)^{\frac{n_4}{2}} \quad (98)$$

Разрешение этого выражения подразумевает разбиение области интегрирования на 120 секторов и взятие 120 интегралов, соответствующих своим областям. Каждый интеграл берётся тривиально, но их же 120! Поэтому и это разложение, и вычисление результата мы сделаем автоматически в одной из следующих секций.

Пока вычислим интеграл в одной из областей, отметив некоторые важные общие свойства, которые будут использоваться в дальнейшем.

Выберем область, в которой  $r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > r_5$ . Тогда

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \int_0^{r_2} dr_3 \int_0^{r_3} dr_4 \int_0^{r_4} dr_5 r_1^\lambda r_1^{-3\lambda} r_2^{-\lambda} r_3^{-\lambda} r_4^{-\lambda}. \quad (99)$$

$$\cdot \left( \frac{r_2 r_3}{r_1 r_2} \right)^{\frac{n_1}{2}} \left( \frac{r_3}{r_1} \right)^{\frac{n_3}{2}} \left( \frac{r_4 r_5 r_5}{r_3 r_4 r_1} \right)^{\frac{n_4}{2}} \quad (100)$$

$$R_\lambda = \int r_1^{-2\lambda - \frac{n_1}{2} - \frac{n_3}{2} - \frac{i}{2}} r_2^{-\lambda} r_3^{-\lambda + \frac{n_1}{2} + \frac{n_3}{2} - \frac{i}{2}} r_4^{-\lambda} r_5^i \quad (101)$$

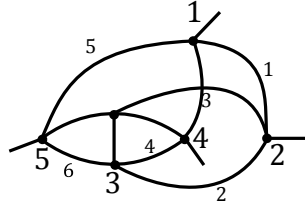
$$R_\lambda = \frac{1}{i+1} \frac{1}{2-\lambda+i} \frac{1}{3-2\lambda+\frac{n_1+n_3+i}{2}} \frac{1}{4-3\lambda+\frac{n_1+n_3+i}{2}} \frac{R^{5-5\lambda}}{5-5\lambda} \quad (102)$$

$$\rightarrow \left( \frac{1}{i+1} \right)^2 \left( \frac{1}{1+\frac{n_1+n_3+i}{2}} \right)^2 \frac{R^{5-5\lambda}}{5-5\lambda} \quad (103)$$

Заметим: последний множитель  $\left(\frac{R^{5\varepsilon}}{5\varepsilon}\right)$  будет входить в каждое из слагаемых разложения. Действительно, он зависит лишь от общей суммы всех степеней переменных, а она равна  $-5\lambda$  при наличии пяти интегрирований. Учитывая то, что вся диаграмма имеет ровно один полюс, можем заключить, что все остальные множители и слагаемые являются конечными, а значит, для численного счёта можно положить  $\lambda = 1$  до вычисления всех интегралов во всех областях (и на последний интеграл домножить уже итоговое выражение).



## 5.2. Третья диаграмма



$$I = N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1, \dots, n_6} A_\lambda R_\lambda \quad (104)$$

$$A_\lambda = C_{n_1}(\hat{x}_1 \hat{x}_2) C_{n_2}(\hat{x}_2 \hat{x}_3) C_{n_3}(\hat{x}_1 \hat{x}_4) C_{n_4}(\hat{x}_3 \hat{x}_4) C_{n_5}(\hat{x}_1 \hat{x}_5) C_{n_6}(\hat{x}_3 \hat{x}_5) \quad (105)$$

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \dots dr_5 r_1^\lambda (\max_{12} \max_{23} \max_{34} \max_{45} \max_{51} \max_{13})^{-\lambda}. \quad (106)$$

$$\cdot \left(\frac{\min_{12}}{\max_{12}}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{\min_{23}}{\max_{23}}\right)^{\frac{n_2}{2}} \left(\frac{\min_{14}}{\max_{14}}\right)^{\frac{n_3}{2}} \left(\frac{\min_{34}}{\max_{34}}\right)^{\frac{n_4}{2}} \left(\frac{\min_{15}}{\max_{15}}\right)^{\frac{n_5}{2}} \left(\frac{\min_{35}}{\max_{35}}\right)^{\frac{n_6}{2}} \quad (107)$$

$$A_\lambda : \int d\hat{x}_2 d\hat{x}_4 d\hat{x}_5 A_\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{n_1 + \lambda} \frac{\lambda}{n_3 + \lambda} \frac{\lambda}{n_5 + \lambda} \delta_{n_1 n_2} \delta_{n_3 n_4} \delta_{n_5 n_6} C_{n_1}(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_3}(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_5}(\hat{x}_1 \hat{x}_3) \quad (108)$$

Вновь получаем три параллельные линии, и используем разложение  $C_{n_1}^\lambda$  и  $C_{n_3}^\lambda$  в виде суммы.

$$C_{n_1}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_3}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) = \sum_{\substack{i=|n_1-n_3| \\ \frac{i+n_1+n_3}{2} \in N}}^{n_1+n_3} D_\lambda(n_1, n_3, i) C_i^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) \quad (109)$$

$D_\lambda(n_1, n_3, i)$  также вновь можем принять за единицу.

$$N_\lambda(5, 10) \sum_{n_5, n_1, n_3, i} A_\lambda R_\lambda; \quad (110)$$

$$A_\lambda = \int d\hat{x}_1 d\hat{x}_3 C_i^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_5}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) \frac{\lambda}{n_1 + \lambda} \frac{\lambda}{n_3 + \lambda} \frac{\lambda}{n_5 + \lambda} \quad (111)$$

$$\int d\hat{x}_1 d\hat{x}_3 C_i^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_5}^\lambda(\hat{x}_1 \hat{x}_3) = \frac{\lambda}{i + \lambda} C_i^\lambda(1) \delta_{in_5} = \delta_{in_5} \quad (112)$$

$$I = N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \sum_{\substack{i=|n_1-n_3| \\ \frac{i+n_1+n_3}{2} \in N}}^{n_1+n_3} \left(\frac{\lambda}{n_4 + \lambda}\right)^2 \frac{\lambda}{n_1 + \lambda} R_\lambda \quad (113)$$

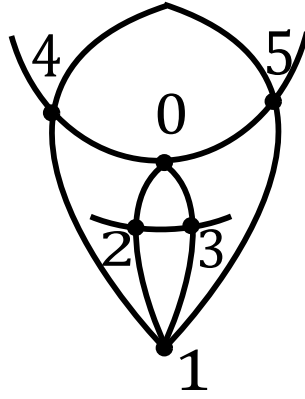
Как видим, получившаяся сумма вполне аналогична одной для первой диаграммы, отличие лишь в множителях из  $A_\lambda$ . Это и неудивительно: если рассмотреть лишь разложенную по полиномам Гегенбауэра часть диаграммы, то отличие будет лишь в линии, на которой находится переменная  $\hat{x}_5$ .

Учитывая все применения  $\delta$ -символов, перепишем  $R_\lambda$ :

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \dots dr_5 r_1^\lambda (\max_{12} \max_{23} \max_{34} \max_{45} \max_{51} \max_{13})^{-\lambda}. \quad (114)$$

$$\cdot \left(\frac{\min_{12} \min_{23}}{\max_{12} \max_{23}}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{\min_{14} \min_{34}}{\max_{14} \max_{34}}\right)^{\frac{n_3}{2}} \left(\frac{\min_{15} \min_{35}}{\max_{15} \max_{35}}\right)^{\frac{n_5}{2}} \quad (115)$$

### 5.3. Вторая диаграмма



$$I = N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1, \dots, n_6} A_\lambda R_\lambda \quad (116)$$

$$A_\lambda = C_{n_1}(\hat{x}_1 \hat{x}_2) C_{n_2}(\hat{x}_2 \hat{x}_3) C_{n_3}(\hat{x}_1 \hat{x}_3) C_{n_4}(\hat{x}_1 \hat{x}_4) C_{n_5}(\hat{x}_4 \hat{x}_5) C_{n_6}(\hat{x}_1 \hat{x}_5) \quad (117)$$

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \dots dr_5 r_1^\lambda (\max_{12} \max_{23} \max_{13} \max_{14} \max_{45} \max_{15})^{-\lambda}. \quad (118)$$

$$\cdot \left(\frac{\min_{12}}{\max_{12}}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{\min_{23}}{\max_{23}}\right)^{\frac{n_2}{2}} \left(\frac{\min_{13}}{\max_{13}}\right)^{\frac{n_3}{2}} \left(\frac{\min_{14}}{\max_{14}}\right)^{\frac{n_4}{2}} \left(\frac{\min_{45}}{\max_{45}}\right)^{\frac{n_5}{2}} \left(\frac{\min_{15}}{\max_{15}}\right)^{\frac{n_6}{2}} \quad (119)$$

$$A_\lambda = \left(\frac{\lambda}{n_1 + \lambda}\right)^2 C_{n_1}^\lambda(1) \left(\frac{\lambda}{n_4 + \lambda}\right)^2 C_{n_4}^\lambda(1) \delta_{n_1 n_2} \delta_{n_1 n_3} \delta_{n_4 n_5} \delta_{n_4 n_6} = \frac{1}{n_1 + 1} \frac{1}{n_4 + 1} \quad (120)$$

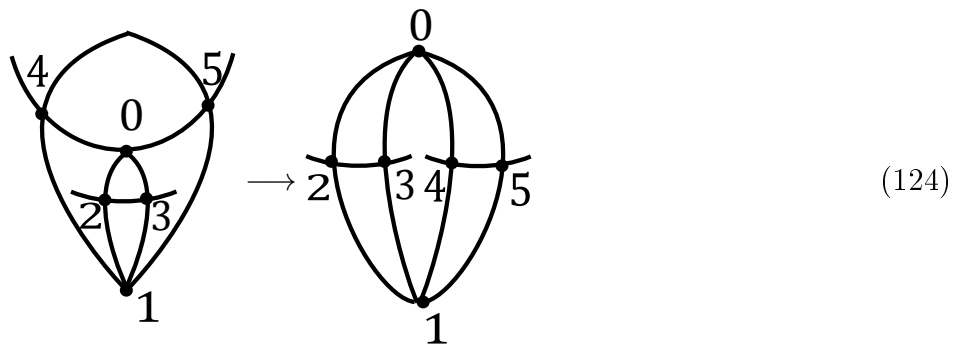
$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \dots dr_5 r_1^\lambda (\max_{12} \max_{23} \max_{13} \max_{14} \max_{45} \max_{15})^{-\lambda}. \quad (121)$$

$$\cdot \left(\frac{\min_{12} \min_{23} \min_{13}}{\max_{12} \max_{23} \max_{13}}\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\frac{\min_{14} \min_{45} \min_{15}}{\max_{14} \max_{45} \max_{15}}\right)^{\frac{n_4}{2}} \quad (122)$$

$$I = N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_4=0}^{\infty} \frac{1}{n_1 + 1} \frac{1}{n_4 + 1} R_\lambda \quad (123)$$

### 5.4. Аналитический способ получения ответа для второй диаграммы

Представим диаграмму в немного другом виде:



Можно заметить, что она является объединением по линии (0,1) двух трёхпетлевых пирамид с удалённой линией (0,1). Иными словами, если убрать вершины 4 и 5, оставить 0,1,2,3 и все соединяющие их линии и добавить линию (0,1), то мы получим диаграмму, эквивалентную

трёхпетлевой пирамиде. Аналогично при убиении вершин 2 и 3. Вспомним теперь про выражение для диаграмм в координатном представлении. Вновь выбирая вершину 0 как корневую, отметим: выражение, уже проинтегрированное по вершинам 2, 3, 4 и 5, является прямым произведением двух выражений для трёхпетлевой пирамиды без ребра, проинтегрированных по вершинам 2 и 3, и 4 и 5 соответственно (для левой и правой пирамид). Осталось лишь определить это выражение в явном виде.

Внешний множитель нас не интересует - его определим непосредственно. Кроме того отметим, что все  $\Gamma(\lambda)$  вновь переходят в единицы, т.к. нас интересует лишь полюсная часть диаграммы, а полюс имеет первый порядок. Пирамида, проинтегрированная по вершинам 2 и 3, будет выглядеть как  $Ax^{2\gamma}$ . Это следует из соображений размерности: выражение должно быть однородно по переменным, в то же время переменная ровно одна. Значит, из всего выражения можно вынести переменную в соответствующей степени, и оставшуюся часть назвать модулем и обозначить как  $A$ .

Вычислим оба показателя.

Будем опять интегрировать в сферических координатах. Интеграл по  $d\hat{x}$  тривиален, и можно записать:

$$\int_0^R dr r^\lambda A r^\gamma \cdot \frac{1}{r^\lambda} = \frac{2\zeta(3)R^{3\epsilon}}{\epsilon} \quad (125)$$

$$\frac{AR^{1+\gamma}}{1+\gamma} = \frac{2\zeta(3)R^{3\epsilon}}{\epsilon}, \text{ отсюда} \quad (126)$$

$\gamma = 3\epsilon - 1$  и  $A = 6\zeta(3)$ . Теперь возьмём интеграл в нашей диаграмме, помня об отсутствии линии:

$$\int_0^R dr r^\lambda A^2 r^{2\gamma} = 36\zeta^2(3) \int_0^R r^{6\epsilon-2+1-\epsilon} dr = 36\zeta^2(3) \frac{R^5\epsilon}{5\epsilon} \quad (127)$$

Вспоминая про внешний множитель, записываем ответ:

$$I = \frac{1}{(4\pi)^{10}} \frac{36}{5} \frac{1}{\epsilon} \zeta^2(3). \quad (128)$$

## 5.5. Компьютерное суммирование и сравнение результатов

Для получения окончательного ответа нам осталось вычислить оставшиеся суммы (96), (113) и (123). Повторно приведём здесь для удобства первую из указанных сумм:

$$I = N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \sum_{\substack{i=|n_1-n_3| \\ \frac{i+n_1+n_3}{2} \in N}}^{n_1+n_3} \left(\frac{\lambda}{n_4+\lambda}\right)^2 \frac{\lambda}{n_1+\lambda} R_\lambda, \quad (129)$$

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \dots dr_5 r_1^\lambda \left( \frac{1}{\max_{12} \max_{23} \max_{34} \max_{45} \max_{51} \max_{13}} \right)^\lambda. \quad (130)$$

$$\cdot \left( \frac{\min_{12} \min_{23}}{\max_{12} \max_{23}} \right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \left( \frac{\min_{13}}{\max_{13}} \right)^{\frac{n_3}{2}} \cdot \left( \frac{\min_{34} \min_{45} \min_{15}}{\max_{34} \max_{45} \max_{15}} \right)^{\frac{n_4}{2}} \quad (131)$$

Первым шагом, разбивая область интегрирования в  $R_\lambda$  на сектора, разрешим выражение и приведём его к удобному виду. Чтобы избежать высоковероятной ошибки при вычислении и записи 120 слагаемых похожего вида, автоматизируем этот процесс и воспользуемся пакетом символьных вычислений. Ещё раз отметим, что последний множитель в каждом секторе (см. (103)) будет одинаков, и выделяет полюс в явном виде. Таким образом, все остальные множители будут конечными и без размерной регуляризации. Учитывая это, а также тот факт, что

нам нужен лишь коэффициент при полюсе, уже здесь мы во всех расчётах можем положить  $\varepsilon = 0$ , и вынести множитель  $\frac{1}{5\varepsilon}$  за знаки суммирований.

Получив символьное выражение для  $R_\lambda$ , напишем скрипт, прямым суммированием вычисляющий конечную часть искомой суммы.

Будем вычислять часть суммы вида

$$\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_3=0}^N \sum_{\substack{i=|n_1-n_3| \\ \frac{i+n_1+n_3}{2} \in N}}^{n_1+n_3},$$

увеличивая  $N$ .

### 5.5.1. Первая сумма

Приведём список результатов суммирования в зависимости от значения  $N$ .

55.5540553315,  $N = 25$   
 55.5770471331,  $N = 50$   
 55.5831476891,  $N = 100$   
 55.5847202763,  $N = 200$   
 55.5851195959,  $N = 400$   
 55.5852202107,  $N = 800$

Рассмотрим разности между парами последовательных результатов с точностью до 6-го знака.

22992  
 6100  
 1573  
 399  
 101

Легко видеть, что каждое следующее увеличение  $N$  в два раза уменьшает разность примерно в 4 раза. Аппроксимируя функцию разности от  $N$  до бесконечности, получаем значение суммы:

$$S_1 = 55.585252 \pm 0.000003 \quad (132)$$

Это даёт выражение для диаграммы:

$$\frac{1}{(4\pi)^{10}} \frac{1}{5\varepsilon} S_1 \quad (133)$$

Проведём аналогичные действия для третьей и второй диаграмм и соответствующих им сумм. Отметим, что из-за того, что во второй диаграмме мы не пользовались разложением Клебша-Гордона, там осталось лишь два суммирования, что дало возможность увеличить точность расчёта за счёт увеличения максимального значения  $N$ .

### 5.5.2. Третья сумма

$$I = N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \sum_{\substack{i=|n_1-n_3| \\ \frac{i+n_1+n_3}{2} \in N}}^{n_1+n_3} \left(\frac{\lambda}{n_4 + \lambda}\right)^2 \frac{\lambda}{n_1 + \lambda} R_\lambda \quad (134)$$

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \dots dr_5 r_1^\lambda (\max_{12} \max_{23} \max_{34} \max_{45} \max_{51} \max_{13})^{-\lambda}. \quad (135)$$

$$\cdot \left( \frac{\min_{12} \min_{23}}{\max_{12} \max_{23}} \right)^{\frac{n_1}{2}} \left( \frac{\min_{14} \min_{34}}{\max_{14} \max_{34}} \right)^{\frac{n_3}{2}} \left( \frac{\min_{15} \min_{35}}{\max_{15} \max_{35}} \right)^{\frac{n_5}{2}} \quad (136)$$

Список результатов суммирования в зависимости от значения N:

52.0176158839, N = 25

52.0178481205, N = 50

52.0178671831, N = 100

52.0178686304, N = 200

52.0178687281, N = 400

52.0178687322, N = 800

Попарные разности, 10-й знак точности:

2322366

190626

14473

977

41

Аналогично аппроксимируя функцию разности от N до бесконечности, получаем значение суммы:

$$S_3 = 52.0178687323 \pm 0.0000000003 \quad (137)$$

Это даёт выражение для диаграммы:

$$\frac{1}{(4\pi)^{10}} \frac{1}{5\varepsilon} S_3 \quad (138)$$

### 5.5.3. Вторая сумма

$$I = N_\lambda(5, 10) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_4=0}^{\infty} \frac{1}{n_1+1} \frac{1}{n_4+1} R_\lambda \quad (139)$$

$$R_\lambda = \int_0^R dr_1 \dots dr_5 r_1^\lambda (\max_{12} \max_{23} \max_{13} \max_{14} \max_{45} \max_{15})^{-\lambda}. \quad (140)$$

$$\cdot \left( \frac{\min_{12} \min_{23} \min_{13}}{\max_{12} \max_{23} \max_{13}} \right)^{\frac{n_1}{2}} \left( \frac{\min_{14} \min_{45} \min_{15}}{\max_{14} \max_{45} \max_{15}} \right)^{\frac{n_4}{2}} \quad (141)$$

Список результатов суммирования в зависимости от значения N:

51.9562869010, N = 25

52.0015555839, N = 50

52.0136684840, N = 100

52.0168029514, N = 200

52.0176002987, N = 400

52.0178013806, N = 800

52.0178518708, N = 1600

52.0178645206,  $N = 3200$

Попарные разности, 7-й знак точности:

452686

121129

31345

7973

2013

505

126

Аналогично аппроксимируя функцию разности от  $N$  до бесконечности, получаем значение суммы:

$$S_2 = 52.0178687 \pm 0.0000005 \quad (142)$$

Это даёт выражение для диаграммы:

$$\frac{1}{(4\pi)^{10}} \frac{1}{5\varepsilon} S_2 \quad (143)$$

#### 5.5.4. Сравнение результатов

Вычислим с высокой точностью значения дзета-функций.

$$\zeta(3) = 1.202056903150321 \quad (144)$$

$$\zeta(7) = 1.0083492773819207 \quad (145)$$

Сравним численный и аналитический (128) ответы для второй диаграммы.

$$\frac{1}{(4\pi)^{10}} \frac{36}{5} \frac{1}{\varepsilon} \zeta^2(3) \quad \text{и} \quad \frac{1}{(4\pi)^{10}} \frac{1}{5\varepsilon} S_2$$

Разделив  $S_2$  на  $\zeta^2(3)$ , получаем 35.99999997037.

Таким образом, численный расчёт для данной диаграммы совпал с аналитическим с точностью до *десятого* порядка.

Можно заметить, что численные выражения для второй и третьей диаграммы совпадают в большом количестве порядков. Можно сделать предположение, что и аналитические их выражения совпадают.

И напоследок, внимательно посмотрев на первую диаграмму, можно предположить, что  $S_1 = \frac{441}{8} \zeta(7)$ .

Тогда результаты для тройки пятипетлевых диаграмм можно записать:

$$diag_1 = \frac{1}{(4\pi)^{10}} \frac{441}{40} \frac{1}{\varepsilon} \zeta(7) \quad (146)$$

$$diag_2 = \frac{1}{(4\pi)^{10}} \frac{36}{5} \frac{1}{\varepsilon} \zeta^2(3) \quad (147)$$

$$diag_3 = \frac{1}{(4\pi)^{10}} \frac{36}{5} \frac{1}{\varepsilon} \zeta^2(3) \quad (148)$$

## 6. Заключение

В целом работа подтверждает мнение о необходимости овладения всем спектром подходов к многопетлевым расчетам для продвижения в высокие порядки теории возмущений.

Проведенные расчеты показали, что метод G-функций является весьма эффективным. В классе многопетлевых диаграмм, для которых он применим, метод G-функций несомненно является наиболее предпочтительным способом расчета. Более того, применение данного метода в большем количестве петель не требует никаких его модификаций. Дальнейшее продвижение в этой области может быть связано с освоением способов, позволяющих расширить класс допустимых диаграмм, например, метода  $R^*$ -операции.

В свою очередь, в ряде случаев предпочтительным оказывается метод полиномов Гегенбауэра. Наибольшая эффективность достигается при расчёте диаграмм без расходящихся подграфов, которые наиболее сложно считаются альтернативными методами. Таким образом, данный метод удачно дополняет метод G-функций. Это хорошо видно на примере трехпетлевой диаграммы (73), расчет которой в [1] весьма громоздок, а в методе полиномов Гегенбауэра не представляет никаких затруднений. В ряде случаев он позволяет получать аналитические ответы (как в рассмотренной пятипетлевой диаграмме (124)), но и при численном подходе столь высокая точность, как в рассмотренных пятипетлевых примерах (84), (104), навряд ли достижима другими численными методами.

Однако, даже объединение этих двух методов пока не покрывает всё множество многопетлевых диаграмм. Кроме рассмотрения модификаций методов, позволяющих расширить области их применимости, может быть осмысленной попытка создать универсальный метод, использующий преимущества обеих методик в рамках вычисления одной и той же диаграммы. Для класса же диаграмм, которые окажутся несчитаемыми и данным набором инструментов, можно применять численные схемы, такие как Sector Decomposition.

## Список литературы

- [1] Васильев А.Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. – Издательство ПИЯФ, Санкт-Петербург, 1998.
- [2] Cristoph Sieg – Notes on the calculation of loop integrals. Niehls Bohr International Academy, Copenhagen, Denmark. Lecture materials
- [3] Р. Грэхэм, Д. Кнут, О.Паташник – Конкретная математике: основание информатики. пер. с англ. М:МИР, 1998.
- [4] NEW APPROACH TO EVALUATION OF MULTILoop FEYNMAN INTEGRALS: THE GEGENBAUER POLYNOMIAL x-SPACE TECHNIQUE K.G. CHETYRKIN, A.L. KATAEV and F.V. TKACHOV Nuclear Physics B174 (1980) 345-377
- [5] Calculation of Massless Feynman Integrals using Harmonic Sums, Stefan Bekavac ?
- [6] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены – М: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [7] Szegö Gabor Orthogonal polynomials – American Mathematical Society fourth edition: Stanford, 1975.
- [8] Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике – Л.: изд. ЛГУ, 1976



# Содержание

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Введение</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2. Модель. Используемые обозначения</b>   | <b>1</b>  |
| <b>3. Счёт с помощью G-функций</b>   | <b>2</b>  |
| 3.1. 1 петля . . . . .   | 3         |
| 3.2. 2 петли . . . . .   | 3         |
| 3.3. 3 петли . . . . .   | 5         |
| <b>4. Счёт с помощью разложения по полиномам Гегенбауэра</b>   | <b>8</b>  |
| 4.1. Полиномы Гегенбауэра . . . . .  | 8         |
| 4.2. 1 петля . . . . .   | 10        |
| 4.3. 2 петли . . . . .   | 10        |
| 4.4. Вычисление трёхпетлевой пирамиды . . . . .  | 12        |
| 4.5. Вычисление трёхпетлевых диаграмм в общем; формулировка трудностей для б´ольшого количества петель . . . . . | 12        |
| <b>5. Пятипетлевые диаграммы без подграфов</b>   | <b>14</b> |
| 5.1. Первая диаграмма . . . . .  | 14        |
| 5.2. Третья диаграмма . . . . .  | 16        |
| 5.3. Вторая диаграмма . . . . .  | 17        |
| 5.4. Аналитический способ получения ответа для второй диаграммы . . . . .  | 17        |
| 5.5. Компьютерное суммирование и сравнение результатов . . . . .   | 18        |
| 5.5.1. Первая сумма . . . . .  | 19        |
| 5.5.2. Третья сумма . . . . .  | 19        |
| 5.5.3. Вторая сумма . . . . .  | 20        |
| 5.5.4. Сравнение результатов . . . . .   | 21        |
| <b>6. Заключение</b>   | <b>22</b> |
| <b>Список литературы</b>   | <b>23</b> |