САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Коваль Даниил Александрович

Метод реплицирующего портфеля для оценки достаточности капитала западноевропейских страховых компаний

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра физики

Научный руководитель: ____________ д.ф.-м.н., профессор А.Ю. Вальков

Рецензент: ________________ ст. преподаватель СПб филиала НИУ «Высшая школа экономики» А.В. Косенко

Санкт-Петербург
2013

Оглавление

Глава 1

Введение

В Западной Европе с 1-го января 2014 года вступает в силу новая директива Solvency II [1], которая систематизирует и унифицирует правила работы и необходимые требования для страховых фирм. Одно из направлений этих новых требований — уменьшить риски неплатежеспособности страховых фирм. В частности, директива Solvency II устанавливает определенные требования к минимальному уровню капитала страховых фирм, их «резерву платёжеспособности».

Данная работа посвящена одному из из методов, используемых при оценке достаточности капитала страховых компаний — так называемому «методу реплицирующего портфеля» [2]. Необходимый минимум экономических терминов мы поясним в самом начале диплома, чтобы ввести в курс дела читателя, незнакомого с этой областью. Тот же, кто знаком с ней, может пропустить раздел 1.1 и сразу перейти к содержательной части.

В содержательной части мы рассмотрим проблему количественного моделирования капитала страховой компании и трудности, которые при этом моделировании (в данном случае методом репликации) появляются, а именно: проблемы связанные с конечной точностью компьютерной арифметики для высокообусловленных задач, точность репликации, повышенные требования к точности учета некоторых специфических сценариев развития рынка, систематические ошибки и другие. Мы предложим несколько вариантов получения репликации и сравним эти варианты по некоторым критериям валидации. При отборе этих критериев мы ориентировались на методы валидации, реально используемых в западноевропейских страховых компаниях.

1.1 Необходимые экономические понятия и термины.

В этом разделе мы опишем некоторые экономические термины, которые часто будут использоваться в работе.

- **Сценарий** — один из вариантов развития какой-либо экономической (случайной) величины(н) во времени. Различные сценарии можно графически представить как разные графики значений интересующей нас величины от времени. Чтобы контролировать качество репликации мы будем использовать для генерации сценариев метод Монте-Карло — «прогоняяя» нашу репликацию по большому количеству случайных сценариев.

- **Финансовый инструмент** —в контексте данной работы — торгуемый на рынке финансовый контракт, порождающий условные или безусловные денежные потоки между сторонами контракта, например акции, облигации, свопы, опционы и др. Принципиальным является то, что денежные потоки определяются только рыночными рисковыми факторами (ценами, процентными ставками, валютными курсами, фондовыми индексами и т.д.). Это позволяет проводить *репликацию* портфеля обязательств страховой компании и аппроксимировать его стоимость

- **Портфель финансовых инструментов** — Комбинация определенного количества различных по типу денежных инструментов, управляемых единым образом. Обычно портфели используются для снижения финансовых и иных рисков. Пример, чтобы было понятнее: мы вложили деньги в 12 простых и 4 привилегированных акций одной фирмы, а также в одну простую и одну привилегированную акцию другой фирмы. В этом портфеле у нас присутствует 4 денежных инструмента.

- **Денежный поток (Cash Flow)** — в нашем случае движение денежных средств по портфелю страховых контрактов или финансовым инструментам в разбивке по годам, в предположении, что платежи имеют место в конце годовых периодов.

- **Текущая стоимость денежного потока (Present Value)** — Приведенная к текущему моменту стоимость будущих денежных потоков актива. Мы будем использовать обозначение $\mathsf{PV}(\mathsf{CF})$, чтобы исключить зависимость стоимости денег от времени и приводить все стоимости к текущим значениям в данный момент времени.

- **Инвестиционный портфель** — набор реальных или финансовых инвестиций. В узком смысле это совокупность ценных бумаг разного вида, разного срока действия и разной степени ликвидности, принадлежащая одному инвестору и управляемая как единое целое.

- **Реплицирующий портфель** — Портфель состоящий из финансовых инструментов, которым мы будем приближать денежные потоки по портфелю обязательств (страховых полисов) страховой фирмы. Подробно мы разберём это далее, отведя ему большую часть работы. Соответственно мы хотим приблизить интересующую нас систему (страховую фирму) некоторой моделью и работать с этой моделью, задавая ей разные ситуации поведения рынка (сценарии) и исследовать её поведение в зависимости от наступления различных рисков и ситуаций.

- **Value at Risk (VaR)** — Стоимостная мера риска — выраженная в денежных единицах величина, которую, с заданной вероятностью, не превысят потери в течение данного периода времени. В зависимости от принятой внутри компании политики управления риском, доверительная вероятность (она же — уровень допустимого риска) обычно принимает значения $95\% \div 99\%$, интервал времени же берётся от 1 до 10 дней.

- **Стрессовый сценарий** — сценарий, который выходит за рамки VaR или за рамки допустимого риска.

1.2 Обозначения

Приведем обозначения, которыми мы будем постоянно пользоваться. Величины без стрелок над ними — скаляры. Для обозначения векторов-столбцов, векторов-строк и матрицы мы будем использовать различные виды стрелок:

$$\overrightarrow{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \tag{1.1}$$

$$\overleftarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$\overleftrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_k^n \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Необходимость в четком различии уже на уровне обозначений между объектами различной матричной размерности диктуется необходимостью последующей компьютерной имплементации алгоритмов.

Поясним удобство этих обозначений: если мы перемножаем x со стрелками в разные стороны, то, в зависимости от последовательности направлений, мы видим, что стрелки $\rightarrow$ и $\leftarrow$ сокращают друг друга (это соответствует тому, что произведение вектора-строка на вектор-столбец даёт скаляр) или $\leftarrow$ и $\rightarrow$ образуют двойную стрелку значок $\leftrightarrow$ (произведение вектора-столбца на вектор-строку дает матрицу) и т.д.:

$$\overrightarrow{a}\overleftrightarrow{b} = \overrightarrow{c}, \ \overleftrightarrow{a}\overleftarrow{b} = \overleftarrow{c}, \ \overleftarrow{b}\overrightarrow{a} = \overleftrightarrow{c}, \ \overrightarrow{a}\overleftarrow{b} = c. \tag{1.4}$$

Глава 2

Постановка задачи

2.1 Экономическая постановка

Опишем кратко идею реплицирующего портфеля [3]:

1. Задан набор случайных величин, описывающий деятельность страховой компании, это её полисы — контракты, инструменты. Будем считать, что эти инструменты трудномоделируемы — соответствующие стохастические модели, весьма сложны и оценки обычно могут быть получены только методом Монте-Карло.

2. В то же время другой сорт случайных величин, а именно — акции (финансовые инструменты), будем считать хорошо моделируемым — существуют сравнительно простые стохастические модели, для которых существуют аналитические оценки. Тогда, если даны цены на базовые активы, цены всех остальных инструментов можно найти практически моментально.

3. Идея репликации: вместо построения «микроскопической» модели — прямого исследования контрактов (полисов) страховых компаний, построить модель «феноменологическую» — выразить инструменты (портфели) первого типа через портфели (линейные комбинации) инструментов второго типа.[1]

Экономическая аргументация:
Если денежные потоки по двум инструментам (портфелям) одинаковы, то исходя из принципа отсутствия арбитражных возможностей они должны одинаково стоить.

[1]Оценку этого второго, реплицирующего портфеля можно найти очень быстро. Особенно проявляется это преимущество тогда, когда требуется найти распределение стоимости портфеля обязательств страховой компании через год (необходимо для нахождения «требуемого» капитала — равен VaR по этому распределению).

2.1.1 Актуальность

Ввод директивы Solvency II существенно меняет критерии оценки страховых компаний государством. В частности, во многих случаях наработанный аналитическими отделами компаний инструментарий оценки полисов требует пересмотра, а в ряде случаев полностью непригоден. Метод реплицирующего портфеля является одним из перспективных методов оценки полисов в такой ситуации. С формальной точки зрения метод реплицирующего портфеля — это некоторое математическое приближение всех обязательств компании через финансовые инструменты, имеющиеся в данный момент на рынке.

Благодаря этому математическому аппарату мы можем задавать всевозможные ситуации поведения рынков и следить, что и в каких случаях будет с страховыми активами, как то: какую стратегию лучше выбрать при определённых условиях, какой исход будет при наступлении определённых факторов риска и прочее.

Таким образом, имея модели финансовых инструментов, с помощью репликации мы можем смоделировать будущее финансового состояние страховой компании, в частности определять уровень возможных рисков.

2.2 Основная теория

Пускай у нас имеется набор из N сценариев и промежуток времени $[0; T]$, разбитый на несколько дискретных интервалов времени (квантов). На них мы получаем набор денежных потоков финансовых инструментов $CF^i_{k,t}$ и страховых инструментов CFL^i_t. Аббревиатура CF происходит от Cash Flow. Поясним смысл индексов в выражениях $CF^i_{k,t}$ и CFL^i_t:

- $i \in [1..N]$ — номер сценария, по которому происходит развитие событий.
- $k \in [1..k]$ — номер денежного инструмента, из которого получается денежный поток.
- $t \in [1..T]$ — номер временного интервала. Мы делим длительный промежуток времени на несколько интервалов и смотрим значения в разные моменты времени.

Как было сказано выше, идея репликации состоит в приближении денежных потоков страховых инструментов CFL^i_t, линейной комбинацией $CF^i_{k,t}$ по k. Величина CFL^i_t — это портфель страховых инструментов компании. По сути, мы делаем репликацию портфеля страховых инструментов портфелем финансовых инструментов.

Реплицирующий денежный поток портфеля, состоящего из страховых инструментов CFL^i_t, получается суммированием $\sum_{j=1}^{k} CF^i_{k,t}x_k$, где x_k — это коэффициенты весов соответствующих денежных потоков финансовых инструментов. Так как число сценариев может быть произвольным и превышать количество инструментов (что обычно и имеет место), то мы не можем потребовать точного равенства исходного и реплицирующего портфеля. Таким образом, наша задача состоит в минимизации отличия между исходным и реплицирующим денежными потоками путём подбора оптимальных x_k.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{j=1}^{k} CF^i_{k,t}x_k - CFL^i_t \right)^2 DF^2_{t,i} \to \min, \tag{2.1}$$

где $DF_{t,i}$ — факторы дисконтирования, выступающие здесь в роли весов. Экономический смысл этих факторов — приведение всех стоимостей к настоящему времени.

После проведения суммирование по времени t формула (2.1) примет вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{k} CF_{k,t}^{i} x_k - CFL_t^i\right) DF_{t,i}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} PV(CF_k^i) x_k - PV(CFL^i)\right)^2 \underset{\vec{x}}{\rightarrow} \min, \quad (2.2)$$

где PV — сокращение от Present Value,

$$PV(CF_k^i) = \sum_{t=1}^{T} CF_{k,t}^i DF_{t,i}, \; PV(CFL^i) = \sum_{t=1}^{T} CFL_t^i DF_{t,i}. \quad (2.3)$$

В матричной форме наша задача оптимизации может быть записана в виде[2]:

$$\left\| \overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \right\|^2 \underset{\overset{\leftarrow}{x}}{\rightarrow} \min, \quad (2.4)$$

где

$$\overset{\leftrightarrow}{B} = \begin{pmatrix} PV(CF_1^1) & \cdots & PV(CF_k^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ PV(CF_1^n) & \cdots & PV(CF_k^n) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\overset{\leftarrow}{d} = \begin{pmatrix} PV(CFL^1) \\ \vdots \\ PV(CFL^n) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

В случае, если мы хотим вычислять не значение в настоящий момент, а учитывать значения в разные момент времени, то очевидно, что количество строк просто увеличится в T раз, где T — количество дискретных промежутков времени, на которые мы разделяем время. Это простейшая форма постановки задачи репликации [4].

Приведем типичные размерности этих матрицы. Величина n — количество сценариев, которые мы рассматриваем. На практике это значение обычно $n \sim 10^3 \div 10^4$. Количество денежных инструментов $k \sim 100$, время же, если и дискретизируют, то $T \sim 1 \div 40$.

[2]Переход от задачи с точным равенством:

$$\overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} = \overset{\leftarrow}{0},$$

(которое может и не иметь решений), к задаче на минимизацию

$$\left\| \overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \right\|^2 \rightarrow \min.$$

(которая всегда имеет решение) называется переходом от рассмотрения решений к рассмотрению псевдорешений.

2.3 Стрессовые сценарии

В экономике существует такое понятие, как уровень допустимого риска, имеющее родственней смысл понятию доверительного интервала (confidence level) в теории вероятностей. По базельским документам [5] рекомендуется 99%, в системе RiskMetrics [6] — 95%.

Стрессовые сценарии — это сценарии развития рынка при наступлении событий, относящихся к особенно рискованным, т. е. тем, у которых флуктуации приводят к особенно сильному отклонению от среднего. Если наш реплицирующий портфель даёт хорошие результаты при сценариях с малым отклонением, но плохо описывает поведение денежные потоки страховой фирмы при наступлении стрессовых ситуаций — мы не сможем полагаться на такую репликацию именно в тех особо рискованных случаях, когда возможны наибольшие потери. Таким образом, в нашей задаче учет стрессовых сценариев играет очень важную роль — репликация здесь желательна более точная чем по обычным сценариям (не просто желательна, а необходима — это декларативное требование регулирующих органов).

Обычно кроме стандартного набора сценариев задаётся ещё несколько стрессовых, пускай в нашем случае заданы m стрессовых сценариев (на практике $m \lesssim 10$, обычно $m \lesssim 1 \div 3$). Пусть индекс s обозначает то, что величина имеет отношение к стрессовой составляющей. Введём стрессовые сценарии по аналогии:

$$\overset{\leftrightarrow}{B}_s = \begin{pmatrix} PV(CF^1_{1,s}) & \cdots & PV(CF^1_{k,s}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ PV(CF^m_{1,s}) & \cdots & PV(CF^m_{k,s}) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\overset{\leftarrow}{d}_s = \begin{pmatrix} PV(CFL^1_s) \\ \vdots \\ PV(CFL^m_s) \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Итак, для этих особых рисков необходима наиболее точная репликация. В идеале здесь желательно добиться абсолютно точной репликации:

$$\overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s = \overset{\leftarrow}{0},$$

Поскольку на практике стрессовых сценариев немного ($m \ll k$), то всем этим равенствам действительно можно точно удовлетворить.

Глава 3

Варианты математической постановки задачи

3.1 Исходная постановка задачи. Метод Лагранжа.

Таким в образом в своей исходной постановке задача сводится к минимизации квадратичной функции по обычным сценариям, при дополнительном условии выполнения точных линейных равенств по стрессовым:

$$\begin{cases} \left\| \overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \right\|^2 \underset{\overset{\leftarrow}{x}}{\longrightarrow} \min \\ \overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s = \overset{\leftarrow}{0}, \end{cases} \tag{3.1}$$

Возникает задача на условный экстремум [1]. Классический метод решения задач на условный экстремум — метод Лагранжа.

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(\overset{\leftarrow}{x}) = \left(\overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \right)^T \left(\overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \right) + \overset{\rightarrow}{\lambda} \left(\overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s \right), \tag{3.2}$$

где $\overset{\rightarrow}{\lambda}$ — вектор множителей Лагранжа, а верхний индекс T обозначает транспонирование.

Из условия стационарности для функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L(\overset{\leftarrow}{x})}{\partial \overset{\leftarrow}{x}} = \overset{\leftarrow}{0} \tag{3.3}$$

и исходного условия $\overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s = \overset{\leftarrow}{0}$ получаем систему уравнений на величины $\overset{\leftarrow}{x}$ и $\overset{\rightarrow}{\lambda}$:

$$\begin{cases} \overset{\leftrightarrow}{B}^T \overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftrightarrow}{B}^T \overset{\leftarrow}{d} + \overset{\rightarrow}{\lambda} \overset{\leftrightarrow}{B}_s = 0, \\ \overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

[1] Принадлежащая, в данном случае, к классу задач квадратичного программирования.

Практическая реализация метода Лагранжа формальных трудностей не вызывает, но в силу высокой обусловленности системы уравнений (3.1) в ответе возникает очень высокая неустойчивость. А именно: при малых изменениях исходных данных величина $\overleftarrow{x}$ меняется очень сильно, хотя качество репликации (т.е. величина невязки $\min \left\| \overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d} \right\|^2$) во всех случаях остается хорошим. Более того, на практике параметр обусловленности COND обычно превышает 10^{20}, что делает ответ сильно чувствительным даже к машинным округлениям, происходящим (при двойной точности плавающих вычислений) на уровне 10^{-15}– 10^{-16}.

Со статистической точки зрения такая высокая обусловленность системы уравнений связана с мультиколлинеарностью регрессионной модели [7].

Для устранения этой неустойчивости в аналитических отделах страховых фирм используется следующая эвристическая схема:

- Компоненты вектора $\overleftarrow{x}$ группируются на основе близости экономической природы представляющих эти компоненты инструментов.
- В каждой группе оставляют небольшое число основных инструментов (в идеале один на группу). Это существенно понижает размерность вектора $\overleftarrow{x}$.
- Качество получившейся задачи с новым вектором $\overleftarrow{x}$ пониженной размерности контролировалось на обусловленность[2] COND системы уравнений в методе Лагранжа.
- При необходимости процедура группировки повторяется для редуцированного набора инструментов и т.д.
- Когда COND достигает приемлемой величины (за которую принималось число $\lesssim 20$), редуцированный $\overleftarrow{x}$ признавался приемлемым.

Понятно, что основным недостатком этого метода является эвристический характер группировки и устранения инструментов из групп, требующий привлечения экспертов, а также его субъективность.

Нашей исходной задачей является создание «автоматизированного» алгоритма для устранения этой неустойчивости. Далее мы будем постепенно трансформировать исходную постановку задачи так, чтобы попытаться устранить проблему неустойчивости.

[2]Число обусловленности характеризует степень чувствительности решения линейной системы (выходных параметров) к изменению правой части системы (входных параметров). Формально определяется как отношение максимального и минимального абсолютных величин собственных значений матрицы коэффициентов линейной системы $\mathsf{COND} = |\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|$.

3.2 Переход к мягким граничным условиям.

Первый шаг трансформации связан с тем очевидным фактом, что требование абсолютно точной (что с точки зрения вычислительной математики означает реальную точность 10^{-15}–10^{-16} при использовании 8-битной плавающей машинной арифметики) репликации для стрессовых сценариев избыточно: экономически совершенно бессмысленно требовать выполнение равенства двух «обычных» стоимостей с точностью хотя бы $\sim 10^{-6}$ цента.

Реальный смысл такого требования состоит в том, что для стрессовых сценариев репликация должна быть существенно более точной, чем для обычных (например соответствовать минимальной границе при задании цен на бирже, скажем 0.1 или 10^{-3} цента). Математически этому соответствует переход от задачи на условный экстремум (3.1) к задаче без ограничений с новой целевой функцией:

$$\left\| \overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \right\|^2 + w_s \left\| \overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s \right\|^2 \underset{\overset{\leftarrow}{x}}{\longrightarrow} \min . \tag{3.5}$$

Здесь w_s — вес, которым управляется повышенная роль стрессовых сценариев. Тот факт, что нам хотелось бы заметно более точное выполнение репликации для стрессовых сценариев по сравнению с обычными, подразумевает, что $w_s \gg 1$.[3]

В некоторых случаях регулирующие органы требуют вместо точной репликации по отдельным стрессовым сценариям соблюдения, хотя бы, точной репликации по стрессовым сценариям в среднем. Разумность такого требования, вероятно, объясняется тем, когда во всех стрессовых сценариях ошибка имеет только один знак, и это выглядит не очень хорошо экономически, поскольку возникает явно видимая систематическая ошибка. Математически такое требование соответствует задаче:

$$\begin{cases} \left\| \overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \right\|^2 + w_s \left\| \overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s \right\|^2 \underset{\overset{\leftarrow}{x}}{\longrightarrow} \min \\ \vec{c}_s \left(\overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s \right) = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

где вектор

$$\vec{c}_s = \frac{1}{m}(1;\ 1;\ \ldots;\ 1). \tag{3.7}$$

В ряде случаев может представляться разумным [4] также выполнение аналогичного условия «равенства нулю» средней ошибки репликации не

[3]Наоборот, малый вес $w_s \ll 1$ будет означать то, что значения реплицированных величин в стрессовых сценариях могут отличаться от исходных величин сильнее чем для обычных сценариев.

[4]также для устранения видимой систематической ошибки в репликации.

только для стрессовых сценариев, но и для обычных сценариев:

$$\overrightarrow{c}\left(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x}-\overleftarrow{d}\right)=0.$$

где

$$\overrightarrow{c_s}=\frac{1}{n}(1;\,1;\,\ldots;\,1). \tag{3.8}$$

Понятно, что на самом деле это административное требование «абсолютно точного» выполнение условия в среднем в реальности, конечно, также является с математической точки зрения приближенным — просто точность его выполнения должна лежать за пределами используемых наименьших финансовых единиц, например составлять 10^{-2} цента или меньше. При такой трактовке эти условия на средние можно также, регулируя его роль весами, добавить к исходной целевой функции, получив задачу без ограничений:

$$\begin{gathered}\left\|\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x}-\overleftarrow{d}\right\|^2+w_s\left\|\overleftrightarrow{B_s}\overleftarrow{x}-\overleftarrow{d_s}\right\|^2+\\ +\nu\left(\overrightarrow{c}\left(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x}-\overleftarrow{d}\right)\right)^2+\nu_s\left(\overrightarrow{c_s}\left(\overleftrightarrow{B_s}\overleftarrow{x}-\overleftarrow{d_s}\right)\right)^2\underset{\overleftarrow{x}}{\longrightarrow}\min,\end{gathered} \tag{3.9}$$

где ν и ν_s — дополнительные два веса, определяющие точность выполнения репликаций для средних. По своему смыслу очевидно, $\nu \gg 1$, $\nu_s \gg w_s$.

Преимущества такого рода «мягких» постановок задач репликации по сравнению с исходной «жесткой» постановкой:

1. Во-первых, задача на условный экстремум заменяется задачей на безусловный, что, конечно, проще с точки зрения компьютерной реализации.

2. Во-вторых, некоторая некоторая дополнительная свобода, проявляющаяся в возможности ненулевых отклонений между реплицированными и исходными величинами в мягкой постановке задачи, позволяет несколько улучить качество репликации для основных (обычных) сценариев, по сравнению с задачей в жесткой постановке.

3. В-третьих, появляется возможность плавно менять результат репликации через непрерывное управление величиной весов.

3.3 Устойчивость решений. Метод регуляризации.

Полученная выше математическая задача на экстремум без ограничений всегда имеет решение (или решения). Но при нахождении этих решений по-прежнему сохраняется упомянутая выше серьёзная проблема: при малейшем изменении элементов матрицы $\overset{\leftrightarrow}{B}$ и вектора $\overset{\leftarrow}{d}$ значения элементов искомого вектора $\overset{\leftarrow}{x}$ меняются весьма сильно. Возвращаясь к экономической постановке задачи, понятно, что такие неустойчивые решения мало кого устроят. Ведь $\overset{\leftarrow}{x}$ обозначает то, сколько и каких денежных инструментов мы берём в реплицирующем портфеле, и резкое изменение весов означает совершенно другой портфель по экономической природе.

Для того, чтобы наши решения были устойчивы к малым изменениям сценариев или добавлением небольшого числа дополнительных сценариев, мы используем метод регуляризации Тихонова [8]. Суть его состоит в добавлении в целевую функцию так называемого регуляризатора — дополнительной малой функции, которая удовлетворяет двум требованиям:

- с одной стороны — меняет целевую функцию очень мало,
- а с другой — делает регуляризованную задачу устойчивой.

Мы используем вводим квадратичный регуляризатор

$$\gamma \left\| \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{x}_0 \right\|^2, \tag{3.10}$$

откуда итоговое выражение для целевой функции будет выглядеть так[5]:

$$\left\| \overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \right\|^2 + w_s \left\| \overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s \right\|^2 + \nu \big(\vec{c} \, (\overset{\leftrightarrow}{B} \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \,) \big)^2 + \\ + \nu_s \big(\vec{c}{}_s^i \, (\overset{\leftrightarrow}{B}_s \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s \,) \big)^2 + \gamma \left\| \overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{x}_0 \right\|^2 \underset{\overset{\leftarrow}{x}}{\longrightarrow} \min \tag{3.11}$$

Смысл такого слагаемого: снизить отклонение $\overset{\leftarrow}{x}$ от некоего «априорного» $\overset{\leftarrow}{x}_0$. Выбрать $\overset{\leftarrow}{x}_0$ можно несколькими способами:

- Часто специалисты-практики, работающие в соответствующей области, знают примерные $\overset{\leftarrow}{x}$. Эту экспертную оценку $\overset{\leftarrow}{x}$ и можно принять за $\overset{\leftarrow}{x}_0$.
- При её отсутствии можно положить $\overset{\leftarrow}{x}_0 = \overset{\leftarrow}{0}$. В этом случае член (3.10) не позволяет компонентам $\overset{\leftarrow}{x}$ очень большими.

[5] Возникшая задача для этого квадратичного типа регуляризатора носит название в статистической литературе «гребневая регрессия», «ридж-регрессия» (ridge regression) [7]

- Достаточно разумный способ — провести несколько итераций по нахождению $\overleftarrow{x}$ и каждый раз принимать $\overleftarrow{x}_0$ за найденный $\overleftarrow{x}$.

Меняя вес γ мы можем плавно управлять отклонением $\overleftarrow{x}$ от $\overleftarrow{x}_0$:

- При $\gamma \to \infty$ у нас отклонений не будет вообще — т.е. решение будет абсолютно устойчивым, но не иметь никакого отношения к исходной постановке, $\left\| \overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d} \right\|^2 \to \min$ — качество репликации будет очень плохое.

- При $\gamma \to 0$ мы позволяем любые отклонения и наше уравнение будет таким же, как уравнение без регуляризатора — т. е. решение задачи будет страдать неустойчивостью, но иметь максимальную точность репликации.

- Наконец, в средней области γ возникает компромисс между устойчивостью и точностью репликации.

В целевых функциях до этого мы использовали единые веса для каждого сценария. Можно записать формальное обобщение задачи (3.11) в виде:

$$
\begin{aligned}
F = \left(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d} \right)^T \overleftrightarrow{W} \left(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d} \right) + \left(\overleftrightarrow{B}_s\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d}_s \right)^T \overleftrightarrow{W}_s \left(\overleftrightarrow{B}_s\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d}_s \right) + \\
+ \left(\overleftarrow{x} - \overleftarrow{x}_0 \right)^T \overleftrightarrow{R} \left(\overleftarrow{x} - \overleftarrow{x}_0 \right) \underset{\overleftarrow{x}}{\longrightarrow} \min \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Здесь $\overleftrightarrow{W}$, $\overleftrightarrow{W}_s$ и $\overleftrightarrow{R}$ — матрицы норм (т.е. симметричные положительно определенные матрицы) в пространствах соответствующей размерности. Опишем различные возможные ситуации:

- В случае, если $\overleftrightarrow{W}$, $\overleftrightarrow{W}_s$ и $\overleftrightarrow{R}$ пропорциональны единичным (что соответствует евклидовым нормам), мы получаем задачу (3.11).

- В случае, если $\overleftrightarrow{W}$, $\overleftrightarrow{W}_s$ и $\overleftrightarrow{R}$ диагональные матрицы, то $\overleftrightarrow{W}$ и $\overleftrightarrow{W}_s$ соответствует различию весов для каждого сценария, а $\overleftrightarrow{R}$ - неравноправности различных компонент вектора $\overleftarrow{x}$.

- Случай, когда $\overleftrightarrow{W}$, $\overleftrightarrow{W}_s$ и $\overleftrightarrow{R}$ не диагональны, соответствует учету корреляций между различными сценариями для $\overleftrightarrow{W}$ и $\overleftrightarrow{W}_s$ и различными компонентами вектора $\overleftarrow{x}$ для $\overleftrightarrow{R}$.

3.3.1 Система нормальных уравнений

Условие экстремума для целевой функции F дает

$$\frac{\partial \mathsf{F}(\overleftarrow{x})}{\partial \overleftarrow{x}} = \overleftarrow{0}\,. \tag{3.13}$$

Тогда вместо системы уравнений Лагранжа (3.1) получаем систему нормальных уравнений задачи (3.12) :

$$\left(\overleftrightarrow{B}^{\mathsf{T}} \overleftrightarrow{W} \overleftrightarrow{B} + \overleftrightarrow{B}_s^{\mathsf{T}} \overleftrightarrow{W}_s \overleftrightarrow{B}_s + \overleftrightarrow{R} \right) \overleftarrow{x} = \overleftrightarrow{B}^{\mathsf{T}} \overleftrightarrow{W} \overleftarrow{d} + \overleftrightarrow{B}_s^{\mathsf{T}} \overleftrightarrow{W}_s \overleftarrow{d}_s + \overleftrightarrow{R} \overleftarrow{x}_0\,. \tag{3.14}$$

Численное решение этой системы при соответствующем подборе матриц $\overleftrightarrow{W}$, $\overleftrightarrow{W}_s$ и $\overleftrightarrow{R}$ может обеспечить необходимый нам вектор репликации $\overleftarrow{x}$, обладающий свойством устойчивости.

Однако, в ряде случаев помимо устойчивости вектора $\overleftarrow{x}$ желательным является его не очень высокая эффективная размерность: число ненулевых компонент $\overleftarrow{x}$ существенно меньше, чем число k — размерность $\overleftarrow{x}$. Здесь следует отметить, что существенное снижение эффективной размерности вектора $\overleftarrow{x}$ приводит и к снижению обусловленности задачи, а значит — и к повышению устойчивости решения, так что вопросы редукции размерности и повышения устойчивости связаны (в одну сторону). Далее мы обсудим методы позволяющие понизить эффективную размерность вектора $\overleftarrow{x}$ (или, на экономическом языке — число инструментов в реплицирующем портфеле).

3.4 Редукция размерности

3.4.1 Метод LASSO

LASSO — «Least absolute shrinkage and selection operator» — метод оценивания параметров линейной модели, имеющий возможности редукции размерности [9]. Возьмём вместо обычного регуляризатора с евклидовой нормой регуляризатор с ℓ^1-нормой[6]. Особенность такой регуляризации в том, что малое отклонение при регуляризации ℓ^1-нормой вносит много бо̀льший вклад, нежели малое отклонение при обычной регуляризации евклидовой нормой. Методу LASSO соответствует целевая функция

$$F = \left\| \overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d} \right\|^2 + w_s \left\| \overleftrightarrow{B}_s \overleftarrow{x} - \overleftarrow{d}_s \right\|^2 + \nu\left(\overrightarrow{c} \left(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d} \right)\right)^2 + \nu_s\left(\overrightarrow{c}_s \left(\overleftrightarrow{B}_s\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d}_s \right)\right)^2 + \gamma_L \left\| \overleftarrow{x} \right\|_1 \underset{\overleftarrow{x}}{\longrightarrow} \min. \quad (3.15)$$

Поскольку в целевой функции ограничение на сумму абсолютных значений отклонений параметров модели, то некоторым элементам $\overleftarrow{x}$ выгодно становиться равными нулю, а значит, количество влияющих на портфель элементов уменьшается [7]. Те x_i, которые становятся нулями, имеют «способность к инерции» — продолжают сохраняться нулями при последующих итерациях, если их не «выбивать» слишком сильно. Это свойство инерции и дает возможность использовать метод LASSO для редукции размерности вектора $\overleftarrow{x}$.

3.4.2 Elastic net regularization

Метод «elastic net regularization» является очевидной комбинацией метода LASSO и регуляризации по Тихонову (ridge regression):

$$F = \left\| \overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d} \right\|^2 + w_s \left\| \overleftrightarrow{B}_s \overleftarrow{x} - \overleftarrow{d}_s \right\|^2 + \nu\left(\overrightarrow{c} \left(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d} \right)\right)^2 + \nu_s\left(\overrightarrow{c}_s \left(\overleftrightarrow{B}_s\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d}_s \right)\right)^2 + \gamma \left\| \overleftarrow{x} - \overleftarrow{x}_0 \right\| + \gamma_L \left\| \overleftarrow{x} \right\|_1 \underset{\overleftarrow{x}}{\longrightarrow} \min. \quad (3.16)$$

Он сочетает свойства редукции размерности вектора $\overleftarrow{x}$ присущее LASSO и возможность использовать априорную информацию $\overleftarrow{x}_0$ о векторе $\overleftarrow{x}$.

3.4.3 Оптимальное прореживание нейронных сетей

Соответствующие английский термины «optimal brain surgery»/«pruning neural networks». Этот метод, как следует из его названия, впервые воз-

[6] По определению этой нормы $\left\| \overleftarrow{x} \right\|_1 = \sum_{j=1}^{k} |x_j|$

ник в теории нейронных сетей [10]. Он основан на «обнулении» тех компонент x_i вектора $\overleftarrow{x}$ (т.е. удалении соответствующих этим компонента финансовых инструментов из портфеля), от которых наш реплицирующий портфель слабо зависит. Один из вариантов это сделать — приравнять одну из компонент x_i к нулю и посмотреть, сильно ли изменится результат репликации:

$$\overleftarrow{x} = \overleftarrow{x}^* + \alpha \overleftarrow{e_i}, \tag{3.17}$$

где $\overleftarrow{e_i}$ — (базисный) вектор с одним ненулевым i-м элементом, равным 1, а скаляр

$$\alpha = -\overleftarrow{x}_i^* . \tag{3.18}$$

Теперь вычислим изменение значения невязки при обнулении соответствующего k-го элемента $\overleftarrow{x}$:

$$\mathcal{R}(\overleftarrow{x}) = \left\| \overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x} - \overleftarrow{d} \right\|^2 = K(\overleftarrow{x}^*) + 2\alpha \overleftrightarrow{G} (\overleftarrow{x}^*)^T \overleftarrow{e_i} + \alpha^2 (\overleftarrow{e_i})^T \overleftrightarrow{H}\overleftarrow{e_i}, \tag{3.19}$$

где $\overleftrightarrow{G} (\overleftarrow{x})$ — градиент, а $\overleftrightarrow{H}$ — гессиан функции $\mathcal{R}(\overleftarrow{x})$,

$$\overleftrightarrow{G}_i (\overleftarrow{x}^*) = \left(\overleftrightarrow{B}^T \overleftrightarrow{D}_1 \left(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x}^* - \overleftarrow{d} \right)\right)_i, \ (\overleftarrow{e_i})^T \overleftrightarrow{H}\overleftarrow{e_i} = H_{ii} = \left(\overleftrightarrow{B}^T \overleftrightarrow{D}_1 \overleftrightarrow{B} \right)_{ii}. \tag{3.20}$$

Простейшие варианты выбора i-й компоненты:

- По минимуму изменения невязки:

$$\min_i \left(K(\overleftarrow{x}) - K(\overleftarrow{x}^*)\right) = \min_i \Big(2\alpha\big(\overleftrightarrow{B}^T \overleftrightarrow{D}_1 \left(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x}^* - \overleftarrow{d} \right)\big)_i + \\ + \alpha^2 \big(\overleftrightarrow{B}^T \overleftrightarrow{D}_1 \overleftrightarrow{B} \big)_{ii}\Big). \tag{3.21}$$

- По наименьшей чувствительности:

$$\min_i |G_i(\overleftarrow{x}^*)| = \min_i \left|\left(\overleftrightarrow{B}^T \overleftrightarrow{D}_1 \left(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x}^* - \overleftarrow{d} \right)\right)_i\right|. \tag{3.22}$$

Проводя последовательно несколько этих операций «обнуления» компонент мы перейдем от вектора $\overleftarrow{x}$, содержащего k ненулевых компонент, к новому, редуцированному вектору $\overleftarrow{x}_{opt}$, содержащему небольшое количество ненулевых компонент (финансовых инструментов), дающих наибольший вклад и работать дальше только с ними. Это заметно упрощает вычисления и повышает устойчивость решений.

Глава 4

Моделирование и результаты

Для проведения настоящего качественного тестирования обсужденных выше алгоритмов необходимы «эксперичетальные значения» матриц $\overset{\leftrightarrow}{B}$, $\overset{\leftrightarrow}{B}_s$ и векторов $\overset{\leftarrow}{d}$ и $\overset{\leftarrow}{d}_s$ (а также, возможно, и априорного значения $\overset{\leftarrow}{x}_0$). На практике некоторые из таких данных имеются у профильных фирм, и не предоставляется во вне, а также продаются фирмами, выполняющие их стохастическое моделирование по проприентарным алгоритмам. Таким образом оба этих варианта в нашем случае не работают. В такой ситуации можно использовать для генерации необходимых тестовых наборов данных открытые опубликованные алгоритмы (имеющиеся, например, в [4]). Мы пользовались сгенерированными таким образом матрицами и векторами следующих размерностей: $n = 10^3$, 10^4, 10^5 и 10^6; $k = 50$, 100, 140; $m = 1$, 2, 3.

При моделировании в нашей работе матрицы $\overset{\leftrightarrow}{W}$, $\overset{\leftrightarrow}{W}_s$ и $\overset{\leftrightarrow}{R}$ были взяты пропорциональные единичным.

4.1 Критерии валидации модели

Для проверки качества моделей (обычно здесь используют термин «validation») на практике используется ряд критериев. Приведём наиболее простые (и, одновременно, важные) из них:

- Величина невязок $\left\|\overset{\leftrightarrow}{B}\overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}\right\|^2$ и $\left\|\overset{\leftrightarrow}{B}_s\overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s\right\|^2$ для полученного решения $\overset{\leftarrow}{x}$. Они определяют среднюю точность репликации для обычных и стрессовых сценариев.

- Устойчивость. Как уже было описано выше, нам важно, чтобы при малых изменениях сценариев наши значения $\overset{\leftarrow}{x}$ (т.е. значения весов у инструментов в репликации) менялись не слишком сильно.

- Scatter Plot (диаграмма рассеивания) показывает распределение набора точек, соответствующих двум осям, на которых откладываются упорядоченные ряды экспериментальных (ось X) и модельных (ось Y) точек. По ней очень удобно следить за близостью двух величин, в нашем случае — теоретической и практической. Чем ближе диаграмма рассеяния к биссектрисе первого координатного угла, тем лучше согласие теории и эксперимента.

- QQ-plot (квантиль-квантиль) аналогично покажет, насколько наше распределение близко к нормальному. Если наблюдаемые значения попадают на биссектрису первого координатного угла, то теоретическое распределение хорошо подходит к наблюдаемым данным.

- R^2 — коэффициент детерминации. Это доля дисперсии зависимой переменной, объясняемая рассматриваемой моделью зависимости, то есть объясняющими переменными. Чем ближе эта величина к 1, тем точнее наша теория описывает эксперимент.

- Out of Sample R^2 (коэффициент детерминации вне выборки). Оценка коэффициента детерминации R^2 данной выборки (sample) по параметрам модели, найденным по другой выборке (out of sample). Показывает насколько устойчивы результаты теории к добавлению новых экспериментальных данных.

4.2 Реализация метода Лагранжа, мягких граничных условий и метода регуляризации.

В приведенной таблице 4.1 сравниваются результаты работы различных методов выполненные для нескольких реализаций, каждая из которых содержит 10^3 сценариев. В качестве критерия используется величины невязок для обычных $\mathcal{R} = \min \| \overset{\leftrightarrow}{B}\overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d} \|^2$ и стрессовых $\mathcal{R}_s = \min \| \overset{\leftrightarrow}{B}_s\overset{\leftarrow}{x} - \overset{\leftarrow}{d}_s \|^2$ сценариев, полученные каждым методов.

Таблица 4.1: Сравнение невязок в методах Лагранжа, мягких граничных условий и метода регуляризации. Здесь $\mathcal{R}^{\mathrm{Lag}}$ — ошибка репликации основных сценариев при использовании метода Лагранжа, $\mathcal{R}^{\mathrm{SB}}$ — аналогичная ошибка при использовании метода мягких граничных условий, $\mathcal{R}^{\mathrm{SBR}}$ — предыдущее при дополнительном использовании регуляризации. Величины $\mathcal{R}_s^{\mathrm{Lag}}$, $\mathcal{R}_s^{\mathrm{SB}}$ и $\mathcal{R}_s^{\mathrm{SBR}}$ — соответствующие средние ошибки репликации в стрессовых сценариях. Все значения приведены в евро.

Номер реализации	$\mathcal{R}^{\mathrm{Lag}}$	$\mathcal{R}^{\mathrm{SB}}$	$\mathcal{R}^{\mathrm{SBR}}$	$\mathcal{R}_s^{\mathrm{Lag}}$	$\mathcal{R}_s^{\mathrm{SB}}$	$\mathcal{R}_s^{\mathrm{SBR}}$
1	1.2560	0.9190	0.9245	0.0000	0.0090	0.0095
2	2.2173	0.8122	0.8119	0.0000	0.0079	0.0171
3	1.8379	1.0433	1.0457	0.0000	0.0167	0.0261
4	1.4707	0.8581	0.8621	0.0000	0.0032	0.0061
5	6.1043	0.7941	0.7944	0.0000	0.0191	0.0206

Как мы видим, когда используются мягкие граничных условия, т. е. мы разрешаем репликации стрессовых сценариев быть «не совсем идеальной» (соответствующие отклонения, имеют обычно порядок долей евроцента, или в худшем случае — единиц цента), нам удается существенно улучшить точность репликации по сравнению с абсолютно жесткими граничными условиями.

4.2.1 Контроль устойчивости решений.

Рис. 4.1 демонстрирует стабилизацию компонент вектора $\overset{\leftarrow}{x}$ при увеличении параметра регуляризации γ. Для графика выбрано значение размерности вектора $\overset{\leftarrow}{x}$ равное 12, что существенно меньше обычных значений $k \sim 100$. Видно, что даже в этом случае сравнительно малой размерности рост параметра регуляризации существенно меняет значения компонент и их устойчивость. Мы намеренно не приводим графика, соответствующего отсутствию регуляризации $\gamma = 0$, поскольку в этом случае изменение значений компонент $\overset{\leftarrow}{x}$ от реализации к реализации меняется в тысячи раз.

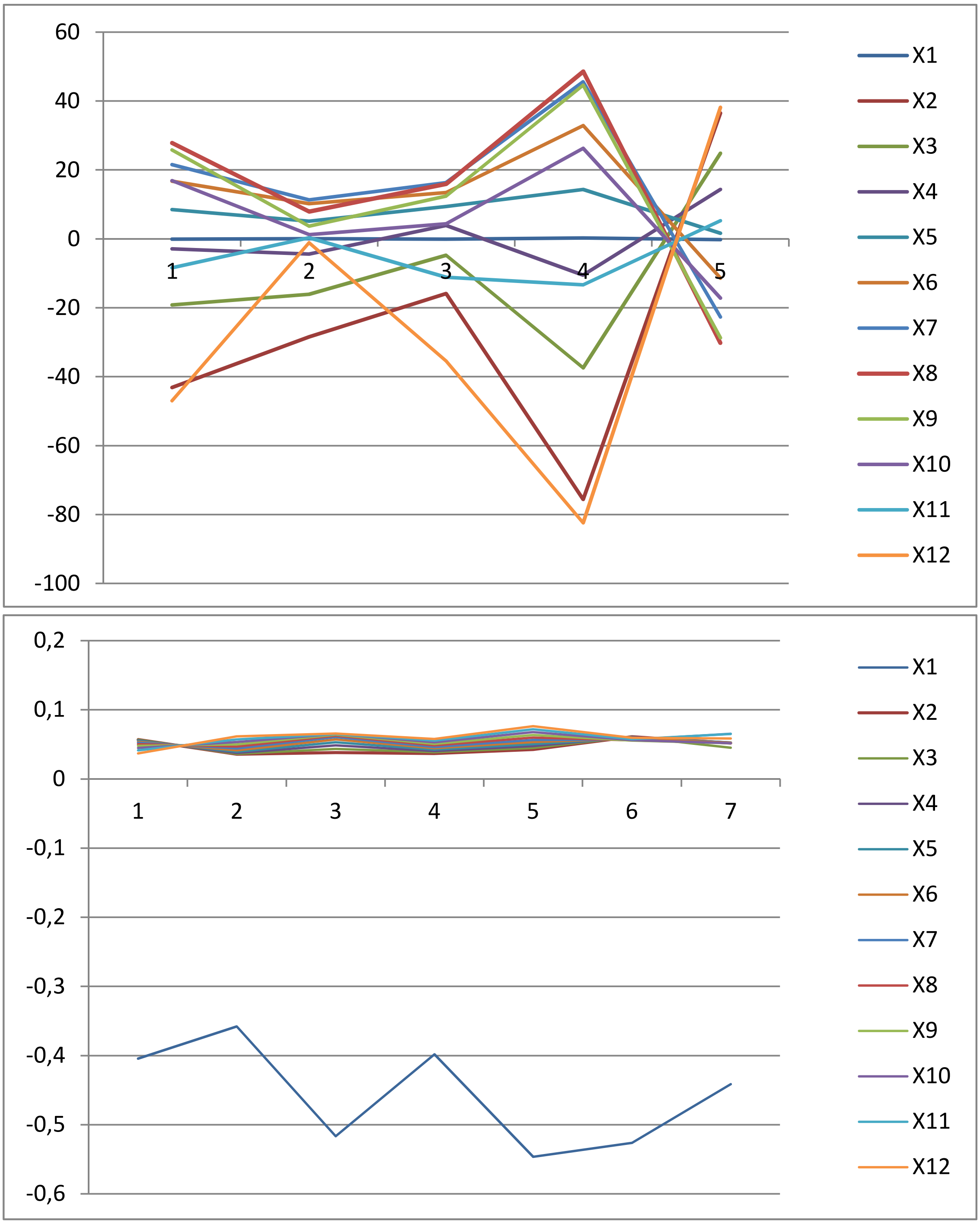

Рис. 4.1: Влияние параметра регуляризации γ на значение и устойчивость компонент вектора $\overleftarrow{x}$ при различных реализациях симуляций Монте-Карло с объемом выборки $N = 10^3$. На первом графике $\gamma = 0.01$ (приведено 5 реализаций), а на втором $\gamma = 100$ (приведено 7 реализаций). По оси OX отложены номера реализаций, по оси OY — значения компонент вектора $\overleftarrow{x}$.

Обращают на себя внимание два момента:

- Соседние компоненты $\overleftarrow{x}$ в «слабо-регуляризованном» случае имеют тенденцию к чередованию знаков (т.е. к компенсации друг друга). Это свойство признается с экономической точки зрения весьма нежелательным, поскольку означает «игру» против друг друга родственных инструментов портфеля. А в «сильно-регуляризованном» случае такого чередования нет.

- Абсолютные величины значений компонент в слабо-регуляризованном случае существенно больше, чем соответствующие значения в сильно-регуляризованном случае. Кроме того, в сильно-регуляризованном случае устойчивость отдельных компонент вектора $\overleftarrow{x}$ кардинально лучше, чем в слабо-регуляризованном.

4.3 Результаты имплементации метода оптимального прореживания нейронных сетей.

В таблице 4.2 приведены результаты вычисления коэффициента детерминации и числа обусловленности COND в задаче репликации со 140 инструментами. Сравнение производится как внутри выборки, так и вне выборки. Как мы видим, после имплементации алгоритма даже в самом

Таблица 4.2: Метод Лагранжа vs метод оптимального прореживания нейронных сетей.

	Исходный портфель (метод Лагранжа)	Редуцированный портфель (pruning neural networks)
Число инструментов k	140	41
R^2	0.9425	0.9373
COND	10^{20}	10^5
R^2 вне выборки	0.9143	0.9215

простом виде, удалось снизить количество финансовых инструментов в 3.5 раза, при этом точность репликации внутри выборки снизилась очень незначительно (менее чем на 0,6%), а точность репликации вне выборки даже возросла (на 0,8%).

4.4 Уменьшение систематических ошибок репликации. Метод нелинейного преобразования.

При репликации часто возникают систематические ошибки (в данном случае они хорошо видны на краях первых графиков Scatter Plot и Q-Q Plot Рисунка 4.2). Для борьбы с ними мы использовали нелинейное пре-

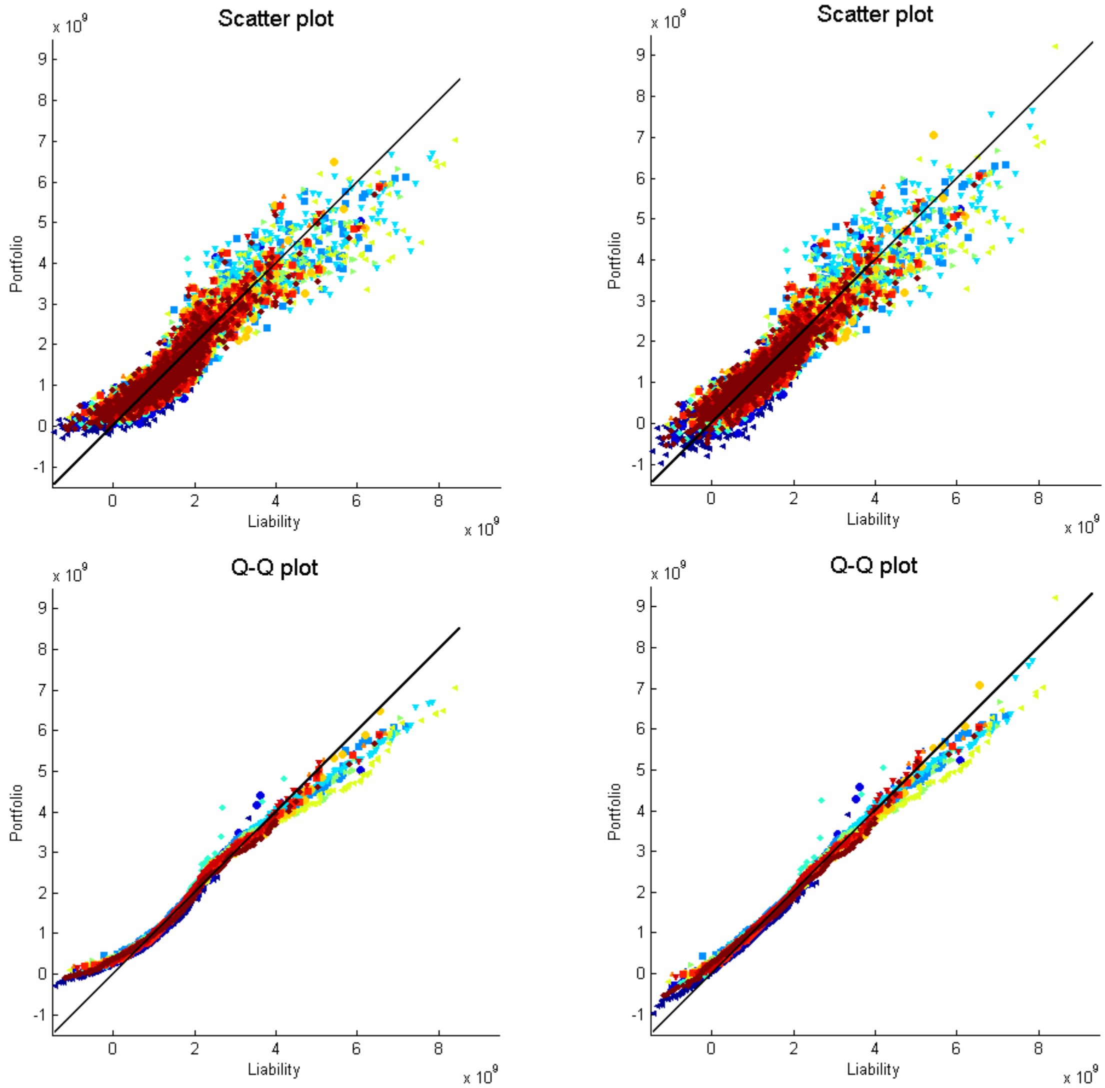

Рис. 4.2: Реализация метода нелинейного преобразования портфеля, до применения и после применения.

образования портфеля. Он заключается в том, что к каждой компоненте в формуле реплицированного портфеля

$$\overleftarrow{d}_{\mathrm{repl}} = \overleftrightarrow{B}\,\overleftarrow{x} \tag{4.1}$$

дополнительно применяется полиномиальное преобразование (мы ограничивались полиномом третьего порядка), что дает улучшенный вектор репликации $\overleftarrow{d}_{\mathrm{imp}}$ с компонентами

$$(d_{\mathrm{imp}})_k = P\left((\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x})_k\right). \tag{4.2}$$

С экономической точки зрения формулу (4.2) более удобно записать в виде

$$(d_{\mathrm{imp}})_k = c_k(\overleftarrow{x})(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x})_k. \tag{4.3}$$

где множитель

$$c_k(\overleftarrow{x}) = P\left((\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x})_k\right)/(\overleftrightarrow{B}\overleftarrow{x})_k \tag{4.4}$$

можно рассматривать как процентный нелинейный корректор к обычной линейной репликации.

Как мы видим, использованный метод существенно уменьшает систематические ошибки на концах графиков, заметно улучшая графики Scatter Plot и QQ-plot, приближая их к биссектрисе первого координатного угла.

Существенным здесь является небольшое число дополнительных параметров, определяющих полином P (для кубического случая равное 4), много меньше числа исходных параметров репликации $k \sim 100$, в то время как улучшение Scatter Plot и QQ-plot производимое этим небольшим числом параметров кардинальное.

Благодарности

Выражаю особую благодарность своему научному руководителю — Валькову Алексею Юрьевичу, за то, что он терпеливо объяснял все непонятные экономические, и математические тонкости. Помогал с оформлением диплома, а также всегда был готов встретиться, если что-либо, связанное с дипломной работой, оказывалось непонятно.

Кроме того большое спасибо хочется сказать Комаровой Марине Владимировне и Налимову Михаилу Юрьевичу. Без их поддержки я скорее всего ушел бы с физического факультета ещё 3 года назад. Они привлекли меня к организации олимпиады школьников по физике и я всё же остался учиться, а обучение оказалось очень даже интересным.

Также спасибо всем, кто преподаёт и учится на кафедре статистической физики СПБГУ. Когда бы я здесь ни появлялся, всё равно, приходя на 4й этаж НИИФа на кафедру пропитываюсь очень домашними атмосферой и уютом.

Литература

[1] http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/solvency/index_en.htm — Информация о Solvency II.

[2] L. Dubrana — *A Formalized Hybrid Portfolio Replication Technique Applied to Participating Life Insurance Portfolios*, 2011 — Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1964464

[3] R. Dembo and D. Rosen — *The Practice of Portfolio Replication.* Annals of Operations Research, v.**85**, pp. 267–284, 1999.

[4] J. Abram — *Implementing and Testing Replicating Portfolios for Life Insurance Contracts.* Diploma Thesis, KTH Royal Institute of Technology, 2010.

[5] http://www.bis.org/bcbs/index.htm — Базельские документы.

[6] http://www.msci.com/ — Risk metric.

[7] В. В. Стрижов, Е. А. Крымова *Методы выбора регрессионных моделей* — ВЦ РАН, Москва, 2010.

[8] А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. *Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация.* — М.: Наука, 1983.

[9] C. Lawson, R. Hansen. *Solving Least Squares Problems*, Prentice–Hall, New York, 1974.

[10] А. Н. Горбань. *Обучение нейронных сетей* — М.: изд. СССР-США СП «Параграф», 1990.