

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Физический факультет
Кафедра статистической физики



АСИМПТОТИКИ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ И КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ В
ТЕОРИИ φ^3

Бакалаврская работа студента
дневного отделения

_____ **Калагова Георгия Алибековича**

Научный руководитель:

_____ д. ф.- м. н., проф. **Налимов М.Ю.**

Рецензент:

_____ к. ф.-м. н., доцент **Комарова М.В.**

Санкт-Петербург
2013

Содержание

Введение	3
1 Метод перевала в функциональных пространствах	
1.1 Основные положения липатовского подхода для теории φ^3	6
1.2 Вычисление флуктуационного интеграла	8
2 Асимптотики разложений констант ренормировки и критического индекса η	12
3 Пересуммирование асимптотических рядов	
3.1 Схемы пересуммирования	16
3.2 Результаты пересуммирования разложения для индекса η	18
Заключение	20
Приложение 1	21
Приложение 2	23
Список литературы	24

Введение

Представленная работа посвящена применению инстантонного анализа к математическим проблемам теории критических явлений на примере модели ϕ^3 , соответствующий гамильтониан теории (базовое действие)¹

$$\mathcal{H}(\phi, g) = \frac{1}{2} \partial_i \phi(\mathbf{x}) \partial_i \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} m^2 \phi(\mathbf{x})^2 + \frac{g}{3!} \phi(\mathbf{x})^3, \quad (1)$$

здесь m^2 - параметр, называемый массой, ϕ - скалярное вещественное поле, g - константа связи (заряд), \mathbf{x} - вектор в D - мерном пространстве, интегрирования по координатам здесь и в аналогичных формулах в дальнейшем подразумеваются. Рассматривается случай, когда $m^2 = 0$, поэтому модель и поля называются безмассовыми. В данной модели исследуется асимптотика высоких порядков полевых разложений констант ренормировки и критических индексов.

Интерес к теории ϕ^3 возобновился после обнаружения факта [1], что соответствующий гамильтониан $\mathcal{H}(\phi, g)$ с чисто мнимой константой связи ($\Re g = 0$) оказывается коммутирующим с оператором \mathcal{PT} (пространственно-временное отражение). Это приводит к существованию вещественных собственных значений, несмотря на неэрмитовость \mathcal{H} . В подобных \mathcal{PT} - симметричных системах были обнаружены наблюдаемые фазовые переходы [2] [3]. Различные матричные обобщения рассматриваемой модели применяются к изучению фазовых переходов в жидких кристаллах, перколяции и т.д. [4].

Предмет теории критических явлений составляют исследования поведения различных систем в окрестности точки (линии) фазового перехода. Ключевым звеном этой теории является понятие универсальности, означающее одинаковость критического поведения систем различной природы. Второй важный пункт этой теории – гипотеза критического скейлинга (подобия). Смысл гипотезы заключается в существовании определенных критических размерностей для всех физических величин. Через эти размерности и выражаются все критические индексы, описывающие поведение термодинамических величин при подходе к критической точке.

Как оказалось, для большинства реальных систем точное вычисление критических показателей не представляется возможным. Несмотря на то, что приближенные теории (Ван-дер-ваальсова, Ландау) качественно описывали картину явлений, они достаточно грубо предсказывали значения этих параметров. Кроме того, подобные теории пренебрегали сильными флуктуациями параметра порядка вблизи точки перехода. Кеннет Вильсон 1970-х. предложил новый подход для вычисления критических размерностей, основанный на технике ренормализационной группы (РГ). С тех пор этот подход был развит, формализован и, как оказалось, имеет непосредственное отношение к методам, используемым в квантовой теории поля (КТП). Сейчас наиболее адекватным языком теории критического поведения является именно аппарат КТП: фейнмановская диаграммная техника, интегралы по траекториям, РГ и т.д.

В вильсоновском подходе критические размерности (и, как следствие, индексы) строятся в форме ϵ - разложения, где параметр ϵ - отклонение размерности пространства от логарифмической размерности теории ($\epsilon = 6 - D$ для модели ϕ^3). В настоящее

¹Название «действие» заимствовано из КТП. В дальнейшем всюду будем говорить «действие» и $\mathcal{H}(\phi, g) \equiv S_B(\phi, g)$

время принято считать представительными результатами вычисления критических индексов те, которые получены в результате пересуммирования отрезка ряда регулярного ϵ – разложения. В работе [5] для теории ϕ^3 был проведен 4 – петлевой расчет критических индексов в рамках ϵ – разложения. Эти ряды - асимптотические, поэтому для получения численных значений индексов в реальных размерностях пространства используются разнообразные схемы пересуммирования, такие как методы Бореля - Лероя, Паде - аппроксимант и конформных отображений [6]. Для этого необходима информация об асимптотике старших порядков квантово-полевой теории возмущений в модели. Пересуммирование трехпетлевых результатов для данной модели без знания асимптотики высоких порядков разложений ранее было проведено в работе [7].

Исследование асимптотик старших порядков рядов теории возмущений основывается на предложенном в [8] методе перевала в функциональном интеграле (инстантонный анализ). Результаты [8] применены в [9] для исследования разложений критических индексов, получаемых методом ренормализационной группы (РГ). С дальнейшим развитием анализа асимптотик старших порядков в разнообразных моделях можно ознакомиться в [6]. В классической работе [8] методом инстантонного анализа были определены асимптотики старших порядков разложений в скалярных теориях со взаимодействием типа ϕ^{2n} , теория ϕ^3 в их число не попала. Несмотря на то, что инстантонный анализ в рассматриваемой модели в общих чертах повторяет классический анализ [8], имеются специфические для данной модели особенности, связанные с ренормировкой члена взаимодействия, на что и будет обращено особое внимание ниже.

Согласно [8], асимптотика N – того коэффициента стандартного теоретико – полевого разложения по константе взаимодействия g произвольной величины G (выражаемой через функции Грина) имеет вид

$$G^{(N)} = N!(-a)^N N^{b_G} c_G \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right). \quad (2)$$

Здесь и далее $G^{(N)}$ обозначает коэффициент при g^N разложения величины G в ряд по g ; a, b_G, c_G - некоторые числовые параметры, связанные с величиной G .

Напомним основные моменты, касающиеся ренормировки теории. Стандартным методом расчета моделей со взаимодействием в КТП является диаграммная техника, представляющая из себя не что иное, как теорию возмущений (ТВ), построенную по константе связи. Каждому члену в ТВ соответствует совокупность графических изображений (граф, диаграмма), причем это соответствие взаимно – однозначно. Каждый такой граф строится из элементов свободной теории. Таким образом, можно сосчитать вклад любого порядка ТВ в интересующую нас величину. Однако оказывается, что некоторые диаграммы дают бесконечный вклад. Это может быть связано, например, с расходимостями графа на малых расстояниях (на больших импульсах – УФ расходимости). Для борьбы с этим используют различные приемы регуляризации: ограничивают область интегрирования по импульсам - Λ – обрезание или сдвигают размерность пространства – размерная регуляризация. После этого расходящиеся ранее выражения становятся конечными, но зависящими от параметров регуляризации, при снятии регуляризации выражения вновь обращаются в бесконечность. Физически наблюдаемые величины не должны зависеть от этих

регуляризаторов, поэтому следующий шаг заключается в переопределении исходных (затравочных) параметров: $\phi \rightarrow Z_\phi \phi$ и $g \rightarrow Z_g g$. Константы ренормировки Z_ϕ и Z_g строятся в виде ряда по g и подбираются так, чтобы сократить в каждом порядке по g регуляризованные выражения, таким образом, они являются функциями затравочного заряда и параметра регуляризации. Такое переопределение затравочных параметров равносильно добавлению к базовому действию так называемых контрчленов, поглощающих расходимости. В нашей работе всюду рассматривается размерная регуляризация с параметром ϵ , и все расходимости графов имеют структуру полюса по ϵ . Константы ренормировки при этом имеют вид (MS – схема)

$$Z_j = Z_j(g, \epsilon) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} g^N \sum_{k=1}^N \frac{c_{Nk}}{\epsilon^k}, \quad j = \phi, g.$$

В MS – схеме РГ – функции (коэффициенты уравнения РГ) связаны известным образом [6, 11] с вычетами первого порядка по ϵ констант ренормировки теории:

$$\gamma_j(g) = -\frac{g}{2} \partial_g \{Z_j\}, \quad \beta(g) = -g \left(\frac{\epsilon}{2} + \gamma_g \right), \quad (3)$$

здесь и далее $\{Z\}$ – вычет в простом полюсе по ϵ величины Z . Мы ограничимся лишь вычислением асимптотики индекса $\eta = 2\gamma_\phi(g_*)$, где g_* – нетривиальное решение уравнения $\beta(g_*) = 0$. Индекс ν , связанный с критическим поведением радиуса корреляций, может быть получен в безмассовой теории ренормировкой соответствующего составного оператора, однако эти вычисления не приводят ни к каким принципиально интересным результатам. Из (3) видно, что вся необходимая информация о критических индексах содержится в вычете в простом полюсе величин Z_j .

Теперь можно окончательно сформулировать задачи, решенные в этой работе:

1. Вычислена асимптотика высоких порядков вычета в простом полюсе по ϵ констант ренормировки в MS – схеме для теории ϕ^3 .
2. Вычислена асимптотика ϵ – разложения критического индекса η .
3. Проведено борелевское пересуммирование 4 – петлевого разложения индекса η с учетом структуры полученной асимптотики.

Мы следуем методу вычисления асимптотик старших порядков вычетов констант ренормировки, изложенном в [10]. Сами константы ренормировки могут быть вычислены известным способом [11]: вклад в Z данной диаграммы определяется расходимостью, оставшейся после применения к ней R' операции, вычитающей все расходимости подграфов. Иначе говоря, для определения вклада в константы ренормировки совокупности диаграмм некоторого порядка следует рассмотреть частично ренормированную теорию, в которой все константы ренормировки учтены с точностью на один порядок меньше. В нашей работе рассматриваются частично ренормированные функции Грина, в которых осуществлены вычитания на расходимости однопетлевых подграфов (следующие порядки разложения констант ренормировки признаны несущественными вследствие малости по $1/N$).

1 Метод перевала в функциональных пространствах

1.1 Основные положения липатовского подхода для теории ϕ^3

Ренормированное действие теории определяется как

$$S_R(\phi, g) = \frac{1}{2} Z_\phi^2 \partial_l \phi(\mathbf{x}) \partial_l \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{3!} Z_\phi^3 Z_g g \mu^{\epsilon/2} \phi(\mathbf{x})^3, \quad (4)$$

$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^D$, $D = 6 - \epsilon$, μ - ренормировочная масса. Наиболее интересным объектом с физической точки зрения являются корреляционные функции (функции Грина). В формализме континуального интеграла корреляционные функции k полей имеют вид

$$G_k(g) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(\mathbf{x}_1) \dots \phi(\mathbf{x}_k) e^{-S_R(\phi, g)}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_R(\phi, g)}} \quad (5)$$

Смысл этой формулы довольно очевиден: производится усреднение по ансамблю полей с равновесной функцией распределения $\sim e^{-S_R(\phi, g)}$. Вычисление коэффициентов $G_k^{(N)}$ разложения k -хвостой функции Грина $G_k(g)$ по константе связи g в высоких порядках ($N \rightarrow \infty$) осуществляется на основе интегрального представления [8]:

$$G_k^{(N)} = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dg}{(-g)^{N+1}} G_k(g) \quad (6)$$

(γ - замкнутый контур в комплексной плоскости g , охватывающий ноль) с последующим применением метода перевала. Дальнейшие вычисления, относящиеся к этому разделу, более подробно проведены в Приложении 1. Сейчас остановимся лишь на идеологии.

Подставим (5) в формулу Коши (6) и заменим $(-g)^{-N} \rightarrow e^{-N \ln(-g)}$, тогда подынтегральное выражение окажется пропорциональным $e^{-S_R(\phi, g) - N \ln(-g)}$. После введения новых переменных $\phi = \sqrt{N} \bar{\phi}$, $g = \bar{g} \mu^{-\epsilon/2} / \sqrt{N}$ оно станет $\sim N^{N/2} e^{-NJ(\bar{\phi}, \bar{g} \mu^{-\epsilon/2})}$, где функционал

$$J(\bar{\phi}, \bar{g} \mu^{-\epsilon/2}) \equiv S_R(\bar{\phi}, \bar{g} \mu^{-\epsilon/2}) + \ln(-\bar{g} \mu^{-\epsilon/2}).$$

Согласно методу перевала необходимо найти экстремали функционала J . Как обычно, они даются решениями уравнений

$$\frac{\delta J(\bar{\phi}, \bar{g} \mu^{-\epsilon/2})}{\delta \bar{\phi}} = 0, \quad \frac{\partial J(\bar{\phi}, \bar{g} \mu^{-\epsilon/2})}{\partial \bar{g}} = 0. \quad (7)$$

Для того, чтобы проследить влияние ренормировки теории на реализацию метода перевала, представим ренормированное действие в виде суммы базового (S_B) и контрчленов ($C.T.$)

$$S_R(\bar{\phi}, \bar{g} \mu^{-\epsilon/2}) = S_B(\bar{\phi}, \bar{g}) + C.T. \quad (8)$$

уравнения (7) не содержат N , а значит $\bar{g} = \mathcal{O}(1) \Rightarrow g = \mathcal{O}(1/\sqrt{N})$. Как отмечалось выше, контрчлены имеют структуру полюсов по ϵ , а соответствующими вычетами являются полиномы по g . В модели ϕ^3 в простом полюсе полином начинается со степени g^2 , поэтому можно написать

$$C.T. = \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{\epsilon}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N\epsilon}\right),$$

поэтому при $N\epsilon \gg 1$ контрчлены не существенны при вычислении точек перевала, так же, как и в [8, 9]. Окончательно уравнения на экстремали (вариационные уравнения) примут вид

$$\frac{\delta S_B(\bar{\phi}, \bar{g})}{\delta \bar{\phi}} = 0, \quad \frac{\partial(S_B(\bar{\phi}, \bar{g}) + \ln(-\bar{g}))}{\partial \bar{g}} = 0 \quad (9)$$

или с учетом явного вида S_B (1)

$$-\Delta \bar{\phi} + \frac{1}{2} \bar{g} \bar{\phi}^2 = 0, \quad \frac{\bar{g}}{3!} \int d\mathbf{x} \bar{\phi}(\mathbf{x})^3 = -1. \quad (10)$$

При $D = 6$ сферически – симметричные убывающие решения этой системы представляют из себя семи-параметрическое семейство инстантонов², которые имеют вид:

$$\bar{\phi}_c(\mathbf{x}) = \pm \sqrt{\frac{15}{2\pi^3}} \frac{y^2}{(y^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2)^2}, \quad -\bar{g}_c = \pm 48 \sqrt{\frac{2\pi^3}{15}} \quad (11)$$

и зависят от \mathbf{x}_0, y – произвольных параметров, отражающих трансляционную и дилатационную инвариантности теории. Поправки по ϵ к инстантонам дают несущественный вклад в асимптотику гриновских функций по сравнению с $N\epsilon$. Что касается нормировки функций Грина, то её рассматриваем как предэкспоненту в функциональном интеграле (5) и берём её значение непосредственно в точке перевала \bar{g}_c .

Инвариантность является следствием того, что действие обладает симметрией относительно непрерывной группы преобразований определяемых неким оператором \hat{A} . В нашем случае \hat{A} действует на функции как $\hat{A}\phi(\mathbf{x}) = \phi(y\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$, причем если $\delta J(\phi) = 0$, то и $\delta J(\hat{A}\phi) = 0$. В силу непрерывности можно построить оператор \hat{A}_α сколь угодно близкий к единичному, т.е. $\hat{A}_\alpha = 1 + \alpha \hat{D}$. Отсюда мгновенно следует, что $\hat{D}\bar{\phi}_c$ принадлежит ядру оператора $\delta^2 J(\bar{\phi}_c)$. Таким образом, собственному вектору $\hat{D}\bar{\phi}_c$ соответствует нулевое собственное число, что приводит к обращению в нуль детерминанта оператора $\delta^2 J(\bar{\phi})$. Этот факт, казалось бы, разрушает всё последующее применение такого асимптотического подхода, поскольку метод перевала, по сути, есть гауссово приближение с квадратичной формой $\varphi \delta^2 J(\bar{\phi}) \varphi$. Хорошо известно, что такие гауссовы интегралы $\sim 1/\sqrt{\det \delta^2 J(\bar{\phi})}$. Поэтому обращение в нуль детерминанта квадратичной формы приводит к бесконечным результатам. Корректно справиться с проблемой позволяет трюк Фаддеева – Попова, первоначально возникший при квантовании калибровочных полей, где была похожая ситуация. Технически он заключается во введении под функциональный интеграл (5) для функции Грина представления единицы в виде интегралов по параметрам \mathbf{x}_0, y от δ – функций, фиксирующих значения этих параметров для каждого ϕ :

$$1 = \left(- \int g \frac{\phi^3}{3!} d\mathbf{x} \right)^7 \int d(\ln y^2) \int d\mathbf{x}_0 \delta \left(-g \int d\mathbf{x} \frac{\phi^3}{3!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i \right) \delta \left(-g \int d\mathbf{x} \frac{\phi^3}{3!} \ln \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{y^2} \right) \right). \quad (12)$$

²Инстантоны - локализованные в пространстве решения классических «уравнений движения»

Растяжение координат и поля

$$\mathbf{x} \rightarrow y\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \quad \phi(y\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) \rightarrow y^{-2+\epsilon/2}\phi(\mathbf{x}), \quad (13)$$

изменение порядков интегрирования по параметрам $\int dy d^D x_0$ и переменным $\oint dg \int \mathcal{D}\phi$ и последующее применение метода перевала по g и ϕ приводят к окончательному выражению для асимптотик корреляционных функций.

При растяжении поля и координат (13) параметр μ заменятся на $\mu \rightarrow \mu y$. В результате выражение для асимптотики больших N коэффициента разложения по g ненормированной функции Грина принимает вид

$$G_k^{(N)}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k) = 2(-1)^N D_{et} N^{N/2} N^{k/2+3} \int_0^\infty e^{-NS_R(\bar{\phi}_c, \bar{g}_c(\mu y)^{-\epsilon/2}) - N \ln(|\bar{g}_c|)} \times \quad (14)$$

$$\times \int d^D \mathbf{x}_0 \frac{d(y^2)}{y^{8-\epsilon}} \frac{(\mu y)^{N\epsilon}}{y^{k(2-\epsilon/2)}} \bar{\phi}_c\left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{y}\right) \dots \bar{\phi}_c\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0}{y}\right)$$

для четных N при четных k и для нечетных N при нечетных k , $G_k^{(N)} = 0$ в остальных случаях. Под D_{et} в (14) подразумевается гауссовый вклад от второй вариации функционала $S + \ln(-g)$ в перевальной точке. Итак, установлено, что для теории с действием (1) ряды теории возмущений, построенные по константе связи g , имеют нулевой радиус сходимости.

1.2 Вычисление флуктуационного интеграла

Величина D_{et} связана с функциональным гауссовым интегрированием по небольшим отклонениям (флуктуациям) вокруг инстантонов, как отмечалось в Приложении 1, она имеет вид

$$D_{et} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathcal{Z}\left(\frac{\bar{g}_c}{\sqrt{N}}\right)} \int \mathcal{D}(\delta\phi) e^{-S_2(\delta\phi)} \delta\left(|\bar{g}_c| \int d\mathbf{x} \frac{\bar{\phi}_c^2 \delta\phi}{2} \mathbf{x}_i\right) \delta\left(|\bar{g}_c| \int d\mathbf{x} \frac{\bar{\phi}_c^2 \delta\phi}{2} \ln |\mathbf{x}|^2\right), \quad (15)$$

здесь

$$\mathcal{Z}\left(\frac{\bar{g}_c}{\sqrt{N}}\right) = \int \mathcal{D}(\delta\phi) e^{-\frac{(\partial\delta\phi)^2}{2} - \frac{\bar{g}_c}{\sqrt{N}} \frac{(\delta\phi)^3}{3!}},$$

$$S_2(\delta\phi) \equiv \frac{(\partial\delta\phi)^2}{2} + \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c}{2} (\delta\phi)^2 + \frac{1}{2} \left[|\bar{g}_c| \int d\mathbf{x} \frac{\bar{\phi}_c^2 \delta\phi}{2} \right]^2,$$

членом в показателе экспоненты $\mathcal{Z}(\bar{g}_c/\sqrt{N})$, зависящим от N , можно пренебречь в дальнейших вычислениях, поскольку в (14) он дает вклад лишь порядка $1/N$. После такого приближения D_{et} нормируется на свободную теорию и не зависит от N .

Для вычисления флуктуационного интеграла по $\delta\phi$ мы применили метод [8], воспользовавшись заменой переменной $\delta\phi = 2Y(z)/(1+x^2)^2$, где z -координаты на единичной сфере в семимерном пространстве: $z_i = x_i/(1+x^2)$, $z_0 = (x^2-1)/(x^2+1)$. Далее $Y(z)$ были разложены в базисе сферических функций $y_m(z)$: $Y(z) = \sum_m C_m y_m(z)$. Это

позволяет перейти от функционального интегрирования к обычному многомерному, т.е. $\int \mathcal{D}Y(z) \rightarrow \int \prod_m dC_m$. В итоге

$$D_{et} \sim \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} N_m \ln \left(1 - \frac{12}{\lambda_m + 6} \right) \right), \quad (16)$$

здесь $\lambda_m = m(m+5)$ – собственные числа оператора Лапласа на единичной сфере, $N_m = (m+4)!(2m+5)/(m!5!)$ – кратность собственных чисел. Видно, что ряд в аргументе экспоненты расходится, поскольку общий член ряда $\sim m^3$ при $m \rightarrow \infty$. Для выяснения причин этой расходимости рассмотрим флуктуационный интеграл в старых координатах $\delta\phi$. Заметим, что дельта – функции, введенные для борьбы с нулевыми модами, снимают интегрирование по некоторым C_m и не влияют на возникшую расходимость в (16), более того, член $1/2 [|\bar{g}_c| \int d\mathbf{x} \bar{\phi}_c^2 \delta\phi/2]^2$ в S_2 после перехода к сферическим функциям дает константный вклад, который сокращается аналогичным вкладом в нормировке. Таким образом, причины УФ расходимости ряда содержатся в квадратичной форме

$$\frac{(\partial\delta\phi)^2}{2} + \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c}{2} (\delta\phi)^2.$$

Введем величину ρ и будем вычислять континуальный интеграл

$$e^W = \frac{\int \mathcal{D}(\delta\phi) e^{-\delta\phi(-\frac{\Delta}{2} + \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c}{2} \rho) \delta\phi}}{\int \mathcal{D}(\delta\phi) e^{-\delta\phi(-\frac{\Delta}{2}) \delta\phi}} \quad (17)$$

с помощью теории возмущения по параметру ρ

$$W = -W^{(1)}\rho + W^{(2)}\rho^2 - W^{(3)}\rho^3 + \dots \quad (18)$$

В первом порядке имеем

$$W^{(1)} = \int d\mathbf{x} \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c(\mathbf{x})}{2} \Delta^0(0),$$

$\Delta^0(0)$ – функция Грина свободной теории в координатном представлении (затравочный пропагатор). В импульсном представлении затравочный пропагатор для безмассовой свободной теории имеет вид $\Pi(p) = 1/p^2$. Сопоставим ему сплошную линию, член $\bar{g}_c \bar{\phi}_c(\mathbf{x})/2$ обозначим волнистой линией с точкой. В таких графических изображениях первые три коэффициента $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}$ выглядят следующим образом

$$\begin{array}{ccc} \text{---} \circ \text{---} & , & \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} & , & \text{---} \triangle \text{---} \text{---} \\ & & & & \text{---} \end{array} \quad (19)$$

Видно, что диаграммы содержат УФ расходимости, это и является причиной расходимости исходного ряда (16). Величину W просто вычислить, если вновь воспользоваться разложением по сферическим функциям, в итоге получается

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} N_m \ln \left(1 - \frac{12\rho}{\lambda_m + 6} \right).$$

Откуда сразу следуют выражения для расходящихся диаграмм: для первой

$$W^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{6N_m}{m(m+5)+6},$$

для второй

$$W^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_m}{2} \left(\frac{12}{m(m+5)+6} \right)^2,$$

для третьей

$$W^{(3)} = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_m}{2} \left(\frac{12}{m(m+5)+6} \right)^3.$$

Таким образом, вычитая первые три члена из суммы (18) при $\rho = 1$, мы выделяем из ряда (16) лишь конечную часть. После вычисления вклада δ -функций в разложении единицы (12), флуктуационный интеграл приобретает вид

$$D_{et} \sim \frac{1}{2\pi^4} \left(\frac{12}{7} \right)^{\frac{7}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} N_m \ln \left(1 - \frac{12}{(m+3)(m+2)} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} N_m \left(\frac{12}{(m+3)(m+2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{12}{(m+3)(m+2)} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{12}{(m+3)(m+2)} \right)^3 \right) \right] \quad (20)$$

Здесь необходимо вспомнить о вкладах трех вычтенных диаграмм (19) (Приложение 2). Если первая из них строго равна нулю в схеме MS, то две остальных содержат расходящиеся части, сокращаемые вкладами контрчленов в ренормированное действие, и конечные вклады в флуктуационный интеграл.

Вторая диаграмма допускает аналитическое вычисление, но в данном тексте мы воспользовались формулой преобразования Фурье инстантона

$$\bar{\phi}_c(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{15}{2\pi^3}} \frac{y^2}{(y^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \varphi_c(\mathbf{p}) = 2\sqrt{30\pi^3} \frac{K_1(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|},$$

где $K_1(|\mathbf{p}|)$ – функция Макдональда первого порядка, и вычислили её численно. Конечный вклад этой диаграммы

$$d_2 = -0.9365 + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Отказ от приведения аналитического результата для этой диаграммы обусловлен тем, что третью диаграмму (19) нам не удалось сосчитать аналитически. Для повышения точности вычислений ее вклад без внешних хвостов был сосчитан и ренормирован в импульсном представлении, затем переведен в координатное. Далее мы домножили полученный результат на три φ_{st} в соответствующих точках, воспользовались фейнмановским представлением и вычислили интегралы по координатам. Оставшийся пяти – параметрический интеграл по фейнмановским параметрам был вычислен численно, в результате для конечной части этой диаграммы получено:

$$d_3 = -1.2713 + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Расходящиеся по ϵ части этих диаграмм (коэффициенты при $1/\epsilon$) равны

$$d_{2sing} = -\frac{3}{5}, \quad d_{3sing} = -\frac{6}{5}$$

Окончательно для флуктуационного интеграла получаем выражение:

$$D_{et} = \frac{1}{2\pi^4} \left(\frac{12}{7}\right)^{\frac{7}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} N_m \ln \left(1 - \frac{12}{(m+3)(m+2)} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} N_m \left(\frac{12}{(m+3)(m+2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{12}{(m+3)(m+2)} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{12}{(m+3)(m+2)} \right)^3 \right) + d_2 + d_3 \right]. \quad (21)$$

Перейдем в (14) к импульсному представлению и напомним

$$G_k^{(N)} = C_k^{(N)} D_{et} \int_0^{\infty} dy \chi_k(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k) y^{2k-7} (\mu y)^{N\epsilon/2} e^{-\alpha\epsilon N} e^{-(d_{2sing}+d_{3sing})(\mu^\epsilon-1)/\epsilon}, \quad (22)$$

$$\chi_k(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k) = \frac{y K_1(|\mathbf{p}_1|y)}{|\mathbf{p}_1|} \dots \frac{y K_1(|\mathbf{p}_k|y)}{|\mathbf{p}_k|}, \quad \left(\sum_{l=1}^k \mathbf{p}_l = 0 \right),$$

$$C_k^{(N)} = 2N^{N/2} N^{k/2+3} e^{-N/2} \left(\frac{\sqrt{15}}{48\sqrt{2\pi^3}} \right)^N (2\sqrt{30\pi^3})^k.$$

Здесь $e^{-\alpha\epsilon N}$ - добавка к варьируемому функционалу в перевальной точке (ϕ_c, g_c) , обусловленная сдвигом размерности пространства $6 \rightarrow 6 - \epsilon$ (аналогично [10]):

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(S_{6-\epsilon} \int dx x^{5-\epsilon} \left[-\frac{1}{2} \bar{\phi}_c (\partial_x^2 + \frac{5-\epsilon}{x} \partial_x) \bar{\phi}_c + \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c^3}{3!} \right] \right) \Big|_{\epsilon=0} = \\ -\frac{1}{4} \ln(\pi) + \frac{1}{4} \Psi(3) \quad (23)$$

(использовано $\int \ln(x^2) \bar{\phi}_c^3 d\mathbf{x} = 0$), Ψ - логарифмическая производная гамма-функции.

2 Асимптотики разложений констант ренормировки и критического индекса η

При вычислении асимптотик высоких порядков вычетов в простых полюсах констант ренормировки в схеме MS воспользуемся техникой, развитой в [10]. Сингулярные при малых y члены предэкспоненциального фактора в (22) будем рассматривать в виде отрезка ряда теории возмущений до порядка N включительно. Тогда в результате стацфазного вычисления для частично – ренормированной треххвостой функции Грина в N – том порядке имеем:

$$G_3^{(N)} \approx C_3^{(N)} D_{et} \int_0^\infty \frac{dy}{y} (\mu y)^{N\epsilon} \chi_3(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_3) e^{-\alpha N\epsilon/2} \sum_{j=0}^{N/3} \frac{1}{j!} \left[-(d_{2sing} + d_{3sing}) \frac{(\mu y)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right]^j. \quad (24)$$

После замены переменной

$$y \rightarrow \tilde{y} = y \exp(-2\alpha) \quad (25)$$

для (24) получаем

$$G_3^{(N)} \approx C_3^{(N)} D_{et} \int_0^\infty \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} (\mu \tilde{y})^{N\epsilon/2} \chi_3(\tilde{y} e^{2\alpha}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_3) \sum_{j=0}^{N/3} \frac{1}{j!} \left[-(d_{2sing} + d_{3sing}) \frac{(\mu \tilde{y} e^{2\alpha})^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right]^j. \quad (26)$$

Учитывая, что $\chi_3(\tilde{y} e^{2\alpha}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_3) \rightarrow 1$ при $\tilde{y} \rightarrow 0$ и экспоненциально спадает на больших \tilde{y} и очевидное соотношение

$$\frac{(\mu \tilde{y} e^{2\alpha})^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} = \frac{(\mu \tilde{y})^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} + (\mu \tilde{y})^{-\epsilon} \frac{(e^{2\alpha})^{-\epsilon} - 1}{\epsilon},$$

вычисляя интегралы по \tilde{y} интегрированием по частям, можно убедиться, что слагаемые (26), содержащие ненулевые степени $((\mu \tilde{y})^{-\epsilon} - 1)/\epsilon$, дают вклад только в старшие полюса по $N\epsilon$ и не влияют на первый полюс.

Положив $(\mu \tilde{y})^{-\epsilon} (e^{-2\alpha\epsilon} - 1)/\epsilon \approx -2\alpha$, получим для простого полюса ампутированной треххвостки

$$\frac{\{G_3^{(N)}\}_{amp}}{\epsilon} \approx C_3^{(N)} D_{et} \frac{2}{N\epsilon} e^{(d_{2sing} + d_{3sing})2\alpha}. \quad (27)$$

Для парной корреляционной функции ($k = 2$) выражение, аналогичное интегралу в (24), есть

$$\int_0^\infty dy \chi_2(y, \mathbf{p}) (\mu y)^{N\epsilon/2} y^{-3} \quad (28)$$

и имеет полюса первого и второго порядка по ϵ . После замены переменных $y \rightarrow y/|\mathbf{p}|$ несколько раз проинтегрируем по частям. В возникшем слагаемом типа

$$\int dy \ln y (\mu y)^{N\epsilon/2-1} K_1(y|\mathbf{p}|)$$

воспользуемся представлением $\ln y$ посредством $\partial_{(N\epsilon/2)} y^{N\epsilon/2}$ и выделим полюса первого и второго порядка по ϵ , тогда с учетом асимптотики в нуле функции Макдональда

$$K_1(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} + \frac{|\mathbf{p}| \ln |\mathbf{p}|}{2} - \frac{|\mathbf{p}|}{2} (\ln 2 + \Psi(1) + 1/2) + O(|\mathbf{p}|^3 \ln |\mathbf{p}|)$$

нетрудно получить для простого полюса ампутированной G_2

$$\frac{\{G_2^{(N)}\}_{amp}}{\epsilon} \approx C_2^{(N)} D_{et} e^{(d_{2sing} + d_{3sing})\alpha} \left[-\ln |\mathbf{p}| + \ln 2 + \Psi(1) + 1/2 + 2\alpha \right] \frac{2}{N\epsilon}. \quad (29)$$

Конечность ренормированных функций G_{2R} и G_{3R} позволяет вычислить асимптотики констант ренормировки Z_ϕ и Z_g , для чего нужно потребовать сокращение полюсов по ϵ в каждом порядке по заряду для этих функций. Факториальный рост по N коэффициентов разложений существенно упрощает исследование: при перемножении рядов в $N - m$ по g порядке следует учитывать только их начальные и конечные члены [12]. Пользуясь этим фактом и асимптотическим соотношением $Z_\phi^{(N)} \approx Z_g^{(N)}/N$, получим:

$$G_3^R = Z_\phi^3 \left(\text{---} \bigvee g Z_g + \dots + g^{(2N+1)} Z_g^{(2N+1)} G_2^{(2N+1)} \right), \quad (30)$$

сейчас удобнее ввести новую константу связи $u \equiv g^2/(64\pi^3)$, тогда

$$\{Z_u^{(N)}\}_{asympt} \approx -\{G_3^{(2N+1)}\}_{amp} (64\pi^3)^N \approx \frac{(64\pi^3)^N}{N} C_3^{(2N+1)} D_{et} e^{(d_{2sing} + d_{3sing})2\alpha}. \quad (31)$$

Здесь и далее $Z_i^{(j)}$ в окончательных выражениях обозначает коэффициент при u^j в выражении для Z_i . Ряд теории возмущений для парной функции Грина

$$G_2^R = Z_\phi^2 \left(\text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} g^2 Z_g^2 + \dots + g^N Z_g^N G_2^{(N)} \right) \quad (32)$$

позволяет найти константу ренормировки поля. Так как асимптотические поведения $Z_\phi^{(N)}$, $Z_u^{(N)}$ при больших N связаны соотношением $Z_\phi^{(N)} \sim Z_u^{(N-1)}$ (вследствие $G_3^{(2N-1)} \sim G_2^{(2N)}$), кроме первого и последнего членов ряда (32) в старшем по N порядке следует учесть вклад ренормированной диаграммы второго порядка по g . Учитывая (29, 31), получим

$$\{Z_\phi^{(N)}\}_{asympt} = -\frac{1}{2} \left(G_2^{(2N)} (64\pi^3)^N + 2\{Z_u^{(N-1)}\} \frac{1}{2} \left[\frac{3\Psi(1) + 3 \ln \pi - 6 \ln 2 - 8}{18} \right] \right) \quad (33)$$

Контроль за правильностью вычислений (29, 31) можно осуществить, проследив сокращение в старшем по N порядке членов, содержащих логарифм внешнего импульса $\ln |\mathbf{p}|$, которые появляются как при вычислении $\{G_2^{(N)}\}$, так и в конечной части однопетлевой диаграммы (32). Это сокращение и должно было произойти, поскольку вследствие общих положений теории ренормировок (теорема Боголюбова-Парасюка) все такие члены, содержащие ультрафиолетовые расходимости, не дают вклад в перенормированные функции Грина, а значит и в величины, выражающиеся через эти функции.

На основе полученных выражений представляет интерес выяснить, насколько точно асимптотики (31, 33) описывают реальное поведение коэффициентов $Z_g^{(N)}$ и $Z_\phi^{(N)}$. Выражения (31,33) можно преобразовать к стандартному виду (2) с параметрами $\{a_u = -5/12, b_u = 7/2, c_u = -0.106\}$ для Z_u и $\{a_\phi = -5/12, b_\phi = 5/2, c_\phi = -0.067\}$ для $Z_\phi(u)$. В табл.1 приведены для сравнения точные $\{Z^{(N)}\}_{exact}$ ³ и асимптотические $\{Z^{(N)}\}_{asympt}$ значения коэффициентов. Можно увидеть, что последний точно вычисленный вклад $\{Z^{(4)}\}_{exact}$ очень сильно отличается от соответствующего асимптотического значения, хотя и наблюдается монотонность в приближении $\{Z^{(N)}\}_{exact}$ к $\{Z^{(N)}\}_{asympt}$.

Табл.1: точно вычисленные члены разложения констант ренормировки $\{Z^{(N)}\}_{exact}$ и асимптотические значения членов разложения констант ренормировки (разложение ведется по переменной u) $\{Z^{(N)}\}_{asympt}$.

Z	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
$\{Z_u^{(N)}\}_{exact}$	- 0.250	- 0.434		
$\{Z_u^{(N)}\}_{asympt}$	- 0.040	- 0.401	- 2.101	- 9.652
$\{Z_\phi^{(N)}\}_{exact}$	- 0.833	- 0.015		
$\{Z_\phi^{(N)}\}_{asympt}$	- 0.026	- 0.127	- 0.443	- 1.528

Константы ренормировки ренормализационно инвариантны и, вообще говоря, факт их отклонения от асимптотических значений необъективен. Поэтому проведем аналогичное сравнение известных порядков ϵ – разложения и соответствующих асимптотических значений для критического индекса η .

Для получения интересующей нас асимптотики ϵ – разложения критического индекса $\eta = 2\gamma_\phi(u_*)$, перепишем исходные РГ – функции (3) через заряд u , тогда асимптотики коэффициентов разложения этих функций связаны с асимптотиками коэффициентов разложения вычетов констант ренормировки в простом полюсе соотношениями:

$$\gamma_i^{(N)}{}_{asympt} = -2N\{Z_i^{(N)}\}_{asympt}, \quad \beta_{asympt}^N = 2N\{Z_u^{(N-1)}\}_{asympt}$$

Положение фиксированной точки будем строить в виде ряда теории возмущений по параметру ϵ . Из представления $\beta(u) = -\epsilon u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \dots + \beta_N u^N$ определяем искомую точку: $u_* = \epsilon/\beta_2 - \epsilon^2 \beta_3/\beta_2^3 + \dots + u_{N*} \epsilon^N$, где

$$u_{N*} = -\frac{\beta_{N+1}}{\beta_2^{N+1}} \exp\left(-\frac{\beta_3 u_c}{2\beta_2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Наконец, используя асимптотику фиксированной точки и аномальной размерности $\gamma_\phi(u)$, получаем интересующее нас поведение ϵ – разложения индекса Фишера:

$$\eta_{asympt}^{(N)} = 4Z_\phi^{(1)} \frac{N\{Z_u^{(N)}\}_{asympt}}{\beta_2^{N+1}} \exp\left(-\frac{\beta_3 u_c}{2\beta_2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)\right), \quad (34)$$

³Значения констант Z для данной теории в MS схеме были любезно предоставлены нам Л.Ц.Аджемяном и М.В. Компанийцем.

здесь $u_c = \bar{g}_c^2/(64\pi^3) = 24/5$, $Z_\phi^{(1)} = -1/12$, $\beta_2 = -3/2$, $\beta_3 = -125/72$. Если записать асимптотику индекса, пользуясь структурой (2), то получатся следующие значения параметров:

$$a_\eta = 2/(u_c|\beta_u^{(2)}|) = \frac{5}{18}, \quad b_\eta = \frac{9}{2}, \quad c_\eta = -0.00058. \quad (35)$$

Сравнение асимптотических и точных значений членов разложения критического индекса приведено в таблице 2.

Табл.2: точно вычисленные члены ϵ разложения критического индекса $\eta_\epsilon^{(N)}$ и асимптотические значения $\eta_{asymp}^{(N)}$.

η	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
$\eta_\epsilon^{(N)}$	- 0.111	- 0.059	0.0436	- 0.081
$\eta_{asymp}^{(N)}$	0.0004	- 0.005	0.026	- 0.105

Ясно, что говорить о хорошем соответствии между точными значениями и асимптотической формулой при малых N не приходится. Здесь снова наблюдается монотонность в поведении коэффициентов, последние отличаются на 20%. Разумеется, для каких – то более точных и твердых выводов необходимо наличие еще нескольких следующих членов ϵ – разложения либо учет поправочного члена порядка $1/N$ к асимптотической формуле (34).

3 Пересуммирование асимптотических рядов

3.1 Схемы пересуммирования

Значения индекса η , полученные прямым суммированием ϵ – разложения для $\epsilon = 3$, суть $\eta^{(1)} = -0.333$, здесь берется лишь первый член; $\eta^{(1+2)} = -0.8625$, учитываются первые два; $\eta^{(1+2+3)} = 0.315$ для первых трех; $\eta^{(1+2+3+4)} = -6.246$ соответствует учету всех 4 членов разложения. Понятно, что прямое суммирование все большего числа первых членов ϵ – разложения не имеет смысла, по причине того, что каждый следующий член ряда больше, чем предыдущий. Поскольку ряд не сходится, такая процедура не может привести к адекватным результатам.

Расходящиеся ряды известны уже давно, и существует множество способов, которые позволяют придать им смысл. Хорошо известны методы (обобщенного) суммирования расходящихся рядов: метод Пуассона – Абеля, метод цезаровских средних, метод Бореля и т.д. [13]. В применении к сходящимся рядам эти методы дают такие же значения, как и обычное суммирование. Термин «пересуммирование» и означает, что мы будем проводить обобщенное суммирование рядов. В этой работе мы используем метод Бореля [6], другие способы суммирования здесь оказываются неэффективными из – за факториального роста коэффициентов. Математическим обоснованием этого метода является теорема Ватсона [14].

Пусть имеется некоторая функция Q , заданная в виде ряда по параметру ϵ :

$$Q(\epsilon) = \sum_{k \geq 0} Q_k \epsilon^k, \quad (36)$$

и при этом асимптотика высоких порядков коэффициентов ряда определяется выражением (2). Преобразование Бореля-Лероя ряда (36) осуществляется с помощью соотношений:

$$Q(\epsilon) = \int_0^{+\infty} dt t^{b_0} e^{-t} B(\epsilon t), \quad B(x) = \sum_{k \geq 0} B_k x^k, \quad B_k = \frac{Q_k}{\Gamma(k + b_0 + 1)}, \quad (37)$$

где b_0 – некоторый произвольный параметр. Знание асимптотики (34) вместе с некоторыми предположениями об аналитических свойствах $B(x)$ (см. [6]) позволяет пересуммировать ряд (36) с помощью (37) и получить более точное значение величины $Q(\epsilon)$.

Если в качестве разложения (36) выступает ϵ – разложение η , то из (2, 35) следует, что интересующее нас выражение для образа Бореля $B(x)$ сходится в круге $|x| < 1/a_\eta$. Ближайшая к нулю особенность лежит на отрицательной вещественной полуоси в точке $(-1/a_\eta, 0)$. Отметим, что интегрирование в (37) ведется по всей положительной вещественной полуоси $t \in [0, +\infty)$. В точке $1/a_\eta$ контур интегрирования пересекает границу круга сходимости выражения (37). Проблема аналитического продолжения (37) за область сходимости $|x| < 1/a_\eta$ решается методом конформного отображения комплексной плоскости либо методом аппроксимаций Паде [6].

Аналитическое продолжение. Паде-аппроксимации.

В методе Паде-Борель-Лероя (PBL) для (37) вычисляются аппроксимации Паде:

$$P_M^L(x) = \frac{\sum_{i=0}^L \alpha_i x^i}{1 + \sum_{j=1}^M \beta_j x^j}, \quad M \geq 1 \quad L + M = N. \quad (38)$$

Коэффициенты $\{\alpha, \beta\}$ фиксируются из требования равенства коэффициентов ряда (37) и коэффициентов ряда Тейлора функции (38) при $x \rightarrow 0$:

$$B_0 = \alpha_0, \quad B_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} P_M^L(x) \Big|_{x=0}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (39)$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных $\{p, q\}$, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha_s(B_0, B_1, \dots, B_N), \quad s = 1, \dots, L, \\ \beta_{s'} &= \beta_{s'}(B_0, B_1, \dots, B_N), \quad s' = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (40)$$

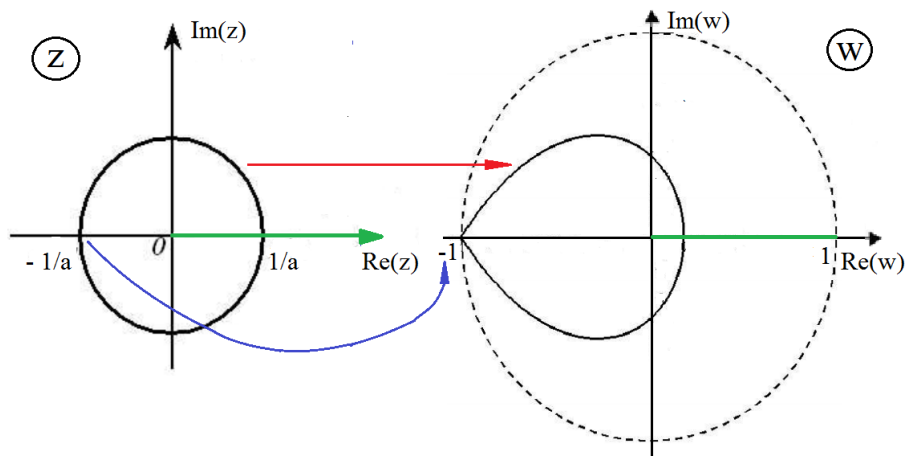
Борель-преобразованное выражение определяется теперь как

$$Q(\epsilon) = \int_0^{+\infty} dt \, t^{b_0} e^{-t} P_M^L(\epsilon t). \quad (41)$$

Аналитическое продолжение. СМ-метод.

Конформное отображение комплексной плоскости (СМ) обычно выбирается в виде [6]:

$$w(z) = \frac{\sqrt{1 + a_\eta z} - 1}{\sqrt{1 + a_\eta z} + 1} \Leftrightarrow z(w) = \frac{4w}{a_\eta(w - 1)^2}. \quad (42)$$



При этом контур интегрирования в интеграле (37) лежит в круге сходимости, разрез $-\infty < \text{Re}(z) \leq -1/a_\eta$ отображается на границу единичного круга $|w| = 1$,

точка $z = -1/a$ отображается в $w = -1$, бесконечная точка отображается в точку $w = 1$. Как явствует из вида отображения, $w(z) = O(z)$ при $z \rightarrow 0$, поэтому можно переразложить ряд (37) по переменной w :

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} z^n B_n \quad \longrightarrow \quad B(w) = \sum_{n \geq 0} w^n W_n,$$

где

$$W_0 = B_0, \quad W_n = \sum_{m=1}^n B_m (4/a_\eta)^m C_{n+m-1}^{n-m}, \quad n \geq 1. \quad (43)$$

Тогда конформ-борель преобразование величины Q приобретает вид

$$Q(\epsilon) = \sum_{k \geq 0} W_k \int_0^{+\infty} dt t^{b_0} e^{-t} (w(\epsilon t))^k. \quad (44)$$

Безусловно, это не единственные способы аналитического продолжения функции $B(z)$ за круг сходимости. Необходимо отметить, что если бы у нас имелся полный ряд, то, очевидно, результат суммирования не зависел от метода аналитического продолжения, однако в нашем распоряжении лишь первые 4 члена разложения и знание асимптотики высоких порядков. По этой причине нельзя гарантировать, что значения индекса η получатся одинаковыми в различных схемах (CM, PBL), поскольку после применения к исходному ряду того или иного метода скорости сходимости полученных рядов будут различными.

3.2 Результаты пересуммирования разложения для индекса η

Начнем с результатов метода PBL. Обычно параметр b_0 выбирается из условия, позволяющего ослабить сингулярность образа Бореля (37) в точке $x = -1/a_\eta$. Воспользуемся этим условием в методе PBL и выберем значение $b_0 = b_\eta = 9/2$. В методе PBL используются аппроксимации Паде, для которых в определении (38) $\alpha_0 = 0$. Выражения для Паде аппроксимаций в схеме PBL:

$$P_1^3(x) = \frac{B_1 B_3 x + (B_2 B_3 - B_1 B_4) x^2 + (B_4 B_3 - B_2 B_3) x^3}{B_3 - B_4 x}, \quad (45)$$

где $B_{2,3,4}$ - коэффициенты ряда Бореля (37).

В таблице 1 представлены результаты вычислений методом PBL в размерности $d = 2, 3, 4, 5$ для разных значений N . Хотя аппроксимации (45) существуют только при учете всех членов разложения η , значения для $N < 4$ приведены для того, чтобы продемонстрировать скорость сходимости ряда и оценить погрешность метода PBL. Эти значения индекса получаются путем вычисления аппроксимаций P_1^2 (для $N = 3$), P_1^1 (для $N = 2$) и P_1^0 (для $N = 1$).

Во введении упоминалось, что в [7] для индекса η было проведено борелевское пересуммирование трехпетлевого ϵ - разложения. Полученные там значения критического индекса в различных размерностях пространства согласуются с нашим результатом пересуммирования при $N = 3$.

Табл.1: значения η , полученные пересуммированием первых N членов разложения методом Паде-Борель-Лероя (PBL) с использованием аппроксимации типа P_1^3 ($b_0 = 9/2$).

d	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
2	-0.444	-1.385	-0.700	-1.023
3	-0.333	-0.862	-0.508	-0.668
4	-0.222	-0.457	-0.321	-0.378
5	-0.111	-0.169	-0.146	-0.154

Ряд (37) должен иметь особенность полюсного типа в точке $-1/a_\eta$ (при $b_0 = b_\eta$). Выделим в явном виде этот полюс и определим аппроксимации Паде выражением:

$$P_{M+1,-1/a_\eta}^L(x) \equiv \frac{1}{1 + a_\eta x} P_M^L(x). \quad (46)$$

В итоге имеем:

$$P_{1,-1/a_\eta}^4(x) = \frac{B_1 x + (B_1 a_\eta + B_2) x^2 + (B_2 a_\eta + B_3) x^3 + (B_3 a_\eta + B_4) x^4}{1 + a_\eta x}, \quad (47)$$

коэффициенты которых определяются из (39). Стоит отметить, что условие применимости аппроксимаций (45, 47) в методе PBL складывается из двух требований: интегрируемость выражения (41) (особые точки лежат вне области интегрирования); точка $-1/a_\eta$ является ближайшей к нулю особенностью ряда (37).

Результаты расчетов методом PBL с использованием $P_{1,-1/a_\eta}^4$ представлены в таблице 2.

Табл.2: значения η , полученные методом Паде-Борель-Леруа (PBL), с использованием аппроксимации типа $P_{1,-1/a_\eta}^4$ и первых N членов ряда разложения ($b_0 = 9/2$).

d	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
2	-0.061	-0.557	-1.093	-0.555
3	-0.058	-0.414	-0.704	-0.485
4	-0.053	-0.272	-0.391	-0.331
5	-0.042	-0.131	-0.156	-0.150

Результаты, полученные методом конформного преобразования (CM) (42), представлены в таблице 3.

Табл.3: значения η , полученные методом CM для первых N членов ряда разложения ($b_0 = 9/2$).

d	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
2	-0.127	-0.310	-0.470	-0.557
3	-0.113	-0.260	-0.374	-0.433
4	-0.094	-0.195	-0.263	-0.294
5	-0.063	-0.111	-0.134	-0.142

Как мы видим, результаты, полученные разными методами, демонстрируют большие погрешности, особенно в малых размерностях пространства, и не вполне согласуются друг с другом даже с учетом этой погрешности. Причиной этого являются как большие значения ϵ и недостаточное количество сосчитанных порядков ϵ –

разложения, так и значительность отклонения вычисленных членов разложения от асимптотики.

Обычно при борелевском пересуммировании числа a и b рассматривают как произвольные параметры. Это позволяет регулировать скорость сходимости отрезка ряда для образа Бореля. Конечно же, для полных рядов (где известны все члены) изменение скорости сходимости никак не влияет на их сумму. В случае конечного отрезка ситуация меняется. Для различных значений a и b соответствующие отрезки для одного и того же N сойдутся, очевидно, к разным величинам. Таким образом, варьируя свободные параметры можно получить наперёд заданный результат с хорошей точностью. В нашей работе эти значения брались из полученной асимптотики высоких порядков ϵ – разложения. Они однозначно фиксируют положение и тип особенности борелевского образа и задают «правильную» скорость сходимости соответствующего ряда. Поэтому можно сказать, что использование асимптотики при пересуммировании является наиболее объективным. Стоит признать, что, по крайней мере, для четырехпетлевого разложения погрешность того или иного метода оказывается весьма существенной $\sim 20\% \div 25\%$.

Заключение

Поставленная в данной работе задача решалась в рамках инстантонного анализа, иными словами, к континуальному интегралу для корреляционных функций применялся метод перевала. Стоит отметить, что в функциональном пространстве, с которым мы имели дело, применение этого метода осложнялось инвариантностью обсуждаемого действия. Это стало причиной появления нулевых мод, приводящих к бесконечным результатам, однако корректное осуществление метода позволило справиться с возникшими проблемами.

Цели, заявленные во введении, полностью достигнуты: определена асимптотика высоких порядков вычета в простом полюсе по ϵ констант ренормировки в MS схеме для теории ϕ^3 и ϵ – разложения индекса η в данной модели, а также приведены результаты различных методов борелевского пересуммирования максимально доступных на настоящий момент порядков ϵ – разложения.

Наши результаты показывают, что, как и в теории ϕ^4 [10], сосчитанные к настоящему моменту порядки разложений констант ренормировки еще далеки от липатовской асимптотики, а точность вычисления критического индекса, даже после борелевского пересуммирования, не очень велика. Приведем для сравнения значения η , например, при $d = 4$: $\eta_{PBL} = -0.38 \pm 0.1$, $\eta_{CM} = -0.29 \pm 0.07$, $\eta_{PBL_a} = -0.33 \pm 0.06$. Здесь за грубую оценку погрешности взята разница между N и $N - 1$ значениями индекса. Для уточнения значений индекса необходимо вычислить ещё несколько членов ϵ – разложения и поправку по $1/N$ к ведущему члену соответствующей асимптотики. Так в [10] для индекса η отношение точного значения к асимптотическому (при $N=5$) было порядка 500 (в нашем случае оно 0.8), после учета поправочного члена оно стало 1.4. Например, для гармонического осциллятора, где разложение известно полностью, асимптотика с поправкой совпадает с точными значениями уже при $N=5$. Таким образом, может быть и здесь имеет смысл вычислить вклад $1/N$.

Приложение 1

Остановимся на получении асимптотики функции Грина (14). Пользуясь действием (4), определением функций Грина (5), формулой Коши (6) и разбиением единицы (12), напишем

$$G_k^{(N)} = \frac{(-1)^{N+1}}{2\pi i} \int \mathcal{D}\phi \phi(\mathbf{x}_1) \dots \phi(\mathbf{x}_k) \oint_{\gamma} \frac{dg}{g\mathcal{Z}(g)} e^{-S_R(\phi, g) - N \ln(-g)} \left(- \int g \frac{\phi^3}{3!} d\mathbf{x} \right)^7 \times \\ \times \int d(\ln y^2) \int d\mathbf{x}_0 \delta \left(-g \int d\mathbf{x} \frac{\phi^3}{3!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i \right) \delta \left(-g \int d\mathbf{x} \frac{\phi^3}{3!} \ln \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{y^2} \right) \right),$$

$\mathcal{Z}(g)$ – нормировка в (5). Будем искать перевальные конфигурации сразу по двум величинам: \bar{g} и $\bar{\phi}$. Равенство нулю первой вариации по полю $\bar{\phi}$ и равенство нулю первой производной по заряду \bar{g} дают уравнения «движения» (10). Система имеет два решения $\{+\} = (\bar{\phi}_{c+}, \bar{g}_{c+})$ и $\{-\} = (\bar{\phi}_{c-}, \bar{g}_{c-})$, первое соответствует положительным \bar{g}_c в (11), второе – отрицательным. Там, где знак не важен, будем просто писать $(\bar{\phi}_c, \bar{g}_c)$. Разложим J окрестности каждого из решений

$$J(\bar{\phi}, \bar{g})_{\pm} \approx S_R(\bar{\phi}_c, \bar{g}_c(\mu)^{-\epsilon/2}) + \ln(-\bar{g}_{c\pm}) - \frac{(\delta g)^2}{2\bar{g}_c^2} + \frac{(\partial\delta\phi)^2}{2} + \frac{\bar{\phi}_c^2}{2} \delta g \delta\phi + \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c}{2} (\delta\phi)^2, \quad (48)$$

кроме того, линеаризуем аргументы дельта – функций, а нормирующий множитель в (12) возьмем непосредственно в точке перевала

$$N^{\frac{7}{2}} \delta \left(-\bar{g}_{c\pm} \int d\mathbf{x} \frac{\bar{\phi}_c^2 \delta\phi}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i \right) \delta \left(-\bar{g}_{c\pm} \int d\mathbf{x} \frac{\bar{\phi}_c^2 \delta\phi}{2} \ln \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{y^2} \right) \right),$$

Для сокращения записи обозначим функциональное интегрирование и все множитель за $D(-\bar{g}_{c+})$ и $D(-\bar{g}_{c-})$. Как не сложно заметить $D(-\bar{g}_{c+}) = (-1)^{N+k+7} D(|\bar{g}_c|)$ и $D(-\bar{g}_{c-}) = D(|\bar{g}_c|)$. Учет двух точек стационарности $\{+\} \{-\}$ приводит к

$$G_k^N = (-1)^{N+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{+i\infty}^{-i\infty} \frac{d(\delta g)}{\bar{g}_{c+}} D(-\bar{g}_{c+}) + (-1)^{N+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d(\delta g)}{\bar{g}_{c-}} D(-\bar{g}_{c-}) = \quad (49) \\ = (-1)^{N+1} \frac{(-1)^{N+k} + 1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d(\delta g)}{|\bar{g}_c|} D(|\bar{g}_c|).$$

Далее, в (49) разворачиваем контур $\delta g \rightarrow e^{\frac{i\pi}{2}} \delta g$ и вычисляем интеграл по δg , делаем масштабирование $\sqrt{N} \delta\phi \rightarrow \delta\phi$ (растяжения проводятся и в нормировке), получаем окончательное выражение (14) для асимптотики корреляционной функции

$$G_k^{(N)} = 2(-1)^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathcal{Z} \left(\frac{\bar{g}_c}{\sqrt{N}} \right)} \int \mathcal{D}\phi e^{-S_2(\delta\phi)} \delta \left(|\bar{g}_c| \int d\mathbf{x} \frac{\bar{\phi}_c^2 \delta\phi}{2} \mathbf{x}_i \right) \delta \left(|\bar{g}_c| \int d\mathbf{x} \frac{\bar{\phi}_c^2 \delta\phi}{2} \ln |\mathbf{x}|^2 \right) \right] \times \\ \times N^{N/2} N^{k/2+3} \int_0^{\infty} e^{-NS_R(\bar{\phi}_c, \bar{g}_c(\mu y)^{-\epsilon/2}) - N \ln(|\bar{g}_c|)} \int d^D \mathbf{x}_0 \frac{d(y^2)}{y^{8-\epsilon}} \frac{(\mu y)^{N\epsilon}}{y^{k(2-\epsilon/2)}} \bar{\phi}_c \left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{y} \right) \dots \bar{\phi}_c \left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0}{y} \right).$$

Выражение в квадратных скобках есть флуктуационный интеграл – интеграл по небольшим отклонениям вокруг инстанонного решения (11). В (14) он обозначен за D_{et} , $S_2(\delta\phi)$ – квадратичная по $\delta\phi$ форма, $(-1)^{N+k} + 1 = 2$ при одинаковых четностях N и k , во всех остальных случаях $G_k^N = 0$.

Приложение 2

Графы (19) проще вычислить в импульсном представлении, пользуясь такими приемами, как фейнмановская параметризация и α -представление. Начнем в первой диаграммы, запишем для ней выражение через массивный затравочный пропагатор и сделаем растяжение переменной $k \rightarrow mk$

$$D_1 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{k^2 + m^2} \Big|_{m=0} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{k^2 + 1} m^{d-2} \Big|_{m=0} = 0.$$

Далее вычислим двуххвостку

$$\begin{aligned} D_2(p) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{k^2(p-k)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \int d^d k \int_0^\infty dt e^{-t(k^2 - 2kx p + x p^2)} dt = \\ &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) p^{d-4}}{(2\pi)^d} \int_0^1 (x - x^2)^{\frac{d}{2}-2} dx = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) p^{d-4}}{(2\pi)^d} B\left(\frac{d}{2} - 1, \frac{d}{2} - 1\right), \end{aligned}$$

здесь B – бета - функция Эйлера. Пользуясь этим выражением для случая $d = 6 - \epsilon$ и выделяя полюса по ϵ , напомним

$$D_2(p) = -\frac{p^2}{192\pi^3} \frac{1}{\epsilon} - \frac{p^2(8 + 3 \ln(4\pi) - 6 \ln(|p|) - 3\gamma)}{1152\pi^3} + O(\epsilon),$$

с учетом этого, вклад во флуктуационный интеграл (21) второй диаграммы (19)

$$d_2 = -\frac{1}{2} \int \frac{d^6 p}{(2\pi)^6} \frac{\bar{g}_c \bar{\varphi}_c(p)}{2} D_2(p) \frac{\bar{g}_c \bar{\varphi}_c(-p)}{2} = -\frac{0.6}{\epsilon} - 0.94 + O(\epsilon)$$

Аналогичным способом можно получить выражение для $D_3(p, q)$. Представим здесь лишь конечный результат

$$D_3(p, q) = \frac{1}{64\pi^3 \epsilon} + \frac{-\gamma + \ln(4\pi)}{128\pi^3} -$$

$$\frac{1}{64\pi^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \ln \left(\frac{x_1 x_2 q^2 + x_1 x_3 p^2 + 2p x_3 x_2 q + x_3 p^2 x_2 + x_2 q^2 x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$d_3 = -\frac{1}{3} \int \frac{d^6 p}{(2\pi)^6} \frac{d^6 q}{(2\pi)^6} \frac{\bar{g}_c \bar{\varphi}_c(p)}{2} \frac{\bar{g}_c \bar{\varphi}_c(q)}{2} D_3(p, q) \frac{\bar{g}_c \bar{\varphi}_c(-p-q)}{2} = -\frac{1.2}{\epsilon} - 1.27 + O(\epsilon)$$

Список литературы

- [1] Carl M. Bender, Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
- [2] Carl M. Bender, V. Branchina, E. Messina, Phys. Rev. D **85**, 085001 (2012)
- [3] Carl M. Bender, V. Branchina, E. Messina, Phys. Rev. D **87**, 085029 (2013).
- [4] F.Y.Wu, Rev. Mod.Phys. **54**, 232, (1982).
- [5] Л.Ц. Аджемян, М.В. Компаниец, ТМФ **169**:1, 100 (2011).
- [6] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 3rd edition (Clarendon Press, Oxford, 1996).
- [7] O. F. de Alcantara Bonfim, J. E. Kirkham, A. J. McKane, J. Phys. A: Math. Gen. **14** 2391 (1981).
- [8] Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
- [9] E.Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D **15**, 1544 (1977).
- [10] М.В.Комарова, М.Ю.Налимов, ТМФ **126**:3, 339 (2001).
- [11] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике* (ПИЯФ, С-Пб., 1998).
- [12] V. G. Makhankov, Phys. Lett. A **61**, 431 (1977).
- [13] G. H. Hardy, *Divergent Series* (Chelsea Pub. Co., New York, 1991).
- [14] M.Reed, B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 4: Analysis of Operators* (Academic Press, California, 1978).