

Содержание

1 Введение	3
2 Фейнмановское представление	4
2.1 $\det v$ и C для используемых в дальнейшем диаграмм	7
2.2 Преимущества расчетов в фейнмановском представлении. Проблемы.	11
3 Метод Sector Decomposition	12
3.1 Учет симметрии	16
3.2 Правило построение секторов декомпозиции с учетом запретов.	19
4 Заключение	21
5 Приложение. Номенклатура Никеля	23
Список литературы	24

1 Введение

В настоящее время метод ренормгруппы является общепризнанным инструментом для изучения фазовых переходов второго рода и критических явлений. Он позволяет обосновать критический скейлинг и дает рецепт расчета критических показателей в виде разложения по формально малому параметру ε . Основной технической задачей при таком подходе является расчет ренормгрупповых функций. Обычно она решается с помощью расчета констант ренормировок. Для модели φ^4 на этом пути удалось продвинуться до пятого порядка теории возмущений. Однако получить аналитический ответ в следующем порядке не удастся уже многие годы и встал вопрос о нахождении численного решения.

Константы ренормировки являются сингулярными функциями параметра ε (содержат полюса по ε), что очень затрудняет их численное определение. Возможны два пути преодоления этих трудностей. В работе [1] была выбрана схема ренормировки, в которой РГ-функции удается выразить через ренормированные функции Грина, не содержащие полюсов по ε . В этом случае проблема сводится к вычислению конечных интегралов высокой кратности. С использованием метода Монте-Карло это удастся сделать с достаточной степенью точности до четвертого порядка теории возмущений, в более высоких порядках точность расчета резко падает. Оказалось, что эффективным методом повышения точности является использование метода Sector Decomposition, первоначально изобретенного для выделения полюсов в константах ренормировки[2].

Повышение точности расчета в методе Sector Decomposition обусловлено тем, что пространство интегрирования разбивается на области (сектора), в каждом из которых подынтегральная функция меняется незначительно. Платой за это является то, что исходный интеграл представляется в виде суммы большого числа секторов, количество которых в пятипетлевом приближении может достигать сотен тысяч. Выбор секторов неоднозначен, существует несколько вариантов реализации метода, в которых идет борьба за сокращение числа секторов [3]. Авторам работы [1] удалось существенно продвинуться на этом пути, максимально используя свойства симметрии диаграмм, что позволяет приводить подобные члены, так что независимых секторов оказывается во много раз меньше. Использование такого подхода позволило вычислить с высокой точностью РГ-функции модели φ^4 в пятипетлевом приближении.

Как уже было сказано, метод Sector Decomposition изначально был призван находить вычеты в полюсах констант ренормировок. Разработанный в [1] способ сокращения числа секторов вполне может быть использован и для решения этой задачи. Задачей настоящей работы является адаптация приемов, предложенных в [1], для вычисления констант ренормировок.¹ Окончательной задачей является построения полностью автоматизированной системы расчета, поскольку построение секторов с учетом симметрий в высоких порядках теории возмущений – весьма трудоемкая задача. Цель настоящей работы – накопление предварительного опыта расчетов “вручную” вплоть до четвертого порядка теории возму-

¹помимо учета симметрий, в [1] использован также новый прием эффективного сокращения расходящихся вкладов

щений.

Метод Sector Decomposition основан на использовании фейнмановского представления диаграмм, с описания которого мы и начнем изложение работы.

2 Фейнмановское представление

Будем рассматривать модель φ^4 с нулевым внешним полем. Тогда исходное действие определяется соотношением :

$$S(\varphi) = - \int [(\partial\varphi)^2/2 + \tau_0\varphi^2/2 + g\varphi^4/24]dx, \quad (1)$$

где g – константа связи.

Пропагатор теории с действием (1) в импульсном представлении равен

$$\langle\varphi\varphi\rangle = \frac{1}{q^2 + \tau}.$$

Диаграммы теории возмущений имеют вид:

$$J_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_l}, \quad A_j = q_j^2 + 1, \quad (2)$$

где \mathbf{q}_j – линейная комбинация импульсов интегрирования \mathbf{k}_s , измеренных в единицах $\sqrt{\tau}$, и внешних импульсов (у нас будет один внешний импульс \mathbf{p}), число λ_j показывает, сколько раз встречается в диаграмме линия с импульсом \mathbf{q}_j .

Формула Фейнмана основана на том, что интеграл от произвольной степени квадратичной формы

$$B(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \equiv v_{is}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) + 2(\mathbf{a}_i, \mathbf{k}_i) + c. \quad (3)$$

вычисляется в явном виде:

$$\frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int \dots \int \frac{d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n}{B^\alpha} = \frac{(4\pi)^{-dn/2} \Gamma(\alpha - dn/2) (\det v)^{-d/2}}{\Gamma(\alpha) [c - (v^{-1})_{is}(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_s)]^{\alpha - dn/2}}, \quad (4)$$

а произведение квадратичных форм в (3) сводится к степени квадратичной формы с помощью интегрирования по вспомогательным параметрам Фейнмана u_i :

$$A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_l} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^l \lambda_i)}{\prod_{i=1}^l \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_l \frac{\delta\left(\sum_{i=1}^l u_i - 1\right) \prod_{i=1}^l u_i^{\lambda_i - 1}}{[\sum_{i=1}^l A_i u_i]^{\sum_{i=1}^l \lambda_i}} \quad (5)$$

Соответствующая (5) квадратичная форма (3) находится из выражения

$$B = u_1(q_1^2 + 1) + u_2(q_2^2 + 1) + \dots + u_l(q_l^2 + 1), \quad (6)$$

в котором вектора \mathbf{q}_i надо заменить заданными линейными комбинациями векторов \mathbf{k}_i и внешнего импульса и найти таким образом матрицу v_{is} и вектора \mathbf{a}_i в (3), параметр α в (4) равен числу линий диаграммы (3)

$$\alpha = \sum_{i=1}^l \lambda_i. \quad (7)$$

Нас будут интересовать диаграммы теории (1) для 1-неприводимой четыреххвостки на нулевых внешних импульсах и коэффициент при квадрате внешнего импульса 1-неприводимой двуххвостки. Число линий n -петлевой четыреххвостки равно $\alpha = 2n$, на нулевом импульсе $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, а коэффициент c в (5) равен единице с учетом $\sum_i u_i = 1$. Вместо исходного заряда g мы будем использовать заряд

$$u = \frac{S_d}{(2\pi)^d} g, \quad S_d \equiv \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad (8)$$

где S_d – площадь d -мерной сферы единичного радиуса. Вводя в связи с этим в (3) дополнительный множитель $\frac{(2\pi)^{nd}}{S_d^n}$, получаем для коэффициента при u^n

$$J_n^{(4)} = \frac{\Gamma(n\epsilon)\Gamma^n(2-\epsilon)}{2^n \prod_i \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_l \frac{\prod_i u_i^{\lambda_i-1} \delta(1 - \sum_{i=1}^l u_i)}{(\det v)^{2-\epsilon}}. \quad (9)$$

Для двуххвосток с внешним импульсом \mathbf{p} величина B имеет вид :

$$B = 1 + \tilde{c}p^2 + 2b_i(\mathbf{p}\mathbf{k}_i) + v_{is}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s), \quad (10)$$

т.е.

$$\mathbf{a}_i = b_i \mathbf{p}, \quad c = 1 + \tilde{c}p^2. \quad (11)$$

Для коэффициента при p^2 n -петлевой двуххвостки получается выражение

$$J_n^{(2)} = \frac{\Gamma(n\epsilon)\Gamma^n(2-\epsilon)}{2^n \prod_i \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_l \frac{C \prod_i u_i^{\lambda_i-1} \delta(1 - \sum_{i=1}^l u_i)}{(\det v)^{3-\epsilon}}, \quad (12)$$

где

$$C = (v_{is}^{-1} b_i b_s - \tilde{c}). \quad (13)$$

Выражения для $\det v$ и C могут быть получены непосредственно по виду диаграммы, минуя импульсное представление. Прежде чем формулировать общие правила, рассмотрим примеры. Рассмотрим двухпетлевую 4-х хвостку ²:

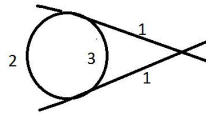


Рис. 1: ee12-e22-e

Здесь цифры на линиях обозначают номера фейнмановских параметров. Непосредственный расчет через импульсное представление дает :

$$\det v = u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_1 u_3. \quad (14)$$

В данном случае правило построения $\det v$ простое – он равен сумме всевозможных произведений параметров фейнмана с числом сомножителей, равным числу петель.

²здесь и в дальнейшем мы будем указывать номенклатуру Никеля диаграммы, см. Приложение I

Рассмотрим пример 3-х петлевой диаграммы:

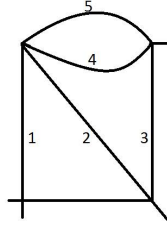


Рис. 2: ee12-e23-33-e

Прямой расчет $\det v$ дает:

$$\det v = \cancel{u_1 u_2 u_3} + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_2 u_5 + u_1 u_3 u_4 + u_1 u_3 u_5 + u_1 u_4 u_5 + u_2 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_5 + u_2 u_4 u_5 + \cancel{u_3 u_4 u_5}$$

В этом соотношении присутствует сумма всевозможных произведений, некоторые из которых затем вычеркнуты. Нетрудно убедиться, что вычеркнутые слагаемые содержат произведения фейнмановских параметров, соответствующих линиям, сумма импульсов которых $= 0$ (закон сохранения импульса в вершине). Это и является общим правилом: $\det v$ n -петлевой диаграммы содержит сумму всевозможных произведений фейнмановских параметров с числом сомножителей, равным числу петель, из которых исключены "запрещенные" произведения. "Запреты" формируются из законов сохранения, имеющих место в данной диаграмме. Это непосредственно законы сохранения импульса в каждой вершине, а также их всевозможные комбинации. Чтобы пояснить последнее утверждение, рассмотрим пример:

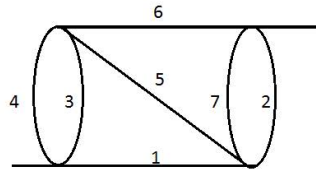


Рис. 3: e112-23-33-e

В этой диаграмме присутствуют запреты, непосредственно связанные с законом сохранения в вершинах $- u_1 u_4 u_3, u_2 u_7 u_6, u_3 u_4 u_5 u_6, u_1 u_2 u_5 u_7$, а также запреты $u_1 u_5 u_6, u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_7$. Запреты с числом сомножителей, большим, чем число петель в диаграмме, не сказываются на виде $\det v$, в то же время запреты с меньшим числом порождают серию запретов. Так, запрет $u_1 u_5 u_6$ требует исключить из $\det v$ слагаемые $u_1 u_5 u_6 u_2, u_1 u_5 u_6 u_3, u_1 u_5 u_6 u_4, u_1 u_5 u_6 u_7$.

Сформулированные правила написания $\det v$ справедливы и для 4-х хвосток и для 2-х хвосток. Для 2-х хвосток необходимо дополнительно ввести правило написания величины C из (13). Вернемся к диаграмме (3). Прямой расчет дает:

$$C = u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 + u_1 u_2 u_3 u_4 u_6 + u_1 u_2 u_3 u_4 u_7 + u_1 u_2 u_3 u_5 u_6 + u_1 u_2 u_3 u_5 u_7 + u_1 u_2 u_3 u_6 u_7 + u_1 u_2 u_4 u_5 u_6 +$$

$$u_1 u_2 u_4 u_5 u_7 + u_1 u_2 u_4 u_6 u_7 + u_1 u_2 u_5 u_6 u_7 + \cancel{u_1 u_3 u_4 u_5 u_6} + u_1 u_3 u_4 u_5 u_7 + u_1 u_3 u_4 u_6 u_7 + u_1 u_3 u_5 u_6 u_7 + u_1 u_4 u_5 u_6 u_7 + \cancel{u_2 u_3 u_4 u_5 u_6} + u_2 u_3 u_4 u_5 u_7 + u_2 u_3 u_4 u_6 u_7 + u_2 u_3 u_5 u_6 u_7 + u_2 u_4 u_5 u_6 u_7 + \cancel{u_3 u_4 u_5 u_6 u_7}$$

$$\det v = \cancel{u_1 u_2 u_3 u_4} + u_1 u_2 u_3 u_5 + u_1 u_2 u_3 u_6 + u_1 u_2 u_3 u_7 + u_1 u_2 u_4 u_5 + u_1 u_2 u_4 u_6 + u_1 u_2 u_4 u_7 + u_1 u_2 u_5 u_6 + \cancel{u_1 u_2 u_5 u_7} + \cancel{u_1 u_2 u_6 u_7} + \cancel{u_1 u_3 u_4 u_5} + \cancel{u_1 u_3 u_4 u_6} + \cancel{u_1 u_3 u_4 u_7} + u_1 u_3 u_5 u_6 + u_1 u_3 u_5 u_7 + u_1 u_3 u_6 u_7 + u_1 u_4 u_5 u_6 + u_1 u_4 u_5 u_7 + u_1 u_4 u_6 u_7 + u_1 u_5 u_6 u_7 + u_2 u_3 u_4 u_5 + u_2 u_3 u_4 u_6 + u_2 u_3 u_4 u_7 + u_2 u_3 u_5 u_6 + u_2 u_3 u_5 u_7 + \cancel{u_2 u_3 u_6 u_7} + u_2 u_4 u_5 u_6 + u_2 u_4 u_5 u_7 + \cancel{u_2 u_4 u_6 u_7} + \cancel{u_2 u_5 u_6 u_7} + \cancel{u_3 u_4 u_5 u_6} + u_3 u_4 u_5 u_7 + u_3 u_4 u_6 u_7 + u_3 u_5 u_6 u_7 + u_4 u_5 u_6 u_7$$

Мы намеренно добавили, а затем вычеркнули некоторые слагаемые, чтобы стало ясно правило построение величины C : это сумма всевозможных произведений фейнмановских параметров с числом сомножителей, на единицу превышающим число петель, с учетом запретов, из которых в данном случае исключены запреты, связанные с законами сохранения в вершинах, содержащих внешние линии, т.е. $u_1 u_4 u_3$, $u_2 u_7 u_6$. Это и есть общее правило.

2.1 $\det v$ и C для используемых в дальнейшем диаграмм

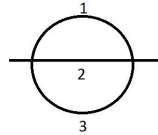


Рис. 4: e111-e

Запреты: $u_1 u_2 u_3$

$$\det v = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3$$

$$C = u_1 u_2 u_3$$

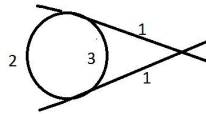


Рис. 5: ee12-e22-e

Запреты: $u_1 u_2 u_3$

$$\det v = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3$$

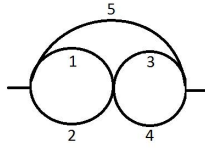


Рис. 6: e112-22-e

Запреты: $u_1u_2u_5$, $u_3u_4u_5$, $u_1u_2u_3u_4$

$$\det v = u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_1u_3u_5 + u_1u_4u_5 + u_2u_3u_4 + u_2u_3u_5 + u_2u_4u_5$$

$$C = u_1u_2u_3u_5 + u_1u_2u_4u_5 + u_1u_3u_4u_5 + u_2u_3u_4u_5$$

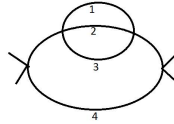


Рис. 7: ee12-ee3-333

Запреты: $u_1u_2u_3u_4$

$$\det v = u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4$$

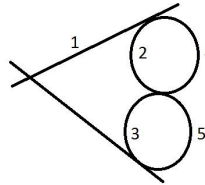


Рис. 8: ee12-e33-e33

Запреты: $u_1u_2u_4$, $u_1u_3u_5$, $u_2u_3u_4u_5$

$$\det v = u_1u_2u_3 + u_1u_2u_5 + u_1u_3u_4 + u_1u_4u_5 + u_2u_3u_4 + u_2u_3u_5 + u_2u_4u_5 + u_3u_4u_5$$

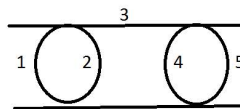


Рис. 9: e112-e3-e33-e

Запреты: $u_1u_2u_3$, $u_3u_4u_5$, $u_1u_2u_4u_5$

$$\det v = u_1u_2u_4 + u_1u_2u_5 + u_1u_3u_4 + u_1u_3u_5 + u_1u_4u_5 + u_2u_3u_4 + u_2u_3u_5 + u_2u_4u_5$$

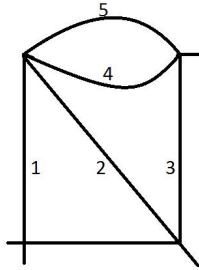


Рис. 10: ee12-e23-33-e

Запреты: $u_1u_2u_3$, $u_1u_2u_4u_5$, $u_3u_4u_5$

$$\det v = u_1u_2u_4 + u_1u_2u_5 + u_1u_3u_4 + u_1u_3u_5 + u_1u_4u_5 + u_2u_3u_4 + u_2u_3u_5 + u_2u_4u_5$$

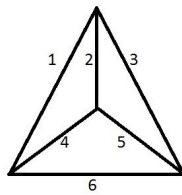


Рис. 11: e123-e23-e3-e

Запреты: $u_1u_4u_6$, $u_1u_2u_3$, $u_2u_4u_5$, $u_3u_5u_6$, $u_2u_3u_4u_6$, $u_1u_2u_5u_6$, $u_1u_3u_4u_5$

$$\det v = u_1u_2u_4 + u_1u_2u_5 + u_1u_2u_6 + u_1u_3u_4 + u_1u_3u_5 + u_1u_3u_6 + u_1u_4u_5 + u_1u_5u_6 + u_2u_3u_4 + u_2u_3u_5 + u_2u_3u_6 + u_2u_4u_6 + u_2u_5u_6 + u_3u_4u_5 + u_3u_4u_6 + u_4u_5u_6$$

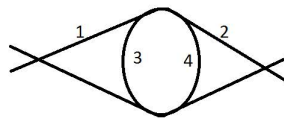


Рис. 12: ee12-223-3-ee

Запреты: $u_1u_2u_3u_4$

$$\det v = u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4$$

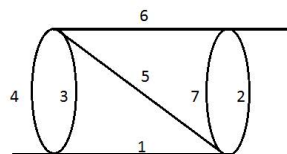


Рис. 13: e112-23-33-e

Запреты: $u_1u_3u_4$, $u_2u_6u_7$, $u_3u_4u_5u_6$, $u_1u_2u_5u_7$, $u_1u_5u_6$, $u_2u_3u_4u_5u_7$, $u_1u_2u_3u_4u_6u_7$

$$\det v = u_1u_2u_3u_5 + u_1u_2u_3u_6 + u_1u_2u_3u_7 + u_1u_2u_4u_5 + u_1u_2u_4u_6 + u_1u_2u_4u_7 + u_1u_3u_5u_7 + u_1u_3u_6u_7 +$$

$$u_1u_4u_5u_7 + u_1u_4u_6u_7 + u_1u_6u_7u_5 + u_2u_3u_4u_5 + u_2u_3u_4u_6 + u_2u_3u_4u_7 + u_2u_3u_5u_6 + u_2u_3u_5u_7 +$$

$$u_2u_4u_5u_6 + u_2u_4u_5u_7 + u_3u_4u_5u_7 + u_3u_4u_6u_7 + u_3u_5u_6u_7 + u_4u_5u_6u_7$$

$$C = u_1u_2u_3u_4u_5 + u_1u_2u_3u_4u_6 + u_1u_2u_3u_4u_7 + u_1u_2u_3u_5u_6 + u_1u_2u_3u_6u_7 + u_1u_2u_4u_5u_6 + u_1u_2u_4u_6u_7 +$$

$$u_1u_3u_4u_5u_7 + u_1u_3u_4u_6u_7 + u_1u_3u_5u_6u_7 + u_1u_4u_5u_6u_7 + u_2u_3u_4u_5u_6 + u_2u_3u_4u_5u_7 + u_2u_3u_4u_6u_7 +$$

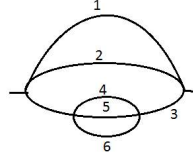
$$u_2u_3u_5u_6u_7 + u_2u_4u_5u_6u_7$$


Рис. 14: e112-e3-333-

Запреты: $u_1u_2u_3$, $u_3u_4u_5u_6$, $u_1u_2u_4u_5u_6$

$$\det v = u_1u_2u_4 + u_1u_2u_5 + u_1u_2u_6 + u_1u_3u_4 + u_1u_3u_5 + u_1u_3u_6 + u_1u_4u_5 + u_1u_4u_6 + u_1u_5u_6 +$$

$$u_2u_3u_4 + u_2u_3u_5 + u_2u_3u_6 + u_2u_4u_5 + u_2u_4u_6 + u_2u_5u_6 + u_3u_4u_5 + u_3u_4u_6 + u_3u_5u_6 + u_4u_5u_6$$

$$C = u_1u_2u_3u_4 + u_1u_2u_3u_5 + u_1u_2u_3u_6 + u_1u_2u_4u_5 + u_1u_2u_4u_6 + u_1u_2u_5u_6 + u_1u_3u_4u_5 + u_1u_3u_4u_6 +$$

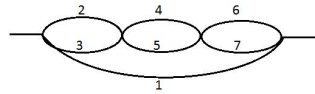
$$u_1u_3u_5u_6 + u_1u_4u_5u_6 + u_2u_3u_4u_5 + u_2u_3u_4u_6 + u_2u_3u_5u_6 + u_2u_4u_5u_6$$


Рис. 15: e113-22-33-e

Запреты: $u_1u_2u_3$, $u_1u_6u_7$, $u_1u_4u_5$, $u_2u_3u_4u_5$, $u_2u_3u_6u_7$, $u_4u_5u_6u_7$

$$\det v = u_1u_2u_4u_6 + u_1u_2u_4u_7 + u_1u_2u_5u_6 + u_1u_2u_5u_7 + u_1u_3u_4u_5 + u_1u_3u_4u_6 + u_1u_3u_4u_7 + u_1u_3u_5u_6 +$$

$$u_1u_3u_5u_7 + u_2u_3u_4u_6 + u_2u_3u_4u_7 + u_2u_3u_5u_6 + u_2u_3u_5u_7 + u_2u_4u_5u_6 + u_2u_4u_5u_7 + u_2u_4u_6u_7 +$$

$$u_2u_5u_7 + u_3u_4u_5u_6 + u_3u_4u_5u_7 + u_3u_4u_6u_7 + u_3u_5u_6u_7$$

$$C = u_1u_2u_3u_4u_6 + u_1u_2u_3u_4u_7 + u_1u_2u_3u_5u_6 + u_1u_2u_3u_5u_7 + u_1u_2u_4u_5u_6 + u_1u_2u_4u_5u_7 + u_1u_2u_4u_6u_7 +$$

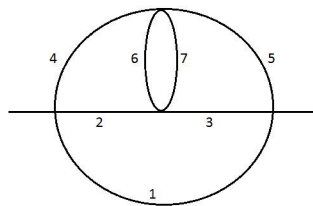
$$u_1u_2u_5u_6u_7 + u_1u_3u_4u_5u_6 + u_1u_3u_4u_5u_7 + u_1u_3u_4u_6u_7 + u_1u_3u_5u_6u_7$$


Рис. 16: e123-e23-33

Запреты: $u_1u_2u_4$, $u_1u_3u_5$, $u_4u_5u_6u_7$, $u_2u_3u_6u_7$, $u_4u_5u_6u_7$

$$\det v = u_1u_2u_3u_6 + u_1u_2u_3u_7 + u_1u_2u_5u_6 + u_1u_2u_5u_7 + u_1u_2u_6u_7 + u_1u_3u_4u_6 + u_1u_3u_4u_7 + u_1u_3u_6u_7 + u_1u_4u_5u_6 + u_1u_4u_5u_7 + u_1u_4u_6u_7 + u_1u_6u_7u_4 + u_2u_3u_4u_5 + u_2u_3u_4u_6 + u_2u_3u_4u_7 + u_2u_3u_5u_6 + u_2u_3u_5u_7 + u_2u_3u_6u_7 + u_2u_4u_5u_6 + u_2u_4u_5u_7 + u_2u_4u_6u_7 + u_2u_5u_7 + u_3u_4u_5u_6 + u_3u_4u_5u_7 + u_3u_4u_6u_7 + u_3u_5u_6u_7 + u_4u_5u_6u_7$$

$$C = u_1u_2u_3u_4u_6 + u_1u_2u_3u_4u_7 + u_1u_2u_3u_5u_6 + u_1u_2u_3u_5u_7 + u_1u_2u_4u_5u_6 + u_1u_2u_4u_5u_7 + u_1u_2u_4u_6u_7 + u_1u_2u_5u_6u_7 + u_1u_3u_4u_5u_6 + u_1u_3u_4u_5u_7 + u_1u_3u_4u_6u_7 + u_1u_3u_5u_6u_7$$

2.2 Преимущества расчетов в фейнмановском представлении. Проблемы.

4-х хвостки и 2-х хвостки являются сингулярными функциями ε – содержат полюса по ε , начиная с полюса n -го порядка для n -петлевой диаграммы. Фейнмановское представление удобно тем, что полюс по ε , связанный с поверхностной расходимостью, выделяется в явном виде (он содержится в гамма-функции $\Gamma(n\varepsilon)$ в (9) и (12)). Фейнмановское представление решает также проблему определения интегралов в пространстве нецелой размерности d – эта величина фигурирует в нем как параметр подынтегрального выражения и входит в аргумент гамма-функций. И в том и другом случае d вполне можно полагать нецелым.

Происхождение остальных полюсов по ε связано с тем, что подынтегральные выражения в (9) и (12) имеют особенности, обусловленные нулями $\det v$. Структура областей, определяющих полюсные вклады, усложняется с ростом порядка теории возмущений, в то же время для численного расчета необходимо получить явные выражения для вычетов в полюсах. Эта задача решается методом SD [2] путем разбиения области интегрирования на сектора, в каждом из которых будет лишь изолированная особенность и ее удастся выделить в явном виде.

3 Метод Sector Decomposition

Проиллюстрируем использование процедуры SD на примере диаграммы (1). Из (9), (14) следует, что необходимый для расчета этой диаграммы интеграл имеет вид

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \frac{u_1 \delta(1 - u_1 - u_2 - u_3)}{(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3)^{2-\epsilon}}, \quad (15)$$

где размерность $d = 4 - 2\epsilon$. Знаменатель в (15) обращается в 0 либо когда u_2 и u_3 стремятся к 0, а u_1 – к 1 (с учетом дельта функции), либо когда u_1 и u_3 стремятся к 0, а u_2 – к 1, и, наконец, когда u_1 и u_2 стремятся к 0, а u_3 – к 1. Второй и третий варианты, из-за наличия u_1 в числителе, приводят к интегрируемой особенности при $\epsilon = 0$. Первый вариант интегрируем только при $\epsilon > 0$, и приводит при $\epsilon \rightarrow 0$ к полюсу по ϵ .

Метод SD разбивает пространство интегрирования на области, в которых присутствует только одна из приведенных особенностей:

$$\begin{aligned} \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 f(u_1, u_2, u_3) &= \int_0^1 du_1 \int_0^{u_1} du_2 \int_0^{u_1} du_3 f(u_1, u_2, u_3) + \\ &+ \int_0^1 du_2 \int_0^{u_2} du_1 \int_0^{u_2} du_3 f(u_1, u_2, u_3) + \int_0^1 du_3 \int_0^{u_3} du_1 \int_0^{u_3} du_2 f(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \quad (16)$$

В каждой из 3-х областей делается растяжение переменных интегрирования, чтобы привести область к виду единичного куба. Например, для первого слагаемого имеем:

$$u_2 = u_1 \tilde{u}_2$$

$$u_3 = u_1 \tilde{u}_3$$

$$\int_0^1 du_1 \int_0^{u_1} du_2 \int_0^{u_1} du_3 f(u_1, u_2, u_3) = \int_0^1 du_1 \int_0^1 d\tilde{u}_2 \int_0^1 d\tilde{u}_3 u_1^2 f(u_1, u_1 \tilde{u}_2, u_1 \tilde{u}_3) \quad (17)$$

Применяя (16), (17) к выражению (15), получаем для него 3 сектора:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3,$$

где

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 d\tilde{u}_2 d\tilde{u}_3 \frac{u_1^3 \delta(1 - u_1(1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3))}{u_1^{4-2\epsilon} (\tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 + \tilde{u}_2 \tilde{u}_3)^{2-\epsilon}}, \quad (18)$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_2 d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_3 \frac{u_2 u_2^3 \delta(1 - u_2(1 + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_3))}{u_2^{4-2\epsilon} (\tilde{u}_1 + \tilde{u}_3 + \tilde{u}_1 \tilde{u}_3)^{2-\epsilon}}, \quad (19)$$

$$\mathcal{I}_3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_3 d\tilde{u}_2 d\tilde{u}_1 \frac{u_3 u_3^3 \delta(1 - u_3(1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1))}{u_3^{4-2\epsilon} (\tilde{u}_2 + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \tilde{u}_1)^{2-\epsilon}}. \quad (20)$$

Благодаря свойству однородности $\det v$ (14) по переменным u_1, u_2, u_3 , “главная” переменная выносится из $\det v$ в виде степени. Воспользуемся теперь в (18) известным свойством дельта-функции

$$\delta(1 - u_1(1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3)) = \frac{1}{1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3} \cdot \delta\left(u_1 - \frac{1}{1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3}\right) \quad (21)$$

и вернёмся к старым обозначениям, чтобы не усложнять формулу штрихами, $\tilde{u}_2 = u_2$, $\tilde{u}_3 = u_3$:

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \frac{\delta\left(u_1 - \frac{1}{1+u_2+u_3}\right)}{(1 + u_2 + u_3)u_1^{1-2\varepsilon}(u_2 + u_3 + u_2u_3)^{2-\varepsilon}}. \quad (22)$$

Важный момент: поскольку каждая переменная $u_i \in [0, 1]$, ноль аргумента дельта-функции определенно реализуется в области интегрирования, а значит можно снять интеграл по u_1

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 \frac{(1 + u_2 + u_3)^{-2\varepsilon}}{(u_2 + u_3 + u_2u_3)^{2-\varepsilon}}. \quad (23)$$

Подынтегральное выражение в (23) имеет особенность только в одном случае – когда u_2, u_3 стремятся к 0.

Теперь мы можем повторить нашу процедуру, но уже для 2-х переменных (область интегрирования будет квадратом, а не кубом). И можно по аналогии выбрать сектора \mathcal{I}_{12} и \mathcal{I}_{13} , которые будут равны в силу симметрии подынтегрального выражения, сделать аналогичную замену и получить

$$\mathcal{I}_{1,2} = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 \frac{(1 + u_2 + u_2u_3)^{-2\varepsilon}}{u_2^{1-\varepsilon}(1 + u_3 + u_2u_3)^{2-\varepsilon}}. \quad (24)$$

Особенность подынтегрального выражения теперь полностью локализовалась и представлена единственной переменной u_2 :

$$\int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \frac{f(u_2, u_3)}{u_2^{1-\varepsilon}}. \quad (25)$$

Полюсной вклад в этом выражении определяется точкой $u_2 = 0$:

$$\int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \frac{f(u_2 = 0, u_3)}{u_2^{1-\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 du_3 f(u_2 = 0, u_3). \quad (26)$$

Интеграл от разности

$$\int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \frac{f(u_2, u_3) - f(u_2 = 0, u_3)}{u_2^{1-\varepsilon}} \quad (27)$$

полюсов не содержит.

В общем случае после изолирования особенностей у нас могут возникнуть 2 ситуации: 1). Случай, аналогичный рассмотренному в примере выше, – интегрируемая при $\varepsilon > 0$

особенность вида $u^{n\varepsilon}/u$. Полюс по ε выделяется тем же приемом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} f(u) du &= \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) \pm f(0)) du = \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} f(0) du + \\ &+ \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) - f(0)) du = \frac{f(0)}{\varepsilon n} + \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) - f(0)) du. \end{aligned} \quad (28)$$

Хотя в этом выражении интеграл $\int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) - f(0)) du$ конечен при $\varepsilon = 0$, при численном его определении возникает существенная потеря точности из-за сокращения расходящихся вкладов в подынтегральном выражении. Эта трудность характерна для выделения полюсов методом SD. Мы будем ее преодолевать способом, аналогичным использованному в [1]. Представим разность $f(u) - f(0)$ в виде интеграла по вспомогательному параметру a :

$$f(u) - f(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} f(au) da = \int_0^1 u f'(au) da. \quad (29)$$

Подставляя это выражение в (28), получаем

$$\int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} f(u) du = \frac{f(0)}{\varepsilon n} + \int_0^1 \int_0^1 u^{\varepsilon n} f'(au) du da. \quad (30)$$

В такой форме записи произведено явное сокращение особенности и ε -разложение интеграла может быть получено разложением в ряд подынтегрального выражения.

2). Могут возникать ситуации с особенностью вида $u^{n\varepsilon}/u^m$, где $m > 1$. Такие особенности не регуляризуются малыми $\varepsilon > 0$. Они являются следствием квадратичной расходимости двухвостых подграфов и в общей теории ренормировок устраняются с помощью процедуры Λ -ренормировки. При аналитических расчетах вместо явного учета соответствующих контрчленов используют процедуру аналитического продолжения по параметру ε из области сходимости интеграла. Мы также будем использовать эту процедуру, но для численных расчетов ее надо конструктивно реализовать. Рассматривая для примера случай $m = 2$, запишем

$$\int_0^1 u^{-2+\varepsilon n} f(u) du = \int_0^1 u^{-2+\varepsilon n} (f(u) - f(0) - u f'(0)) du + \int_0^1 (u^{-2+\varepsilon n} f(0) + u^{-1+\varepsilon n} f'(0)) du. \quad (31)$$

В этом выражении интеграл с вычитаниями конечен при $\varepsilon = 0$, интеграл

$$\int_0^1 u^{-1+n\varepsilon} f'(0) = \frac{f'(0)}{n\varepsilon} \quad (32)$$

определяет, как и в предыдущем случае, полюс по ε . Проблема связана с интегралом $\int_0^1 u^{-2+n\varepsilon} f(0)$. При $n\varepsilon > 1$ этот интеграл равен

$$\int_0^1 u^{-2+n\varepsilon} f(0) = \frac{f(0)}{n\varepsilon - 1}. \quad (33)$$

Это выражение и принимается в качестве аналитического продолжения при всех $\varepsilon > 0$. Подставляя (32), (33) в (31), получаем

$$\int_0^1 u^{-2+\varepsilon n} f(u) du = \int_0^1 u^{-2+\varepsilon n} (f(u) - f(0) - uf'(0)) du + \frac{f(0)}{n\varepsilon - 1} + \frac{f'(0)}{n\varepsilon}. \quad (34)$$

Для УФ-конечного интеграла с вычитаниями в (34) также стоит проблема сокращения больших вкладов. Она решается использованием интегрального представления остаточного члена ряда Тэйлора, которое в общем случае имеет вид

$$f(u) - \sum_{k=0}^m \frac{u^k \partial_u^k f|_{u=0}}{k!} = \frac{1}{m!} \int_0^1 da (1-a)^m \partial_a^{m+1} f(au). \quad (35)$$

Из (34) окончательно получаем

$$\int_0^1 u^{-2+\varepsilon n} f(u) du = \int_0^1 \int_0^1 u^{-2+\varepsilon n} (1-a) \partial_a^2 f(au) da du + \frac{f(0)}{n\varepsilon - 1} + \frac{f'(0)}{n\varepsilon}. \quad (36)$$

Общий вид итоговой формулы для полюса любого порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{-m+\varepsilon n} f(u) du &= \int_0^1 \int_0^1 du da u^{-m+\varepsilon n} (1-a)^{m-1} \partial_a^m f(au) / (m-1)! + \\ &+ \frac{\partial_u^{m-1} f(0)}{n\varepsilon} + \frac{\partial_u^1 f(0)}{n\varepsilon - 1} + \dots + \frac{f(0)}{n\varepsilon - m + 1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Вернемся к нашему примеру и обсудим вычисление интегралов (19) и (20). Хотя эти интегралы конечны при $\varepsilon = 0$, наличие в них интегрируемых особенностей приводит к значительной потере точности при численном счете. Поэтому и в данном случае следует использовать метод SD. Аналогично формуле (24) напомним выражения для \mathcal{I}_2 и \mathcal{I}_3 . Поскольку они приводятся друг к другу переобозначением переменных интегрирования u_2 и u_3 , они равны. При этом

$$\mathcal{I}_{2,1} = \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_3 \frac{u_1^\varepsilon (1 + u_1 + u_1 u_3)^{-2\varepsilon}}{(1 + u_3 + u_1 u_3)^{2-\varepsilon}}, \quad (38)$$

$$\mathcal{I}_{2,3} = \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_3 \frac{u_1 u_3^\varepsilon (1 + u_3 + u_1 u_3)^{-2\varepsilon}}{(1 + u_1 + u_1 u_3)^{2-\varepsilon}}. \quad (39)$$

Интегралы \mathcal{I}_2 (38), (39) не содержали полюсов по ε , но проведение декомпозиции для них также очень полезно для нахождения численного значения интегралов – мы избавились от интегрируемой особенности, подынтегральная функция стала плавно меняющейся и это очень существенно повышает точность численного нахождения интегралов.

В итоге мы поделили область интегрирования в (15) на 6 секторов

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{1,2} + \mathcal{I}_{1,3} + \mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,3} + \mathcal{I}_{3,1} + \mathcal{I}_{3,2} \quad (40)$$

За счет симметрий количество секторов свелось к 3-м. В каждом из этих секторов были сделаны замены переменных. Декомпозиция выделила особенности в исходных интегралах и позволила выразить их через интегралы, удобные для численного расчета.

В результате:

Sector Decomposition – это численный метод для извлечения особенностей диаграмм, характеризующийся тем, что:

- 1) область интегрирования разделяется на секторы, каждый из которых содержит изолированные особенности;
- 2) делается замена переменных (индивидуальная для каждого сектора);
- 3) выделяются особенности в исходных интегралах.

Главный минус этого метода – большое число секторов. Без учета симметрии, для n -петлевой диаграммы оно равно $N \cdot n!$, где N – число слагаемых в детерминанте. Для диаграммы с k параметрами Фейнмана, без учета запретов $N = C_k^n$, учет запретов несколько уменьшает это число, но все равно, число секторов быстро растет с ростом n . Среди секторов имеются эквивалентные – соответствующие подынтегральные выражения совпадают с точностью до замены переменных, что связано с симметрией диаграммы. В приведенном примере это позволило сократить число независимых секторов в 2 раза. В следующем разделе мы рассмотрим более сложные примеры, в которых происходит еще более значительное сокращение.

3.1 Учет симметрии

Еще раз рассмотрим диаграмму

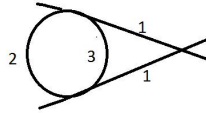


Рис. 17: ee12-e22-e

и воспроизведем полученное для нее сокращение секторов в 2 раза, не выписывая явно все выкладки, а ориентируясь только на симметрию диаграммы. Общее число секторов дается выражением

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{1,2} + \mathcal{I}_{1,3} + \mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,3} + \mathcal{I}_{3,1} + \mathcal{I}_{3,2}.$$

Из симметрии диаграммы очевидно, что

$$\mathcal{I}_{1,2} = \mathcal{I}_{1,3}, \quad \mathcal{I}_{2,1} = \mathcal{I}_{3,1}, \quad \mathcal{I}_{2,3} = \mathcal{I}_{3,2},$$

таким образом

$$\mathcal{I} = 2 * (\mathcal{I}_{1,2} + \mathcal{I}_{1,3} + \mathcal{I}_{3,1}).$$

Число секторов сократилось в 2 раза.

Рассмотрим аналогичным образом трехпетлевую диаграмму

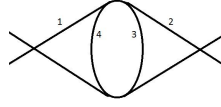


Рис. 18: ee12-223-3-ee

имеющую 24 сектора

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \mathcal{I}_{1,2,3} + \mathcal{I}_{1,2,4} + \mathcal{I}_{1,3,2} + \mathcal{I}_{1,3,4} + \mathcal{I}_{1,4,2} + \mathcal{I}_{1,4,3} + \mathcal{I}_{2,1,3} + \mathcal{I}_{2,1,4} + \mathcal{I}_{2,3,1} \\ & + \mathcal{I}_{2,3,4} + \mathcal{I}_{2,4,1} + \mathcal{I}_{2,4,3} + \mathcal{I}_{3,1,2} + \mathcal{I}_{3,1,4} + \mathcal{I}_{3,2,1} + \mathcal{I}_{3,2,4} + \mathcal{I}_{3,4,1} + \mathcal{I}_{3,4,2} \\ & + \mathcal{I}_{4,1,2} + \mathcal{I}_{4,1,3} + \mathcal{I}_{4,2,1} + \mathcal{I}_{4,2,3} + \mathcal{I}_{4,3,1} + \mathcal{I}_{4,3,2} . \end{aligned}$$

С учетом симметрий диаграммы имеются следующие наборы одинаковых секторов:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1,2,3} &= \mathcal{I}_{1,2,4} = \mathcal{I}_{2,1,3} = \mathcal{I}_{2,1,4} , \\ \mathcal{I}_{1,3,2} &= \mathcal{I}_{1,4,2} = \mathcal{I}_{2,3,1} = \mathcal{I}_{2,4,1} , \\ \mathcal{I}_{1,3,4} &= \mathcal{I}_{1,4,3} = \mathcal{I}_{2,3,4} = \mathcal{I}_{2,4,3} , \\ \mathcal{I}_{3,1,2} &= \mathcal{I}_{3,2,1} = \mathcal{I}_{4,1,2} = \mathcal{I}_{4,2,1} , \\ \mathcal{I}_{3,1,3} &= \mathcal{I}_{3,2,4} = \mathcal{I}_{4,1,3} = \mathcal{I}_{4,2,3} , \\ \mathcal{I}_{3,4,1} &= \mathcal{I}_{3,4,2} = \mathcal{I}_{4,3,1} = \mathcal{I}_{4,3,2} . \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{I} = 4 * (\mathcal{I}_{1,2,3} + \mathcal{I}_{1,3,2} + \mathcal{I}_{1,3,4} + \mathcal{I}_{3,1,2} + \mathcal{I}_{3,1,4} + \mathcal{I}_{3,4,1}) .$$

Число секторов сократилось в 4 раза.

В рассмотренных примерах эквивалентность различных путей декомпозиции легко определялась по симметрии диаграммы. Значительно сложнее сделать это для диаграммы

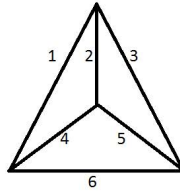
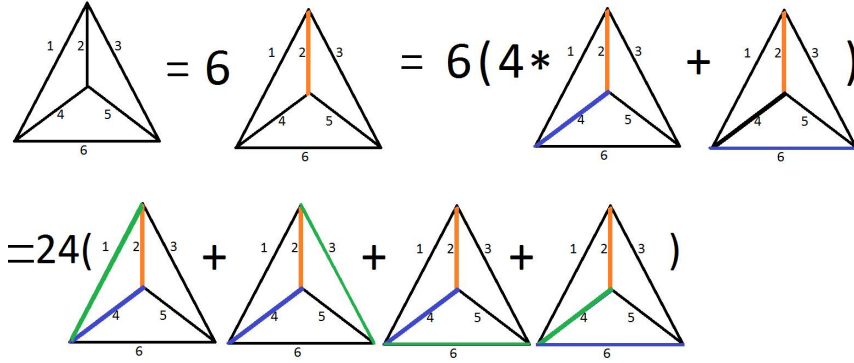


Рис. 19: e123-e23-e3-e

Для этой трехпетлевой диаграммы декомпозиция будет состоять из трех шагов. Для выявления эквивалентных секторов поступим следующим образом. На первом шаге, какую бы мы переменную не объявили главной, результат будет одинаковым из-за эквивалентности всех линий диаграммы. Выберем какую либо из линий и покрасим ее в желтый

цвет как символ того, что она была главной на первом шаге декомпозиции. Симметрия раскрашенной диаграммы стала меньше, теперь не все линии эквивалентны – 4 из них примыкают к покрашенной линии, одна нет. Выкрасим в синий цвет линию, являющуюся главной на втором шаге декомпозиции. Аналогичным образом поступим и на третьем шаге, покрасив линию в зеленый цвет.³ Описанная процедура отражена на следующей картинке:

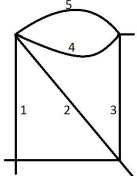
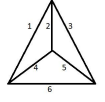
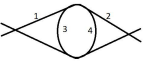
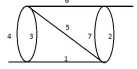
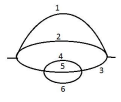
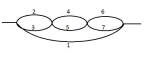
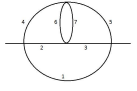


Таким образом, $I = 24 * (\mathcal{I}_{2,4,1} + \mathcal{I}_{2,4,3} + \mathcal{I}_{2,4,6} + \mathcal{I}_{2,6,4})$. Число секторов сократилось в 24 раза.

Приведем таблицу для числа секторов без учета симметрий и с учетом для всех рассмотренных диаграмм:

	без симметрии	с симметрией
	6	3
	40	5
	18	3
	48	6
	48	6

³Отметим, что результат декомпозиции зависит от порядка выбора главных линий

	без симметрии	с симметрией
	50	25
	96	4
	24	6
	484	48
	264	22
	480	12
	400	59

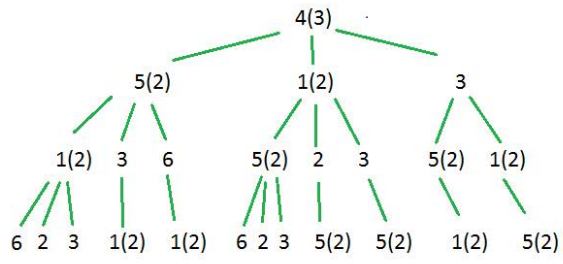
3.2 Правило построение секторов декомпозиции с учетом запретов.

Сформулируем правило построения секторов декомпозиции.

1) Выбираем пространство декомпозиций – набор переменных, участвующих в преобразованиях вида (16). На первом шаге в это пространство включаются все фейнмановские параметры, каждый из которых дает начало определенной ветви декомпозиции. Но некоторые фейнмановские параметры являются эквивалентными для декомпозиции (их число будем записывать рядом в скобках).

2) На следующих шагах в пространство декомпозиций не включаются переменные, по которым уже ранее была сделана декомпозиция, и переменные, приводящие к совокупности переменных, запрещенных в $\det v$.

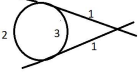
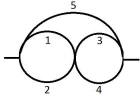
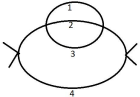
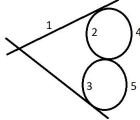
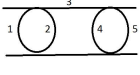
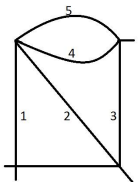

Приведем пример возникающего "дерева" декомпозиции на примере диаграммы (14), выбрав в качестве первой главной переменной u_4 .

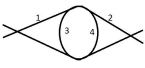
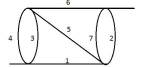
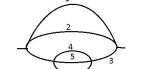
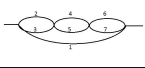



Можно заметить, что отсутствуют сектора $u_4u_5u_3u_6$, $u_1u_5u_6u_3$, $u_4u_1u_2u_3$, $u_4u_1u_3u_2$, $u_4u_3u_5u_6$, $u_4u_3u_1u_2$. Они не участвуют в декомпозиции из-за запретов .

4 Заключение

В настоящей работе эффективность модифицированного метода SD тестируется на расчете РГ-функций модели φ^4 . Расчет аномальной размерности поля проведен в четырехпетлевом приближении. Выделение особенностей и использования симметрии были сделаны «вручную», без использования компьютерных программ. Число независимых секторов оказалось значительно меньшим по сравнению со всеми известными стратегиями. Численное интегрирование было выполнено методом Монте-Карло. По общим правилам к диаграммам была применена затем R' -операция, найдены константы ренормировки, а по ним – РГ-функции. Приведем таблицу полученных результатов для всех учтенных диаграмм и сравнение с найденными точно аналитическими ответами:

	kR'	kR' (точные ответы [4])
	$1/2\varepsilon - 1/2\varepsilon^2$	$-(1 - \varepsilon)/2\varepsilon^2$
	$-0.0833/\varepsilon + 0.1667/\varepsilon^2$	$(1 - \varepsilon/2)/6\varepsilon^2$
	$0.1667/\varepsilon^2 - 0.3748/\varepsilon$	$(1 - 9\varepsilon/4)/6\varepsilon^2$
	$0.333/\varepsilon^3 - 0.334/\varepsilon^2 - 0.333/\varepsilon$	$(1 - \varepsilon - \varepsilon^2)/3\varepsilon^3$
	$0.333/\varepsilon^3 - 0.333/\varepsilon^2 - 0.334/\varepsilon$	$(1 - \varepsilon - \varepsilon^2)/3\varepsilon^3$
	$0.1666/\varepsilon^3 - 0.4999/\varepsilon^2 + 0.664/\varepsilon$	$(1 - 3\varepsilon + 4\varepsilon^2)/6\varepsilon^3$
	$2.404/\varepsilon$	$2.40411/\varepsilon$

	kR'	kR(точные ответы [4])
	$0.333/\varepsilon^3 - 0.666/\varepsilon^2 + 0.333/\varepsilon$	$(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2)/3\varepsilon^3$
	$-0.333/\varepsilon + 0.167\varepsilon^2 - 0.0833\varepsilon^3$	$-1/3\varepsilon + 1/6\varepsilon^2 - 1/12\varepsilon^3$
	$0.156/\varepsilon - 0.0312/\varepsilon^2$	$5/32\varepsilon - 1/32\varepsilon^2$
	$0.156/\varepsilon + 0.062/\varepsilon^2 - 0.125/\varepsilon^3$	$5/32\varepsilon + 1/16\varepsilon^2 - 1/8\varepsilon^3$
	$-0.135\varepsilon + 0.145/\varepsilon^2 - 0.0416/\varepsilon^3$	$-13/96\varepsilon + 7/48\varepsilon^2 - 1/24\varepsilon^3$

Соответствующие этой таблице значения ренормгрупповых функций приведены в следующей таблице:

	results of this work	known values [4]
γ_ϕ	$0.0833u^2 - 0.0625u^3 + 0.3387u^4$	$0.0833u^2 - 0.0625u^3 + 0.3385u^4$
γ_τ	$-u + 0.833u^2 - 3.503u^3$	$-u + 0.833u^2 - 3.500u^3$
β	$-2u\varepsilon + 3u^2 - 5.66u^3 + 32.56u^4$	$-2u\varepsilon + 3u^2 - 5.66u^3 + 32.55u^4$

Полученные значения достаточно хорошо согласуются с точными. Точность расчетов нетрудно увеличить за счет использования более мощных компьютеров или увеличения времени счета.

Можно сделать вывод, что использование модифицированного метода SD оказывается весьма эффективным при расчете констант ренормировок, поэтому целесообразно создание автоматизированной системы расчета, которая позволит продвинуться в старшие порядки теории возмущений.

Список литературы

- [1] L.Ts. Adzhemyan, M.V. Kompaniets, S.V. Novikov, and V.K. Sazonov. “Representation of the β -function and anomalous dimensions by nonsingular integrals: proof of the main relation”. Theoretical and Mathematical Physics, 175(3): 719–728 (2013).
- [2] GUDRUN HEINRICH Sector Decomposition – Int.J.Mod.Phys.A23:1457-1486,2008
- [3] A.V. SMIRNOV, V.A. SMIRNOV Hepp and Speer Sectors within Modern Strategies of Sector Decomposition – JHEP 0905:004,2009
- [4] ВАСИЛЬБЕВ А.Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. – Издательство ПИЯФ, Санкт-Петербург, 1998.
- [5] BERNHARD G. NICKEL, DANIEL I. MEIRON, GEORGE A. BAKER JR Compilation of 2-pt. and 4-pt. graphs for continuous spin models. – University of Guelph Report, 1997.
- [6] С.В. Новиков. Частное сообщение.