

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Физический факультет
Кафедра статистической физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Кравченко Сергей Сергеевич

**Особенности спектра магнонов в ферромагнетиках с
неколлинеарным основным состоянием**

Научный руководитель
д.ф.-м.н.
Аристов Д.Н.

Санкт-Петербург 2012

Содержание

1 Введение	2
2 Подход к решению поставленной задачи	3
3 Выводы и заключения	10
Литература	11

1 Введение

В последние годы, особенно в связи с различными приложениями, интенсивно развиваются исследования магнитоупорядоченных кристаллов – ферромагнетиков, антиферромагнетиков и ферритов. Многие свойства этих кристаллов – в первую очередь высокочастотные, а также термодинамические свойства – определяются в области низких температур специфическими волнами, могущими распространяться в этих телах, так называемыми спиновыми волнами, представляющими собой передающиеся от атома к атому колебания атомного магнитного момента.

Целый ряд кристаллов обладает упорядоченной магнитной структурой. Это значит, что в отсутствие стороннего магнитного поля среднее значение магнитного момента, по крайней мере, одного из атомов в каждой элементарной ячейке кристалла отлично от нуля. В простейшем случае, средние значения магнитных моментов всех атомов имеют одинаковую ориентацию – в ферромагнетиках – если только температура ферромагнетика не превосходит определенной критической температуры – температуры Кюри. Особый интерес в последние годы представляет наблюдение скирмионов в кристаллах нецетросимметричных ферромагнетиков. Изначально термин скирмион был введен как математическая модель моделирования барионов [8]. Позже этот термин стал использоваться для конфигурации спинов в магнитных веществах, имеющих кольцевую структуру. Как и доменные стенки, такие структуры топологически стабильные магнитные структуры. Японско-корейской команде физиков [1] удалось непосредственно наблюдать скирмионы в магнитном веществе. Такие структуры могут представлять определенный интерес для практических приложений в спинтронике. Скирмионы являются одним из возможных решений, описывающих равновесные магнитные

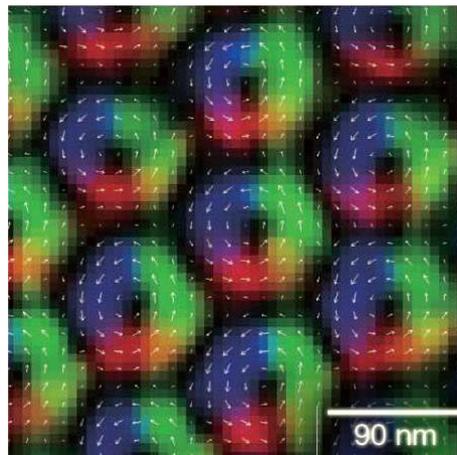


Рис. 1: Плотная упаковка магнитных вихрей-скирмионов. Изображение получено с помощью электронного микроскопа в $Fe_{0.5}Co_{0.5}Si$.

конфигурации в магнитных и антиферромагнитных веществах, и эти решения теоретически рассматривались в работах [2], [3]. Долгие годы такие конфигурации не удавалось обнаружить, но в последнее время появились сообщения, в которых с помощью дифракции нейтронов была зарегистрирована некая новая фаза магнитного упорядочения, возникающая при приложении внешнего постоянного магнитного поля в веществах $MnSi$ и $Fe_{1-x}Co_xSi$. Эта фаза была интерпретирована как решетка вихрей. Впрочем, одно дело наблюдать дифракционную картину, другое дело — непосредственно увидеть отдельные вихри и процесс их зарождения. Это удалось сделать с помощью лоренцевской просвечивающей электронной микроскопии (рис. 1).

Внешне зарождение скирмионов очень напоминает образование решетки цилиндрических магнитных доменов в классическом микромагнетизме: в изначальной полосовой структуре (рис. 2 а) зарождается область с гексагональной упаковкой (рис. 2 б). Различие лишь в характерных размерах (100 нм), при которых уже нет смысла говорить о доменах и границах



Рис. 2: а) Полосовая геликоидальная спиновая структура, спонтанно образующаяся в $Fe_{0.5}Co_{0.5}Si$ б) Появление гексагональной решетки вихрей во внешнем поле 20 мТл (элементарная ячейка показана красным цветом)

между ними: полосовая структура соответствует магнитной геликоидальной спирали, а гексагональная – системе вихрей. Магнитные скирмионы интересны не только в фундаментальном аспекте. От них ожидают сильного воздействия на спиновый ток, протекающий через них, что можно использовать в магнитной памяти и спинтронных транзисторах [6]. Электрон, движущийся сквозь скирмион, несколько раз меняет спиновую ориентацию, подстраивая ее под локальное распределение намагниченности, в результате чего на него действует эффективная сила, изменяющая направление его движения (рис.3), что макроскопически должно проявляться как разновидность эффекта Холла. Следует отметить, все теоретиче-

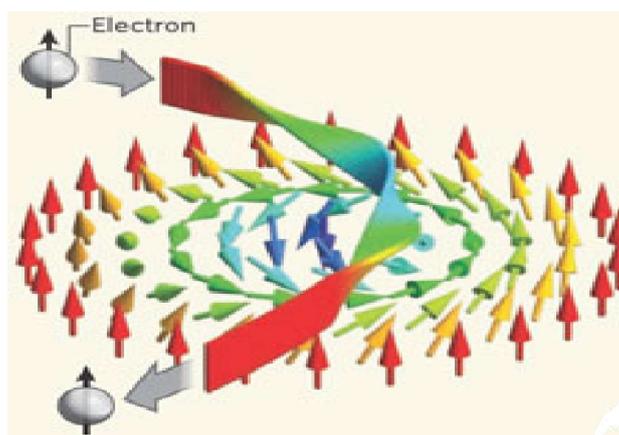


Рис. 3: Эффективная “топологическая” сила, действующая на электрон, движущийся сквозь скирмион

ские исследования ограничивались классическим рассмотрением предела большого значения локального магнитного момента без учета квантовости системы. Целью нашей работы является рассмотрение гамильтониана таких объектов в терминах магнонов и получение их спектра.

2 Подход к решению поставленной задачи

Для упрощения вычислений воспользуемся приближением: будем считать, вклад обменного взаимодействия несопоставимо велик по сравнению с вкладом диполь-дипольного и Дзялошинского-Мория взаимодействий. С учетом вышесказанного гамильтониан запишется

в таком виде:

$$H = J \int \nabla \vec{M} \nabla \vec{M} d\vec{r}$$

Как было показано в работе [4], существуют такие стабильные состояния, в которых

$$\delta H = 0 \quad (1)$$

и которые отличаются от тривиальных состояний с $\vec{M} = const$ при $J > 0$. Такие состояния приводят к тому, что корреляция спинов при $R > r_{cp}$ исчезает. В данной работе мы полагаем на экспериментальные данные существования плоских устойчивых геликоидальных структур и, в силу их стабильности, рассматриваем такие структуры, в которых выполняется условие (1) для гамильтониана обменного взаимодействия H при заданной конфигурации магнитных моментов в решетке. При этом рассматривается случай одного скирмиона, в котором магнитные моменты атомов образуют плоскую кольцевую структуру со спином вниз в нуле и вверх на бесконечности. На первом этапе мы будем рассматривать классический случай для обменного взаимодействия, где гамильтониан рассматривается как функционал непрерывных от функций $\vec{M}(\vec{r})$, где \vec{r} – двумерный радиус вектор. Для минимизации данного интегрального функционала, удобно перейти к цилиндрическим координатам для пространственных переменных и к сферическим для координат функции \vec{M} . При этом полагаем естественным $|\vec{M}| = M_0$. Тогда, если принять $M_0 = 1$, можно записать \vec{M} как функцию, зависящую только от сферических углов, которые, в свою очередь, зависят от пространственных переменных:

$$\vec{M} = (\sin \theta \cos \psi, \sin \theta \sin \psi, \cos \theta)$$

Где r, z, ϕ – пространственные координаты, координата z в виду того, что наша система на плоскости, выпадает из рассмотрения. θ, ψ – углы, характеризующие направление магнитного момента. Тогда:

$$\nabla \vec{M} \nabla \vec{M} = \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\theta^2}{d\phi^2} + \sin^2 \theta \left(\left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\psi}{d\phi} \right)^2 \right)$$

минимизация достигается варьированием по угловым переменным, откуда получим:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\theta^2}{d\phi^2} - \sin \theta \cos \theta \left[\left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\psi}{d\phi} \right)^2 \right]$$

которое с учетом свойств нашей структуры:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{d\phi} = 0 \\ \frac{d\psi}{d\phi} = \pm 1; \frac{d\psi}{dr} = 0 \end{array} \right.$$

Тогда гамильтониан примет вид:

$$H = J \int_0^\infty \left(\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \right) r dr$$

Для минимизации функционала уравнение Эйлера-Лагранжа проще решать в новых переменных, делая замену $x = \ln \frac{r}{r_0}$. Тогда все сведется к уравнению:

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{d}{dx} (\cos 2\theta) = const$$

в котором константа находится с учетом граничных условий для $r = 0$ и $r \rightarrow \infty$ в итоге, решая полученное дифференциальное уравнение первого порядка и переходя к старым переменным r получим искомую зависимость $\theta(r)$:

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{r_0} \right)$$

где r_0 - параметр, определяющий размер системы спинов. Глядя на полученное решение, видно, что оно удовлетворяет $\theta = \pi$ в нуле и $\theta = 0$ на бесконечности.

Напишем гамильтониан ферромагнетика в таком виде:

$$H = -J \sum_{i \neq j} \vec{S}_i \vec{S}_j$$

все предыдущие выкладки были написаны для гамильтониана, зависящего от классического вектора локальной намагниченности, что является приближением. На данном этапе нашей задачей является переход от непрерывных переменных к дискретным и дальнейший переход к полевым переменным для квантования спина. Для этого используется представление операторов спина в терминах бозе операторов a^+ , a рождения и поглощения соответственно, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям $[a^+, a] = 1$:

$$\begin{aligned} S_j^z &= s - a_j^+ a_j \\ S_j^+ &= \sqrt{2s} a_j \\ S_j^- &= \sqrt{2s} \left(a_j - \frac{1}{2s} a_j^+ a_j a_j \right) \end{aligned}$$

- представление Дайсона-Малева.

Можно проверить непосредственным вычислением, что соответствующие коммутационные соотношения для операторов S^z , S^- , S^+ выполняются. При этом формальное наличие нефизических состояний, при $a^+ a > s$, как показано в [6], оказывается несущественным при низких температурах. В случае ферромагнетиков при температурах близких к нулю все спины выстраиваются вдоль одного направления. Такое состояние в отсутствие магнитных возбуждений принимают за основное и называют вакуумным состоянием. Далее, используя представление Д-М для операторов спина, можно получить выражение:

$$H = -\frac{1}{2} J(0) s^2 N + s \sum_{\vec{k}} (J(0) - J(\vec{k})) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^- + \dots$$

Где $J(\vec{k}) = \sum_m J_{lm} e^{i\vec{k}(\vec{r}_l - \vec{r}_m)}$,

$a_{\vec{k}}^+$, $a_{\vec{k}}^-$ - операторы рождения и поглощения магнонов с импульсом \vec{k} , полученные преобразованием Фурье от операторов a_j^+ , a_j соответственно [6].

В нашем случае спины образуют некую известную равновесную конфигурацию, описываемую углами θ и ψ , которую мы примем за основное состояние. Для написания гамильтониана обменного взаимодействия такой системы мы рассмотрим локальные базисы для квантования спинов, которые связаны неким матричным преобразованием $\widehat{R}(r)$ если положить формально, что

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \widehat{R}_0(r) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

есть матричное преобразование связывающее локальный базис с основным. Если предположить, что изменение ориентации спина между соседними узлами незначительно, то для узла, находящегося рядом можно написать:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \widehat{R}' \widehat{R}_0(r) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

отсюда можно явно выразить \widehat{R}' через \widehat{R}_0 , считая

$$\widehat{R}_0(r_j) = \widehat{R}_0(r_i) + \left(\delta r_{ij}^{\vec{r}}, \vec{\nabla} \right) \widehat{R}_0(r_i)$$

или

$$\widehat{R}'(\vec{r}_i) \widehat{R}_0(\vec{r}_i) = \widehat{R}_0(\vec{r}_i) + \left(\delta r_{ij}^{\vec{r}}, \vec{\nabla} \right) \widehat{R}_0(\vec{r}_i)$$

получим

$$\widehat{R}'(\vec{r}_i) = 1 + \left(\left(\delta r_{ij}^{\vec{r}}, \vec{\nabla} \right) \widehat{R}_0(\vec{r}_i) \right) \widehat{R}_0^{-1}(\vec{r}_i)$$

в дальнейшем эти формулы будут получены в явном виде для скирмиона. Для этого используются известные соотношения, связывающие элементы матрицы с углами Эйлера, которые в свою очередь выражаются через пространственные компоненты вектора намагниченности. Если в выражении для гамильтониана сделать приближение, в результате которого будет учитываться обменное взаимодействие только между ближайшими соседями \vec{r} и $\vec{r} + \vec{a}$, получится :

$$H = -J \sum_{\vec{r}_i, \vec{a}} S_{\vec{r}_i + \vec{a}}^\alpha [1 + ((\vec{a}, \nabla) R_0(\vec{r}_i)) R_0^{-1}(\vec{r}_i)]_{\alpha\beta} S_{\vec{r}_i}^\beta \quad (2)$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся греческим индексам.

Такое приближение оправдано тем, что обменное взаимодействие зависит от степени перекрытия волновых функций атомов в решетке, которая экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния и ничтожно мала для остальных атомов не являющихся соседними. Для выяснения явного вида матрицы $(\nabla \widehat{R}_0) R_0^{-1}$ удобно представить матрицу R_0 в экспоненциальном виде:

$$\widehat{R}_0 = \exp \begin{pmatrix} 0 & \Omega^z & -\Omega^y \\ -\Omega^z & 0 & \Omega^x \\ \Omega^y & -\Omega^x & 0 \end{pmatrix}$$

где

$$\vec{\Omega} = \omega (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Phi)$$

угол поворота вокруг оси, на угол ω , орт которой $\vec{n} = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Phi)$ Поскольку \widehat{R}_0 представимо в виде экспоненты, то дифференцирование тривиально:

$$(\nabla \widehat{R}_0) R_0^{-1} = \nabla \begin{pmatrix} 0 & \Omega^z & -\Omega^y \\ -\Omega^z & 0 & \Omega^x \\ \Omega^y & -\Omega^x & 0 \end{pmatrix}$$

что эквивалентно

$$((\nabla \widehat{R}) R^{-1})_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla \Omega^\gamma \quad (3)$$

с учетом сказанного формулу (2) можно представить в виде

$$H = -J \sum_{\vec{r}, \vec{a}} \left(\vec{S}_{\vec{r} + \vec{a}} \vec{S}_{\vec{r}} + [\vec{S}_{\vec{r} + \vec{a}} \times \vec{S}_{\vec{r}}]_\gamma (\vec{a}, \nabla) \Omega^\gamma \right) \quad (4)$$

используя известные соотношения [5], углы Θ, Φ, ω можно связать с углами Эйлера, которые, в свою очередь, могут быть выражены через пространственные координаты:

$$\begin{cases} \cos \frac{\omega}{2} = \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2} = \cos \Theta \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \\ \Phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha - \gamma}{2} \end{cases} \quad (5)$$

α, β, γ - углы Эйлера, характеризующие поворот системы координат. В случае скирмиона соотношения между углами Эйлера и координатами r, ϕ с учетом найденной зависимости $\theta(r)$ запишутся системой:

$$\begin{cases} \alpha = \phi + \frac{\pi}{2} \\ \beta = \theta = 2 \operatorname{arccctg} \frac{r}{r_0} \end{cases} \quad (6)$$

Здесь существует произвол в выборе γ , однако можно показать, что этот произвол не влияет на вид спектра возбуждений. Поскольку угол γ можно выбрать произвольно, то для упрощения формул (5), можно взять такую зависимость угла гамма, что $\alpha + \gamma = 0$, тогда:

$$\begin{cases} \cos \frac{\omega}{2} = \cos \frac{\beta}{2} \\ \cos \Theta \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = 0 \\ \Phi = \frac{\pi}{2} + \alpha \end{cases} \Rightarrow \omega = \beta, \Theta = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

Учитывая связь между пространственными координатами и углами Эйлера (6), а также третью строчку уравнения (7), получим

$$\vec{\Omega} = 2 \operatorname{arccctg} \left(\frac{r}{r_0} \right) (-\cos \phi, -\sin \phi, 0)$$

Теперь мы можем преобразовать формулу (4) подставляя полученное выражение для Ω^γ , что будет сделано и для импульсного представления. Возьмем Фурье-образ для $\Omega^\gamma(\vec{r})$, ($\gamma = x, y$)

$$\Omega^x(\vec{q}) = 2 \int d\vec{r} \operatorname{arccctg} \left(\frac{r}{r_0} \right) e^{i\vec{q}\vec{r}} = 2 \int_0^\infty dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\phi r \left(-\frac{x}{r} \right) \operatorname{arccctg} \left(\frac{r}{r_0} \right) e^{iqr \cos(\phi_q - \phi_r)}$$

Делая замену $\phi_r = \phi_q + \phi'_r$ получим

$$\Omega^x(\vec{q}) = 2 \int_0^\infty dr r \operatorname{arccctg} \left(\frac{r}{r_0} \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\phi'_r (\cos \phi_q \cos \phi'_r - \sin \phi_q \sin \phi'_r) e^{iqr \cos \phi'_r}$$

сделав еще одну замену $\phi'_r = \phi + \frac{\pi}{2}$ и воспользовавшись определением функции Бесселя:

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{i\alpha\phi - x \sin \phi}$$

и, учитывая свойства четности подынтегрального выражения, которое существенно упрощается, используя известное соотношение $J_{-1}(qr) = -J_1(qr)$:

$$\Omega^x(\vec{q}) = 4\pi i \cos q \int_0^\infty dr r \operatorname{arccctg} \left(\frac{r}{r_0} \right) J_1(qr)$$

Делая аналогичные выкладки для $\Omega^y(q)$ получим

$$\Omega^y(\vec{q}) = 4\pi i \sin q \int_0^\infty dr r \operatorname{arccctg} \left(\frac{r}{r_0} \right) J_1(qr)$$

Для нахождения явного вида зависимости $\Omega^\gamma(\vec{q})$ нужно рассмотреть интеграл $I = \int_0^\infty dr r \operatorname{arccctg}\left(\frac{r}{r_0}\right)$ в пределе малых и больших q . Сделаем оценку такого интеграла при малых q :

$$I = \int_0^R + \int_R^\infty dr r \operatorname{arccctg}\left(\frac{r}{r_0}\right) J_1(qr)$$

пусть R настолько большое, что

$$\int_R^\infty dr r \operatorname{arccctg}\left(\frac{r}{r_0}\right) J_1(qr) \longrightarrow \int_R^\infty dr r \frac{r_0}{r} J_1(qr) = \frac{r_0}{q} J_0(qR)$$

рассмотрим такие q , что qR^2 мало, тогда

$$\int_0^R + \int_R^\infty dr r \operatorname{arccctg}\left(\frac{r}{r_0}\right) J_1(qr) \rightarrow \int_R^\infty dr r \operatorname{arccctg}\left(\frac{r}{r_0}\right) qr,$$

так как $\int_0^R dr r \operatorname{arccctg}\left(\frac{r}{r_0}\right) J_1(qr) \approx qO(R^2)$ что, ввиду нашей договоренности, ничтожно мало. Таким образом, для интеграла I приходим к выражению:

$$I = \int_0^\infty dr r \operatorname{arccctg}\left(\frac{r}{r_0}\right) J_1(qr) = \frac{r_0}{q}$$

при $q \ll r_0$. Тогда выражения для $\Omega^x(\vec{q}), \Omega^y(\vec{q})$ запишутся в виде:

$$\begin{cases} \Omega^x(\vec{q}) = \frac{4\pi i r_0 \cos \phi_q}{q} \\ \Omega^y(\vec{q}) = \frac{4\pi i r_0 \sin \phi_q}{q} \end{cases} \quad (8)$$

Вернемся к обработке формулы (2). Если положить симметризованно во втором слагаемом:

$$-J \sum_{\vec{r}_i, \vec{a}} [\vec{S}_{\vec{r}_i - \frac{\vec{a}}{2}} \times \vec{S}_{\vec{r}_i + \frac{\vec{a}}{2}}]_\gamma(\vec{a}, \nabla) \Omega^\gamma$$

и перейти к Фурье-образу:

$$\vec{S}_{\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}} = \sum_{\vec{q}_1} e^{i\vec{q}_1(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2})} \vec{S}_{\vec{q}_1}$$

$$\vec{S}_{\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}} = \sum_{\vec{q}_2} e^{i\vec{q}_2(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2})} \vec{S}_{\vec{q}_2}$$

получим:

$$\begin{aligned} & -J \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{r}, \vec{a}} e^{i(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)\frac{\vec{a}}{2}} e^{i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)\vec{r}} [\vec{S}_{\vec{q}_1} \times \vec{S}_{\vec{q}_2}]_\gamma(\vec{a}, \nabla) \Omega^\gamma(\vec{r}) \\ & = -J \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{r}} e^{i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)\vec{r}} \nabla^\beta \Omega^\gamma(\vec{r}) \sum_{\vec{a}} e^{i(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)\frac{\vec{a}}{2}} a^\beta [\vec{S}_{\vec{q}_1} \times \vec{S}_{\vec{q}_2}]_\gamma \\ & = -J \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} i(q_1^2 - q_2^2) \left(\sum_{\vec{r}} e^{i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)\vec{r}} \Omega^\gamma(\vec{r}) \right) [\vec{S}_{\vec{q}_1} \times \vec{S}_{\vec{q}_2}]_\gamma C \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь мы воспользовались тем, что:

$$\sum_{\vec{a}} e^{i(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)\frac{\vec{a}}{2}} a^\beta \rightarrow i(q_1 - q_2)^\beta C$$

- справедливо при малых q

$$\sum_r e^{i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)\vec{r}} \nabla^\beta \Omega^\gamma(\vec{r}) \rightarrow -i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)^\beta \sum_r e^{i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)\vec{r}} \Omega^\gamma(\vec{r})$$

- аналог формулы интегрирования по частям

Далее, используя соотношения:

$$S_{\vec{q}}^x = \frac{1}{2}(S_{\vec{q}}^+ + S_{\vec{q}}^-) = \frac{\sqrt{2s}}{2} \sum_{r_j} e^{i\vec{q}\vec{r}_j} (a_j^+ + a_j) = \frac{\sqrt{2s}}{2} (a_{-\vec{q}}^+ + a_{\vec{q}})$$

$$S_{\vec{q}}^y = \frac{1}{2}(S_{\vec{q}}^+ - S_{\vec{q}}^-) = \frac{\sqrt{2s}}{2} \sum_{\vec{r}_j} e^{i\vec{q}\vec{r}_j} (a_j - a_j^+) = \frac{\sqrt{2s}}{2} (a_{\vec{q}} - a_{-\vec{q}}^+)$$

и подставляя известную уже зависимость $\vec{\Omega}(\vec{q})$ (8) в (9), получим выражение:

$$-JC \left(\sum_{\vec{q}} \frac{4\pi q r_0}{a^2} \cos \phi_q \sqrt{2s} (a_{\vec{q}} - a_{-\vec{q}}^+) + \sum_{\vec{q}} \frac{4\pi i q r_0}{a^2} \sin \phi_q \sqrt{2s} (a_{\vec{q}} + a_{-\vec{q}}^+) \right) = -\frac{\sqrt{2s} 4JC \pi r_0}{a^2} \sum_q (q^+ a_{\vec{q}} + q^- a_{-\vec{q}})$$

Где $q^+ = q^x + iq^y$, $q^- = q^x - iq^y$, a - размерный параметр, равный постоянной решетки, возникший при переходе от интегрирования к суммированию. Вычислим теперь первое слагаемое уравнения (2):

$$-J \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{r}} e^{i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)\vec{r}} \sum_{\vec{a}} e^{i\frac{\vec{a}}{2}(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)} \vec{S}_{\vec{q}_1} \vec{S}_{\vec{q}_2} = -J \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \sum_{\vec{a}} e^{i\frac{\vec{a}}{2}(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)} \vec{S}_{\vec{q}_1} \vec{S}_{\vec{q}_2} = -J \sum_{\vec{q}} \sum_{\vec{a}} e^{i\vec{q}\vec{a}} \vec{S}_{\vec{q}} \vec{S}_{-\vec{q}}$$

обозначим:

$$W(\vec{q}) = \sum_{\vec{a}} e^{i\vec{q}\vec{a}}$$

Для перехода к бозонным операторам проделаем те же вычисления, что в [6] с заменой $J(\vec{q})$ на $W(\vec{q})$, тогда для первого слагаемого (2) получим:

$$-\frac{1}{2} N J z s^2 - J s \sum_{\vec{q}} \sum_{\vec{a}} (1 - e^{i\vec{q}\vec{a}}) a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{q}} + \dots$$

тогда выражение для H примет вид:

$$H = -\frac{1}{2} N J z s^2 + J s \sum_{\vec{q}} \sum_{\vec{a}} (1 - e^{i\vec{q}\vec{a}}) a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{q}} + \frac{\sqrt{2s} 4JC \pi r_0}{a^2} \sum_{\vec{q}} (q^+ a_{\vec{q}} + q^- a_{\vec{q}}^+) + \dots$$

с учетом малости q можно записать:

$$\omega_{\vec{q}} = \sum_{\vec{a}} (1 - e^{i\vec{q}\vec{a}}) \simeq \sum_{\vec{a}} \left(-i\vec{q}\vec{a} + \frac{(\vec{q}, \vec{a})^2}{2} \right) = \frac{1}{2} q^\alpha q^\beta \sum_{\vec{a}} a^\alpha a^\beta \equiv C q^2$$

Следовательно

$$H = -\frac{1}{2} N J z s^2 + J C s \sum_{\vec{q}} q^2 a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{q}} - \frac{\sqrt{2s} 4\pi J C r_0}{a^2} \sum_{\vec{q}} (q^+ a_{\vec{q}} + q^- a_{\vec{q}}^+) + \dots$$

z - число ближайших соседей.

Аналогичным образом могут быть получены кубические члены по бозонам, но мы не будем приводить здесь эти вычисления. Наличие линейных членов в гамильтониане должно привести к важным последствиям, кратко перечисленным ниже, подробный анализ которых выходит за рамки этой работы.

3 Выводы и заключения

Показано, что в представлении вторичного квантования имеются неисчезающие линейные и кубические поправки по бозонным операторам (рождения и уничтожения магнонов). Наличие таких слагаемых обычно интерпретируется как неудачный выбор пробной волновой функции для основного состояния системы. В нашем случае такие линейные члены могут быть удалены из гамильтониана сдвижкой операторов на некоторое число:

$$a_{\vec{q}}^+ \rightarrow b_{\vec{q}}^+ + A \frac{q^+}{q^2}$$

$$a_{\vec{q}}^- \rightarrow b_{\vec{q}}^- + A \frac{q^-}{q^2}$$

где $A \equiv \frac{\sqrt{24\pi r_0}}{\sqrt{sa^2}}$, при $q \ll \frac{1}{r_0}$, которая приведет гамильтониан к виду:

$$H = -\frac{1}{2}NJzs^2 + JsC \sum_{\vec{q}} \left(q^2 b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}}^- - A^2 \right)$$

При такой сдвижке мы получаем определенный выигрыш в энергии, не нарушая коммутационных соотношений. Кроме того, получается некоторое "квантовое сокращение" величины равновесного спина даже при нуле температур, то есть в отсутствии бозонов. Следует отметить, что $A = A(\vec{q})$ на других масштабах q и должно обеспечить сходимость $\sum_{\vec{q}} A^2(\vec{q})$, для этого, возможно, следует учесть дополнительные стабилизирующие поправки к гамильтониану типа взаимодействия Дзялошинского - Мории.

Необходимость перехода к новому "истинному" основному состоянию напоминает ситуацию с квантовым антиферромагнетиком Гейзенберга. В той ситуации классическое Неелевское состояние также не обеспечивало минимум энергии, и истинный минимум получался при учете квантовой природы спина. Одновременно, учет квантовых флуктуаций приводил к уменьшению равновесного значения спина по сравнению с максимальным значением.

Мы применили подход к изучению гамильтониана скирмионной структуры методом вторичного квантования. Следует отметить, что все теоретические исследования в этой области ограничивались классическим рассмотрением, поэтому полученный результат должен рассматриваться как предварительный, который должен способствовать дальнейшему подробному теоретическому изучению.

Список литературы

1. X. Z. Yu et. al, Nature 465, 901 (2010)
2. А. Н. Богданов, Д. А. Яблонский, ЖЭТФ 68, 101 (1989)
3. U. K. Rössler et. al, Nature 442, 797 (2006)
4. А. А. Белавин, А. М. Поляков, ЖЭЕФ 22, 10 (1975)
5. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, Квантовая теория углового момента, (Наука, 1975)
6. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, Спиновые волны (Наука, 1967)
7. O. Petrova and O. Tchernyshyov, "Spin waves in a skyrmion crystal," Phys. Rev. B 84, 214433 (2011)