

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Довженко Глеб Денисович

**Применение группы автоморфизмов графов к  
компьютерному расчёту диаграмм Фейнмана**

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра

Научный руководитель: \_\_\_\_\_ д.ф.-м.н., профессор Л.Ц. Аджемян

Рецензент: \_\_\_\_\_ к.ф.-м.н., доцент М.В. Компаниец

Санкт-Петербург

2012

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>4</b>
2.1	Важность задачи . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Теоретическая преамбула</b>	<b>5</b>
3.1	Диаграммное разложение . . . . .	5
3.2	Явный вид функции Грина . . . . .	6
3.3	Операция дифференцирования по параметру модели $\tau$ . . . . .	6
3.4	Операция Sector Decomposition . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Номенклатура Никеля</b>	<b>10</b>
4.1	Построение номенклатуры . . . . .	10
4.2	Раскрашенные графы и цветная номенклатура Никеля . . . . .	11
4.3	Построение группы автоморфизмов графа . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Описание реализации и применения</b>	<b>13</b>
5.1	Описание программы . . . . .	13
5.2	Дифференцирование по $\tau$ при нулевых внешних импульсах . . . . .	13
5.3	Применение к Sector Decomposition . . . . .	14
	<b>Список литературы</b>	<b>16</b>

# 1 Введение

При решении задач стохастической динамики искомые величины представляются в виде бесконечных рядов разложений по константе связи, где коэффициентами ряда являются многократные интегралы, которые удобно представлять в виде диаграмм. При расчёте более высоких порядков, диаграмм становится слишком много для ручного счёта, и, таким образом, возникает необходимость в их компьютерной обработке. Решение некоторых задач, возникающих во время создания программного комплекса для компьютерной обработки диаграмм Фейнмана приведено в данной работе.

## 2 Постановка задачи

Реализовать алгоритм построения номенклатуры Никеля [2], а также алгоритм, приводящий симметрично подобные слагаемые для порёберных операций (т.е. таких  $L$ , для которых  $L\gamma = \sum_{E(\gamma)} Le$ , где  $\gamma$  — диаграмма,  $E(\gamma)$  — множество её рёбер,  $e$  — ребро) над диаграммами Фейнмана с нулевыми внешними импульсами. Применить второй алгоритм для операции дифференцирования по параметру модели  $\tau$  диаграмм, отвечающих теориям  $\varphi^n$ , и для операции Sector Decomposition [3].

### 2.1 Важность задачи

При счёте диаграммных рядов наиболее ресурсоёмким действием является непосредственное вычисление интегралов методом Монте-Карло. Следовательно, в рамках улучшения производительности встает задача об уменьшении количества интегралов и их упрощении. Приведение подобных членов в операции дифференцирования по  $\tau$  уменьшит количество интегралов. Операция Sector Decomposition позволяет извлекать полюса из фейнмановского представления диаграмм, что серьезно упрощает счёт по Монте-Карло, а приведение подобных слагаемых внутри неё уменьшит и количество интегралов в конечном выражении.

## 3 Теоретическая преамбула

### 3.1 Диаграммное разложение

Теориями  $\varphi^n$  называют те, которым отвечает действие вида

$$S = \frac{1}{2} (\varphi, K\varphi) + \frac{g\varphi^n}{n!}, \quad (1)$$

где  $K$  — симметричная квадратичная форма,  $g$  — константа связи. Первый член действия обозначают за  $S_0 = \frac{1}{2} (\varphi, K\varphi)$ , второй за  $V = g\varphi^n/n!$ . Усреднение по ансамблю в таких системах производится при помощи фейнмановского интеграла по траекториям:

$$\langle\langle f \rangle\rangle = \int \mathcal{D}\varphi f[\varphi] e^{-S[\varphi]}, \quad \langle\langle f \rangle\rangle_0 = \int \mathcal{D}\varphi f[\varphi] e^{-S_0[\varphi]} \quad (2)$$

$$\rho[\varphi] \equiv \frac{e^{-S[\varphi]}}{\langle\langle 1 \rangle\rangle}, \quad \rho_0[\varphi] \equiv \frac{e^{-S_0[\varphi]}}{\langle\langle 1 \rangle\rangle_0} \quad (3)$$

$$\langle f \rangle = \int \mathcal{D}\varphi f[\varphi] \rho[\varphi], \quad \langle f \rangle_0 = \int \mathcal{D}\varphi f[\varphi] \rho_0[\varphi]. \quad (4)$$

Одной из задач, возникающих в этих теориях, является нахождение парного коррелятора  $G(x_1 - x_2) = \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle$  по теории возмущений в виде ряда по константе связи. Делается это следующим образом:

$$\rho = \rho_0 \frac{e^{-V}}{\langle e^{-V} \rangle_0} = \rho_0 \frac{1 - V + \frac{1}{2}V^2 - \dots}{1 - \langle V \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle V^2 \rangle_0 - \dots} \quad (5)$$

Применим формулу для суммы ряда геометрической прогрессии:


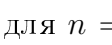

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - V + \frac{1}{2}V^2 - \dots \right) \cdot \left( 1 + \left( \langle V \rangle_0 - \frac{\langle V^2 \rangle_0}{2} + \dots \right) + \left( \langle V \rangle_0 - \frac{\langle V^2 \rangle_0}{2} + \dots \right)^2 + \dots \right) \quad (6)$$

Теперь, перегруппировав члены и обозначив  $\delta V \equiv \langle V \rangle_0 - V$ , получим

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \delta V + \frac{1}{2} ((\delta V)^2 - \langle (\delta V)^2 \rangle_0) - \dots \right) \quad (7)$$

Тогда для парного коррелятора  $G$  (обозначив  $\varphi_i \equiv \varphi(x_i)$ )

$$G(x_1 - x_2) = \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_0 - \langle \varphi_1 \varphi_2 \delta V \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle \varphi_1 \varphi_2 ((\delta V)^2 - \langle (\delta V)^2 \rangle_0) \rangle_0 - \dots \quad (8)$$

Это выражение удобно считать в диаграммном представлении по теореме Вика. Для этого обозначим  $V$  как вершину с  $n$  хвостами (например,  и  для  $n = 4$  и  $n = 3$  соответственно), а поле  $\varphi$  как хвост , и для теории  $\varphi^4$  получим

$$G(x_1 - x_2) = \text{---} - 12 \text{---} + 144 \text{---} + 144 \text{---} + 86 \text{---} + O(g^3) \quad (9)$$

Очевидно, что каждая диаграмма пропорциональна константе связи  $g$  в той степени, сколько вершин она содержит. Видно, что в выражении остались только связные диаграммы, т.е. такие, в которых из любой вершины существует путь по рёбрам в любую

другую. Более того, после определённых преобразований можно исключить из рассмотрения все диаграммы, которые не являются 1-неприводимыми, т.е. сохраняющими связность после удаления одного ребра. В дальнейшем нас интересуют только такие диаграммы. Кроме того, в силу специфики задач связанных с теорией критического поведения, нас интересуют только диаграммы с нулевыми внешними импульсами.

### 3.2 Явный вид функции Грина

Найдём явный вид парного коррелятора  $G^{(0)} = K^{-1} = \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle_0$ . Он отвечает следующему уравнению:

$$\int dx'' K(x, x'') G^{(0)}(x'', x') = \delta(x - x'). \quad (10)$$

Подставив явный вид квадратичной формы  $K$

$$K = \tau + \Delta, \quad (11)$$

и сделав преобразование Фурье, получим уравнение в импульсном представлении:

$$(k^2 + \tau) G^{(0)}(k) = 1, \quad (12)$$

отсюда явный вид  $G^{(0)}$

$$G^{(0)}(k) = \frac{1}{k^2 + \tau}. \quad (13)$$

### 3.3 Операция дифференцирования по параметру модели $\tau$

Одной из задач, возникающих в данных теориях, является нахождение РГ-функций. РГ-функции представляются в виде диаграммных рядов, и для их нахождения требуется дифференцировать диаграммы по  $\tau$ . Поскольку в импульсном представлении диаграммы имеют вид свёрток нескольких функций  $G^{(0)}$ , производная по  $\tau$  от диаграммы равняется сумме диаграмм с продифференцированными по  $\tau$  отдельными рёбрами. Далее, поскольку

$$\partial_\tau G^{(0)}(k) = -\frac{1}{(k^2 + \tau)^2} = -(G^{(0)}(k))^2, \quad (14)$$

дифференцирование ребра эквивалентно «втыканию» в него вершины. То есть, например

$$\partial_\tau \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] = -4 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} - 2 \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \quad (15)$$

Подразумевается дифференцирование ампутированной диаграммы с нулевыми внешними импульсами (последнее в этом примере неважно: в двухвостках симметрии сохраняются независимо от значения протекающего импульса, поскольку всё равно импульс в одном хвосте равен импульсу в другом).

В (15) уже учтены симметрии диаграммы. Нет разницы между, например, диаграммами

и , поскольку выражения отвечающие им, отличаются только переобозначением внутренних (т.е. тех, по которым идёт интегрирование) импульсов. Равные диаграммы после дифференцирования по разным рёбрам могут получиться ещё в одном случае: когда дифференцирование идёт по рёбрам с одинаковым импульсом. Тогда внешний вид диаграмм будет разный, но выражения, отвечающие им, будут равны. Показательным примером в таком случае является диаграмма приведённая на рисунке 1



Рис. 1: Диаграмма  $e_{12} - e_3 - 4_4 - 5_5 - 5$

Дифференцирование по рёбрам  $(0, 2)$ ,  $(4, 5)$  и  $(1, 3)$ , даст одинаковый результат, поскольку рёбра  $(0, 2)$  и  $(1, 3)$  симметричны, а благодаря законам сохранения импульса в вершинах 2, 4, 3, 5 через них течёт тот же импульс, что и через  $(4, 5)$ .

### 3.4 Операция Sector Decomposition

Для многопетлевых диаграмм большое значение имеет извлечение полюсов по параметру  $\varepsilon$  отклонения размерности пространства  $d$  от критической  $d_c$ . Для теории  $\varphi^4$   $d_c = 4$  и  $2\varepsilon = 4 - d$ . Методика Sector Decomposition используется для такого извлечения, хотя изначально эта процедура была придумана для доказательства ренормируемости теорий по схеме Боголюбова-Парасюка. Однако на момент изобретения операция была слишком сложна для счёта диаграмм и извлечения полюсов, поскольку даже для трёхпетлевых диаграмм секторов получается слишком много для ручного счёта. Сейчас же, с развитием компьютерных технологий, её стало возможно реализовать.

Приведём пример использования процедуры. Рассмотрим диаграмму в фейнмановском представлении в размерности  $d$ :

$$= \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{2d}} G^2(\mathbf{k}_1) G(\mathbf{k}_2) G(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \quad (16)$$

$$\frac{3 \cdot \pi^{1/2-d}}{2^{1+2d} \cdot \tau^{4-d}} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \frac{u_1 \delta(1 - u_1 - u_2 - u_3)}{(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3)^{d/2}} \quad (17)$$

Определим  $\mathcal{J}$  как

$$\mathcal{J} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \frac{u_1 \delta(1 - u_1 - u_2 - u_3)}{(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3)^{2-\varepsilon}}, \quad (18)$$

подставив размерность  $d = 4 - 2\varepsilon$ . Теперь выберем сектор, то есть часть области интегрирования, в которой одна из переменных  $u_j$  будет больше всех остальных, и произведём замену вида  $u_i = u_j \cdot u'_i$  для всех  $j \neq i$ . Якобиан такой замены, очевидно, будет равен  $u_j^{n-1}$ ,

где  $n$  — число переменных интегрирования. Возьмём  $j = 1$ :

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2' du_3' \frac{u_1^3 \delta(1 - u_1(1 + u_2' + u_3'))}{u_1^{4-2\epsilon} (u_2' + u_3' + u_2' u_3')^{2-\epsilon}}. \quad (19)$$

Ясно, что полный  $\mathcal{J}$  будет состоять из 3 таких секторов, то есть  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3$ . Теперь воспользуемся свойством дельта-функции

$$\delta(1 - u_1(1 + u_2' + u_3')) = \frac{1}{1 + u_2' + u_3'} \cdot \delta\left(u_1 - \frac{1}{1 + u_2' + u_3'}\right) \quad (20)$$

и вернёмся к старым обозначениям, чтобы не усложнять формулу штрихами:  $u_2' = u_2$ ,  $u_3' = u_3$

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \frac{\delta\left(u_1 - \frac{1}{1+u_2+u_3}\right)}{(1 + u_2 + u_3) u_1^{1-2\epsilon} (u_2 + u_3 + u_2 u_3)^{2-\epsilon}}. \quad (21)$$

Важный момент: поскольку каждая переменная  $u_i \in [0, 1]$ , ноль аргумента дельта-функции точно реализуется в области интегрирования, а значит можно снять интеграл по  $u_1$

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 \frac{(1 + u_2 + u_3)^{-2\epsilon}}{(u_2 + u_3 + u_2 u_3)^{2-\epsilon}}. \quad (22)$$

Теперь можно по аналогии выбрать сектора  $\mathcal{J}_{12}$  и  $\mathcal{J}_{13}$ , которые будут равны просто в силу симметрии выражения, сделать аналогичную замену и получить

$$\mathcal{J}_{12} = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 \frac{(1 + u_2 + u_2 u_3)^{-2\epsilon}}{u_2^{1-\epsilon} (1 + u_3 + u_2 u_3)^{2-\epsilon}}. \quad (23)$$

Видно, что мы «вытащили» сингулярность по  $u_2$ , представив подынтегральное выражение в виде произведения  $u_2^\epsilon/u_2$  и функции, которая полюсов в области интегрирования не содержит. Далее, поскольку верно, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 \frac{f(u_2, u_3)}{u_2^{1-\epsilon}} &= \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 \frac{f(u_2, u_3) - f(0, u_3) + f(0, u_3)}{u_2^{1-\epsilon}} = \\ &= \int_0^1 du_3 \left( \frac{f(0, u_3)}{\epsilon} + \int_0^1 \int_0^1 du_2 da (u_2^\epsilon \cdot f(au_2, u_3))'_a \right), \end{aligned} \quad (24)$$

и поскольку  $\epsilon \rightarrow +0$ , получается, что можно «вытащить» из выражения для  $\mathcal{J}_1$  все сингулярности по размерности пространства  $\epsilon$ . Правая часть последнего выражения полюсов уже не содержит и интегрироваться по Монте-Карло будет легко.

Для  $\mathcal{J}_2$  и  $\mathcal{J}_3$  можно сделать то же самое по аналогии. Поскольку они приводятся друг к другу переобозначением переменных интегрирования  $u_2$  и  $u_3$ , они равны. При этом

$$\mathcal{J}_{21} = \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_3 \frac{u_1^\epsilon (1 + u_1 + u_1 u_3)^{-2\epsilon}}{(1 + u_3 + u_1 u_3)^{2-\epsilon}} \quad (25)$$



$$\mathcal{J}_{23} = \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_3 \frac{u_1 u_3^\epsilon (1 + u_3 + u_1 u_3)^{-2\epsilon}}{(1 + u_1 + u_1 u_3)^{2-\epsilon}} \quad (26)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} &= \frac{3 \cdot \pi^{1/2-d}}{2^{2d} \cdot \tau^{4-d}} \cdot \left[ \frac{1}{\epsilon(1-\epsilon)} (1 - 2^{-(1-\epsilon)}) + \right. \\ &\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 da \left( \frac{\partial}{\partial a} \frac{u_2^\epsilon (1 + a u_2 + a u_2 u_3)^{-2\epsilon}}{(1 + u_3 + a u_2 u_3)^{2-\epsilon}} \right) + \\ &\left. \int_0^1 \int_0^1 du_1 du_3 \frac{u_1^\epsilon (u_3 + 1)(1 + u_1 + u_1 u_3)^{-2\epsilon}}{(1 + u_3 + u_1 u_3)^{2-\epsilon}} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

Видно, что теперь вся сингулярность по  $\epsilon$  сосредоточена в 1 члене, а 2 и 3 члены легко считаются, если не вручную, то, во всяком случае, по методу Монте-Карло, потому что подынтегральные выражения «хорошие» и никаких сингулярностей не содержат.

Естественно эта процедура не является панацеей, и вместо полюсов в подынтегральном выражении мы заработали дополнительное дифференцирование (символьные вычисления достаточно ресурсоёмки) и интегрирование по  $a$  (в случае большего числа петель и параметров типа  $a$  будет больше), и само количество интегралов увеличилось за счёт разбиения на сектора, но практический счёт показывает, что такой способ эффективнее лобового.

## 4 Номенклатура Никеля

### 4.1 Построение номенклатуры

В выражении (9) ряд написан только до 2 порядка по  $g$ . При расчёте более высоких порядков разложения количество диаграмм значительно возрастает. Кроме того, вычисление каждой диаграммы — весьма трудоёмкий процесс, что вынуждает прибегнуть к компьютерной обработке. Одна из первых проблем, возникающих при написании программы — хранение диаграмм. Проблема заключается в том, что для хранения графа его вершины необходимо пронумеровать, и каким-то образом (например, с помощью матрицы или списка смежности) записать его структуру. В то же время нас интересуют свободные графы, а равенство свободных графов, как показано на рисунке 2, не равносильно равенству пронумерованных.



Рис. 2: Свободные графы равны, в то время как пронумерованные — нет.

Решением является хранение диаграммы в виде, предложенном Никелем в [2]. В статье приводится алгоритм взаимно однозначного сопоставления свободному графу числовой комбинации. Состоит он в следующем:

- Нумеруем вершины свободного графа.
- Рассматривая вершины в порядке возрастания номеров, для каждой выписываем номера вершин, смежных с ней, причём только те, чьи номера больше номера рассматриваемой и внешние. Внешние ребра записываем как оканчивающиеся на вершине с номером  $e = 0$ .
- Полученную последовательность чисел рассматриваем как число в подходящей (основание которой больше числа вершин) системе счисления.
- Перебирая все пронумерованные графы, соответствующие исходному свободному, выбираем тот, которому соответствует наименьшее число. Это число и есть номенклатура Никеля исходного графа.

Пример построения номенклатуры Никеля приведён на рисунке 3:

$$0(2, 3)23 - 33$$

Рис. 3: Построение номенклатуры Никеля для  $e_{12} - e_3 - 33$

В приведённом на Рис.2 примере мы сразу угадали нумерацию, для которой номенклатура получается наименьшей, однако в реальности это удаётся не всегда, а при компьютерном счёте приходится перебирать все возможные варианты. Оптимальностью этого перебора определяется сложность алгоритма построения номенклатуры. С помощью прохождения графа в ширину удалось уменьшить сложность алгоритма с  $O(n!)$ , как указано в [2], до  $O(e \cdot (v - 1)^{n-2})$ , где  $n$  — число вершин,  $v$  — степень, а  $e$  — количество внешних рёбер у диаграммы.

## 4.2 Раскрашенные графы и цветная номенклатура Никеля

В динамических моделях и моделях с несколькими полями у диаграмм бывают рёбра нескольких типов. Будем называть в дальнейшем разные типы рёбер цветами (это удобно, поскольку в теории графов много внимания уделяется задачам, связанным с раскрашиванием рёбер и вершин). Если ввести упорядочение на множестве цветов, то можно построить «цветную» номенклатуру Никеля по аналогии с обычной, просто дописывая после каждого ребра его цвет (для удобства чтения — в скобках). Обозначив чёрный цвет за 0, а красный, синий и зелёный за 1, 2 и 3 соответственно, приведём пример:

$$\mathfrak{e}(0(0)1(3)2(2)3(1)3(2) - e(0)3(1)$$

Рис. 4: Построение номенклатуры Никеля для  $e(0)1(1)2(3) - 3(1)3(2) - e(0)3(1)$

Обратим внимание, что здесь нумерация вершин, отвечающая наименьшей номенклатуре, отличается от нумерации для нераскрашенного графа, приведённой в предыдущем пункте: если бы нумерация осталась прежней, номенклатура была бы  $e(0)1(3)2(1) - e(0)3(1) - 3(1)3(2)$ , а это число больше, чем приведённое на рисунке 4.

## 4.3 Построение группы автоморфизмов графа

Для того, чтобы построить номенклатуру Никеля, необходимо перебрать все возможные нумерации вершин графа. Но совсем необязательно разные нумерации будут отвечать разным номенклатурам. Например, для того же графа, который рассматривался в предыдущих двух примерах, нумерации, показанные на рисунке 5, будут отвечать одной и той же номенклатуре  $e12 - e3 - 33$ .



Рис. 5: Пример различных нумераций, отвечающих одинаковым номенклатурам.

Можно заметить, что в этих двух нумерациях два разных ребра имеют одно и то же обозначение  $(0, 2)$ . Это значит, что эти рёбра *симметрично эквивалентны*. Два ребра бу-

дем называть симметрично эквивалентными, если существует такой автоморфизм графа, при котором эти два ребра будут иметь один и тот же номер.

Поскольку если перебрать все возможные нумерации вершин, и выбрать из них те, что дадут наименьшую номенклатуру, мы получим группу автоморфизмов графа, номенклатура Никеля в процессе построения даёт информацию о всех симметрично эквивалентных рёбрах графа, на чём и базируется алгоритм приведения симметрично подобных слагаемых в порёберных операциях.

## 5 Описание реализации и применения

### 5.1 Описание программы

В качестве решения поставленной задачи была написана программа на языке C++, считающая номенклатуры Никеля для раскрашенных и нераскрашенных диаграмм. Как было сказано в предыдущем пункте, одновременно с этим строится группа автоморфизмов графа, с помощью которой можно привести подобные члены в операции дифференцирования по температуре.

С помощью номенклатуры Никеля для раскрашенного графа можно привести подобные слагаемые в операции Sector Decomposition. Делается это следующим образом: для того, чтобы в знаменателе подынтегрального выражения фейнмановского представления получилось выражение вида  $1 + \sum_{\{\alpha\}} u^\alpha$ , где  $\{\alpha\}$  — множество мульти-индексов, среди которых нет нулевого, в общем случае нужно сделать декомпозиции по числу переменных, равному количеству свободных импульсов в графе. Поскольку каждый фейнмановский параметр сопоставляется ребру диаграммы, такие декомпозиции эквивалентны покраске графа в количество цветов, равное количеству импульсов интегрирования, и интегралы по двум секторам заведомо равны, если равны номенклатуры Никеля для диаграммы, покрашенной отвечающими им двумя способами.

### 5.2 Дифференцирование по $\tau$ при нулевых внешних импульсах

Программа демонстрирует хорошие показатели скорости, строя номенклатуры и дифференцируя 400 5-петлевых диаграмм при нулевых внешних импульсах за полторы минуты на настольном ПК.

Пример вывода программы:

$$\begin{aligned} d/dT[e12-33-45-6-77-88-e9-9-9] &= 4 * [e12-33-4-5-67-e8-99-AA-9A] \\ &+ 2 * [e12-34-56-4-7-88-99-eA-A-A] + 4 * [e12-33-45-6-77-89-eA-A-9-A] \\ &+ 4 * [e12-33-45-6-77-8-e9-9-AA-A] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d/dT[e12-33-44-5-6-e7-78-9-99] &= 1 * [e12-33-44-5-6-e7-89-8A--AA] \\ &+ 5 * [e12-33-44-5-6-e7-89-8-A-AA] + 2 * [e12-33-45-6-57--89-e8-A-AA] \\ &+ 2 * [e12-33-44-5-6-e7-78-9-9A-A] + 2 * [e12-33-44-5-6-e7-78-9-AA-A] \\ &+ 2 * [e12-33-45-6-57--e8-89-A-AA] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d/dT[e12-34-56-77-78-89-99--e] &= 2 * [e12-34-56-77-78-99-A--eA-A] \\ &+ 4 * [e12-34-5-66-67-89--e8-A-AA] + 4 * [e12-34-56-77-78-89-9A--e-A] \\ &+ 4 * [e12-34-56-77-78-89-A--e-AA] \end{aligned}$$

И начальное выражение, и результаты дифференцирования для удобства записаны в виде номенклатур Никеля, числа больше 9 записаны, по аналогии с 16-ричной системой счисления, заглавными латинскими буквами.

### 5.3 Применение к Sector Decomposition

В статьях [4], [5] приведены результаты (количества получающихся секторов) для известных на данный момент стратегий разбиения. Суть стратегий заключается в том, чтобы с как можно меньшим количеством секторов (т.е. результирующих интегралов) привести полином в знаменателе фейнмановского представления диаграммы к виду

$$\text{моном} \cdot (1 + \text{полином без члена нулевой степени}), \quad (28)$$

то есть вытащить расходимость интеграла в явном виде.

В приведённых примерах рассматриваются диаграммы с произвольными внешними импульсами, а в данной работе считаются симметрии диаграмм с нулевыми, поэтому будет корректно сравнивать только результаты для двуххвосток, поскольку у диаграмм с большим числом хвостов при переходе от нулевых внешних импульсов к произвольным количество симметрий уменьшается.

Результаты [4] для диаграмм «Bubble» и «TBubble» для стратегий A, B, C, X приведены в таблице ниже, сами диаграммы приведены на рисунке. Последний столбец в таблице — число симметрийно неэквивалентных раскрасок для данной диаграммы, т.е. наибольшее возможное количество неэквивалентных секторов. Приведённые числа не являются количеством секторов для какой-то конкретной стратегии, это просто верхняя граница количества вкладов в результирующем выражении после учёта симметрий.

Рис. 6: Диаграммы «Bubble» и «TBubble».

Диаграмма	A	B	C	X	Учёт симметрий
«Bubble»	2	2	2	2	1
«TBubble»	58	48	48	48	5

Таблица 1: Сравнение результатов приведённых в [4] с полученными при помощи учёта симметрий.

Поскольку результаты из [4], приведённые в таблице выше, построены для диаграмм с ненулевыми внешними импульсами, более корректно будет, воспользовавшись программой созданной авторами статьи, рассмотреть собственные примеры диаграмм с нулевыми импульсами. Вот некоторые из них:

Диаграмма	A	B	C	X	Учёт симметрий
$ee12 - e22 - e$	6	6	6	-	-
$e112 - 22 - e$	55	48	48	-	-
$e123 - e23 - e3 - e$	251	102	102	-	-
$ee12 - e34 - 334 - e - ee$	52	46	46	-	-
$ee12 - 223 - 3 - ee$	24	24	24	24	-

Таблица 2: Сравнение результатов работы программы [4] с полученными при помощи учёта симметрий.

Аналогичные результаты [5] для диаграмм m61, m62, m63 для стратегий S, X приведены в таблице ниже.

m61                      m62                      m63

Рис. 7: Диаграммы m61, m62, m63.

Диаграмма	S	X	Учёт симметрий
m61	26208	32620	1980
m62	26304	27540	1980
m63	27336	failed	3960

Таблица 3: Сравнение результатов [5] с полученными при помощи учёта симметрий.

Пометка failed у стратегии X для диаграммы m63 означает, что программа не смогла сосчитать все сектора за приемлемое время. Это нормально, поскольку алгоритм отвечающий ей завершается не для всех диаграмм.

Видно, что количество секторов уменьшается от 2 до 10-15 раз. Конечно, существуют диаграммы и без симметрий, для которых учёт подобных вкладов вообще не даст уменьшения количества секторов, но их мало по сравнению с остальными, и в среднем выходит, что учёт симметрий вносит значительное упрощение в счёт диаграмм.

## Список литературы

- [1] ВАСИЛЬЕВ А.Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. – Издательство ПИЯФ, Санкт-Петербург, 1998.
- [2] BERNHARD G. NICKEL, DANIEL I. MEIRON, GEORGE A. BAKER JR Compilation of 2-pt. and 4-pt. graphs for continuous spin models. – University of Guelph Report, 1997.
- [3] GUDRUN HEINRICH Sector Decomposition – Int.J.Mod.Phys.A23:1457-1486,2008
- [4] CHRISTIAN BOGNER, STEFAN WEINZIERL Resolution of singularities for multi-loop integral – Comput.Phys.Commun.178:596-610,2008
- [5] A.V. SMIRNOV, V.A. SMIRNOV Hepp and Speer Sectors within Modern Strategies of Sector Decomposition – JHEP 0905:004,2009