

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Физический Факультет
Кафедра статистической физики

Никитина Маргарита Александровна

**Функция Грина поля смещений в
упругом полупространстве для
источника в виде гармонической
СИЛЫ.**

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
А. Ю. Вальков

Рецензент:
д.ф.-м.н., профессор
В. П. Романов

Санкт-Петербург
2011

Оглавление

Введение	2
1 Исходные уравнения	5
1.1 Уравнения движения в упругой среде для смещения и функции Грина, граничные условия	5
1.2 Три типа волн, их векторы поляризации	6
1.3 Поле точечного источника в однородной неограниченной среде	8
1.4 Формула Стокса в (\mathbf{R}, t) представлении	8
1.5 Задача о микроземлетрясениях на острове Валаам	9
2 Функция Грина для полупространства	11
2.1 Нормальные моды	11
2.2 Матричный способ нахождения \hat{G}_b	12
2.3 Построение ФГ как $\hat{G}_0 + \hat{G}_b$	17
2.4 Разные типы вкладов	19
3 Дальняя зона	21
3.1 Функция Грина \hat{G}_0 в (\mathbf{R}, ω)	21
3.2 Асимптотическое вычисление интеграла	21
3.3 Получение F_{mj}	22
4 Ближняя зона	25
4.1 Решение Кельвина	25
4.2 Случай полупространства	25
5 Волна Релея	27
5.1 Релеевский полюс	27
5.2 Дальняя зона	28
Заключение	28
Приложения	30
Приложение 1	31
Приложение 2	32
Приложение 3	32
Приложение 4	33

Введение

Особое место в геофизических исследованиях занимает анализ распространения упругих волн в Земле. В частности, именно этот метод позволяет получить информацию об источнике землетрясений, строении земной коры, так же о таких явлениях как подвижках плит, зонах субдукций и т.д. Методы сейсмологии часто являются самыми эффективными для поиска полезных ископаемых, особенно залегающих на больших глубинах. Эти методы также широко используются при проведении строительных работ, анализе структуры грунтов, выявления неоднородностей, пустот и т.д [1].

Сейсмические волны давно служат предметом изучения, и область их применения расширяется. Землетрясения возбуждают волны в грандиознейших масштабах; причем поверхностные волны наблюдаются и после того, как они несколько раз обходят вокруг Земли. Их систематическое изучение имеет большое значения для обеспечения безопасности населения, а так же для научного исследования строения и эволюции Земли. Источником естественного шума и микросейсм часто являются шумы на море. Искусственно возбуждаемые сейсмически волны дают информацию о конфигурации слоев в породах для нефтяной и газовой разведки и в меньшем масштабе информацию о прочности её поверхностных слоев для инженерных целей. Все эти процессы могут быть поняты только тогда, когда зарегистрированные сигналы будут должным образом истолкованы в терминах истинного движения грунта в области приемника. На основе практических условий было сформулировано множество задач.

Строгий математический подход к решению задач о распространении сейсмических волн, безусловно, обеспечивает частичное понимание физики волновых процессов. Успехи достигнутые в математике в течение многих лет, привели к появлению большого количества теоретических работ, связанных с сейсмологией землетрясений, распространением волн и т.д.

Возбуждение упругих волн рассматривается вначале с наиболее элементарного источника, а именно с точечных сил, действующих в однородной среде. На основе изучения волновых полей от таких простых источников рассматривается задача излучения волн, когда силы приложены к плоским границам или в пространстве [2]. Для расчета некоторых более сложных источников используется принцип взаимности [3].

Одним из фундаментальных результатов статической теории упругости стало решение Кельвина [4] для точечной силы в пространстве твердого тела. Хорошо известно, что изменение напряжения для большого числа задач может быть получено из решения Кельвина методом суперпозиции полей. Для примера, задача, которая была решена впервые Ламэ, о сферической емкости на которую как изнутри так и снаружи действует давление, решение её можно получить методом суперпозиции решения Кельвина. Для начала мы получим из его решения, двойную силу, это пара эквивалентных сил направленных в противоположную сторону — диполь. Тройка

таких векторов, перпендикулярных друг другу, — это центр расширения.

В след за этим была решена классическая задача Буссенеска-Церрути [5, 6] о том, что точечная сила действует на плоской поверхности полупространства. Известно, что решение этой задачи так же может быть получено из решения Кельвина.

Так же это решение может использоваться в изучении напряжения от точечной силы внутри полупространства — это задача Миндлина [7].

Однако динамические задачи оказались куда более сложными, и точное решение было получено только для случая пространства Стоксом [8]. Для полупространства уже невозможно получить точное решение только в интегральной форме.

Данная работа посвящена изучению поля смещений от гармонического источника в пространстве и в полупространстве, заполненном однородной изотропной упругой средой. Считается, что источник точечный, то есть мал по сравнению с расстоянием до приемника и так же мал по сравнению с характерными размерами пространства. Так же в ней будет рассмотрено вычисление векторного поля точечного источника, т.е. получение тензорной функции Грина волнового уравнения упругой среды.

Глава 1

Исходные уравнения

Аналитический подход к исследованию сейсмических колебаний в Земле должен содержать по крайней мере три следующие компоненты: описание сейсмических источников, уравнения движения, распространяющегося в среде после того, как в каком-либо месте оно возникло, и теорию, связывающую описание источника с частным решением, найденным для уравнений движения.

1.1 Уравнения движения в упругой среде для смещения и функции Грина, граничные условия

Как только произошло возмущение упругой среды в какой-либо её части, оно начинает распространяться в остальную часть среды согласно уравнению движения:

$$\rho(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} + F_\alpha, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — вектор смещения в точке \mathbf{r} в момент времени t , F_α — это сила, приложенная к единице объема, ρ — плотность и $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений. Это распространение происходит в форме волнового движения с конечной скоростью[9].

По повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование. Тензор напряжений $\hat{\sigma}$ и тензор деформации

$$\mathbf{u}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \mathbf{u}_\beta}{\partial r_\alpha} \right) \quad (1.2)$$

связаны линейным соотношением

$$\sigma_{\alpha\beta} = K(\mathbf{r}) u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu(\mathbf{r}) \left(u_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma\gamma} \right), \quad (1.3)$$

которое соответствует закону Гука[10]. Здесь скалярные величины $K(\mathbf{r})$ — модуль сжатия, а $\mu(\mathbf{r})$ — модуль сдвига.

Для анализа волнового поля в реальных средах необходимо учитывать наличие границ между средами с разными упругими постоянными и свободную поверхность. На границе S двух однородных сред из условия отсутствия деформации получаем два непрерывных граничных условия :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})|_{s_-} = \mathbf{u}(\mathbf{r})|_{s_+}, \quad (1.4)$$

$$\hat{\sigma}\mathbf{n}|_{s_-} = \hat{\sigma}\mathbf{n}|_{s_+}, \quad (1.5)$$

где \mathbf{n} вектор нормали к границе S . Первое выражение соответствует непрерывности вектора смещения, а второе отвечает за равенство давлений с обеих сторон S_+ и S_- на границе[9].

В случае, когда упругая среда граничит с вакуумом, вместо двух условий (1.4) остается только одно граничное условие, выражающее тот факт, что давление на границу со стороны вакуума, должно равняться нулю:

$$\hat{\sigma}\mathbf{n}|_S = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

1.2 Три типа волн, их векторы поляризации

Среду называют упругой, если она обладает естественным состоянием (когда деформации и напряжения равны нулю), к которому возвращается, если устранить приложенные силы. Под влиянием приложенных нагрузок происходит изменение и напряжений, и деформаций; связь между ними, называемая «определяющим соотношением», является важной характеристикой среды.

В однородном пространстве плотность и упругие параметры постоянны:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho, \quad K(\mathbf{r}) = K, \quad \mu(\mathbf{r}) = \mu. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.2)—(1.7) в (1.1) с учетом

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$$

получим волновое уравнение для упругих колебаний в однородной изотропной среде,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (1.8)$$

где

$$c_l = \sqrt{\frac{3K + 4\mu}{3\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.9)$$

— скорости поперечной и продольной волн в среде, соответственно [11]. Скорость продольной волны всегда больше поперечной.

Уравнение (1.8) в неограниченной среде имеет два хорошо известных решения в виде плоских гармонических волн (нормальные моды)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.10)$$

где вектор \mathbf{k} определяет направление распространения волны, а вектор \mathbf{A} — «векторная амплитуда», которая показывает направление смещения в волне, или её поляризацию.

- Первое решение — продольная волна, характеризуемая условиями

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_l \parallel \mathbf{k}, \quad k^2 = k_l^2 \equiv \frac{\omega^2}{c_l^2}, \quad (1.11)$$

здесь и далее будет обозначаться индексом l . Это условие $\mathbf{A} \parallel \mathbf{k}$ задает однозначно волну. В терминах сейсмологии это волна — P [11].

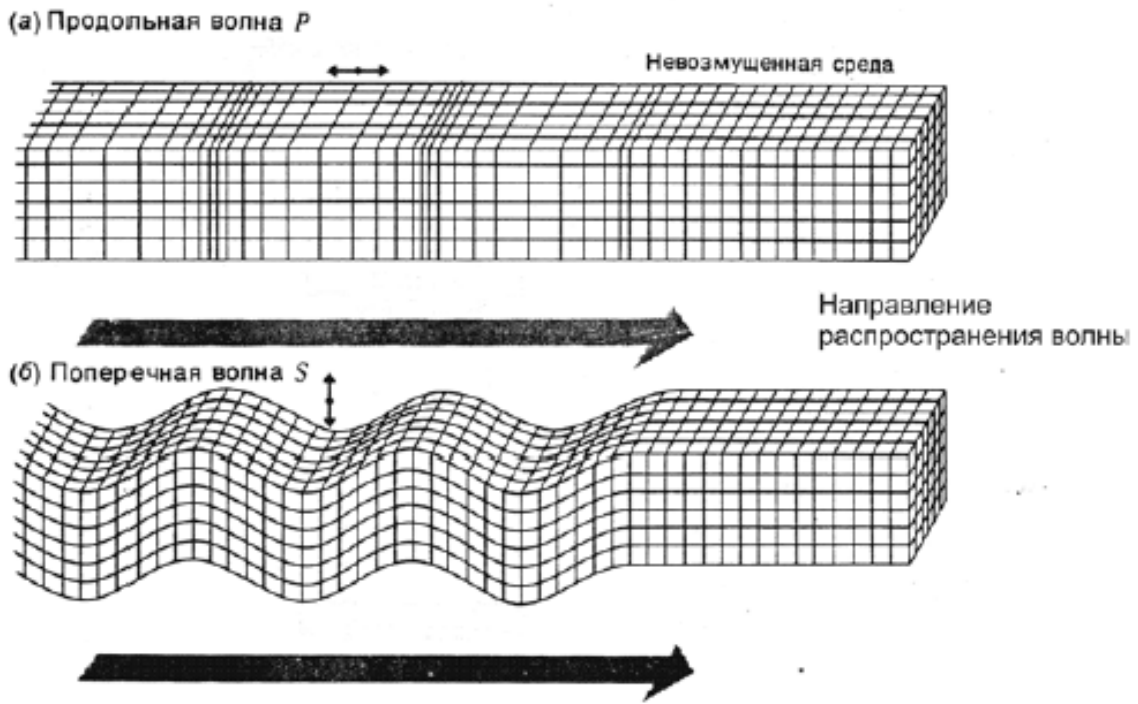


Рис. 1.1: Движение в продольной и поперечной волнах.

- Второе решение — поперечная волна, задается условиями

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_t \perp \mathbf{k}, \quad k^2 = k_t^2 \equiv \frac{\omega^2}{c_t^2}, \quad (1.12)$$

и будет обозначаться индексом t . Как видно из условия $\mathbf{A} \perp \mathbf{k}$ мы получаем две продольные волны, в терминах сейсмологии это волны: SH и SV. Если волна поляризована в плоскости распространения волны, то это волна SV, а если волна поляризована линейно, то это волна SH [11].

Поляризации волн показаны на рисунке 1.2.

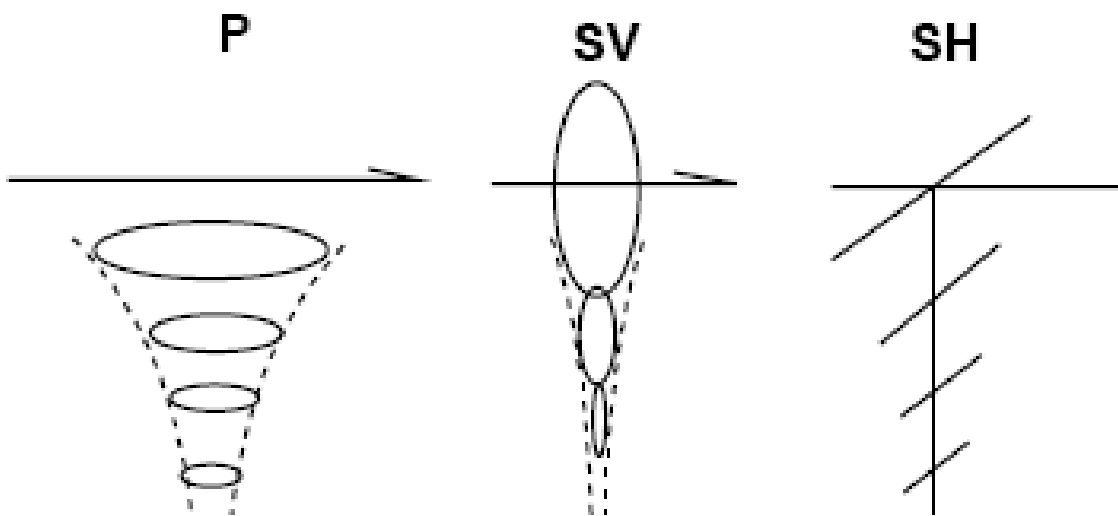


Рис. 1.2: Движение частиц в волнах P, SV и SH.

1.3 Поле точечного источника в однородной неограниченной среде

Рассмотрим точечный источник гармонических колебаний с частотой ω в точке \mathbf{r}' . Поле такого источника описывается функцией Грина $\hat{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{t} - \mathbf{t}')$, которая удовлетворяет уравнению для изотропной среды:

$$\left[\rho(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (C_{\alpha\beta\gamma\zeta}) \frac{\partial}{\partial r_\zeta} \right] G_{\gamma\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{t} - \mathbf{t}') = \delta_{\alpha\eta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{t} - \mathbf{t}'), \quad (1.13)$$

где

$$C_{\alpha\beta\gamma\zeta} = K \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\zeta} + \mu (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\zeta} + \delta_{\alpha\zeta} \delta_{\beta\gamma} - 2/3 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\zeta}), \quad (1.14)$$

а \mathbf{t}' — время в источнике, \mathbf{r}' — радиус вектор источника [9, 12]. Так как мы рассматриваем только случай жесткой границы (т.е. граничные условия не зависят от времени), то функция Грина может зависеть от \mathbf{t} и \mathbf{t}' , только как разность, т.е. $\hat{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{t} - \mathbf{t}')$, что является соотношением взаимности для времен источника и приемника. Часто используются другие представления функции Грина напомним формулы для их получения:

- (\mathbf{r}, ω) — представление :

$$\int \hat{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{t}) e^{i\omega \mathbf{t}} d\mathbf{r} = \hat{G}_0(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.15)$$

- (\mathbf{q}, ω) — представление :

$$\int \hat{G}_0(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \hat{G}_0(\mathbf{q}, \omega) \quad (1.16)$$

- (\mathbf{q}_\perp, z) — представление :

$$\int \hat{G}_0(\mathbf{r}_\perp, z, \omega) e^{-i\mathbf{q}_\perp \mathbf{r}_\perp} d\mathbf{r}_\perp = \hat{G}_0(\mathbf{q}_\perp, z, \omega) \quad (1.17)$$

1.4 Формула Стокса в (\mathbf{R}, \mathbf{t}) представлении

Решение для уравнения движения (1.13) было получено Стоксом в 1849 [13]. Вывод формулы будет приведен в приложении 1. Обсудим полученный результат.

$$G_{ij} = t \frac{-\delta_{ij} + 3\gamma_i \gamma_j}{4\pi r^3} \chi_{[\frac{r}{c_t}, \frac{r}{c_l}]}(t) + \frac{\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j}{4\pi r c_l^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_t}\right) + \frac{\gamma_i \gamma_j}{4\pi r c_l^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_l}\right), \quad (1.18)$$

где $\chi = \int_{\frac{r}{c_l}}^{\frac{r}{c_t}} \tau \delta(t - \tau) d\tau$ — это индикаторная функция, $\gamma_i = \frac{r_i - r'_i}{r}$. Эта формула дает одно из наиболее важных решений задачи об излучении упругих волн; исследуем его основные свойства.

Относительная величина различных членов функции Грина зависит от расстояния r между источником и приемником. Так первое слагаемое в формуле изменяется как r^{-2} для источников, в интервале $[\frac{r}{c_l}, \frac{r}{c_t}]$. Но остальные слагаемые пропорциональны r^{-1} . То есть первое слагаемое отвечает ближней зоне, а второе и третье дальней зоне [13].

Это же решение можно переписать в других представлениях

- Это представление (\mathbf{q}, ω) :

$$\hat{G}_0(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{q^2 - k_t^2} \left(\frac{\hat{1}}{c_t^2} - \frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}}{\omega^2} \right) + \frac{1}{q^2 - k_t^2} \frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}}{\omega^2}. \quad (1.19)$$

- Это представление (\mathbf{r}, ω) :

$$\begin{aligned} \hat{G}_0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{c_t^2} \frac{e^{ik_t r}}{4\pi r} & \left[\left(\hat{1} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) + \left(\frac{i}{k_t r} - \frac{1}{k_t^2 r^2} \right) \left(\hat{1} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{c_t^2} \frac{e^{ik_t r}}{4\pi r} \left[\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} - \left(\frac{i}{k_t r} - \frac{1}{k_t^2 r^2} \right) \left(\hat{1} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \right]. \quad (1.20) \end{aligned}$$

1.5 Задача о микроземлетрясениях на острове Валаам

Почти все сейсмические данные, используемые в геофизике, собраны в дальней зоне. В качестве примера можно рассмотреть построение синтетической сейсмограммы, использующее формулу Стокса.

Так как в реальной среде источник не точечный, и отличен от δ — функции, (т.к. он растягивается и имеет конечный вертикальный размер), то мы будем использовать следующее представление δ — функции: $\delta(t) \propto \varepsilon/(\varepsilon^2 + t^2)$, где $\varepsilon \rightarrow 0$ — параметр растяжения, зависящий от r . Тогда рассмотрим построенную сейсмограмму по этому методу.

На рисунке 1.3 видно хорошее согласие практики и теории. Такой метод позволяет построить синтетическую сейсмограмму, если известен тип источника. Для микроземлетрясений, происходящих на острове Валаам [14], вид источника — левосторонний сдвиг, т.е. диполь без момента.



Рис. 1.3: Практическая и синтетическая сейсмограммы.

Глава 2

Функция Грина для полупространства

Пусть упругая однородная изотропная среда заполняет полупространстве $z \geq z_0$, граничащее с вакуумом, где z декартова координата, перпендикулярная к границе. Принимая во внимание симметрию задачи, мы будем использовать смешанное (\mathbf{q}_\perp, z) -представление с 2D-Фурье преобразованием по поперечным координатам x, y функции Грина

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp; z, z')$$

и вектора смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_\perp, z)$.

2.1 Нормальные моды

Волновое уравнение (1.8), при нулевой силе на вектор смещения в (\mathbf{q}_\perp, z) -представлении принимает следующую форму

$$\left(\hat{\mathbf{K}}_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + i\hat{\mathbf{K}}_1 \frac{\partial}{\partial z} + \hat{\mathbf{K}}_0 \right) \mathbf{u}(\mathbf{q}_\perp, z) = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

где матрицы $\hat{\mathbf{K}}_2, \hat{\mathbf{K}}_1 = \hat{\mathbf{K}}_1(\mathbf{q}_\perp)$ и $\hat{\mathbf{K}}_0 = \hat{\mathbf{K}}_0(\mathbf{q}_\perp)$ имеют компоненты

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_0)_{\alpha\beta} &= (\omega^2 - c_t^2 q_\perp^2) \delta_{\alpha\beta} - (c_l^2 - c_t^2) Q_\alpha Q_\beta, \\ (\mathbf{K}_1)_{\alpha\beta} &= (c_l^2 - c_t^2) (Q_\alpha n_\beta + n_\alpha Q_\beta), \\ (\mathbf{K}_2)_{\alpha\beta} &= c_t^2 \delta_{\alpha\beta} + (c_l^2 - c_t^2) n_\alpha n_\beta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь единичный вектор \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности, \mathbf{Q} определенный $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_\perp, 0)$ трехмерный вектор.

Далее, считая вектор \mathbf{q}_\perp фиксированным, мы будем опускать его из аргументов функций, если это специально нам не потребуется.

Выражение (2.1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Поэтому ее решением будет линейная комбинация нормальных «плоских» волн вида

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{u} e^{i\lambda z}. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) получим систему алгебраических уравнений

$$(-\lambda^2 \hat{\mathbf{K}}_2 - \lambda \hat{\mathbf{K}}_1 + \hat{\mathbf{K}}_0) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

позволяющую найти полное семейство собственных значений λ и собственных векторов \mathbf{u} .

Для существования ненулевых решений \mathbf{u} однородной системы уравнений (2.4) определитель этой системы должен быть равен нулю:

$$\det(-\lambda^2 \hat{\mathbf{K}}_2 - \lambda \hat{\mathbf{K}}_1 + \hat{\mathbf{K}}_0) = -c_t^4 / c_l^2 (\lambda^2 - \lambda_t^2)^2 (\lambda^2 - \lambda_l^2) = 0. \quad (2.5)$$

Таким образом, мы имеем 6 собственных чисел $\pm \lambda_j(\mathbf{q}_\perp)$, ($j = 1-3$), где

$$\lambda_{1,2} = \lambda_t, \quad \lambda_3 = \lambda_l, \quad (2.6)$$

подставляя которые в (2.4) найдем соответствующие нормированные собственные векторы:

$$\mathbf{u}_1^{(\pm)} = \mathbf{q}_\perp \times \mathbf{n} / q_\perp, \quad \mathbf{u}_2^{(\pm)} = \mp \frac{\lambda_t}{k_t} \frac{\mathbf{q}_\perp}{q_\perp} + \frac{\mathbf{q}_\perp}{k_t} \mathbf{n}, \quad \mathbf{u}_3^{(\pm)} = \mathbf{q}_l^{(\pm)} / k_l. \quad (2.7)$$

Обратим внимание, что в силу равенства $\lambda_1 = \lambda_2$ в выборе векторов $\mathbf{u}_{1,2}^{(\pm)}$ имеется произвол, и в общем случае это могут быть любые два линейно независимых вектора, удовлетворяющие условию $\mathbf{u}_{1,2}^{(\pm)} \perp \mathbf{q}_t^{(\pm)}$. Обычно в такой ситуации удобно дополнительно требовать $\mathbf{u}_1^{(\pm)} \perp \mathbf{u}_2^{(\pm)}$, что и сделано, в частности, в (2.7).

В результате, мы получаем два набора из трех независимых решений уравнения (2.1):

$$\mathbf{u}_j^{(\pm)}(z) = \mathbf{u}_j^{(\pm)} e^{\pm i \lambda_j z}, \quad (2.8)$$

$j = 1-3$. Здесь три волны с индексом (+) распространяются в направлении $z \rightarrow +\infty$, а три волны с индексом (-) — в обратном направлении. Эти нормальные волны имеют простую физическую интерпретацию: $\mathbf{u}_{(1,2)}^{(\pm)}(z)$ — поперечные волны с волновым вектором $\mathbf{q}_t^{(\pm)}$, а $\mathbf{u}_{(3)}^{(\pm)}(z)$ — это продольные волны с волновым вектором $\mathbf{q}_l^{(\pm)}$. Единичные вектора $\mathbf{u}_j^{(\pm)}$ имеют смысл векторов «поляризации» этих волн.

2.2 Матричный способ нахождения $\hat{\mathbf{G}}_b$

Для наглядности изложения мы, прежде всего, проиллюстрируем применение изложенной выше схемы расчета для вычисления функции Грина безграничной среды $\hat{\mathbf{G}}_0(z, z')$. В этом случае граничные условия соответствуют условиям излучения, которые с учетом бесконечно-малых мнимых добавок к $\lambda_{t,l}$ можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{G}}(z, z') \Big|_{|z-z'| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Поскольку множители $\exp(\pm i \lambda_j z)$ описывают волны, распространяющиеся, соответственно, в направлениях $z \rightarrow \pm \infty$, то граничные условия (2.9) для функции Грина

$$\hat{\mathbf{G}}(z, z') = \begin{cases} \hat{\mathbf{U}}^{(+)}(z) \hat{\mathbf{D}}^{(+)}(z') + \hat{\mathbf{U}}^{(-)}(z) \hat{\mathbf{D}}^{(-)}(z'), & z > z', \\ \hat{\mathbf{U}}^{(+)}(z) \hat{\mathbf{C}}^{(+)}(z') + \hat{\mathbf{U}}^{(-)}(z) \hat{\mathbf{C}}^{(-)}(z'), & z < z'. \end{cases} \quad (2.10)$$

при $z - z' \rightarrow \pm \infty$ дают равенства

$$\hat{\mathbf{D}}^{(-)}(z') \equiv 0, \quad \hat{\mathbf{C}}^{(+)}(z') \equiv 0. \quad (2.11)$$

С учетом (2.11) первое из условий сшивания имеет вид

$$\hat{\mathbf{U}}^{(-)}(z) \hat{\mathbf{C}}^{(-)}(z) = \hat{\mathbf{U}}^{(+)}(z) \hat{\mathbf{D}}^{(+)}(z), \quad (2.12)$$

а второе условие приводит к соотношению

$$\hat{\mathbf{U}}^{(-)}(z)\hat{\lambda}\hat{\mathbf{C}}^{(-)}(z) + \hat{\mathbf{U}}^{(+)}(z)\hat{\lambda}\hat{\mathbf{D}}^{(+)}(z) = i\hat{\mathcal{K}}_2^{-1}. \quad (2.13)$$

Здесь учтено соотношение

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}^{(\pm)}(z)}{\partial z} = \pm i\hat{\mathbf{U}}^{(\pm)}(z)\hat{\lambda}, \quad (2.14)$$

где $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(\mathbf{q}_\perp)$ — диагональная матрица

$$\hat{\lambda} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j, \quad (2.15)$$

с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ на диагонали.

Из уравнения (2.12) имеем

$$\hat{\mathbf{D}}^{(+)}(z) = (\hat{\mathbf{U}}^{(+)}(z))^{-1}\hat{\mathbf{U}}^{(-)}(z)\hat{\mathbf{C}}^{(-)}(z), \quad (2.16)$$

Подставляя выражение для $\hat{\mathbf{D}}^{(+)}$ в (2.13), получаем выражение для матричного коэффициента $\mathbf{C}^{(-)}$,

$$\hat{\mathbf{C}}^{(-)}(z) = (\hat{\mathbf{U}}^{(-)}(z))^{-1}\hat{\mathbf{W}}^{-1}(z), \quad (2.17)$$

где

$$\hat{\mathbf{W}}(z) = -i\hat{\mathcal{K}}_2 [\hat{\mathbf{U}}^{(-)}(z)\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{U}}^{(-)}(z))^{-1}] [+ \hat{\mathbf{U}}^{(+)}(z)\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{U}}^{(+)}(z))^{-1}]. \quad (2.18)$$

С учетом $\hat{\mathbf{U}}^{(\pm)}(z) = \hat{\mathbf{U}}^{(\pm)}(\hat{\Lambda}(z))^{\pm 1}$ и коммутруемости матриц $\Lambda(z)$ и λ , получаем

$$\hat{\mathbf{W}} = -i\hat{\mathcal{K}}_2 [\hat{\mathbf{U}}^{(-)}\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{U}}^{(-)})^{-1} + \hat{\mathbf{U}}^{(+)}\hat{\lambda}(\hat{\mathbf{U}}^{(+)})^{-1}], \quad (2.19)$$

откуда следует, что матрица $\hat{\mathbf{W}}$ не зависит от z .

Подставляя (2.17) в (2.16) найдем выражение для матричного коэффициента $\hat{\mathbf{D}}^{(+)}$,

$$\hat{\mathbf{D}}^{(+)}(z) = (\hat{\mathbf{U}}^{(+)}(z))^{-1}\hat{\mathbf{W}}^{-1}, \quad (2.20)$$

В результате, согласно (2.10), $\hat{\Lambda}(z)\hat{\Lambda}^{-1}(z') = \hat{\Lambda}(z - z')$, $\hat{\Lambda}(-z) = \hat{\Lambda}^{-1}(z)$, (2.16), (2.17), (2.20), функция Грина для безграничной среды может быть записана в виде

$$\hat{\mathbf{G}}_0(z, z') = \begin{cases} \hat{\mathbf{U}}^{(+)}\hat{\Lambda}(|z - z'|)(\hat{\mathbf{U}}^{(+)}(z))^{-1}\hat{\mathbf{W}}^{-1}, & z > z', \\ \hat{\mathbf{U}}^{(-)}\hat{\Lambda}(|z - z'|)(\hat{\mathbf{U}}^{(-)}(z))^{-1}\hat{\mathbf{W}}^{-1}, & z < z'. \end{cases} \quad (2.21)$$

Перепишем это выражение непосредственно через векторы «поляризации» $\mathbf{u}_j^{(\pm)}$ нормальных волн в среде и соответствующие собственные числа λ_j . Для этого наряду с $\mathbf{u}_j^{(\pm)}$ введем дуальные вектора $\mathbf{v}_j^{(\pm)}$ ($j = 1-3$), такие что выполняются утверждения:

$$\mathbf{u}_j^{(\pm)} \cdot \mathbf{v}_k^{(\pm)} = \delta_{j,k}. \quad (2.22)$$

Строки из компонент этих векторов порождают обратную к $\mathbf{U}^{(\pm)}$ матрицу

$$(\hat{\mathbf{U}}^{(\pm)})^{-1} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{v}_j^{(\pm)}. \quad (2.23)$$

Явные выражение для векторов $\mathbf{v}_j^{(\pm)}(\mathbf{q}_\perp)$ имеют вид:

$$\mathbf{v}_1^{(\pm)} = \mathbf{u}_1^{(\pm)}(\mathbf{q}_\perp), \quad \mathbf{v}_2^{(\pm)} = \frac{1}{\Delta} \left(\pm \frac{\lambda_l \mathbf{q}_\perp}{k_l q_\perp} - \frac{\mathbf{q}_\perp}{k_l} \mathbf{n} \right), \quad \mathbf{v}_3^{(\pm)} = -\mathbf{q}_t^{(\pm)} / k_t \Delta, \quad (2.24)$$

где

$$\Delta = -\frac{q_\perp^2 + \lambda_l \lambda_t}{k_t k_l} \quad (2.25)$$

— определитель матриц $\hat{\mathbf{U}}^{(\pm)}$.

Подставляя $\hat{\mathbf{U}}^{(\pm)} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{u}_j^{(\pm)} \otimes \mathbf{e}_j$, $\hat{\Lambda}(z) = \sum_{j=1}^3 e^{i\lambda_j z} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j$, (2.23) в (2.21) получаем

$$\hat{\mathbf{G}}_0(z, z') = \sum_{j=1}^3 e^{i\lambda_j |z-z'|} \begin{cases} \mathbf{u}_j^{(+)} \otimes \mathbf{v}_j^{(+)} \hat{\mathbf{W}}^{-1}, & z > z', \\ \mathbf{u}_j^{(-)} \otimes \mathbf{v}_j^{(-)} \hat{\mathbf{W}}^{-1}, & z < z'. \end{cases} \quad (2.26)$$

где, с учетом выше сказанного матрица $\hat{\mathbf{W}}$ в (2.19) преобразуется к виду

$$\hat{\mathbf{W}}(z) = -i\hat{\mathbf{K}}_2 \sum_{j=1}^3 \lambda_j \left[\mathbf{u}_j^{(+)} \otimes \mathbf{v}_j^{(+)} + \mathbf{u}_j^{(-)} \otimes \mathbf{v}_j^{(-)} \right]. \quad (2.27)$$

Таким образом, зависимость \mathbf{G}_0 от z и z' определяется множителями $\exp(i\lambda_t |z - z'|)$ и $\exp(i\lambda_l |z - z'|)$.

Обратную матрицу $\hat{\mathbf{W}}^{-1}$ можно записать в форме

$$\hat{\mathbf{W}}^{-1} = \frac{i}{2\lambda_t \omega^2} \left[k_t^2 \hat{\mathbf{I}} + \frac{\lambda_t - \lambda_l}{\lambda_l} \mathbf{q}_\perp \otimes \mathbf{q}_\perp - \lambda_t (\lambda_t - \lambda_l) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right]. \quad (2.28)$$

Используя тождества

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \mathbf{u}_j^{(\pm)} \otimes \mathbf{u}_j^{(\pm)} &= \hat{\mathbf{I}} - \mathbf{q}_t^{(\pm)} \otimes \mathbf{q}_t^{(\pm)} / k_t^2, \\ \mathbf{u}_3^{(\pm)} \otimes \mathbf{u}_3^{(\pm)} &= \mathbf{q}_l^{(\pm)} \otimes \mathbf{q}_l^{(\pm)} / k_l^2, \end{aligned} \quad (2.29)$$

выражение (2.28) можно преобразовать к виду

$$\hat{\mathbf{W}}^{-1} = \frac{i}{2\omega^2} \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^2}{\lambda_j} \mathbf{u}_j^{(\pm)} \otimes \mathbf{u}_j^{(\pm)}. \quad (2.30)$$

Отсюда с учетом (2.22) для векторов-строк $\mathbf{v}_j^{(\pm)}$ и векторов-столбцов $\mathbf{u}_j^{(\pm)}$ получаем соотношения

$$\mathbf{v}_j^{(\pm)} \hat{\mathbf{W}}^{-1} = \frac{i}{2\omega^2} \frac{k_j^2}{\lambda_j} \left(\mathbf{u}_j^{(\pm)} \right)^T, \quad (2.31)$$

где $k_{1,2} = k_t$, $k_3 = k_l$.

С учетом (2.31) формула (2.26) преобразуется к виду

$$\hat{\mathbf{G}}_0(z, z') = \frac{i}{2\omega^2} \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^2}{\lambda_j} e^{i\lambda_j |z-z'|} \begin{cases} \mathbf{u}_j^{(+)} \otimes \mathbf{u}_j^{(+)}, & z > z', \\ \mathbf{u}_j^{(-)} \otimes \mathbf{u}_j^{(-)}, & z < z', \end{cases} \quad (2.32)$$

откуда, учитывая, что $\lambda_1 = \lambda_2$ и применяя тождества (2.29) снова придем к формуле

$$\hat{G}_0(\mathbf{q}_\perp, z) = \frac{ie^{i\lambda_1|z|}}{2\lambda_1\omega^2} \left(k_t^2 \hat{\Gamma} - \mathbf{q}_t^{(\pm)} \otimes \mathbf{q}_t^{(\pm)} \right) + \frac{ie^{i\lambda_1|z|}}{2\lambda_1\omega^2} \mathbf{q}_t^{(\pm)} \otimes \mathbf{q}_t^{(\pm)}. \quad (2.33)$$

Пусть плоскость $z = z_0$ представляет собой границу упругой среды, $z \geq z_0$ с вакуумом. Граничное условие на этой плоскости имеет вид (1.6). С использованием закона Гука (1.3) это условие в (\mathbf{q}_\perp, z) -представлении приобретает вид

$$\hat{B}_1 \frac{\partial \mathbf{u}(z)}{\partial z} + \hat{B}_0 \mathbf{u}(z) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (2.34)$$

где матрицы

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= \mu \hat{\Gamma} + \left(\kappa + \frac{1}{3} \mu \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \hat{B}_0 &= i\mu \mathbf{q}_\perp \otimes \mathbf{n} + i \left(\kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{q}_\perp. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Функция Грина (2.10) как при $z \leq z'$, так и при $z > z'$ представляет собой линейную комбинацию шести независимых решений волнового уравнения для трех различных поляризаций источника. Отсюда следует, что функция Грина $\hat{G}(z, z')$ при любом z' удовлетворяет аналогичному граничному условию при $z = z_0$:

$$\left(\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{G}(z, z') \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (2.36)$$

Граничное условие при $z \rightarrow +\infty$ остается прежним,

$$\hat{D}^{(-)}(z) \equiv 0. \quad (2.37)$$

С учетом параметризации (2.10) из (2.35) следует, что при любом z' справедливо равенство

$$\begin{aligned} &(\hat{B}_0 \hat{U}^{(+)}(z_0) + i\hat{B}_1 \hat{U}^{(+)}(z_0) \hat{\lambda}) \hat{C}^{(+)}(z') \\ &+ (\hat{B}_0 \hat{U}^{(-)}(z_0) - i\hat{B}_1 \hat{U}^{(-)}(z_0) \hat{\lambda}) \hat{C}^{(-)}(z') = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Отсюда найдем соотношение между матричными коэффициентами $\hat{C}^{(\pm)}$:

$$\hat{C}^{(+)}(z') = \hat{A}(z_0) \hat{C}^{(-)}(z'), \quad (2.39)$$

где,

$$\hat{A}(z_0) = \hat{\Lambda}^{-1}(z_0) \hat{A}_0 \hat{\Lambda}^{-1}(z_0), \quad (2.40)$$

$$\hat{A}_0 = -(\hat{B}_0 \hat{U}^{(+)} + i\hat{B}_1 \hat{U}^{(+)} \hat{\lambda})^{-1} (\hat{B}_0 \hat{U}^{(-)} - i\hat{B}_1 \hat{U}^{(-)} \hat{\lambda}). \quad (2.41)$$

Условие непрерывности $\hat{G}(z, z')$ при $z = z'$ с учетом (2.37) имеет вид

$$\hat{U}^{(+)}(z) \hat{C}^{(+)}(z) + \hat{U}^{(-)}(z) \hat{C}^{(-)}(z) = \hat{U}^{(+)}(z) \hat{D}^{(+)}(z),$$

откуда получаем

$$\hat{D}^{(+)}(z) = \hat{C}^{(+)}(z) + (\hat{U}^{(+)}(z))^{-1} \hat{U}^{(-)}(z) \hat{C}^{(-)}(z). \quad (2.42)$$

Подставляя сюда (2.39) получаем соотношение между матричными коэффициентами $\hat{D}^{(+)}$ и $\hat{C}^{(-)}$:

$$\hat{D}^{(+)}(z) = (\hat{A}(z_0) + (\hat{U}^{(+)}(z))^{-1}\hat{U}^{(-)}(z_0)) \hat{C}^{(-)}(z). \quad (2.43)$$

Условие скачка $\left. \frac{\partial \hat{G}(z, z')}{\partial z} \right|_{z'=z+0} - \left. \frac{\partial \hat{G}(z, z')}{\partial z} \right|_{z'=z-0} = -\hat{K}_2^{-1}$ с учетом (2.14) и (2.37) имеет вид

$$i [\hat{U}^{(+)}(z)\hat{\lambda}\hat{C}^{(+)}(z) + \hat{U}^{(-)}(z)\hat{\lambda}\hat{C}^{(-)}(z) - \mathbf{u}^{(+)}(z)\hat{\lambda}\hat{D}^{(+)}(z)] = -\hat{K}_2^{-1}. \quad (2.44)$$

Это соотношение с учетом (2.42) и определения (2.18) матрицы \hat{W} , дает

$$\hat{C}^{(-)}(z) = (\hat{U}^{(-)}(z))^{-1}\hat{W}^{-1}. \quad (2.45)$$

Подставляя (2.45) в (2.43), (2.39) и используя найденные матричные коэффициенты $\mathbf{C}^{(\pm)}$, $\mathbf{D}^{(\pm)}$ в формуле (2.10), получим итоговое выражение для функции Грина в полупространстве в виде

$$\hat{G}(z, z') = \hat{G}_0(z, z') + \hat{G}_B(z, z'). \quad (2.46)$$

где, согласно (2.21), $\hat{G}_0(z, z')$ — поле точечного источника в неограниченной среде, а дополнительный член

$$\hat{G}_B(z, z') = \hat{U}^{(+)}(z)\hat{A}(z_0)(\hat{U}^{(-)}(z'))^{-1}\hat{W}^{-1} \quad (2.47)$$

имеет смысл вклада в функцию Грина за счет «отражения» от границы полупространства, и не содержит особенностей при $z = z'$ (см Рис. 2.1).

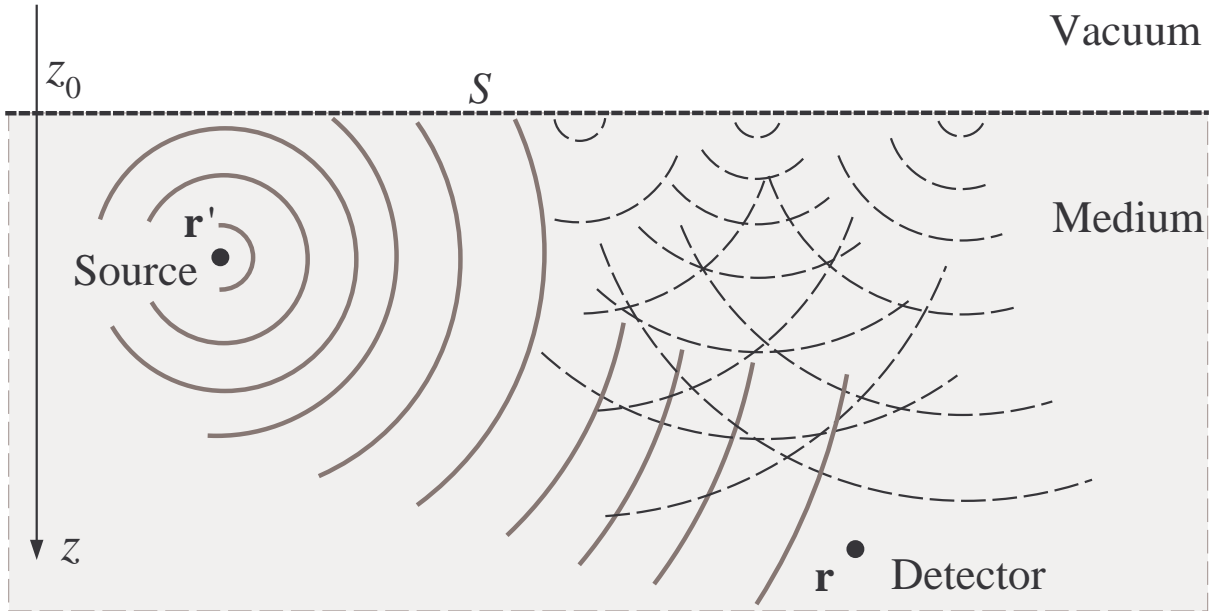


Рис. 2.1: Схематически показано расположение источника и детектора в полупространстве. Сплошные линии представляют вклады \hat{G}_0 , а пунктирные — \hat{G}_B .

Учитывая выше сказанное, (2.40) это выражение преобразуется к виду

$$\hat{G}_B(z, z') = \hat{U}^{(+)}\hat{\lambda}(z - z_0)\hat{A}_0\hat{\lambda}(z' - z_0)(\hat{U}^{(-)})^{-1}\hat{W}^{-1}. \quad (2.48)$$

Выражение (2.48) для вклада $\hat{G}_B(z, z')$ в функции Грина также можно выразить непосредственно через векторы $\mathbf{u}_j^{(\pm)}$, $\mathbf{v}^{(\pm)}$, и числа λ_j . Для этого параметризуем матрицу \hat{A}_0 в виде

$$\hat{A}_0 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.49)$$

Подставляя в (2.48) формулу (2.49) и (2.23) получим, с учетом соотношений (2.31),

$$\hat{G}_B(\mathbf{q}_\perp; z, z') = -\frac{i}{2\omega^2} \sum_{j,k=1}^3 \frac{k_j^2 g_{kj}}{\lambda_j} e^{i(\lambda_j(z-z_0) + \lambda_k(z'-z_0))} \mathbf{u}_k^{(+)}(\mathbf{q}_\perp) \otimes \mathbf{u}_j^{(-)}(\mathbf{q}_\perp). \quad (2.50)$$

Для получения явных выражений для коэффициентов \mathbf{a}_{ij} перепишем формулу (2.41) следующим образом

$$-\hat{B}_0 \hat{U}^{(-)} + i \hat{B}_1 \hat{U}^{(-)} \hat{\lambda} = (\hat{B}_0 \hat{U}^{(+)} + i \hat{B}_1 \hat{U}^{(+)} \hat{\lambda}) \hat{A}_0. \quad (2.51)$$

Используем выражения для матриц \hat{B}_0 , \hat{B}_1 , $\hat{U}^{(\pm)}$, $(\hat{U}^{(\pm)})^{-1}$ в параметризованном виде с помощью соотношений (2.23), (2.35). В результате получаем систему линейных уравнений на коэффициенты g_{ij} . Решение системы имеет вид $g_{ij} = \mathbf{a}_{ij}/D$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{11} &= D, \quad \mathbf{a}_{1j} = \mathbf{a}_{j1} = 0, \quad j = 2, 3, \quad D = (q_\perp^2 - \lambda_t^2)^2 + 4\lambda_t \lambda_l q_\perp^2 \\ \mathbf{a}_{22} &= \mathbf{a}_{33} = -[(q_\perp^2 - \lambda_t^2)^2 - 4\lambda_t \lambda_l q_\perp^2], \\ \mathbf{a}_{23} &= 4 \frac{k_t}{k_l} \lambda_l q_\perp (q_\perp^2 - \lambda_t^2), \quad \mathbf{a}_{32} = -4 \frac{k_l}{k_t} \lambda_t q_\perp (q_\perp^2 - \lambda_t^2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Таким образом, окончательный результат в \mathbf{r} -представлении имеет вид двукратного интеграла

$$\begin{aligned} \hat{G}_B(\mathbf{R}; z, z') &= -\frac{i}{2} \sum_{j,m=1}^3 c_j^{-2} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{a}_{mj}}{D\lambda_j} e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \\ &\quad \times e^{i(\lambda_m(z-z_0) + \lambda_j(z'-z_0))} \mathbf{e}_m^+(\mathbf{q}_\perp) \otimes \mathbf{e}_j^-(\mathbf{q}_\perp), \end{aligned} \quad (2.53)$$

где $\mathbf{R}_\perp \equiv \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp$, $c_1 = c_2 = c_t$, $c_3 = c_l$. Интеграл по направлениям двумерного вектора \mathbf{q}_\perp/q_\perp может быть легко вычислен в явном виде и выражается через функции Бесселя $J_\nu(\mathbf{q}_\perp \mathbf{r}_\perp)$ порядка $\nu = 0, 1$ и 2 , и, таким образом, итоговый ответ имеет вид одномерного интеграла (точнее суммы пяти таких интегралов).

2.3 Построение ФГ как $\hat{G}_0 + \hat{G}_b$

В полупространстве $z \geq z_0$ будем искать решение задачи (5.12), приведенной в приложении 1 в виде:

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{G}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \hat{G}_B(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp; z, z'). \quad (2.54)$$

Первый член в правой части дается формулой (1.20) и удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (5.12). Поскольку этому же неоднородному уравнению удовлетворяет и вся ФГ \hat{G} , то а второй член \hat{G}_B обязан удовлетворять соответствующему однородному уравнению:

$$[(c_t^2 - c_l^2) \nabla \otimes \nabla - \hat{\Gamma}(\omega^2 + c_t^2 \Delta)] \hat{G}_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) = \hat{0}. \quad (2.55)$$

Произвол в решении однородного уравнения (2.55) будет использован для того чтобы удовлетворить граничным условиям среда-вакуум при $z = z_0$.

Кроме того имеется граничное условие для \hat{G}_B на бесконечности. Поскольку функция Грина \hat{G} должна удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда[15], а слагаемое \hat{G}_0 также им удовлетворяет, то и член \hat{G}_B обязан удовлетворять этим условиям.

После перехода к 2D-Фурье представлению

$$\hat{G}_0(\mathbf{q}_\perp, z; \omega) = \int \frac{d\mathbf{r}_\perp}{(2\pi)^2} \hat{G}_0(\mathbf{r}_\perp, z; \omega) e^{i\mathbf{q}_\perp \mathbf{r}_\perp}, \quad (2.56)$$

мы получим систему уравнений на $\hat{G}_B(\mathbf{q}_\perp; z, z')$:

$$\left(\hat{K}_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{K}_1 \frac{\partial}{\partial z} + \hat{K}_0 \right) \hat{G}_B(\mathbf{q}_\perp; z, z') = \mathbf{0}, \quad (2.57)$$

где матрицы $\hat{K}_{0,1,2}$ определены в (2.2).

Из однородной системы (2.1) и условий излучения Зоммерфельда имеем

$$\hat{G}_B(\mathbf{q}_\perp; z, z') = \sum_{j,m=1}^3 C_{jm} \mathbf{u}_m^+(\mathbf{q}_\perp; z - z_0) \otimes \mathbf{u}_j^-(\mathbf{q}_\perp; z_0 - z'), \quad (2.58)$$

где C_{jm} — неизвестные пока постоянные коэффициенты. Поясним использование условий излучения, которые в данном случае можно трактовать как отсутствие волн распространяющихся из бесконечности к источнику или к границе. Именно: волны \mathbf{u}_j^- распространяются от источника z' к границе среда-вакуум z_0 . На этой границе они генерируют волны \mathbf{u}_m^+ , распространяющиеся от z_0 к детектору в точке z . Значения коэффициентов C_{jm} определяется из оставшихся граничных условий — условий на границе среда-вакуум. Соответствующие граничные условия «на языке» \hat{G}_B имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\hat{B}_1 \frac{\partial}{\partial z} + i\hat{B}_0 \right) \hat{G}_B(\mathbf{q}_\perp; z, z') \Big|_{z=z_0} \\ = - \left(\hat{B}_1 \frac{\partial}{\partial z} + i\hat{B}_0 \right) \hat{G}_0(\mathbf{q}_\perp; z, z') \Big|_{z=z_0}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где z' произвольная точка внутри среды ($z' > z_0$), а матрицы $\hat{B}_{0,1,2}$ определены в (2.35). Подставляя (2.58) в (2.59) получаем систему уравнений на коэффициенты C_{jm} , решение которой имеет вид

$$C_{jm} = -\frac{i}{2} c_j^{-2} \frac{\mathbf{a}_{jm}}{\lambda_j D}, \quad (2.60)$$

где \mathbf{a}_{jm} и D определены в (2.52).

Теперь (2.58) тот же результат, что и (2.53).

$$\begin{aligned} \hat{G}_B(\mathbf{R}; z, z') = -\frac{i}{2} \sum_{j,m=1}^3 c_j^{-2} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{a}_{mj}}{D\lambda_j} e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp} \\ \times e^{i(\lambda_m(z-z_0) + \lambda_j(z'-z_0))} \mathbf{e}_m^+(\mathbf{q}_\perp) \otimes \mathbf{e}_j^-(\mathbf{q}_\perp). \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.4 Разные типы вкладов

Рассмотрим разные слагаемые из

$$\hat{G}_B = \hat{G}_{B1.1} + \hat{G}_{B2.2} + \hat{G}_{B3.2} + \hat{G}_{B2.3} + \hat{G}_{B3.3}, \quad (2.62)$$

уточним, что все они зависят от $(R_x, R_y; z, z')$ и опишем каждое из них.

1.

$$\hat{G}_{B1.1} = -\frac{i}{2c_t^2} \int \frac{1}{(2\pi)^2 \lambda_t q^2} e^{i\lambda_t(z'+z-2z_0)} \times \begin{pmatrix} q_y^2 & -q_x q_y & 0 \\ -q_x q_y & q_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\mathbf{q}. \quad (2.63)$$

Этот вклад описывает отражение волны SH в волну SH.

2.

$$\hat{G}_{B2.2} = -\frac{i}{2\omega^2} \int \frac{(\lambda_t^2 - q^2)^2 - 4\lambda_t \lambda_l q^2}{(2\pi)^2 \lambda_t q^2 D} e^{i\lambda_t(z'+z-2z_0)} \times \begin{pmatrix} \lambda_t^2 q_x^2 & \lambda_t^2 q_x q_y & -\lambda_t q_x q^2 \\ \lambda_t^2 q_x q_y & \lambda_t^2 q_y^2 & -q^2 \lambda_t q_y \\ \lambda_t q_x q^2 & \lambda_t q_y q^2 & -q^4 \end{pmatrix} d\mathbf{q}. \quad (2.64)$$

Этот вклад описывает отражение волны SV в волну SV.

3.

$$\hat{G}_{B3.3} = -\frac{i}{2\omega^2} \int \frac{(\lambda_t^2 - q^2)^2 - 4\lambda_t \lambda_l q^2}{(2\pi)^2 \lambda_l D} e^{i\lambda_l(z'+z-2z_0)} \times \begin{pmatrix} q_x^2 & q_x q_y & -q_x \lambda_l \\ q_x q_y & q_y^2 & -q_y \lambda_l \\ q_x \lambda_l & q_y \lambda_l & -\lambda_l^2 \end{pmatrix} d\mathbf{q}. \quad (2.65)$$

Этот вклад описывает отражение волны P в волну P.

4.

$$\hat{G}_{B2.3} = -\frac{i}{2\omega^2} \int \frac{4(q^2 - \lambda_t^2)}{(2\pi)^2 D} e^{i\lambda_t(z-z_0)+i\lambda_l(z'-z_0)} \times \begin{pmatrix} q_x^2 \lambda_t & q_x q_y \lambda_t & -q_x \lambda_l \lambda_t \\ q_x q_y \lambda_t & q_y^2 \lambda_t & -q_y \lambda_l \lambda_t \\ -q_x q^2 & -q_y q^2 & \lambda_l q^2 \end{pmatrix} d\mathbf{q}. \quad (2.66)$$

Этот вклад описывает отражение волны SV в волну P.

5.

$$\hat{G}_{B3.2} = -\frac{i}{2\omega^2} \int \frac{4(q^2 - \lambda_t^2)}{(2\pi)^2 D} e^{i\lambda_l(z-z_0) + i\lambda_t(z'-z_0)} \times \begin{pmatrix} q_x^2 \lambda_t & q_x q_y \lambda_t & q^2 q_x \\ q_x q_y \lambda_t & q_y^2 \lambda_t & q^2 q_y \\ q_x \lambda_t \lambda_l & q_y \lambda_t \lambda_l & \lambda_l q^2 \end{pmatrix} d\mathbf{q}. \quad (2.67)$$

Этот вклад описывает отражение волны P в волну SV.

Эти вклады дают полную картину разбиения падающей волны на границе. Как известно волна SH переходит только в волну SH, а остальные волны не переходят в неё. Только волны P в P и в SV, а волна SV только в SV и в P. Это все следствия из поляризаций [11, 16].

Глава 3

Дальняя зона

3.1 Функция Грина \hat{G}_0 в (\mathbf{R}, ω)

Вспомним полученную ранее формулу Стокса в виде решения уравнения движения в (\mathbf{R}, ω) представлении. Условия на дальнюю зону это то, что $k_{t,l}r \gg 1$ то есть $\frac{1}{k_{t,l}r} \rightarrow 0$. Тогда можно переписать функцию Грина:

$$\hat{G}_0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{c_t^2} \left(\hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \frac{e^{ik_t r}}{4\pi r} + \frac{1}{c_l^2} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \frac{e^{ik_l r}}{4\pi r}. \quad (3.1)$$

Из уравнения видно, что явно выделяются поперечные и продольные волны. Это $\frac{1}{c_t^2} \left(\hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \frac{e^{ik_t r}}{4\pi r}$ поперечная сферическая волна со скоростью c_t , а это $\frac{1}{c_l^2} \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \frac{e^{ik_l r}}{4\pi r}$ продольная сферическая волна со скоростью c_l .

3.2 Асимптотическое вычисление интеграла

Для дальней зоны, $\mathbf{q}_\perp R_\perp + (z - z_0)\lambda_m + (z' - z_0)\lambda_j \gg 1$, подынтегральная функция в (2.53) содержит быстро осциллирующую экспоненту и можно применить метод стационарной фазы. Основной вклад в каждый из 5 интегралов (2.53) дает узкая окрестность стационарной точки

$$\mathbf{q}_{st}^{jm} = \mathbf{q}_{jm} \mathbf{R}_\perp / R_\perp,$$

($0 \leq \mathbf{q}_{jm} < k_{t,l}$), являющейся корнем уравнения

$$\frac{(z' - z_0)\mathbf{q}_{jm}}{\lambda_j(\mathbf{q}_{jm})} + \frac{(z - z_0)\mathbf{q}_{jm}}{\lambda_k(\mathbf{q}_{jm})} = \mathbf{R}_\perp. \quad (3.2)$$

Распишем по отдельности компоненты \mathbf{R}_\perp :

$$\begin{aligned} R_{\perp j} &= \frac{(z' - z_0)\mathbf{q}_{jm}}{\lambda_j(\mathbf{q}_{jm})}, \\ R_{\perp m} &= \frac{(z - z_0)\mathbf{q}_{jm}}{\lambda_k(\mathbf{q}_{jm})}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Этот вклад, после стандартного для метода стационарной фазы расчета, может быть представлен в виде:

$$\hat{G}_B^{st}(\mathbf{R}_\perp; z, z') = - \sum_{j,m=1}^3 c_j^{-2} \frac{e^{i\Phi_{jm}}}{4\pi R_{jm}} \mathbf{e}_m^+(\mathbf{q}_{st}^{jm}) \otimes \mathbf{e}_j^-(\mathbf{q}_{st}^{jm}) F_{jm}, \quad (3.4)$$

где R_{jm} — суммарный геометро-акустический путь j -ой падающей и m -ой отраженной нормальных мод (Рис. 3.1), а

$$\Phi_{jm} = q_{\perp}^{jm} R_{\perp} + (z - z_0) \lambda_m(q_{jm}) + (z' - z_0) \lambda_j(q_{jm})$$

— общий фазовый путь волны вдоль геометро-акустического пути R_{jm} .

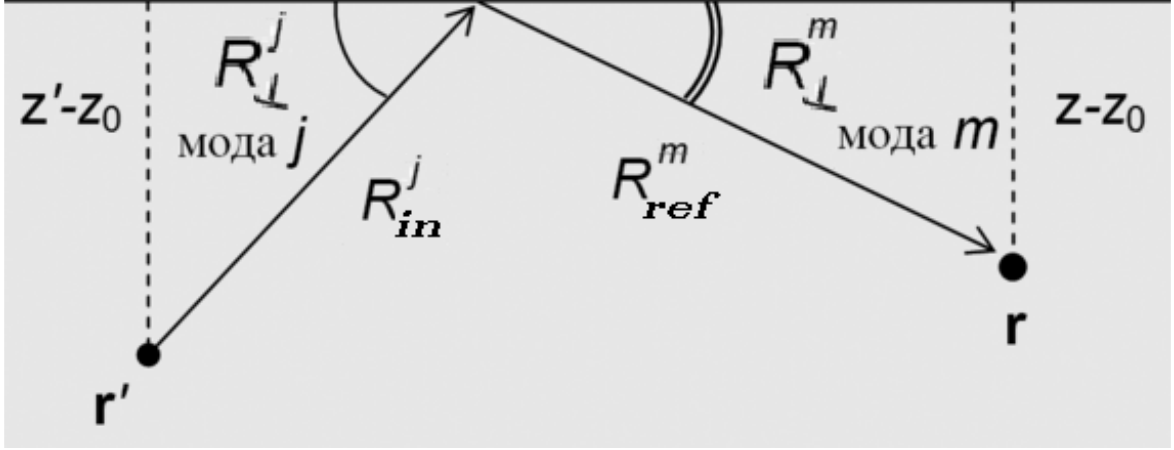


Рис. 3.1: Геометроакустический путь $R_{jm} = R_{in}^j + R_{ref}^m$

Величины F_{jm} — коэффициенты трансформации нормальных сферических волн на границе. Кроме трансформации амплитуд, коэффициенты F_{jm} учитывают фазовые сдвиги и преобразование телесных углов, имеющее место при отражении сферических волн.

3.3 Получение F_{mj}

F_{jm} полученное в предыдущей части выглядит как :

$$F_{jm} = \frac{\alpha_{mj}(q_{st})}{D(q_{st}) \lambda_j(q_{st})} \frac{1}{\sqrt{\frac{R_{\perp}}{q_{st}} \left(\frac{R_{ref}^m}{\lambda_m^2} k_m + \frac{R_{in}^j}{\lambda_j^2} k_j \right)}} \quad (3.5)$$

В таком виде сложно увидеть, различные вклады в полученном коэффициенте.

Получим коэффициент преобразования телесных углов. Для этого представим, что нижнее полупространство это падающая волна j , а верхнее это преломленная волна m . Пусть будет некое изменение угла $\theta_j \rightarrow \theta_j + d\theta_j$ — это показано на (Рис. 3.2).

До изменения углов закон Снеллиуса имеет вид:

$$k_j \sin(\theta_j) = k_m \sin(\theta_m), \quad (3.6)$$

так же напишем закон Снеллиуса и после изменения углов:

$$k_j \sin(\theta_j - d\theta_j) = k_m \sin(\theta_m - d\theta_m). \quad (3.7)$$

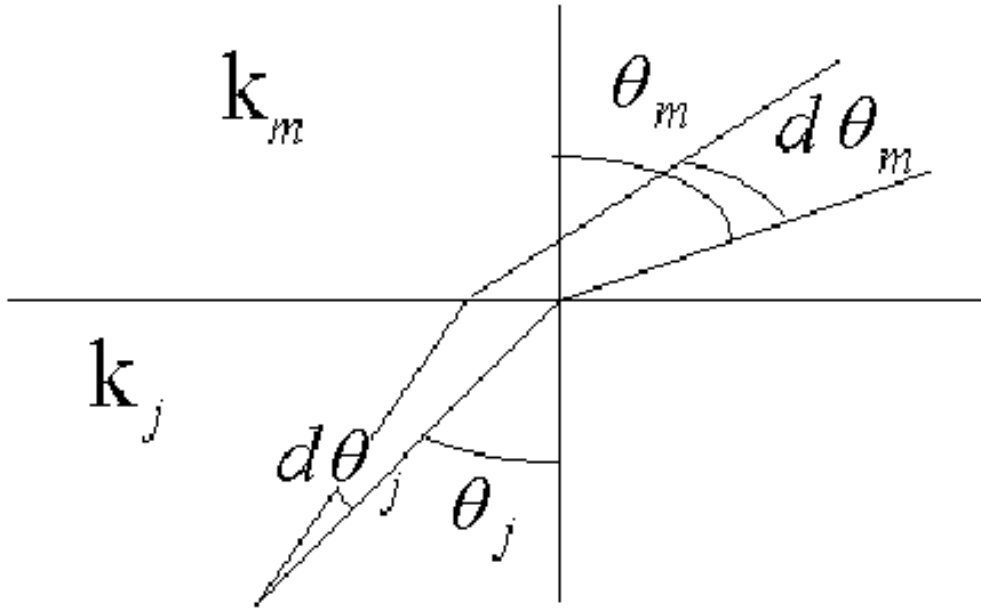


Рис. 3.2: Преобразование телесных углов.

Тогда используя оба утверждения можно получить правило изменения телесных углов:

$$\frac{d\Omega_m}{d\Omega_j} = \frac{d\theta_m}{d\theta_j} = \frac{k_j \cos(\theta_j)}{\sqrt{k_m^2 - k_j^2 \sin^2(\theta_j)}} \quad (3.8)$$

Так же в этот коэффициент входит коэффициент отражения волн. Он приведен во многих справочниках [11]. Перепишем его в наших терминах:

$$k_{mj} = (-1)^{m-1} \frac{\alpha_m^j}{D}. \quad (3.9)$$

Так же распишем эффективный радиус, который получился из-за изменения моды волны при отражении.

Из (Рис. 3.3) видно, что $R_{\text{eff}} = \sqrt{R_{\perp} R_2}$ и $R_2 = R' + R_{\text{ref}}^m$. Найдем

$$R_{\text{eff}} = \sqrt{R_{\perp} k_m \cos^2(\theta_m) \left(\frac{k_j R_{\text{in}}^j}{\lambda_m^2} + \frac{k_m R_{\text{ref}}^m}{\lambda_m^2} \right)}. \quad (3.10)$$

Так же при отражении изменяется поток энергии. Это изменение пропорционально $\sqrt{\frac{k_j}{k_m}}$.

Используя все это мы получим такой же коэффициент F_{mj} .

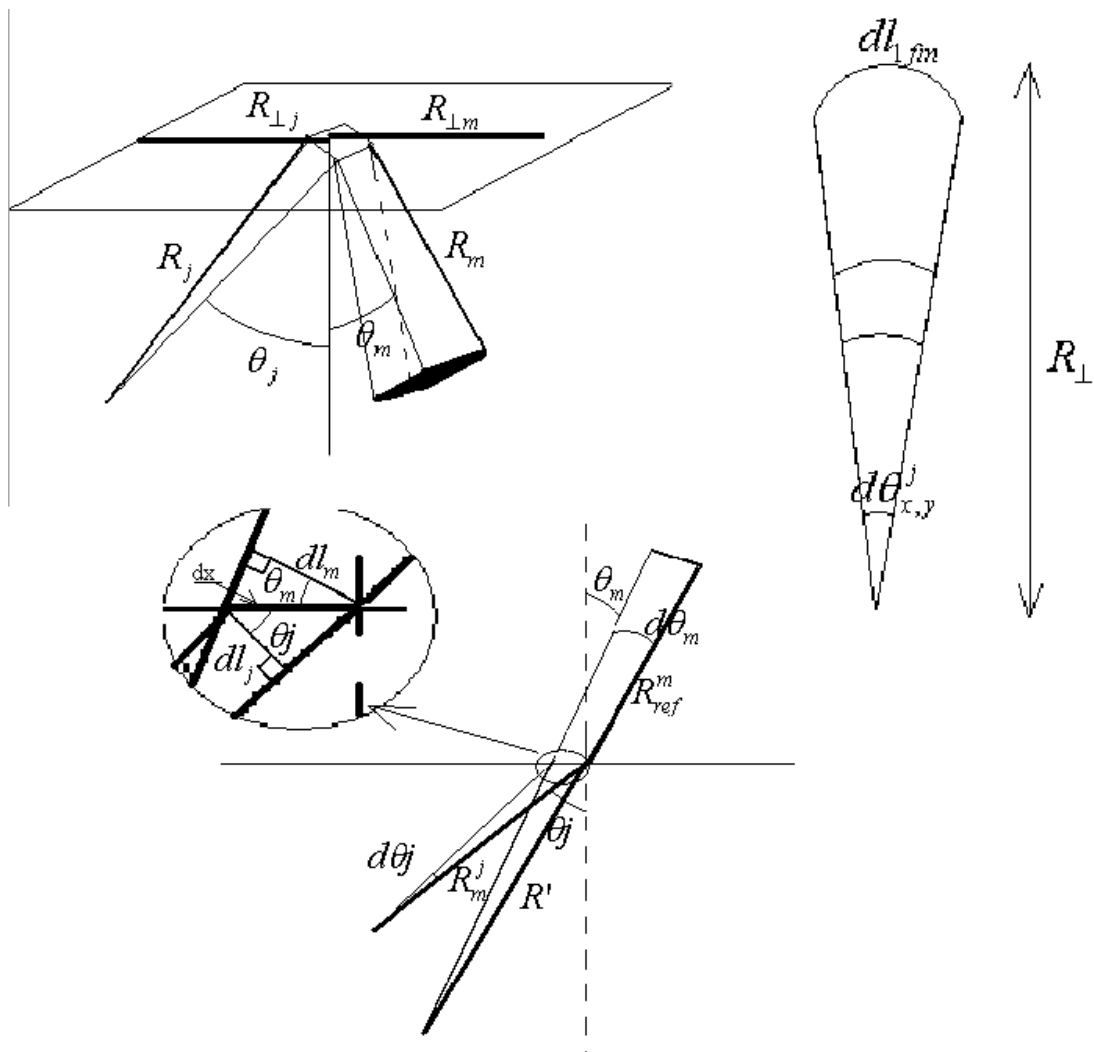


Рис. 3.3: Трехмерное представление эффективного радиуса

Глава 4

Ближняя зона

4.1 Решение Кельвина

В случае ближней зоны, $k_{1,t}r \ll 1$, все слагаемые имеют смешанную тензорную структуру, что видно из формулы:

$$\hat{G}_0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{8\pi r} \left(\left(\frac{1}{c_t^2} + \frac{1}{c_l^2} \right) \hat{\mathbf{1}} + \left(\frac{1}{c_t^2} - \frac{1}{c_l^2} \right) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \quad (4.1)$$

Для получения этого выражения следует «раскрыть неопределенность» при $r \rightarrow 0$ в сумме двух членов (5.20). При этом, оказывается, что старшие члены порядка r^{-3} и r^{-2} обращаются в ноль. Поскольку это сокращение происходит за счет одновременно присутствия членов порядка r^{-3} и r^{-2} с противоположными знаками в «продольных» и «поперечных» волнах, то в итоговом результате уже не имеет физического смысла делить поле на эти две части. Вывод этой формулы показан в приложении 2.

4.2 Случай полупространства

Для динамической задачи полупространства точное решение тензорной ФГ не возможно. Тогда как для статической задачи это решение было получено Миндлиным [7].

Введем обозначения

$$\mathbf{R}_M = (\mathbf{R}_\perp, \Delta), \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_1 = z - z_0, \quad \Delta_2 = z' - z_0.$$

вектор $\mathbf{r}'_M = \mathbf{r} - \mathbf{R}_M$ можно интерпретировать как положение фиктивного источника $\mathbf{r}'_M = (\mathbf{r}'_\perp, 2z_0 - z')$ в прямой аналогии с методом отражений известным в электростатике (Рис 4.1). Напишем его решение в наших обозначениях:

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}_\perp; z', z) = \mathbf{u}_{1.1} + \mathbf{u}_{2.2} + \mathbf{u}_{3.2} + \mathbf{u}_{2.3} + \mathbf{u}_{3.3}, \quad (4.2)$$

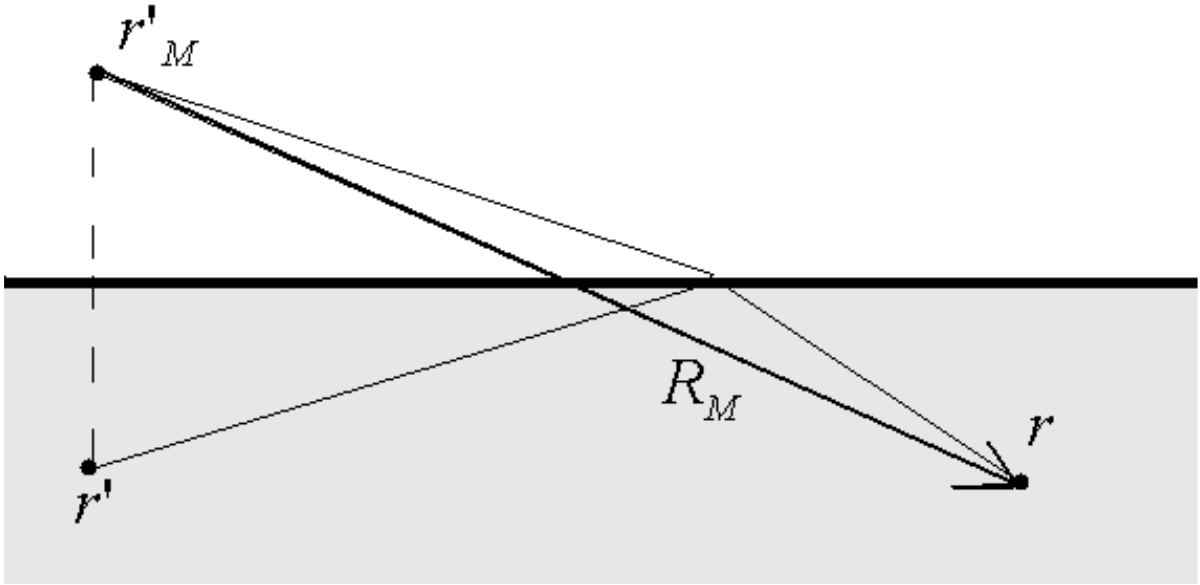


Рис. 4.1: Геометрическая интерпретация: $\mathbf{r}'_M = \mathbf{r} - \mathbf{R}_M$ — зеркальный образ источника в точке \mathbf{r}' .

где отдельные вклады даются выражениями:

$$\begin{aligned}
u_{1.1} &= \frac{3(c_t^2 - c_l^2)}{8\pi\rho c_t^2 c_l^2} \left(\frac{1}{R_M} + \frac{2\Delta_1\Delta_2}{R_M^3} + \frac{1}{6(c_t^2 - c_l^2)^2 R_M + \Delta} \frac{4}{R_M} \right) \\
u_{2.2} &= \frac{3(c_t^2 - c_l^2)}{8\pi\rho c_t^2 c_l^2} \left(\frac{1}{R_M} + \frac{c_t^2 + c_l^2}{9(c_t^2 - c_l^2)} \frac{R_\perp^2}{R_M^3} + \frac{2\Delta_1\Delta_2}{R_M^3} - \frac{6\Delta_1\Delta_2 R_\perp^2}{R_M^5} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6(c_t^2 - c_l^2)^2 R_M + \Delta} \frac{4}{R_M} - \frac{2}{3(c_t^2 - c_l^2)^2} \frac{R_\perp^2}{R_M(R_M + \Delta)^2} \right) \\
u_{3.2} &= \frac{3(c_t^2 - c_l^2)R_\perp}{8\pi\rho c_t^2 c_l^2 R_M} \left(\frac{c_t^2 + c_l^2}{9(c_t^2 - c_l^2)} \frac{(\Delta_1 - \Delta_2)}{R_M^2} - \frac{6\Delta_1\Delta_2\Delta}{R_M^4} + \frac{1}{6(c_t^2 - c_l^2)^2 R_M + \Delta} \frac{4}{R_M} \right) \quad (4.3) \\
u_{2.3} &= \frac{3(c_t^2 - c_l^2)R_\perp}{8\pi\rho c_t^2 c_l^2 R_M} \left(\frac{c_t^2 + c_l^2}{9(c_t^2 - c_l^2)} \frac{(\Delta_1 - \Delta_2)}{R_M^2} - \frac{1}{6(c_t^2 - c_l^2)^2 R_M + \Delta} \frac{4}{R_M} + \frac{6\Delta_1\Delta_2\Delta}{R_M^4} \right) \\
u_{3.3} &= \frac{3(c_t^2 - c_l^2)}{8\pi\rho c_t^2 c_l^2} \left(\frac{16c_t^2 c_l^2 - 3c_t^2 - 15c_l^4}{c_t^2 - c_l^2} \frac{\rho}{R_M} + \frac{c_t^2 + c_l^2}{9(c_t^2 - c_l^2)} \frac{\Delta^2}{R_M^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\Delta_1\Delta_2}{R_M^3} + \frac{6\Delta_1\Delta_2\Delta^2}{R_M^5} \right)
\end{aligned}$$

Как видно из уравнений, структура уравнения указанная в части 2.4 сохраняется.

Глава 5

Волна Релея

Волны Релея образуются в однородном полупространстве путем суперпозиции неоднородных P и SV волн. Оказывается, что при определенной кажущейся скорости, одной и той же для P и SV волн, может быть удовлетворено граничное условие на свободной поверхности, т.е. равенство нулю компонент напряжения, приложенного к поверхности, в плоскости падения [11].

5.1 Релеевский полюс

У полученного решения для функции Грина для полупространства есть сингулярность. Это равенство нулю D.

$$D = 0 \Leftrightarrow 16q_{\perp}^6(k_t^2 - k_l^2) - 8q_{\perp}^4 k_t^2(3k_t^2 - 3k_l^2) + 8q_{\perp}^2 k_t^6 - k_t^8 = 0, \quad (5.1)$$

таким образом мы найдем корень этого уравнения $q_*, q_* > \min(k_l, k_t)$. С учетом условия устойчивости $\text{Im } q_* = +0$, полюс подынтегральной функции $q_{\perp} = q_*$ дает дополнительный вклад в интеграл

$$\begin{aligned} \hat{G}_B^{\text{Rel}}(\mathbf{R}_{\perp}; z, z') = & \frac{q_*}{8\pi D'_*} \sum_{j,m=1}^3 c_j^{-2} \frac{a_{mj}^*}{\lambda_j^*} e^{-|\lambda_j^*|(z-z_0)} \\ & \times e^{-|\lambda_m^*|(z'-z_0)} \int_0^{2\pi} e^{iq_* R_{\perp} \cos \phi} \mathbf{e}_m^+(\mathbf{q}_*) \otimes \mathbf{e}_j^-(\mathbf{q}_*) d\phi, \quad (5.2) \end{aligned}$$

где

$$D'_* = 8\lambda_t \lambda_l q_* + 8q_*(q_*^2 - \lambda_t^2) - 4\frac{\lambda_l}{\lambda_t} q_*^3 - 4\frac{\lambda_t}{\lambda_l} q_*^3, \quad \lambda_{j,m}^* = \lambda_{j,m}(q_*), \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} a_{mj}^* = a_{mj}(q_*), \quad a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0, \quad a_{22} = a_{33} = 8\lambda_t^2 \lambda_l^2 q_*^2, \\ a_{23} = 4\frac{k_t}{k_l} \lambda_l q_*(q_*^2 - \lambda_t^2), \quad a_{32} = -4\frac{k_l}{k_t} \lambda_t q_*(q_*^2 - \lambda_t^2), \quad (5.4) \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_* = q_* \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Проинтегрируем подынтегральное выражение. Математические выкладки приведены в приложении 3.

$$\hat{G}_B^{\text{Rel}}(\mathbf{R}_\perp; z, z') = \frac{q_*^2}{D'_* \omega^2} \left[2\lambda_t \lambda_l^2 q_* R_{2,2} e^{-|\lambda_l|(z'+z-2z_0)} + (q_*^2 - \lambda_t^2) R_{2,3} e^{-|\lambda_l|(z'-z_0) - |\lambda_l|(z-z_0)} - (q_*^2 - \lambda_t^2) R_{2,3} e^{-|\lambda_l|(z'-z_0) - |\lambda_l|(z-z_0)} + 2\lambda_t^2 \lambda_l q_* R_{3,3} e^{-|\lambda_l|(z'+z-2z_0)} \right] \quad (5.6)$$

где

$$R_{2,2}(\mathbf{R}_\perp; q_*) = \begin{pmatrix} -\lambda_t^2 \left(\frac{J_1}{q_* R_\perp} - J_2 \right) & 0 & -i\lambda_t q_* J_1 \\ 0 & -\lambda_t^2 \frac{J_1}{q_* R_\perp} & 0 \\ i\lambda_t q_* J_1 & 0 & q_*^2 J_0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$R_{2,3}(\mathbf{R}_\perp; q_*) = \begin{pmatrix} -\lambda_t q_* \left(\frac{J_1}{q_* R_\perp} - J_2 \right) & 0 & i\lambda_t \lambda_l J_1 \\ 0 & -\frac{J_1 \lambda_t}{R_\perp} & 0 \\ i q_*^2 J_1 & 0 & -q_* \lambda_l J_0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$R_{3,2}(\mathbf{R}_\perp; q_*) = \begin{pmatrix} q_*^2 \left(\frac{J_1}{q_* R_\perp} - J_2 \right) & 0 & i q_*^2 J_1 \\ 0 & \frac{J_1 \lambda_t}{R_\perp} & 0 \\ i\lambda_t \lambda_l J_1 & 0 & q_* \lambda_l J_0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

$$R_{3,3}(\mathbf{R}_\perp; q_*) = \begin{pmatrix} q_*^2 \left(\frac{J_1}{q_* R_\perp} - J_2 \right) & 0 & -i\lambda_t q_* J_1 \\ 0 & q_*^2 \frac{q_* J_1}{R_\perp} & 0 \\ i\lambda_l q_* J_1 & 0 & -\lambda_l^2 J_0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

В данных уравнениях все функции Бесселя 0, 1, и 2 порядков зависят от $(q_* R_\perp)$.

5.2 Дальняя зона

В дальней зоне $q_* R_\perp \rightarrow \infty$, тогда воспользуемся асимптотикой для функции Бесселя

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Тогда можно получить точное решение для дальней зоны, что приведено в приложении 4. А сейчас рассмотрим приближенный ответ:

$$\hat{G}_B^{\text{Rel}}(\mathbf{R}_\perp; z, z') \sim R_\perp^{-1/2} \quad (5.11)$$

полный ответ в виду громоздкости приведен в приложении. Как видно основной асимптотикой волны Релея при $q_* R_\perp \rightarrow \infty$ является поправка порядка $R_\perp^{-1/2}$, следующей поправкой является $R_\perp^{-3/2}$, что является аналогом по порядку плоской волны.

Заключение

В данной работе были получены основные свойства решений уравнения движения среды для однородного изотропного полупространства и пространства и для точечного источника гармонических колебаний. Было рассмотрено распространение упругих волн, созданных точечным источником гармонических колебаний в полубесконечной (бесконечной) упругой среде и получено точное решение для тензорной ФГ для пространства и решение для ФГ для полупространства. Были рассмотрены дальнезонные и ближнезонные асимптотики, полюс волны Релея. Было получено точное решение для ФГ волны Релея в полупространстве.

Полученное решение может быть легко обобщено на более общий случай слоистых сред, так же на более общий случай других типов источников.

Было предложено практическое применения полученных уравнений для построения синтетических сейсмограмм. На основе этих вычислений возможно построение модели землетрясения.

В заключение хочу выразить мою признательность кафедре физике Земли, где я начала заниматься сейсмологией, в частности Татьяне Борисовне Яновской, и кафедре статистической физики за ценные советы и замечания, а также поблагодарить сотрудника ГАО РАН Бэлу Александровну Ассиновскую за предоставление сейсмических данных о Валааме. А так же поблагодарить своего научного руководителя Алексея Юрьевича Валькова за интересно поставленную задачу и за плодотворное обучение и рецензента Вадима Петровича Романова за интерес к работе и полезное обсуждение.

Литература

- [1] Л. М. Бреховских, О. А. Годин **Акустика неоднородных сред.** — Москва: Наука, (1989), 416 .
- [2] М. Kachanov, В. Shafiro, Ig. Tsukrov **Handbook of elasticity solutions.** — New York: Springer-Verlag, (2009), 340 .
- [3] Дж.Э. Уайт **Возбуждение и распространение сейсмических волн.** — Москва: Недра, (1986), 261 .
- [4] Sir W. Thomson, — *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, **3**, 87 (1848).
- [5] J. Boussinesq **Application des potentiels a l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.** — Paris, France: Gauthier-Villars (1885).
- [6] V. Cerruti, Mem. fis. mat. — *Ac. Linc., Roma*, (1880).
- [7] R.D. Mindlin; Force at a point in the Interior of a semi-infinite Solid. — *J. Appl. Phys.*, 195-202, (1936)
- [8] Sir G. G. Stokes, — *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **9**, 287 (1849).
- [9] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, **Теория упругости.** — Москва: Наука, т. **7**, (1965), 202.
- [10] И.И. Гурвич, В.П. Номоконова (ред). **Сейсморазведка. Справочник геофизика.** — Москва: Недра, (1981), 464.
- [11] Т.Б. Яновская **Основы сейсмологии.** — Санкт-Петербург: ВВМ, (2006), 288.
- [12] Н. Kumagai; Volcano seismic signals, source quantification of.— *Geophys. J. Int.*, 1146-1178, (2011).
- [13] К. Аки, П. Ричардс **Количественная сейсмология.** — Москва: Мир, т. **1**, т. **2**, (1983), 880.
- [14] Б.А. Ассиновская, М.К. Овсов, В.В. Карпинский, Д.Ю. Мехрюшев; Сейсмические события на Ладого. — *GeoRisk*, 6-12, (1997).
- [15] В.С. Владимиров **Уравнения математической физики.** — Москва: Наука, (1981), 512.
- [16] L.R. Johnson; Green's function for Lamb's problem. — *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **37**, 99-131, (1974)
- [17] М. Абрамович, И.И. Стиган **Справочник по специальным функциям.** — Москва: Наука, (1979), 832.

Приложения

Приложение 1

Рассмотрим представление (\mathbf{q}, ω) для уравнения движения среды:

$$[(c_t^2 - c_l^2) \nabla \otimes \nabla - \hat{\Gamma}(\omega^2 + c_t^2 \Delta)] \hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.12)$$

где $\hat{\Gamma}$ — это единичный тензор. Применим преобразование Фурье к этому уравнению и получим:

$$[(c_t^2 q^2 - \omega^2) \hat{\Gamma} + (c_l^2 - c_t^2) \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}] \hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{q}, \omega) = \hat{\Gamma}. \quad (5.13)$$

Отсюда можно получить явный вид для функции Грина:

$$\hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{q^2 - k_t^2} \left(\frac{\hat{\Gamma}}{c_t^2} - \frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}}{\omega^2} \right) + \frac{1}{q^2 - k_l^2} \frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}}{\omega^2}. \quad (5.14)$$

Применив к нему преобразование Фурье $\int \hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{q}, \omega) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{q} = \hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \omega)$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{c_t^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_t \mathbf{r}}}{4\pi r} \left[\left(\hat{\Gamma} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) + \left(\frac{i}{k_t r} - \frac{1}{k_t^2 r^2} \right) \left(\hat{\Gamma} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \right] \\ + \frac{1}{c_l^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_l \mathbf{r}}}{4\pi r} \left[\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} - \left(\frac{i}{k_l r} - \frac{1}{k_l^2 r^2} \right) \left(\hat{\Gamma} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Тогда воспользовавшись аналогом ранее приведенной формулой для перехода в (\mathbf{r}, ω) представление можно рассчитать функцию Грина в (\mathbf{r}, t) представлении.

$$\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.16)$$

$$\delta(t) * \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{r}, t) = 1/2\pi \int \delta(t - s) \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{r}, s) ds \quad (5.17)$$

Ниже приведем вычисления.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{c_t^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_t \mathbf{r}}}{4\pi r} \left[(\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j) + \left(\frac{i}{k_t r} - \frac{1}{k_t^2 r^2} \right) (\delta_{ij} - 3\gamma_i \gamma_j) \right] \\ + \frac{1}{c_l^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_l \mathbf{r}}}{4\pi r} \left[\gamma_i \gamma_j - \left(\frac{i}{k_l r} - \frac{1}{k_l^2 r^2} \right) (\delta_{ij} - 3\gamma_i \gamma_j) \right] e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
\delta(t) * G_{ij}(\mathbf{r}, t) &= \\
& \frac{1}{2\pi} \int \delta(t-s) \frac{1}{2rc_t^2} [\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j] \delta\left(s - \frac{\mathbf{r}}{c_t}\right) ds + \frac{\gamma_i \gamma_j}{8\pi c_t^2} \int \delta\left(s - \frac{\mathbf{r}}{c_l}\right) \delta(t-s) ds \\
& + \frac{\delta_{ij} - 3\gamma_i \gamma_j}{8\pi r^2} \int \left[\frac{1}{c_t} \operatorname{sign}\left(s - \frac{\mathbf{r}}{c_t}\right) - \frac{1}{c_l} \operatorname{sign}\left(s - \frac{\mathbf{r}}{c_l}\right) \right] \delta(t-s) ds \\
& + \frac{\delta_{ij} - 3\gamma_i \gamma_j}{8\pi r^3} \int \left(s - \frac{\mathbf{r}}{c_t}\right) \operatorname{sign}\left(s - \frac{\mathbf{r}}{c_t}\right) \delta(t-s) ds \\
& + \frac{\delta_{ij} - 3\gamma_i \gamma_j}{8\pi r^3} \int \left(s - \frac{1}{c_l}\right) \operatorname{sign}\left(s - \frac{\mathbf{r}}{c_l}\right) \delta(t-s) ds = \\
& = t \frac{-\delta_{ij} + 3\gamma_i \gamma_j}{4\pi r^3} \chi_{\left[\frac{\mathbf{r}}{c_t}, \frac{\mathbf{r}}{c_l}\right]}(t) + \frac{\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j}{4\pi r c_t^2} \delta\left(t - \frac{\mathbf{r}}{c_t}\right) + \frac{\gamma_i \gamma_j}{4\pi r c_l^2} \delta\left(t - \frac{\mathbf{r}}{c_l}\right) \quad (5.19)
\end{aligned}$$

,где χ — это индикаторная функция. Таким образом мы получили формулу Стокса [13].

Приложение 2

Получим формулу для ближней зоны для пространства и точечного источника.

$$\begin{aligned}
\hat{G}_0(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{c_t^2} \frac{e^{ik_t r}}{4\pi r} \left[\left(\hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) + \left(\frac{\mathbf{i}}{k_t r} - \frac{1}{k_t^2 r^2} \right) \left(\hat{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{c_l^2} \frac{e^{ik_l r}}{4\pi r} \left[\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} - \left(\frac{\mathbf{i}}{k_l r} - \frac{1}{k_l^2 r^2} \right) \left(\hat{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \right]. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Разложим в ряд экспоненты, учтем условие для ближней зоны $k_{l,s} r \ll 1$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
\hat{G}_0(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{c_t^2} \frac{1 + ik_t r - \frac{k_t^2 r^2}{2}}{4\pi r} \left[\left(\hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) + \left(\frac{\mathbf{i}}{k_t r} - \frac{1}{k_t^2 r^2} \right) \left(\hat{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{c_l^2} \frac{1 + ik_l r - \frac{k_l^2 r^2}{2}}{4\pi r} \left[\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} - \left(\frac{\mathbf{i}}{k_l r} - \frac{1}{k_l^2 r^2} \right) \left(\hat{\mathbf{I}} - 3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) \right] \\
& = \frac{1}{8\pi r} \left[\left(\frac{1}{c_t^2} + \frac{1}{c_l^2} \right) \hat{\mathbf{I}} + \left(\frac{1}{c_t^2} - \frac{1}{c_l^2} \right) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right] \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Перепишем эту формулу в терминах модуля сжатия K и модуля сдвига μ .

$$\hat{G}_0 = \frac{1}{8\pi r \mu \left(K + \frac{4}{3} \mu \right)} \left[\left(K + \frac{7}{3} \mu \right) \hat{\mathbf{I}} + \left(K + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right], \quad \frac{\mu}{\rho} = c_t^2, \quad \frac{3K + 4\mu}{3\rho} = c_l^2 \quad (5.22)$$

Так же перепишем в терминах модуля Юнга E и коэффициент Пуассона σ .

$$\hat{G}_0 = \frac{1 + \sigma}{8\pi E (1 - \sigma)} \left[(3 - 4\sigma) \hat{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right], \quad \sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}, \quad E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (5.23)$$

Приложение 3

Представим вектора \mathbf{e}_m^\pm покомпонентно.

$$\mathbf{e}_1^\pm = \begin{pmatrix} \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{e}_2^\pm = \begin{pmatrix} \mp \frac{\lambda_t}{k_t} \sin(\phi) \\ \mp \frac{\lambda_t}{k_t} \cos(\phi) \\ \frac{q_*}{k_t} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{e}_3^\pm = \begin{pmatrix} \frac{q_*}{k_l} \sin(\phi) \\ \frac{q_*}{k_l} \cos(\phi) \\ \pm \frac{\lambda_l}{k_l} \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Теперь посчитаем $\mathbf{e}_m^+(\mathbf{q}_*) \otimes \mathbf{e}_j^-(\mathbf{q}_*)$ для каждого из значений i, j , при которых \mathbf{a}_{ij} не равны нулю.

$$\mathbf{e}_2^+(\mathbf{q}_*) \otimes \mathbf{e}_2^-(\mathbf{q}_*) = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_t^2}{k_t^2} \cos^2(\phi) & -\frac{\lambda_t^2}{k_t^2} \cos(\phi) \sin(\phi) & -\frac{\lambda_t q_*}{k_t^2} \cos(\phi) \\ -\frac{\lambda_t^2}{k_t^2} \cos(\phi) \sin(\phi) & -\frac{\lambda_t^2}{k_t^2} \sin^2(\phi) & -\frac{\lambda_t q_*}{k_t^2} \sin(\phi) \\ \frac{\lambda_t q_*}{k_t^2} \cos(\phi) & \frac{\lambda_t q_*}{k_t^2} \sin(\phi) & \frac{q_*^2}{k_t^2} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{e}_2^+(\mathbf{q}_*) \otimes \mathbf{e}_3^-(\mathbf{q}_*) = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_t q_*}{k_t k_l} \cos^2(\phi) & -\frac{\lambda_t q_*}{k_t k_l} \cos(\phi) \sin(\phi) & \frac{\lambda_t \lambda_l}{k_t k_l} \cos(\phi) \\ -\frac{\lambda_t q_*}{k_t k_l} \cos(\phi) \sin(\phi) & -\frac{\lambda_t q_*}{k_t k_l} \sin^2(\phi) & -\frac{\lambda_t \lambda_l}{k_t k_l} \sin(\phi) \\ \frac{q_*^2}{k_t k_l} \cos(\phi) & \frac{q_*^2}{k_t k_l} \sin(\phi) & -\frac{q_* \lambda_l}{k_t k_l} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{e}_3^+(\mathbf{q}_*) \otimes \mathbf{e}_2^-(\mathbf{q}_*) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_t q_*}{k_t k_l} \cos^2(\phi) & \frac{\lambda_t q_*}{k_t k_l} \cos(\phi) \sin(\phi) & \frac{q_*^2}{k_t k_l} \cos(\phi) \\ \frac{\lambda_t q_*}{k_t k_l} \cos(\phi) \sin(\phi) & \frac{\lambda_t q_*}{k_t k_l} \sin^2(\phi) & \frac{q_*^2}{k_t k_l} \sin(\phi) \\ \frac{\lambda_t \lambda_l}{k_t k_l} \cos(\phi) & \frac{\lambda_t \lambda_l}{k_t k_l} \sin(\phi) & \frac{q_* \lambda_l}{k_t k_l} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{e}_3^+(\mathbf{q}_*) \otimes \mathbf{e}_3^-(\mathbf{q}_*) = \begin{pmatrix} \frac{q_*^2}{k_l^2} \cos^2(\phi) & \frac{q_*^2}{k_l^2} \cos(\phi) \sin(\phi) & -\frac{\lambda_l q_*}{k_l^2} \cos(\phi) \\ \frac{q_*^2}{k_l^2} \cos(\phi) \sin(\phi) & \frac{q_*^2}{k_l^2} \sin^2(\phi) & -\frac{\lambda_l q_*}{k_l^2} \sin(\phi) \\ \frac{\lambda_l q_*}{k_l^2} \cos(\phi) & \frac{\lambda_l q_*}{k_l^2} \sin(\phi) & -\frac{\lambda_l^2}{k_l^2} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Используя известные свойства функций Бесселя [17]:

$$\begin{aligned} \int e^{ik \cos(x)} dx &= 2\pi J_0(k) \\ \int e^{ik \cos(x)} \sin(x) dx &= 0 \\ \int e^{ik \cos(x)} \cos(x) dx &= 2\pi i J_1(k) \\ \int e^{ik \cos(x)} \cos(x) \sin(x) dx &= 0 \\ \int e^{ik \cos(x)} \cos^2(x) dx &= 2\pi \frac{J_1(k)}{k} - 2\pi J_2(k) \\ \int e^{ik \cos(x)} \sin^2(x) dx &= 2\pi \frac{J_1(k)}{k}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Тогда можно получить ФГ для волны Релея, которая представлена в главе 5.

Приложение 4

Рассмотрим условие дальней зоны: $q_* R_\perp \rightarrow \infty$ Тогда воспользуемся асимптотикой функции Бесселя [17]:

$$\begin{aligned} J_0(q_* R_\perp) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi q_* R_\perp}} \sin\left(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}\right) \\ J_1(q_* R_\perp) &\sim -\sqrt{\frac{2}{\pi q_* R_\perp}} \cos\left(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}\right) \\ J_2(q_* R_\perp) &\sim -\sqrt{\frac{2}{\pi q_* R_\perp}} \sin\left(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Подставляя эти формулы в ФГ, получим

$$\begin{aligned} \hat{G}_B^{\text{Rel}}(R_\perp; z, z') &\sim \frac{q_*^2}{D'_* \omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi q_* R_\perp}} \left[2\lambda_t \lambda_l^2 q_* R_{2,2} e^{-|\lambda_t|(z'+z-2z_0)} + (q_*^2 - \lambda_t^2) R_{2,3} e^{-|\lambda_t|(z'-z_0) - |\lambda_l|(z-z_0)} \right. \\ &\quad \left. - (q_*^2 - \lambda_t^2) R_{2,3} e^{-|\lambda_l|(z'-z_0) - |\lambda_t|(z-z_0)} + 2\lambda_t^2 \lambda_l q_* R_{3,3} e^{-|\lambda_l|(z'+z-2z_0)} \right], \end{aligned} \quad (5.33)$$

Отметим, что все $R_{i,j}$ зависят от (R_\perp, q_*) , чтобы дальше это пропустить.

$$\begin{aligned} R_{2,2} &= \begin{pmatrix} \lambda_t^2 \left(\frac{\cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4})}{q_* R_\perp} + \sin(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \right) & 0 & i\lambda_t q_* \cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \\ 0 & \lambda_t^2 \frac{\cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4})}{q_* R_\perp} & 0 \\ -i\lambda_t q_* \cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) & 0 & q_*^2 \sin(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \\ R_{2,3} &= \begin{pmatrix} \lambda_t q_* \left(\frac{\cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4})}{q_* R_\perp} + \sin(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \right) & 0 & -i\lambda_t \lambda_l \cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \\ 0 & \frac{\cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \lambda_t}{R_\perp} & 0 \\ -iq_*^2 \cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) & 0 & -q_* \lambda_l \sin(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \\ R_{3,2} &= \begin{pmatrix} -q_*^2 \left(\frac{\cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4})}{q_* R_\perp} + \sin(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \right) & 0 & -iq_*^2 \cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \\ 0 & \frac{-\cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \lambda_t}{R_\perp} & 0 \\ -i\lambda_t \lambda_l \cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) & 0 & q_* \lambda_l \sin(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \\ R_{3,3} &= \begin{pmatrix} q_*^2 \left(\frac{-\cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4})}{q_* R_\perp} + \sin(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \right) & 0 & i\lambda_t q_* \cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \\ 0 & -q_*^2 \frac{q_* \cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4})}{R_\perp} & 0 \\ -i\lambda_l q_* \cos(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) & 0 & -\lambda_l^2 \sin(q_* R_\perp - \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.34)$$