

**ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Физический факультет  
Кафедра статистической физики**

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

«Отражение частиц осциллирующим дельта-образным потенциалом»

«Reflection of particles by oscillating delta-function potential»

студента 4 курса, 406 группы  
Гурьевского Дениса Валерьевича  
направления — «Физика»

**Руководитель:**

д. ф-м. н., профессор  
\_\_\_\_\_ А. Е. Кучма

**Рецензент:**

к. ф-м. н., старший научный сотрудник  
\_\_\_\_\_ Д. В. Ковалевский

Работа защищена с оценкой

«\_\_\_\_\_» (\_\_\_\_\_)

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

Зав. кафедрой статистической физики,

д. ф-м. н., профессор  
\_\_\_\_\_ А. К. Щёкин

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	3
2. Матрица рассеяния . . . . .	4
3. Решение в виде цепных дробей . . . . .	5
4. Нули коэффициента прохождения . . . . .	7
5. Полюса коэффициента прохождения . . . . .	8
6. Пороговые аномалии . . . . .	12
7. Заключение . . . . .	13

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние частиц зависящим от времени потенциалом в мезоскопических системах исследуется в течение ряда лет в связи с описанием электрон-фононного взаимодействия, расчетом времени квантового туннелирования, задачами ионизации, прохождением электронов сквозь тонкие слои, а также в теории квантового хаоса. Одной из интересных особенностей периодических по времени локализованных потенциалов является наличие резонансов или квазисвязанных состояний, которые можно рассматривать как динамический захват электронов осциллирующим потенциалом. Появление таких состояний характерно также для задач многоканального квантового рассеяния.

Описание процесса рассеяния частиц в рассматриваемых системах приводит к необходимости исследования уравнений, сводящихся к рекуррентным соотношениям для соответствующих коэффициентов. Решением любых трехчленных рекуррентных соотношений как для функций, так и для операторов является цепная дробь. Так обстоит дело для гамильтонианов в приближении сильной связи, для стационарного уравнения Шрёдингера (в дискретных моделях), а также для гармонических потенциалов, зависящих от времени, таких как атом в поле стоячих волн лазерного излучения или для туннелирования электронов в присутствии фононов.

В настоящей работе изложено, следуя [1,2], решение одномерной задачи о поведении частиц в осциллирующем  $\delta$ -образном потенциале. На основе решения нестационарного уравнения Шрёдингера показано, что амплитуда вероятности прохождения как функция энергии падающего электрона и амплитуды дельта-потенциала имеет структуру цепной дроби. Полученные при этом соответствующие выражения позволили авторам [1,2] исследовать подробно, как аналитически, так и численно, различные особенности коэффициента прохождения, в том числе расположение нулей и полюсов, а также исследовать существование нерезонансных зон и так называемых "пороговых аномалий".

## 2. МАТРИЦА РАССЕЙЯНИЯ

В данной работе в целом будет использоваться гамильтониан следующего вида:

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + [\tilde{V}_0 + \tilde{V}_1 \cos(\omega t)] \delta(x) \quad (1)$$

где  $p$  и  $x$  — операторы импульса и координаты,  $\mu$  — масса частицы,  $\tilde{V}_0$  — амплитуда статического потенциала,  $\tilde{V}_1$  — амплитуда осциллирующего потенциала,  $\omega$  — частота колебаний,  $t$  — время.

Так как волновая функция, удовлетворяющая уравнению Шрёдингера  $i\hbar(\frac{\partial\Psi}{\partial t}) = H\Psi$ , должна быть периодичной по времени, согласно теореме Флоке-Блоха, она может быть представлена в виде:

$$\Psi_\epsilon(x, t) = e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(x) e^{-in\omega t} \quad (2)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\psi_n$  — амплитуда вероятности,  $\epsilon$  — квазиэнергия, принимающая значения в диапазоне от 0 до  $\hbar\omega$ .

Запишем уравнение Шрёдингера через безразмерные параметры

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi_\epsilon(x', \tau) = \left\{ -\frac{d^2}{dx'^2} + [V_0 + V_1 \cos(\tau)] \delta(x') \right\} \Psi_\epsilon(x', \tau) \quad (3)$$

где

$$\epsilon \equiv \frac{\epsilon}{\hbar\omega}, \quad x' \equiv x \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}}, \quad \tau \equiv t\omega, \quad V_0 \equiv \frac{2\mu}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \tilde{V}_0, \quad V_1 \equiv \frac{2\mu}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \tilde{V}_1 \quad (4)$$

Волновая функция в этих переменных может быть представлена в следующем виде:

$$\Psi_\epsilon(x', \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(x') e^{-i(\epsilon+n)\tau} \quad (5)$$

где  $\psi_n(x')$  содержит всю пространственную зависимость волновой функции.

Так как потенциал равен нулю всюду, кроме  $x'=0$ ,  $\psi_n(x')$  следует рассматривать в областях I и II (слева и справа от  $\delta$ -функции в точке  $x'=0$ , соответственно), чтобы представить её в виде

$$\begin{aligned} \psi_n^I(x') &= \frac{1}{\sqrt{k_n}} (a_n e^{ik_n x'} + d_n e^{-ik_n x'}) \quad \text{при } -\infty < x' < 0, \\ \psi_n^{II}(x') &= \frac{1}{\sqrt{k_n}} (c_n e^{ik_n x'} + b_n e^{-ik_n x'}) \quad \text{при } 0 < x' < \infty \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициент  $1/\sqrt{k_n}$  включен для обеспечения унитарности матрицы S.

Безразмерные волновые векторы  $k_n$ , задаются уравнением

$$k_n = \kappa \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \cdot \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (\epsilon + n\hbar\omega)} = \sqrt{\epsilon + n}. \quad (7)$$

Можно видеть, что волновые векторы имеют разрез на вещественной оси энергии. При  $n < 0$  будем использовать лист Римана, для которого  $\text{Im}(k_n) \geq 0$ , и будем называть его «физическим» листом. На этом листе  $k_n$  лежит на положительной мнимой оси для любых  $n < 0$ , что позволяет обеспечить затухание мод по обе стороны от потенциала. Чтобы избежать «не физических» экспоненциально растущих состояний при работе с положительными чисто мнимыми волновыми векторами, будем полагать  $a_n = 0$  и  $b_n = 0$  при  $n \leq -1$ .

Так как  $\Psi_\epsilon(x', \tau)$  должна быть непрерывной при  $x'=0$ , то мы получаем условие:

$$a_n + d_n = c_n + b_n \quad (8)$$

Из-за дельта-функции в гамильтониане, пространственная производная  $\Psi_\epsilon(x', \tau)$  в точке  $x'=0$  имеет разрыв и удовлетворяет следующему условию

$$\frac{d\Psi_\varepsilon}{dx'} \Big|_{x'=0^+} + \frac{d\Psi_\varepsilon}{dx'} \Big|_{x'=0^-} = [V_0 + V_1 \cos(\tau)] \Psi_\varepsilon(0, \tau) \quad (9)$$

что даёт нам второе уравнение на коэффициенты:

$$c_n + d_n - b_n - a_n = -2i [s_n(a_n + d_n) + h_{n-1}(a_{n-1} + d_{n-1}) + h_n(a_{n+1} + d_{n+1})] \quad (10)$$

где

$$h_n = \frac{V_1}{(\varepsilon + n)^{1/4}(\varepsilon + n + 1)^{1/4}}, \quad s_n = \frac{V_0}{(\varepsilon + n)^{1/2}} \quad (11)$$

Выражая  $c_n$  и  $d_n$  через  $a_n$  и  $b_n$  используя уравнения (8) и (10), получаем

$$c_n + is_n c_n + ih_{n-1} c_{n-1} + ih_n c_{n+1} = a_n - is_n b_n - ih_{n-1} b_{n-1} - ih_n b_{n+1} \quad (12)$$

$$d_n + is_n d_n + ih_{n-1} d_{n-1} + ih_n d_{n+1} = b_n - is_n a_n - ih_{n-1} a_{n-1} - ih_n a_{n+1} \quad (13)$$

Определим матрицу  $\mathbf{X}$  через её элементы как  $[X]_{n,n'} = is_n \delta_{n,n'} + ih_{n-1} \delta_{n-1,n'} + ih_n \delta_{n+1,n'}$ , тогда уравнения (12) и (13) можно переписать в следующем виде

$$(\mathbf{1} + \mathbf{X})\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{X}\mathbf{B} \quad (14)$$

$$(\mathbf{1} + \mathbf{X})\mathbf{D} = \mathbf{B} - \mathbf{X}\mathbf{A} \quad (15)$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  – вектор столбцы с элементами  $a_n, b_n, c_n$  и  $d_n$  соответственно.

Теперь можно записать матрицу рассеяния  $\mathbf{S}$  для этой системы, соединяющую входящие распространяющиеся моды с исходящими модами.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r} & \bar{t}' \\ \bar{t} & \bar{r}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{1} + \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X} & (\mathbf{1} + \mathbf{X})^{-1} \\ (\mathbf{1} + \mathbf{X})^{-1} & -(\mathbf{1} + \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Здесь вектор столбцы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  состоят из элементов с  $n \geq 0$ .  $\bar{t}$  и  $\bar{t}'$  являются матрицами амплитуды прохождения, а  $\bar{r}$  и  $\bar{r}'$  — матрицы амплитуды отражения. В частности, матричный элемент  $t_{m,m'} = [\bar{t}]_{m,m'}$  есть амплитуда вероятности того, что мода  $m'$ , пришедшая слева, пройдёт на право по каналу  $m$ , а  $r_{m,m'} = [\bar{r}]_{m,m'}$  есть амплитуда вероятности, что мода  $m'$ , пришедшая слева, отразится налево по каналу  $m$ . Матричные элементы  $\bar{t}'$  и  $\bar{r}'$  содержат коэффициенты отражения и прохождения для мод, пришедших справа.

Для распространяющихся мод, входящих в  $m$ -ый канал слева, полная вероятность для прохождения равна

$$T_m = \sum_{m'=0}^{\infty} |t_{m',m}|^2 \quad (17)$$

### 3. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Рассмотрим частный случай одной распространяющейся моды, входящей в канал  $m=0$  слева, в отсутствие распространяющихся мод справа. В этом случае  $a_n = \delta_{n,0}$  и  $b_n = 0$ . Амплитуда вероятности прохождения частиц направо в  $n$ -ый канал будет равна  $c_n$ . Для распространяющихся мод  $n \geq 0$ ,  $c_n = t_{n,0}$ .

Определим следующую величину:

$$f_n = \frac{c_n}{c_{n+1}}, \quad -\infty < n < \infty \quad (18)$$

Теперь можно переписать уравнение (12)

$$1 + is_n + ih_{n-1} f_{n-1} + \frac{ih_n}{f_n} = 0 \quad \text{при } n \neq 0 \quad (19)$$

$$1 + is_0 + ih_{-1} f_{-1} + \frac{ih_0}{f_0} = \frac{1}{c_0} \quad \text{при } n=0 \quad (20)$$

Отсюда при  $n \geq 0$  представим первое уравнение в следующем виде

$$f_n = -\frac{1}{ih_n} \left( 1 + is_{n+1} + \frac{ih_{n+1}}{f_{n+1}} \right) = -\frac{1}{ih_n} \left( 1 + is_{n+1} + \frac{h_{n+1}^2}{1 + is_{n+2} + \frac{h_{n+2}^2}{1 + is_{n+3} + \frac{h_{n+3}^2}{\ddots}}} \right) \quad (21)$$

Для  $n \leq -1$  можно записать аналогичную цепную дробь

$$f_n = \frac{-ih_n}{1 + is_n + ih_{n-1}f_{n-1}} = \frac{-ih_n}{1 + is_n + \frac{h_{n-1}^2}{1 + is_{n-1} + \frac{h_{n-2}^2}{\ddots}}} \quad (22)$$

Используя данные выражения для  $f_n$ , можно получить выражение для  $c_0$

$$c_0 = t_{0,0} = \frac{1}{1 + is_0 + ih_{-1}f_{-1} + \frac{ih_0}{f_0}} = \frac{1}{1 + is_0 + \frac{h_{-1}^2}{1 + is_{-1} + \frac{h_{-2}^2}{1 + is_{-2} + \frac{h_{-3}^2}{\ddots}}} + \frac{h_0^2}{1 + is_1 + \frac{h_1^2}{1 + is_2 + \frac{h_2^2}{\ddots}}}} \quad (23)$$

Теперь с помощью рекуррентных формул для  $f_n$  и известного  $c_0$  можно найти все оставшиеся коэффициенты  $c_n$ , используя уравнение (18):

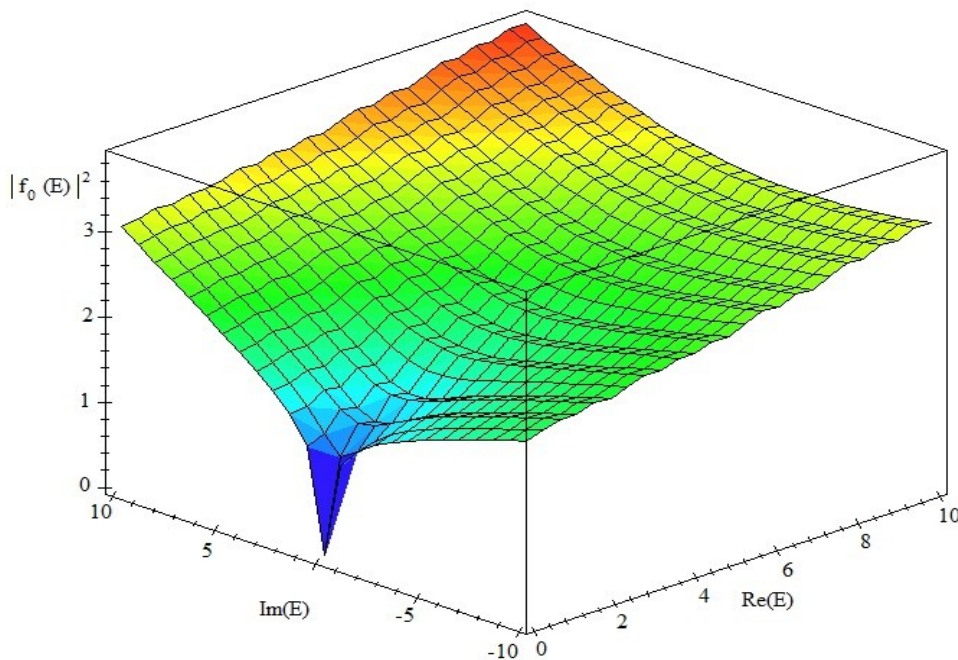
$$c_n = \frac{c_0}{f_{n-1}f_{n-2}\cdots f_0} \quad \text{для } n \geq 1 \quad (24)$$

$$c_n = f_n f_{n+1} \cdots f_{-1} c_0 \quad \text{для } n \leq -1 \quad (25)$$

Таким образом полная вероятность прохождения  $T_0$  может быть записана в следующем виде:

$$T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |t_{0,0}|^2 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{n'=1}^n |f_{n'-1}|^2} \right) = |t_{0,0}|^2 S(\varepsilon, V_0, V_1) \quad (26)$$

Как видно из графика 1, функция  $S(\varepsilon, V_0, V_1)$  не имеет ни нулей, ни полюсов при  $\text{Re}(\varepsilon) > 0$ . Следовательно, нули и полюса полной вероятности прохождения совпадают с нулями и полюсами  $|t_{0,0}|^2$ .



Граф1. График функции  $|f_0(E)|^2$  в комплексной плоскости  $E$ , при  $V_0=2$ ,  $V_1=3$ . При других значениях  $V_0, V_1$  график вида не меняет.

#### 4. НУЛИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОХОЖДЕНИЯ

Теперь обобщим случай. Пусть распространяющаяся мода слева входит в произвольный канал  $m$  с энергией  $e = \varepsilon + m$ . Нам нужно будет проделать ту же процедуру, что и в предыдущей главе, только с условием, что  $a_n = \delta_{n,m}$ . Решение будет даваться через коэффициент  $c_m$ , который играет роль бывшего  $c_0$ . Таким образом, уравнение для  $c_m$  будет совпадать с уравнением (23), если ко всем индексам прибавить  $m$ . Легко увидеть, что  $c_m(\varepsilon) = c_0(\varepsilon + m) = c_0(e)$ . Следовательно, коэффициент  $c_0$  можно считать непрерывной функцией входящих энергии  $e = \varepsilon + n$ , а не функцией от  $\varepsilon$  энергии Флоке. Это значит, что общее решение для любой поступающей энергии может быть получено из выражения цепной дроби для  $c_0$ , как в уравнении (23) при любой энергии  $e$ .

Определим для упрощения записей величину  $t_0(e) = t_0(\varepsilon + m) \equiv t_{m,m}(\varepsilon) = c_0(e)$ . Заметим, что  $t_0(e)$  содержит ту же информацию, что и вся диагональ матрицы прохождения  $\bar{t}'$  в формуле (16).

Для исследования свойств  $c_0(e)$  удобно определить следующие функции

$$F_0(e) = F_0(\varepsilon + n) \equiv F_n(\varepsilon) \equiv 1 + i s_0(n + \varepsilon) + i \frac{h_0(n + \varepsilon)}{f_0(n + \varepsilon)} =$$

$$= 1 + i s_n(\varepsilon) + \frac{h_n^2(\varepsilon)}{1 + i s_{n+1}(\varepsilon) + \frac{h_{n+1}^2(\varepsilon)}{1 + i s_{n+2}(\varepsilon) + \frac{h_{n+2}^2(\varepsilon)}{\ddots}}} = 1 + i s_n(\varepsilon) + \frac{h_n^2(\varepsilon)}{F_{n+1}(\varepsilon)} \quad (27)$$

$$G_n(\varepsilon) \equiv \frac{h_{n-1}^2(\varepsilon)}{1 + i s_{n-1}(\varepsilon) + G_{n-1}(\varepsilon)} = \frac{h_{n-1}^2(\varepsilon)}{1 + i s_{n-1}(\varepsilon) + \frac{h_{n-2}^2(\varepsilon)}{\ddots}} \quad (28)$$

Используя приведённые выше определения, можно записать коэффициент  $c_0(e)$  для  $n \leq e \leq n+1$ , следующим образом:

$$c_0(e) = c_0(n + \varepsilon) = \frac{1}{1 + i s_n(\varepsilon) + \frac{h_n^2(\varepsilon)}{1 + i s_{n+1}(\varepsilon) + \frac{h_{n+1}^2(\varepsilon)}{\ddots}}} + \frac{h_{n-1}^2(\varepsilon)}{1 + i s_{n-1}(\varepsilon) + \frac{h_{n-2}^2(\varepsilon)}{\ddots}} = \frac{1}{F_n(\varepsilon) + G_n(\varepsilon)} \quad (29)$$

В частности, при  $n=0$  коэффициент  $c_0(\varepsilon)$  представим в виде дроби

$$c_0(\varepsilon) = \frac{1}{F_0(\varepsilon) + G_0(\varepsilon)} \quad (30)$$

где  $G_0(\varepsilon)$  является чисто мнимой функцией вещественного  $\varepsilon$ .

Определим для упрощения записей переменную  $a = V_l^2$ .

Можно заметить, что  $c_0(E)$  будет обращаться в ноль только в двух случаях: при  $F_n(\varepsilon, a) \rightarrow \infty$  или при  $G_n(\varepsilon, a) \rightarrow \infty$ . Первое возможно только при  $\varepsilon=0$ , так как  $f_0(E)$  (как показано на графике 1) не имеет ни полюсов, ни нулей в полуплоскости  $\text{Re}(e) > 0$ , то, согласно формуле (27), функция  $F_n(\varepsilon)$  не имеет других полюсов. Разберём второй случай, для этого преобразуем уравнение (29), выразив  $c_{n+1}(\varepsilon)$  через выражение для коэффициента  $c_n(\varepsilon)$ .

$$c_0(n+1 + \varepsilon) = \frac{1}{F_{n+1}(\varepsilon) + G_{n+1}(\varepsilon)} = \frac{1}{\frac{h_n^2(\varepsilon)}{F_n(\varepsilon) - 1 - i s_n(\varepsilon)} + \frac{h_n^2(\varepsilon)}{1 + i s_n(\varepsilon) + G_n(\varepsilon)}} =$$

$$= \frac{[F_n(\varepsilon) - 1 - i s_n(\varepsilon)][1 + i s_n(\varepsilon) + G_n(\varepsilon)]}{h_n^2(\varepsilon)[F_n(\varepsilon) + G_n(\varepsilon)]} = \frac{[1 + i s_n(\varepsilon) + G_n(\varepsilon)]}{F_{n+1}(\varepsilon)[F_n(\varepsilon) + G_n(\varepsilon)]} \quad (31)$$

Из уравнения (31) можно заключить, что  $G_l(\varepsilon)$  не может обращаться в бесконечность, так как это бы означало либо стремление к нулю числителя последнего выражения в уравнении (31), что невозможно ввиду чисто мнимого значения  $G_0(\varepsilon)$ , либо стремление к бесконечности  $G_0(\varepsilon)$ , что приводит к равномерному росту и числителя и знаменателя, а значит сама дробь не сможет обратиться в ноль. Стремление к бесконечности всех остальных  $G_n(\varepsilon)$  для соответствующих  $c_n(\varepsilon)$  означает, что  $1 + i s_{n-1}(\varepsilon) = -G_{n-1}(\varepsilon)$ , а это условие невыполнимо, так как вещественная часть  $G_n(\varepsilon) \geq 0$ . Это так, потому что  $G_0(\varepsilon)$  – чисто мнимая функция,  $Re(G_l(\varepsilon)) \geq 0$  (см. график 2(а)), а далее  $Re(G_n(\varepsilon)) \geq 0$  (см. график 2(б)) доказывается по индукции.

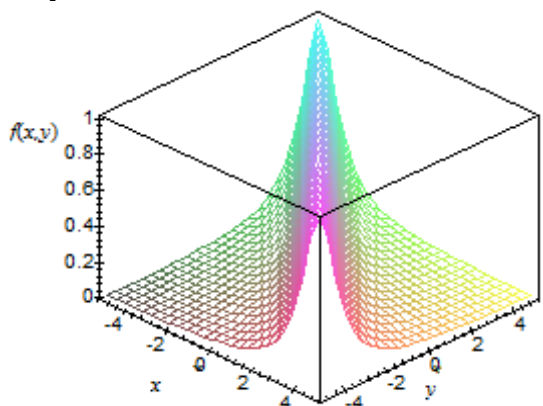


График 2(а). График функции  $f(x, y) = Re\left(\frac{1}{1+i(x+y)}\right)$  которая соответствует поведению вещественной части функции  $G_l(\varepsilon)$

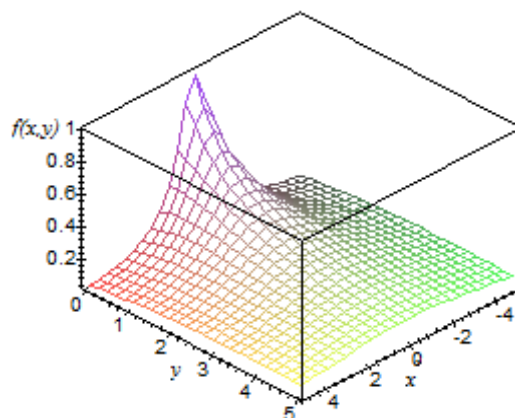


График 2. График функции  $f(x, y) = Re\left(\frac{1}{1+ix+y}\right)$  которая отражает поведение вещественной части  $G_n(\varepsilon)$  при неотрицательной вещественной части  $G_{n-l}(\varepsilon)$

В связи с вышесказанным можно утверждать, что вещественные нули коэффициентов прохождения невозможны при энергиях  $E > \hbar\omega$ . Поэтому рассматривается только ноль коэффициента  $c_0(\varepsilon)$ , который (как было сказано ранее) возможен при  $G_0(\varepsilon, a) \rightarrow \infty$ , что свидетельствует о том, что нули функций  $t_0(\varepsilon, a)$  и  $G_0^{-1}(\varepsilon, a)$  совпадают.

Как видно из серии графиков 3, функция  $|G_0^{-1}(\varepsilon, a)|$  кажется имеет какую-то периодичность по параметру  $a$ , а стационарный потенциал влияет только на период. Эта зависимость вещественных нулей коэффициента прохождения от параметра  $a$  непосредственно видна на графике 4 в последовательности графиков при различных значениях силы  $V_1$  и отсутствии стационарного поля. Замечу, что есть интервалы  $a$  вокруг целочисленных значений, для которых исчезает вещественный ноль в коэффициенте прохождения. В таблице 1 показаны  $a$  ( $0 < a < 9$ ) с точными значениями (до семи цифр), в интервале между которыми существует вещественный ноль, кроме тривиального [1].

	$l$	$h$
$a_0$	0	0.7821147
$a_1$	1.1652568	1.7710590
$a_2$	2.1873508	2.7667368
$a_3$	3.1979937	3.7642963
$a_4$	4.2045658	4.7626808
$a_5$	5.2091415	5.7615115
$a_6$	6.2125623	6.7606150
$a_7$	7.2152455	7.7598995
$a_8$	8.2174231	8.7593115

Табл.1. Значения  $a^l$  и  $a^h$ , между которыми в отсутствие стационарного потенциала наблюдаются нули коэффициента прохождения.



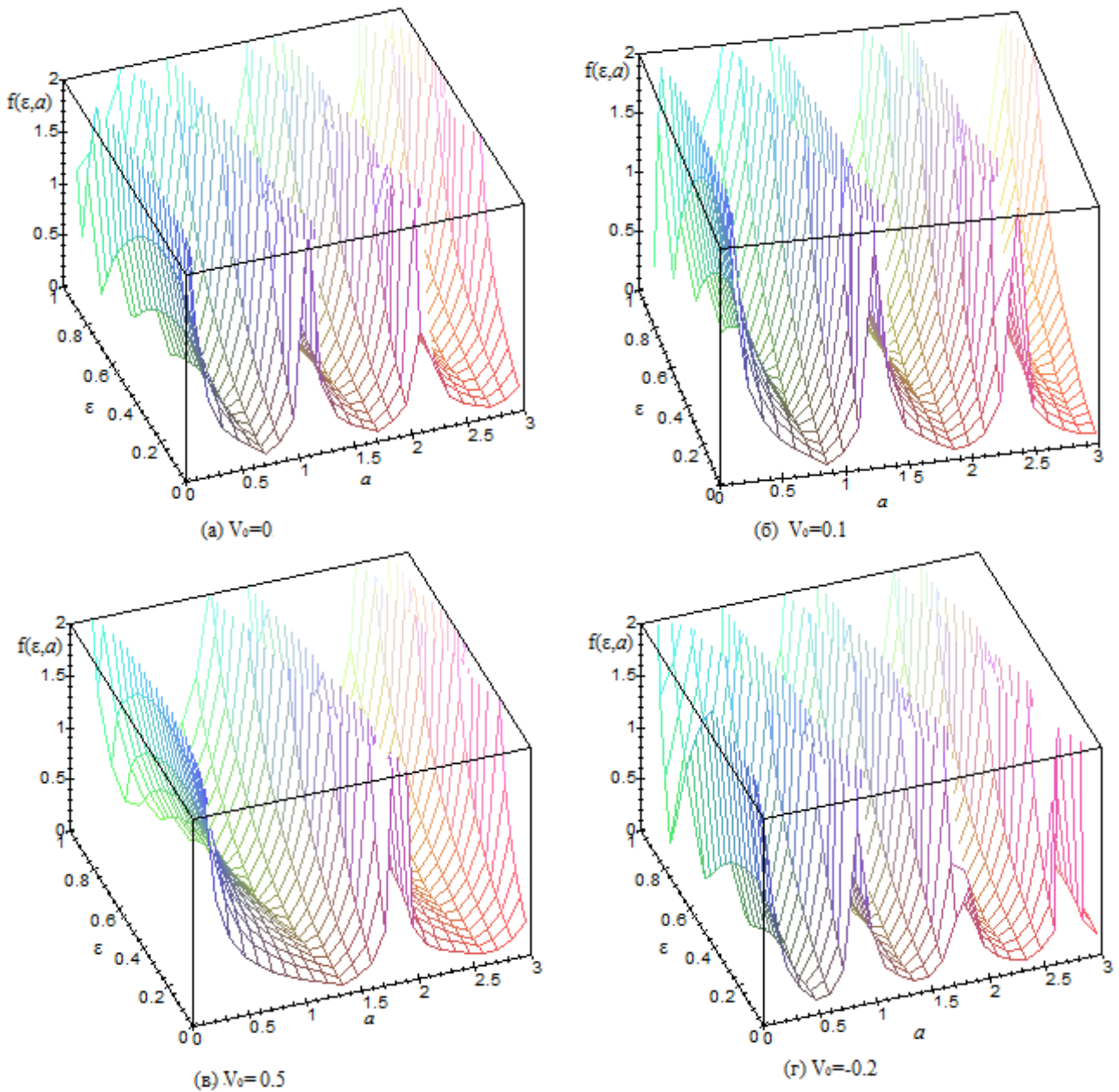


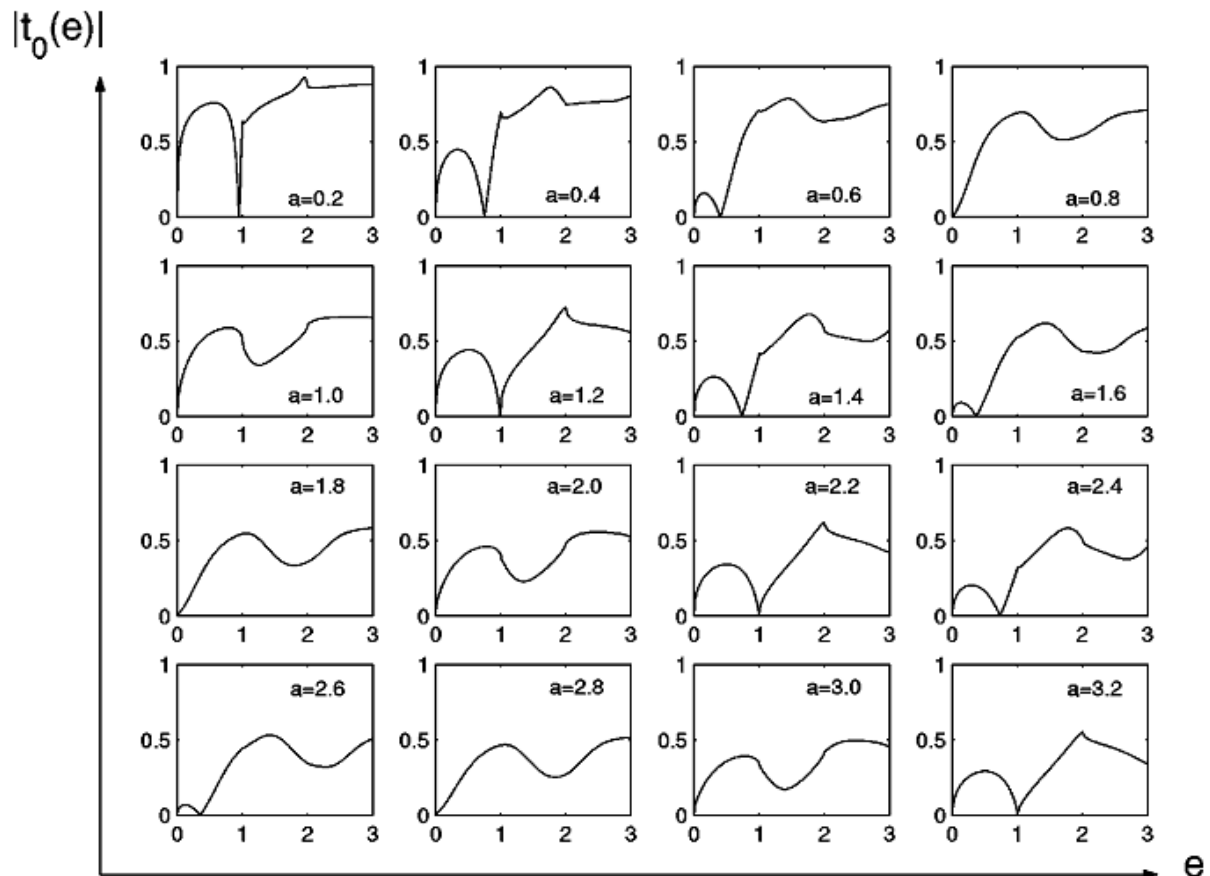
График 3. Серия графиков зависимости  $f(\varepsilon, \alpha) = |G_0^{-1}(\varepsilon, \alpha)|$  при различных значениях стационарной силы.

## 5. ПОЛЮСА КОЭФФИЦИЕНТА ПРОХОЖДЕНИЯ

Предположим, что  $c_0(e)$  имеет полюс в точке  $e=n+\varepsilon^*$ . Тогда это означает, что  $c_0(e)$  также имеет полюс в  $e=n+\varepsilon^*+1$ . В этом легко убедиться глядя на уравнение (31). Из последней строки этого уравнения следует то, что если коэффициент  $c_0(e)$  имеет полюс в  $n+\varepsilon^*$  (что значит, что  $F_n(\varepsilon^*)+G_n(\varepsilon^*)=0$ ), то он должен иметь полюс в  $n+1+\varepsilon^*$ , так как числитель в формуле (31) не обращается в нуль при  $\varepsilon=\varepsilon^*$ . Действительно, так как  $G_n(\varepsilon^*)=-F_n(\varepsilon^*)$ , следовательно

$$1 + is_n(\varepsilon^*) + G_n(\varepsilon^*) = 1 + is_n(\varepsilon^*) - F_n(\varepsilon^*) = \frac{-h_n^2(\varepsilon^*)}{F_{n+1}(\varepsilon^*)} . \quad (33)$$

Отметим также, что при  $n \rightarrow \infty$   $F_n \rightarrow 1$ , так как  $f_0(e) \rightarrow \infty$ ,  $s_0(n+\varepsilon) \rightarrow 0$  и  $h_0(n+\varepsilon) \rightarrow 0$  в этом пределе. Это означает, что расположение нулей коэффициентов прохождения приближается к расположению полюсов с ростом энергии. Нули коэффициентов прохождения будут при  $\varepsilon=\sigma$ , полюса — при  $\varepsilon=\varepsilon^*$ . В этом случае  $F_n(\varepsilon^*) = -G_n(\varepsilon^*) \Rightarrow F_{n-1}(\varepsilon^*) = -G_{n-1}(\varepsilon^*)$  и числитель



Граф4. Серия графиков зависимости  $|t_0(e)|$  при различных значениях силы  $V_1$  и отсутствии стационарного потенциала  $V_0$

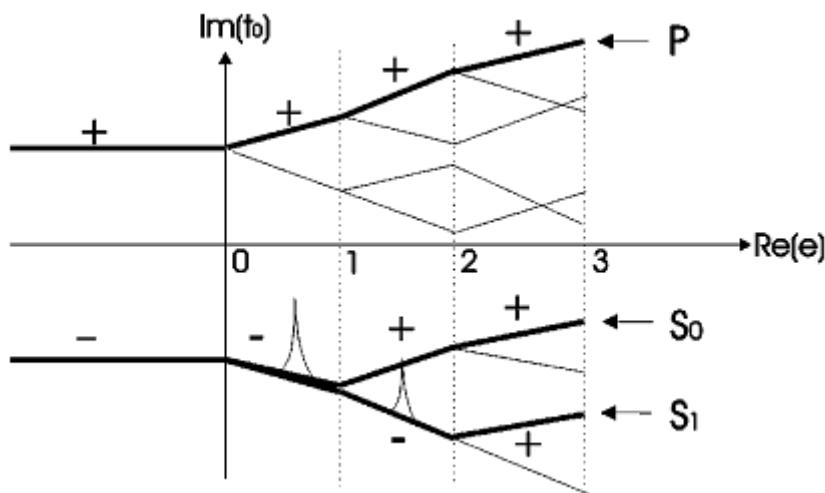
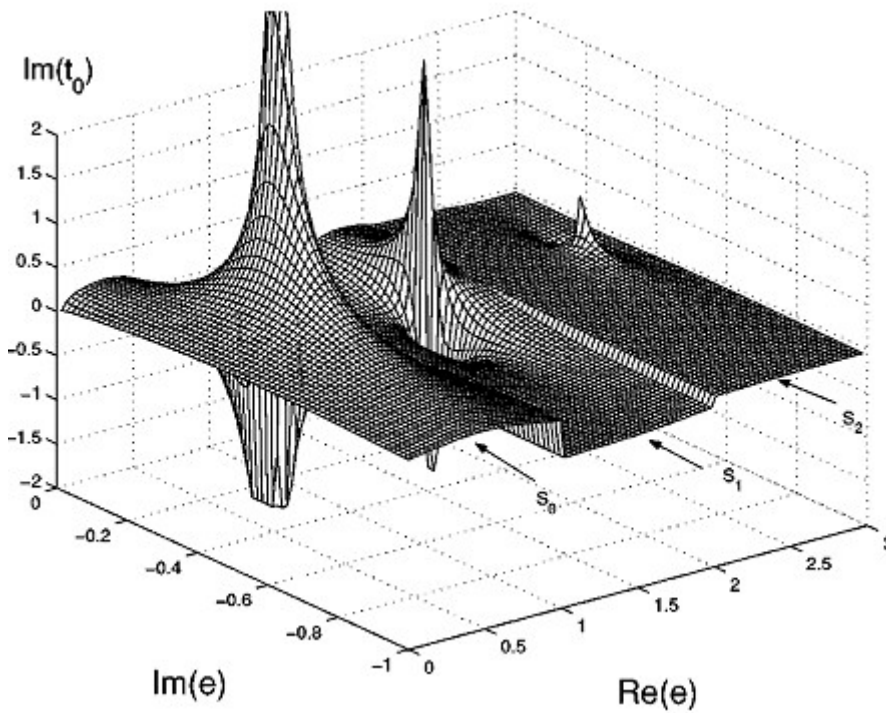
$c_n$  после преобразования аналогичному в формуле (31) будет равен

$[1 + i s_{n-1}(\varepsilon^*) + G_{n-1}(\varepsilon^*)] = [1 + i s_{n-1}(\varepsilon^*) - F_{n-1}(\varepsilon^*)]$ , откуда  $F_{n-1}(\varepsilon^*) \rightarrow 1 + i s_{n-1}(\sigma)$  при  $\sigma \rightarrow \varepsilon^*$ , тот же предел будет и при  $n \rightarrow \infty$ , ввиду того что  $s_0(n+\varepsilon) \rightarrow 0$  в этом пределе.

Следовательно, ноль коэффициента прохождения будет при  $n \rightarrow \infty$ , независимо от уровня энергии  $\varepsilon$ . Из этого можно сделать вывод, что вычет полюса стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Это объясняет, почему, хотя амплитуда прохождения имеет бесконечное число полюсов, разделенных расстоянием  $\hbar\omega$  в поступающей энергии и находящихся на одинаковом расстоянии на вещественной оси, но только эффект первого полюса можно увидеть на графиках вероятности прохождения от поступающей энергии. Так же можно сказать, что эти нули (в комплексной плоскости) при более высоких энергиях очень близки к полюсам, следовательно, сокращается возможное влияние полюсов в вероятности прохождения.

На графике 5 показано поведение мнимой части  $t_0(e)$ , где можем увидеть полюса в каналах 0,1,2. Очевидно, что на этом графике полюсы расположены на разных листах  $S_n$ , где  $n$  означает номер канала. Это листовая структура появляется из-за того, что функции  $k_n(e)$  имеют точку ветвления при  $e=-n$  и два листа Римана. То, что называется физическим листом (P), в контексте задачи многоканального рассеяния, есть лист, полученный при выборе всех листов Римана с  $\text{Im}(k_n) \geq 0$ . Каждый лист из полной многолистовой поверхности может быть помечен последовательностью знаков  $\text{Im}(k_\infty), \dots, \text{Im}(k_1), \text{Im}(k_0), \text{Im}(k_{-1}), \dots, \text{Im}(k_{-\infty}) \rightarrow (+ \dots - + + \dots +)$ . Не следует рассматривать все эти листы, так как только небольшая часть из них имеет физический интерес. Главным из них есть лист P или  $(+ \dots + + \dots +)$ . Вещественная ось на физическом листе P при энергии  $m < e < m+1$  пересекает все разрезы, точка ветвления которых лежит на энергии меньше, чем  $e=m$ . Лист, который является плавным продолжением P в нижней комплексной плоскости, получен путем принятия  $\text{Im}(k_{-n}) < 0$  для всех  $n \leq m$  и  $\text{Im}(k_{-n}) > 0$  для всех  $n \geq m$ . Обозначим эти листы  $S_m$ . Именно на этих листах были найдены полюсы в коэффициенте прохождения, как показано на графб[1].

Граф5. График мнимой части  $t_0(e)$  при стационарном поле и  $a=0.5$

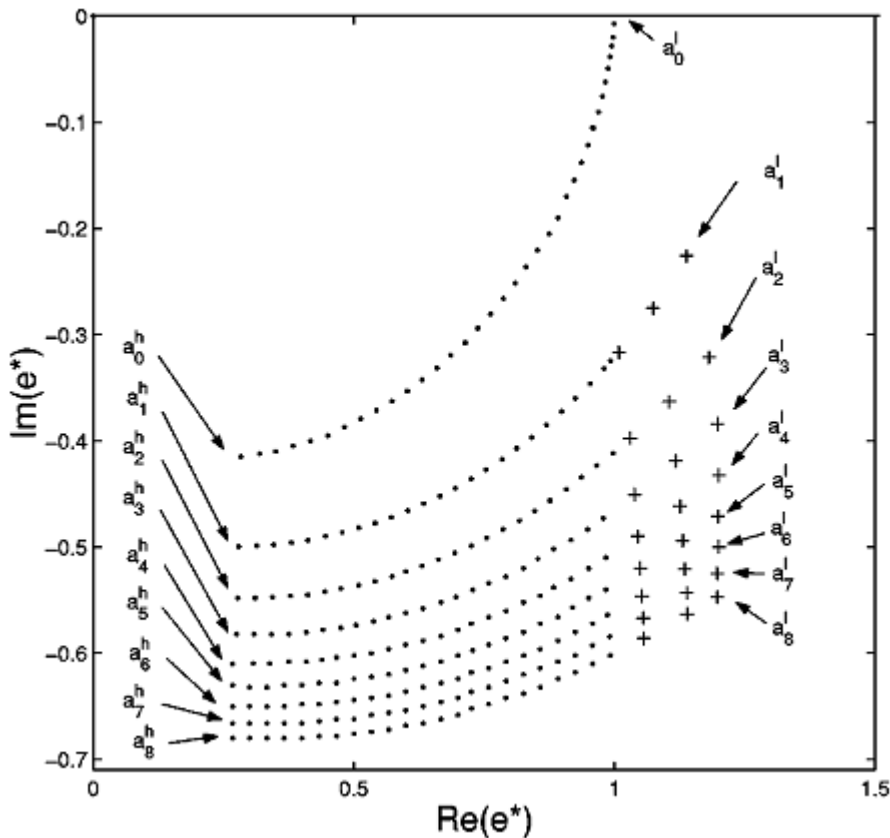


Граф6. Эскиз зависимости  $\text{Im}[t_0(e)]$  от  $\text{Re}[e]$  [будем считать,  $\text{Im}[e]=\text{constant}<0$ ], который дает схематичное представление разных листов, где расположены полюса коэффициентов прохождения. Пики структуры в нижней части рисунка представляют собой полюсы.

Резонансы, в отличие от полюсов связанного состояния, не входят в физические листы, однако, из унитарности матрицы рассеяния, распространенной на комплексной плоскости, они могут оказывать существенное влияние на поведение матрицы рассеяния вдоль действительной оси[3].

При рассеивании единственного канала у унитарной матрицы  $S$  на вещественной оси есть особенности в аналитической структуре матрицы  $S$  на обоих листах, самой важной является структура нуль-резонансы: у каждого полюса есть сопутствующий ноль в комплексной плоскости, сопряженный к его положению, но на другом листе. Для многоканального рассеивания положение полюса и нуля так просто не связаны, и часто полюс и ноль появляются на том же самом листе.

Положение полюса в первом канале может быть найдено, глядя на нули функции  $F_0(e,a)+G_0(e,a)$  с соответствующим выбором листа Римана, таким образом, чтобы быть на листе  $S_0$ . Положение полюса в зависимости от силы потенциала показано на графике 7, где видно, что полюс подходит к действительной оси при  $e^* = 1$ , когда  $a \rightarrow 0$ , уничтожая вещественный ноль, который также появляется при  $a \rightarrow 0$ . При увеличении параметра  $a$ , ноль



Граф7. Траектория изменения положения одного полюса амплитуды прохождения в комплексной плоскости для различных значений  $a$  в отсутствие статического поля.

коэффициента прохождения движется влево по действительной оси и полюс движется от действительной оси, описывая арку. При  $a = a^h = 0.78$  ноль исчезает так же, как и полюса. В интервале  $a^h_0 < a < a^l_1$  коэффициент прохождения не имеет ноль-полюс резонансов. В этом интервале пик или «ложный полюс» следует траектории, которая кажется продолжением траектории полюса, пока не исчезнет. Когда  $a = a^l_1$ , ноль появится в этом канале. При этом значении, однако, не виден полюс в этом канале. Есть фактически полюс на  $S_0$ , но он расположен в следующем канале [ $1 < \text{Re}(E^*) < 2$ ]. При  $a = 1,3$ , полюс, наконец, появляется в канале  $n=0$ . При дальнейшем увеличении  $a$ , полюсы продолжают описывать арки, пока не исчезнут вместе с нулями, удаляясь от вещественной оси. Одинаковое поведение полюсов на других листах ожидается при обсуждении уравнения (31).

Изучение поведения полюсов и вещественных нулей, в зависимости от параметра  $a$ , показывает интересные квази-периодические зависимости от него и наличие "полос" нерезонансного значения  $a$ , для которых вероятность прохождения не имеет ноль-полюс резонансов. Это квази-периодическое поведение при колеблющемся потенциале и меняющейся частоте не было обнаружено раньше. Около целых  $a$ , осциллирующий потенциал, кажется, не в состоянии осуществить динамический захват частиц даже в течение короткого периода времени. Можно также отметить, что жизнь квази-связанных состояний уменьшается с увеличением силы  $V_1$  или путем уменьшения частоты колебаний.

## 6. ПОРОГОВЫЕ АНОМАЛИИ

Одной из наиболее очевидных особенностей в сравнении с передачей энергии для всех значений  $a$  является то, что, кажется, есть разрыв производной  $dt_0/de$  при  $e=n$  (открытый канал)(смотри граф4). Детальный анализ показывает, что нет быстрого расхождения производной на порогах, то есть  $dt_0/de \rightarrow \infty$ , так же как  $e \rightarrow n$ . На самом деле, это обычное явление во всех задачах многоканального рассеяния. Это можно проследить на том факте, что, когда энергия в  $n$ -ом канале вблизи порога, первый импульс открытого канала  $k_{-n} = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{e-n}$ . Это может быть доказано из того, что матрица имеет элементы, которые

являются линейными функциями этого импульса вблизи порога. Существование этих пороговых аномалий может быть легко доказано, в частности, на рассмотренном нестационарном потенциале, на примере решения из цепной дроби для  $t_0(e)$  в формуле (23). Из него ясно, что производная от этого выражения дает бесконечное число членов, каждый из которых пропорционален производной от функции  $h_n^2(e)$ . Эти функции и их производные расходятся в их пороговых значениях (по определению). Таким образом, производная от  $t_0(e)$  также должна расходиться на каждом пороге. В соответствии с этим, форма пороговой аномалии может быть четырех различных видов, две точки возврата (напоминающие пики) и два круглых шага. Эти четыре различных вида аномалий видны, к примеру, на графике 4, при  $a=0.4$  и  $a=2.0$ .

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы, было найдено точное решение задачи о прохождении частицы через монохроматический колеблющийся потенциал с использованием цепной дроби. В вычислительном плане, этот подход представляет улучшение в скорости по сравнению со стандартным методом, который требует обращения к бесконечной трехдиагональной матрице. Это улучшение может быть значительным при изучении ноль-полюс структуры коэффициентов прохождения на комплексной плоскости. Самое главное, это позволило авторам [1,2] строго доказать некоторые общие свойства вероятности прохождения для этой системы, а именно существование нулей только в первом канале, расположение полюсов через регулярные интервалы  $\hbar\omega$  в падающей энергии, снижение вычетов полюсов с ростом энергии, а также позволило понять существование пороговых аномалий в открытом канале.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D.F.Martinez, L.E.Reichl, Phys. Rev. B. **64**, 245315 (2001)
2. D.F.Martinez, L.E.Reichl, Phys. Rev. B. **66**, 174306 (2002)
3. K.W. McVoy, in Fundamentals in Nuclear Theory, edited by A. De-Shalit and C. Villi (International Atomic Agency, Vienna, 1967).