

The nonperturbation renormalization group investigation of scaling behaviour

Georgii Kalagov

supervisor: prof. Nalimov M. Yu.

The purpose of the present work is to investigate the scaling phenomena in many-particle statistical systems by nonperturbative field theoretical means. An emphasis is placed on issues related to the determination of scaling regimes and computation of corresponding critical exponents. The technical realization of our program focuses mainly on two tools: the instanton analysis based on the steepest descent method for path integral representation of observables and the nonperturbative renormalization group, namely, the effective average action method, which does not rely on any small parameters in the considered models. The study is divided as follows:

- ✚ In the first part we employ the instanton analysis in our investigation of the scalar $g\varphi^3$ model to explore analytical properties of quantum-field perturbation expansions in coupling g that enable us to deduce the asymptotic of expansion coefficients at higher orders (HOA). Namely, we derive the HOA for renormalization group functions in the MS-scheme and HOA for the ε -expansion of Fisher's critical exponent η . On the basis of 4-loop calculation of η exponent presently available, the Borel resummations have been performed using the found HOA. The values of η exponent obtained by means of various Borel techniques in different space dimensions are presented. [1]
- ✚ The second part is devoted to the study of phase transitions in U(N)-symmetric equilibrium system made of large spin $s > 1/2$ fermi particles, $N = 2s + 1$. The original microscopic fermionic model can be brought by the Hubbard-Stratonovich transformation into an effective bosonic model amenable to further instanton analysis. We determined the HOA for the beta-functions. After we carried out the Borel resummation of the Gell-Mann-Low equations based on 5-loop computations being available in advance we concluded that in case $s > 1/2$ the system manifests the first order phase transition. To estimate phase transition temperature, we performed the renormalization group analysis for composite operators of higher order. [2, 3]
- ✚ In the last part we use the nonperturbative renormalization group technique to reveal the effect of stochastic turbulent mixing on the nonequilibrium behaviour of a non-conserved scalar order parameter near its critical point. The compressible advecting flow is simulated by a random Gaussian velocity field with zero mean and correlation function $\langle v_i v_j \rangle \sim (\delta_{ij} + \alpha P_{ij})/k^{(d+\zeta)}$. Depending on the relations between the parameters ζ , α and the space dimensionality d , the model reveals several types of scaling regimes. Some of them are well known (model A of equilibrium critical dynamics and linear passive scalar field advected by a random turbulent flow), but there is a new nonequilibrium regime (universality class) associated with new nontrivial fixed points of the renormalization group equations. We have obtained the phase diagram (d, ζ) of scaling regimes in the system. The physical point $d=3, \zeta=4/3$ corresponding to three-dimensional fully developed Kolmogorov's turbulence, where critical fluctuations are irrelevant, is stable for $\alpha < 2.26$. Otherwise, in the case of "strong compressibility" $\alpha > 2.26$, the critical fluctuations of the order parameter

become relevant for three-dimensional turbulence. Estimations of critical exponents, which, however, are not universal in this system, for each scaling regime are presented. Our computations recover the outcomes obtained within 1-loop renormalization group analysis by other authors. [4]

Непертурбативное ренормгрупповое исследование скейлингового поведения

Георгий Калагов

н.р.: д.ф.-м.н., проф. Налимов М. Ю.

Работа посвящена использованию непертурбативных теоретико-полевых методов применительно к анализу скейлингового поведения моделей статистической физики. Цель – выявить устойчивые скейлинговые режимы и вычислить характеристики их описывающие. Неperтурбативные методы реализуются в виде инстантонного анализа и непертурбативной ренормгруппы. Работа состоит из трёх частей:

- ✚ В первой части с помощью инстантонного анализа рассматривается скалярная модель $g\varphi^3$. Для ренормгрупповых функций и ϵ -разложения индекса Фишера η найдена асимптотика высоких порядков, необходимая при пересуммировании по Борелю известных 4-петельных результатов. Приводятся численные оценки индекса η , полученные в различных схемах суммирования. [1]
- ✚ Вторая часть посвящена исследованию фазовых переходов в равновесной системе ферми частиц с высшим спином $s > 1/2$. Исходная фермионная модель может быть преобразованием Хаббарда-Стратоновича сведена к эффективной бозонной теории в окрестности точки фазового перехода. Инстантонный анализ применён к эффективной модели. Вычислена асимптотика высоких порядков бета-функций. Выполнено борелевское пересуммирование ренормгрупповых уравнений на основе известных 5-петельных расчётов. Установлено, что при $s > 1/2$ в системе происходит фазовый переход первого рода в упорядоченную фазу. Проведённый ренормгрупповой анализ составных операторов в 1-петельном приближении позволил оценить температуру обнаруженного фазового перехода. [2, 3]
- ✚ В третьей части для исследования скейлингового поведения в турбулентно перемешивающейся критической жидкости применяется непертурбативная ренормгруппа. Развитые турбулентные пульсации скорости моделируются случайным полем, подчиняющимся гауссовой статистике с нулевым математическим ожиданием и коррелятором вида $\langle v v \rangle \sim (P_{\perp} + \alpha P_{\parallel})/k^{(d+\zeta)}$. В зависимости от соотношений между параметрами модели α , d и ζ система может демонстрировать различные скейлинговые режимы. Физическая точка $d=3$ и $\zeta=4/3$ соответствует трёхмерной колмогоровской турбулентности. В случае $\alpha < 2.26$ жидкость переносится как пассивная примесь, и близость системы к критической точки роли не играет, здесь скейлинг всецело определяется лишь турбулентными флуктуациями. В противном случае $\alpha > 2.26$ и критические флуктуации становятся существенными, что в итоге порождает новый нетривиальный устойчивый режим.

Соответствующие критические показатели в этом режиме оказываются не универсальными, а зависящими от параметра α . Приведена их оценка. Полученные непертурбативные результаты в области слабой связи воспроизводят оные, установленные посредством стандартных 1-петлевых ренормгрупповых расчётов. [4]

- [1]. G.A. Kalagov, M.Yu. Nalimov. *Higher-order asymptotics and critical indexes in the ϕ^3 theory*. Nuclear Physics B, V.884, p. 672 (2014)
- [2]. Г. А. Калагов, М. В. Компаниец, М. Ю. Налимов. *Ренормгрупповое исследование сверхпроводящего фазового перехода: асимптотика высоких порядков разложений и результаты трехпетлевых расчетов*. ТМФ, Т. 181:2, с. 374 (2014)
- [3]. G. A. Kalagov, M. V. Kompaniets, M. Yu. Nalimov. *Renormalization-group investigation of a superconducting $U(N)$ -phase transition using five loops calculations*. Nuclear Physics B, V.905, p.16 (2016)
- [4]. M. Hnatic, G. Kalagov, M. Nalimov. *Turbulent mixing of a critical fluid: The non-perturbative renormalization*. Nuclear Physics, B V. 926, p.1 (2018)