На правах рукописи

Медведева Мария Александровна

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕФЕКТОВ СТРУКТУРЫ И РАЗМЕРНЫХ ЭФФЕКТОВ НА КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛОЖНЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМ

01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Омск – 2014

Работа выполнена на кафедре теоретической физики ФГБОУ ВПО «Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Прудников Павел Владимирович.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник, профессор
Щур Лев Николаевич.

Ведущая организация: Институт физики им. Х.И. Амирханова
ДагНЦ РАН, г. Махачкала.

Защита состоится «____» месяца 2014 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.24 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199004, г. Санкт-Петербург, Средний пр., В.О., д. 41/43, ауд. .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный университет.

Автореферат разослан «____» месяца 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.24
доктор физико-математических наук Аксенова Е.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Особенности поведения макроскопических систем в окрестности температуры фазового перехода второго рода определяются сильным взаимодействием долгоживущих флуктуаций параметра порядка. Так, слабое возмущение в окрестности критической точки может вызывать аномально сильный отклик и приводить к новым физическим эффектам. В этом плане, наиболее неожиданные явления возникают при рассмотрении влияния различных неравновесных начальных условий на аномально медленную релаксацию системы в критической области.

Реальные твердые тела содержат замороженные дефекты структуры, присутствие которых влияет на характеристики систем. В большинстве работ исследование ограничивается рассмотрением точечных, пространственно некоррелированных дефектов. В то же время вопрос о влиянии на критическое поведение эффектов корреляции дефектов значительно менее исследован. В рамках этой же проблемы можно поставить вопрос о влиянии на критическое поведение протяженных дефектов, таких как поверхности кристалла, дислокации или плоские дефекты структуры, возникающие, например, на границе зерен. Можно ожидать, что дальнодействующая корреляция в пространственном распределении дефектов может модифицировать критические свойства неупорядоченных систем.

В силу этого к моделям систем с дальнодействующей корреляцией дефектов существует несомненный интерес как с общетеоретической точки зрения выявления новых типов критического поведения, так и с точки зрения реальной возможности проявления дальнодействующей корреляции дефектов в полимерах [1], при переходе в сверхтекучее состояние ^{4}He в пористой среде – аэрогеле [2] и в неупорядоченных твердых телах с дефектами фракталоподобного типа.

В работе Вейнриба и Гальперина (Weinrib A., Halperin B.I., 1983) представлена модель изотропной неупорядоченной системы с дальнодействующей корреляцией дефектов. Было показано, что дефекты, обладающие свойством дальней пространственной корреляции, изменяют критическое поведение не только систем с однокомпонентным параметром порядка, как в случае точечных дефектов, но и систем с многокомпонентным параметром порядка. В работе [3] было осуществлено теоретико-полевое описание трехмерных систем с дальнодействующей корреляцией дефектов и было подтверждено ее влияние на критическое поведение таких систем. Однако ренормгрупповое описание не позволяет учесть влияние дефектов структуры высокой концентрации. Компьютерное моделирование позволяет провести исследование неупорядоченных систем в широком диапазоне концентраций дефектов структуры.

Понимание критических явлений в низкоразмерных структурах может быть достигнуто путем изучения ультратонких пленок. Исследование тонких пленок имеет большое технологическое значение в связи с применением в магнитных устройствах хранения данных [4]. Процессы магнитного упорядочения в ультратонких ферромагнитных пленках очень сложны из-за сильного влияния формы и кристаллографической анизотропии подложки. За последние годы появилось большое количество экспериментальных работ, посвященных исследованиям магнитных свойств низкоразмерных систем [5]. Тем не менее остались без ответа такие вещи, как тип магнитного упорядочения при низких температурах. В связи с этим компьютерное исследование модельных статистических систем имеет важное значение для описания свойств ультратонких магнитных пленок.

Цели работы

– исследование влияния дальнодействующей корреляции дефектов структуры на неравновесное поведение неупорядоченных систем при фазовом переходе второго рода посредством изучения трехмерной неупорядоченной модели Гейзенберга с линейными дефектами методом коротковременной динамики.

– численное исследование неравновесного критического поведения характеристик слабо и сильно неупорядоченной модели Гейзенберга с линейными дефектами с учетом влияния различных начальных состояний. Расчет универсальных критических показателей и сравнение с результатами теоретических расчетов.

– исследование равновесного критического поведения ультратонких магнитных пленок. Определение значений универсальных показателей, определяющих магнитное упорядочение в тонких пленках. Исследование перехода от двумерных к трехмерным критическим свойствам многослойных магнетиков с ростом толщины пленки.

Научная новизна результатов

1. Впервые осуществлено компьютерное моделирование неравновесного критического поведения трехмерной модели Гейзенберга с дальней пространственной корреляцией дефектов в коротковременном режиме. При исследовании критической релаксации модели из различных начальных состояний системы определены значения совокупности динамических и статических универсальных критических показателей при применении методики учета поправок к скейлингу. Полученные результаты позволяют сделать вывод о существенности влияния дальней пространственной корреляции дефектов на критическое поведение и о существовании различных классов универсального критического поведения для рассматриваемых систем, отвечающих областям слабой и

сильной структурной неупорядоченности.

2. Впервые продемонстрировано при сопоставлении результатов компьютерного моделирования неравновесного критического поведения трехмерной модели Гейзенберга с дальней пространственной корреляцией дефектов в коротковременном режиме и ее равновесного критического поведения, что метод коротковременной динамики может служить надежной альтернативой традиционным методам Монте-Карло не только при численных исследованиях однородных систем, но и систем со структурным беспорядком, обеспечивая при меньших машинных затратах получение более полной информации о критическом поведении структурно неупорядоченных систем.

3. Впервые проведено исследование равновесного критического поведения характеристик тонких ферромагнитных пленок посредством изучения анизотропной модели Гейзенберга, позволяющее определить значение температуры фазового перехода в зависимости от толщины пленки. Полученные результаты позволяют сделать вывод о существовании перехода от двумерных к трехмерным свойствам многослойных магнетиков с ростом толщины пленки.

Научная и практическая значимость работы

Научная значимость диссертации обусловлена необходимостью выявления влияния дальнодействующей корреляции структурных дефектов на критическое поведение спиновых систем и разработки методик анализа данных, получаемых при моделировании поведения систем.

Выявленное в результате проведенных расчетов существенное влияние дефектов структуры на характеристики критического поведения различных систем могут найти применение при отработке методики и постановке реальных физических и компьютерных экспериментов, а также практическом использовании направленной модификации свойств материалов, испытывающих фазовые превращения, за счет их легирования, что служит научной основой для создания материалов с новыми, перспективными физико-химическими свойствами.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Методика численного исследования неравновесного критического поведения структурно неупорядоченной трехмерной модели Гейзенберга с дальней пространственной корреляцией дефектов в коротковременном режиме и методика определения значений универсальных критических показателей с учетом ведущих поправок к скейлингу.

2. Наличие нескольких этапов динамического развития слабо неупорядоченных систем после микроскопического временного масштаба: области с характеристиками однородной системы, кроссоверной области и области, характеризующейся влиянием структурного беспорядка.

3. Подтверждение расширенного критерия Харриса о влиянии дефектов с дальней пространственной корреляцией на критическое поведение не только изингоподобных систем, но и систем с многокомпонентным параметром порядка (на примере модели Гейзенберга).

4. Методика численного исследования равновесного критического поведения тонких магнитных пленок посредством изучения анизотропной модели Гейзенберга и методика расчета критических показателей.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на XI Всероссийской молодежной школе-семинаре по проблемам физики конденсированного состояния вещества (Екатеринбург, 2010), на региональных научно-практических конференциях «Молодежь третьего тысячелетия» (Омск, 2011, 2012, 2013), на Moscow International Symposium on Magnetism (MISM) (Moscow, 2011), на Восемнадцатой Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых (ВНКСФ-18, Красноярск, 2012), на VIII Международной научно-технической конференции «Динамика систем, механизмов и машин» (Омск, 2012), на научно-практическом семинаре «Вычислительная физика и суперкомпьютерные технологии 2012» (Омск, 2012), на «XXV IUPAP Conference on Computational Physics» (Moscow, 2013), а также на научных семинарах кафедры теоретической физики ОмГУ.

Публикации

Список публикаций автора по теме диссертации включает 15 статей и тезисов докладов, опубликованных в российских и иностранных журналах, сборниках трудов и материалах конференций, и 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Объем диссертации – *** страниц машинописного текста, в том числе ** рисунков, ** таблиц и список цитируемой литературы из *** наименований.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы и сформулированы основные цели исследований.

В первой главе, носящей обзорный характер, в краткой форме излагается содержание ряда концепций и методов, применяемых для описания критических явлений. Рассматривается влияние беспорядка с дальнодействующей корреляцией дефектов на критическое поведение систем. Представлен обзор существующих ренормгрупповых описаний и численных исследований в данной области.

Во второй главе осуществлено компьютерное моделирование как равновесного, так и неравновесного критического поведения для слабо неупорядоченной трехмерной модели Гейзенберга с дальнодействующей корреляцией дефектов.

Наличие дефектов структуры приводит к смене динамики изотропного магнетика, описываемой моделью J, на релаксационную динамику модели A по классификации Гальперина-Хоенберга (Hohenberg P. C., Halperin B. I., 1977). Алгоритм Метрополиса с динамикой опрокидывания спина является разумным приближением к реальной динамике магнетика, соответствующей релаксационной модели A. Однако, согласно критерию Харриса критическое поведение модели Гейзенберга устойчиво относительно влияния точечного некоррелированного структурного беспорядка. В этом плане, становится очень важным исследование влияния протяженных примесных структур на критическое поведение характеристик модели Гейзенберга.

Традиционное моделирование критического поведения системы взаимодействующих частиц методом Монте-Карло наталкивается на трудности, связанные в основном с явлением критического замедления, характеризующимся тем, что время релаксации системы, как и время корреляции состояний, неограниченно растет по мере приближения к критической температуре и степенной характер их асимптотической зависимости от приведенной температуры определяется критическим индексом z и определяется выражением

$$\tau_{\mathrm{corr}}, \tau_{\mathrm{rel}} \sim |T_c - T|^{-z\nu}. \tag{1}$$

Для описания влияния неравновесных начальных условий на критическую динамику в работе (Janssen H.K., Schaub B., Schmittmann B., 1989) в рамках ренормгруппового подхода был разработан метод коротковременной динамики (МКД).

В соответствии с теорией скейлинга сингулярная часть потенциала Гиббса $\Phi_{\mathrm{sing}}(t, \tau, h, m_0)$, определяющая состояние системы в критической области, характеризуется обобщенной однородностью относительно основных термодинамических переменных времени t, приведенной температуры $\tau = (T - T_c)/T_c$, поля h и начальной намагниченности m_0,

$$\Phi_{\mathrm{sing}}(t, \tau, h, m_0) = b\Phi_{\mathrm{sing}}(b^{a_t} t, b^{a_\tau}\tau, b^{a_h} h, b^{a_m} m_0), \tag{2}$$

где b - фактор подобия, a_i - показатели подобия. Как следствие этого, в критической точке ($\tau = 0$, $h = 0$) намагниченность $m = -\delta\Phi/\delta h$ характеризуется следующей временной зависимостью

$$m(t, m_0) = t^{-(a_h+1)/a_t} F_m(m_0 t^{-a_m/a_t}). \tag{3}$$

После микроскопически малого времени t_{mic} для k-го момента намагниченности системы реализуется скейлинговая форма

$$m^{(k)}(t,\tau,L,m_0) = b^{-k\beta/\nu} m^{(k)}(t/b^z, b^{1/\nu}\tau, L/b, b^{x_0} m_0), \tag{4}$$

где L – линейный размер решетки, β, ν, z – критические индексы, x_0 – новый независимый динамический критический индекс.

Разложение правой части в (3) по малой величине $m_0 t^{-a_m/a_t}$ приводит к степенной зависимости

$$m(t) \sim t^{-(a_h+a_m+1)/a_t} \sim t^{\theta'}, \tag{5}$$

где a_m определяет поведение системы за счет влияния неравновесных начальных состояний.

В работе (Janssen H.K., Schaub B., Schmittmann B., 1989) на основе ренормгруппового анализа было показано, что если начальное состояние ферромагнитной системы характеризуется достаточно высокой степенью хаотизации спиновых переменных со значением относительной намагниченности, далеким от состояния насыщения ($m_0 \ll 1$), то в критической точке процесс релаксации системы из данного начального неравновесного состояния на макроскопически малых временах будет характеризоваться не уменьшением, а увеличением намагниченности со временем по степенному закону с показателем θ' (рис. 1*а*). При этом, с увеличением времени коротковременная динамика параметра порядка при $t \gg t_{\text{cr}} \sim m_0^{-1/(\theta'+\beta/z\nu)}$ сменяется на привычную долговременную динамику уменьшения параметра порядка со временем по степенному закону $m(t) \sim t^{-\beta/z\nu}$ (рис. 1*б*) с показателем, определяемым статическими критическими индексами β и ν и динамическим критическим индексом z.

Наряду с этим в (Janssen H.K., Schaub B., Schmittmann B., 1989) предсказывается двухвременная зависимость для функции отклика $R(t,t_w)$ и корреляционной функции $A(t,t_w)$, которая в коротковременном режиме ($t/t_w \ll 1$) принимает вид степенной зависимости от отношения переменных t/t_w (t_w – время ожидания), характеризуемой показателем θ:

$$\begin{aligned} R(t,t_w) &\sim (t/t_w)^{\theta}(t-t_w)^{\varkappa-d/z}\mathcal{F}_R(t_w/t), \\ A(t,t_w) &\sim (t/t_w)^{\theta-1}(t-t_w)^{\varkappa+1-d/z}\mathcal{F}_A(t_w/t), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\varkappa = (2-z-\eta)/z$. Критический индекс θ' и θ связаны скейлинговым соотношением $\theta' = \theta + \varkappa$, поэтому независимым индексом является только один из них (θ или θ').

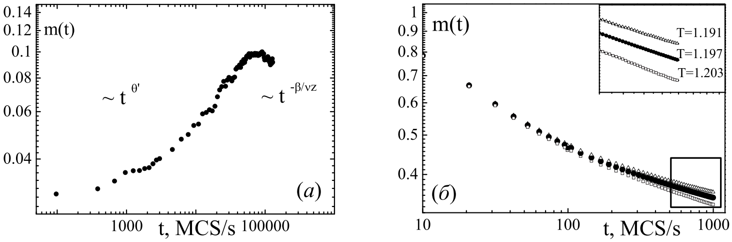

Рис. 1: Релаксация намагниченности из различных начальных состояний

Метод коротковременной динамики позволяет получить информацию о критическом поведении системы уже на начальном неравновесном динамическом этапе не достигая состояния равновесия и данный метод был успешно применен для расчета характеристик различных систем [6, 7].

Для начального состояния системы с $m_0 = 1$ (спины ориентированы в одном направлении) и для решеток с достаточно большими линейными размерами L уравнение для намагниченности ($k = 1$) при выборе фактора $b = t^{1/z}$ принимает следующий вид:

$$m(t,\tau) = t^{-\beta/\nu z} m\left(1, t^{1/\nu z}\tau\right) \sim t^{-\beta/\nu z}\left(1 + A_m t^{1/\nu z}\tau + O(\tau^2)\right). \tag{7}$$

В пределе $\tau \to 0$ намагниченность спадает по степенному закону

$$m(t) \sim t^{-\beta/\nu z}. \tag{8}$$

Для неупорядоченных систем вычисление $m^{(k)}(t)$ осуществляется в следующем виде

$$m^{(k)}(t) = \left[\left\langle \left(\frac{1}{N_s} \left((\sum_{i=1}^{N_s} p_i S_i^x)^2 + (\sum_{i=1}^{N_s} p_i S_i^y)^2 + (\sum_{i=1}^{N_s} p_i S_i^z)^2 \right)^{1/2} \right)^k \right\rangle\right], \tag{9}$$

где угловые скобки обозначают статистическое усреднение по спиновым конфигурациям, а квадратные скобки – усреднение по различным реализациям распределения дефектов структуры в системе при заданной спиновой концентрации p, $N_s = pL^3$.

Показатель $1/\nu z$ может быть определен, если продифференцировать $\ln m(t,\tau)$ по приведенной температуре τ

$$\partial_\tau \ln m(t,\tau)|_{\tau=0} \sim t^{1/\nu z}. \tag{10}$$

Для независимого определения динамического критического индекса z был исследован кумулянт

$$F_2(t,L) = \frac{m^{(2)}(t,L)|_{m_0=0}}{(m(t,L))^2|_{m_0=1}} \sim \frac{t^{(d-2\beta/\nu)/z}}{t^{-2\beta/\nu z}} = t^{d/z}, \tag{11}$$

где $d = 3$ – размерность системы.

В данной главе диссертации рассматривается модель неупорядоченной спиновой системы на кубической решетке с линейным размером L и наложенными периодическими граничными условиями. Микроскопический гамильтониан неупорядоченной модели Гейзенберга записывается в виде

$$H = -J \sum_{i,j}^{N} p_i p_j \vec{S}_i(t) \vec{S}_j(t), \tag{12}$$

где $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ – это трехмерный единичный вектор в узле i, $J > 0$ характеризует обменное взаимодействие ближайших спинов, носящее ферромагнитный характер, p_i – случайные переменные, характеризующие замороженный структурный беспорядок в системе ($p_i = 1$, когда узел i занят спином, и $p_i = 0$, когда узел занят не магнитным атомом). Полагается, что дальнодействующие эффекты корреляции между точечными дефектами реализуются в виде случайно ориентированных линий с корреляционными характеристиками, спадающими по степенному закону $g(x-y) \sim |x-y|^{-a}$ с показателем $a = 2$. Для этого был использован следующий способ создания примесных конфигураций: из заполненной спинами трехмерной решетки случайным образом удалялись линии, параллельные осям координат, до достижения заданной концентрации примесей. Для обеспечения изотропности распределения дефектов в кристалле число удаляемых линий в каждом из трех направлений поддерживалось одинаковым.

Для определения критической температуры было осуществлено компьютерное моделирование системы в состоянии равновесия при различных температурах. Для снижения влияния эффектов критического замедления и корреляции различных спиновых конфигураций был применен однокластерный алгоритм Вольфа. За один шаг Монте-Карло на спин (MCS/s) принималось 5 переворотов кластера Вольфа.

Анализировались зависимости кумулянта Биндера 4-го порядка $U_4(T, L)$ и отношения $\xi/L(T, L)$ корреляционной длины ξ к L от температуры

$$U_4(T, L) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{[\langle m^{(4)}\rangle]}{\left([\langle m^{(2)}\rangle]\right)^2}\right), \tag{13}$$

$$\xi = \frac{1}{2\sin(\pi/L)}\sqrt{\frac{\chi_L}{\Phi} - 1}, \qquad \chi_L = [\langle m^2\rangle] - [\langle m\rangle]^2. \tag{14}$$

Скобки $\langle ... \rangle$ означают статистическое усреднение по шагам Монте-Карло, а [...] – усреднение по различным реализациям распределения дефектов структуры в системе при заданной спиновой концентрации. По точкам пересечения

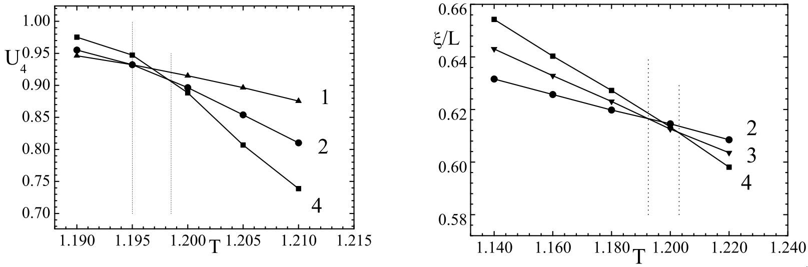

Рис. 2: Температурная зависимость кумулянта Биндера U_4 и отношения ξ/L для различных линейных размеров решетки $L = 32$ (1), 64 (2), 96 (3), 128 (4)

графиков данных величин для различных размеров решетки (рис. 2) была определена критическая температура $T_c = 1.197(2)$, где температура измеряется в единицах обменного интеграла.

При найденной критической температуре $T_c = 1.197$ было осуществлено численное исследование неравновесной критической динамики в коротковременном режиме для трехмерной слабо неупорядоченной модели Гейзенберга со спиновой концентрацией $p = 0.80$ с линейными дефектами. Было осуществлено моделирование критической релаксации системы из полностью упорядоченного начального состояния с начальной намагниченностью $m_0 = 1$, а также критической эволюции системы из начальных неупорядоченных состояний с $m_0 \ll 1$.

В данной работе осуществлялось моделирование кубических решеток с размером $L = 128$. Временное поведение намагниченности $m(t)$ и кумулянта $F_2(t)$ исследовалось на временах до 1000 MCS/s. С целью численного определения логарифмической производной намагниченности проводился расчет намагниченности для двух близких к T_c температур, т. е. для $T + \Delta T = 1.200$ и $T - \Delta T = 1.194$. На рис. 3 приведены итоговые зависимости кумулянта F_2 и логарифмической производной намагниченности от времени в двойном логарифмическом масштабе. В работе проводилось усреднение вычисляемых величин по 4000 различным конфигурациям примеси. В данной работе все расчеты проводились на суперкомпьютерной вычислительной системе НИВЦ МГУ с использованием методов параллельного программирования.

Для моделирования спиновых конфигураций в системе был применен алгоритм Метрополиса. Алгоритм Метрополиса, реализующий динамику односпиновых переворотов, наилучшим образом соответствует релаксационной модели A и позволяет провести сравнение получаемого в результате моделирования критической релаксации системы динамического критического индекса z с результатами теоретико-полевого описания [3] критической динамики модели A для трехмерных систем с дальнодействующей пространственной

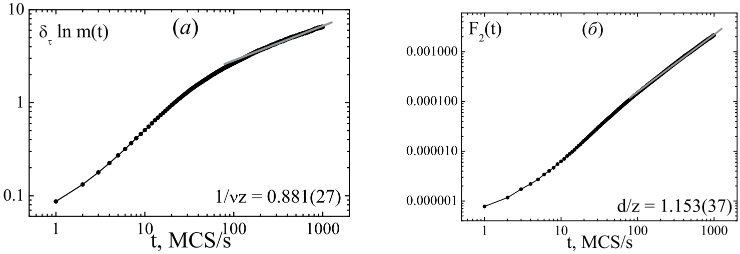

Рис. 3: Усредненные значения логарифмической производной намагниченности $\partial_\tau \ln m(t)$ (a) и кумулянта F_2 $(б)$ в двойном логарифмическом масштабе

корреляцией дефектов структуры.

Анализ кумулянта $F_2(t)$ показал, что на начальном этапе релаксации, степенному характеру зависимости $F_2(t)$ соответствует значение динамического индекса $z \approx 2.049$, соответствующее критическому поведению однородной модели Гейзенберга, а влияние линейных дефектов начинает проявляться лишь на временах $t > 80$ MCS/s. Значения показателей $\beta/\nu z$, $1/\nu z$, d/z (Таб. 1) были получены на интервале, который соответствует минимуму среднеквадратичной погрешности аппроксимации (рис. 4).

Корректные значения критических индексов могут быть получены только в термодинамическом пределе $L \to \infty$, поэтому был осуществлен учет поправок к асимптотической зависимости измеряемых величин за счет влияния конечности моделируемых систем. Для этого было использовано следующее выражение для временной зависимости наблюдаемых величин $X(t)$:

$$X(t) \sim t^{\delta}(1 + A_x t^{-\omega/z}), \tag{15}$$

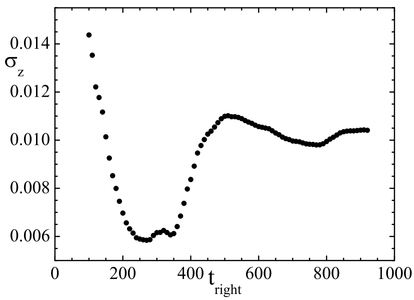

Рис. 4: Зависимости среднеквадратичных погрешностей аппроксимации σ_z от временного интервала $t \in [80, t_{\text{right}}]$

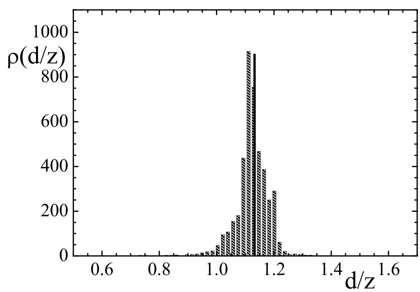

Рис. 5: Плотность распределения $\rho(d/z)$ по различным временным интервалам. Линия соответствует среднему значению

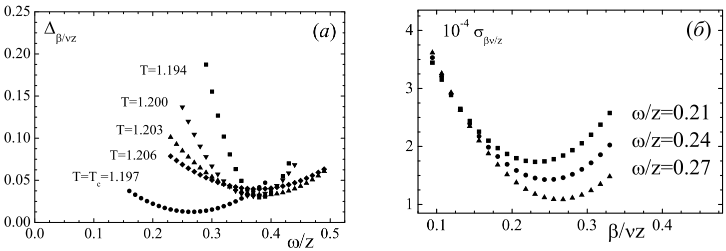

Рис. 6: Зависимость относительной $\Delta\delta$ погрешностей (a) от индекса ω/z для показателя $\beta/\nu z$ для различных значений температур и среднеквадратичной σ_δ погрешности ($б$) для различных значений ω/z

где A_x – неуниверсальные амплитуды, ω – критический индекс поправки к скейлингу, а показатель $\delta = -\beta/\nu z$ в случае $X \equiv m(t)$, $\delta = d/z$ в случае $X \equiv F_2(t)$ и $\delta = 1/\nu z$ в случае $X \equiv \partial_\tau \ln m(t)$.

При анализе полученных кривых была использована схема линейной аппроксимации для зависимости $(Xt^{-\delta})$ от $t^{-\omega/z}$ при изменении значений показателя δ, а также критического индекса ω/z. Временной интервал влияния дефектов структуры был разбит на всевозможные участки. На каждом из участков был проведен поиск показателя δ для фиксированного значения ω/z. Поиск был осуществлен из условия минимума среднеквадратичных отклонений процедуры аппроксимации σ_δ. Найденные значения δ были усреднены по выбранным участкам с определением среднего значения $\langle\delta\rangle$ и относительной погрешности Δ_δ. Индекс ω/z был определен из условия минимальности значений относительных погрешностей Δ_δ. Вклад от интервалов разной длины был учтен, для этого были введены весовые множители, пропорциональные длинам интервалов. Для аппроксимации использовался метод наименьших квадратов. Плотность функции распределения изображена на рис. 5 на примере $\rho(d/z)$. На рис. 6a изображена зависимость относительной погрешности $\Delta_{\beta/\nu z}$ от индекса ω/z для показателя $\beta/\nu z$ для различных значений температур. Минимальная погрешность при $T = T_c = 1.197$. На рис. 6$б$ изображена зависимость среднеквадратичной $\sigma_{\beta/\nu z}$ погрешности от индекса для различных значений ω/z. Для каждого из показателей минимум достигается при различных значениях индекса ω. В качестве результирующего значения ω брали среднее значение $\omega = 0.786(45)$.

Далее исследовалась критическая эволюция системы из начальных неупорядоченных состояний с $m_0 \ll 1$. Согласно теории МКД, для этого режима можно получить следующие соотношения для временных зависимостей второго момента намагниченности $m^{(2)}(t) \sim t^{c_2}$ и автокорреляционной функции $A(t) \sim t^{-c_a}$, где $c_2 = (d - 2\beta/\nu)/z$, $c_a = d/z - \theta'$, $\theta' = (x_0 - \beta/\nu)/z$. Ис-

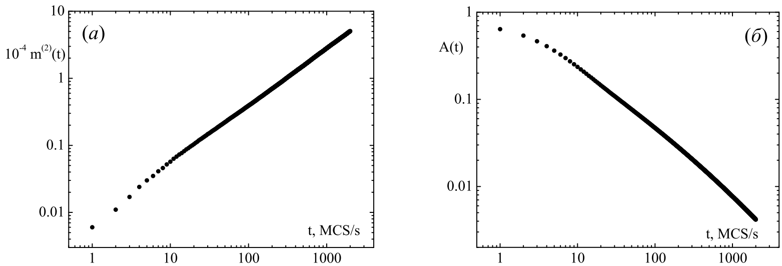

Рис. 7: Эволюция второго момента намагниченности $m^{(2)}(t)$ (a) и автокорреляционной функции $A(t)$ $(б)$ для $L = 128$ с начальной намагниченностью $m_0 = 0.0001$

пользуя данные зависимости, были определены показатели θ', c_2 и c_a, а на их основе вычислялись критические индексы β/ν, z. Чтобы вычислить значения критических индексов, для слабо неупорядоченной модели Гейзенберга было реализовано компьютерное моделирование решетки с линейным размером $L = 128$ и спиновой концентрацией $p = 0.80$ при различных значениях начальной намагниченности $m_0 = 0.0001$, 0.01, 0.02 и 0.03 с последующей линейной аппроксимацией результатов к $m_0 = 0$. Средние значения вычисляемых термодинамических величин получались усреднением по 1500 различным примесным конфигурациям. На рис. 7 приведены графики временных зависимостей исследуемых величин в двойном логарифмическом масштабе, что позволяет по наклону линейных участков графиков определять соответствующие показатели.

С учетом поправок к скейлингу были получены следующие значения критических индексов, приведенные в табл. 1. Полученные нами значения показателей демонстрируют сильное влияние дальнодействующей корреляции дефектов на критическое поведение систем, описываемых многокомпонентным параметром порядка. В результате широкий класс неупорядоченных систем может характеризоваться новым типом критического поведения.

В третьей главе был проведен расчет критической температуры для трехмерной сильно неупорядоченной модели Гейзенберга с концентрацией спинов $p = 0.60$. В большинстве работ проводится исследование слабо неупорядоченных систем с концентрацией спинов $p = 0.80$ и выше. Сопоставление результатов данных работ указывает на то, что системы с концентрацией спинов от $p = 0.80$ до $p = 0.95$ принадлежат к одному и тому же классу универсальности, то есть критические индексы, описывающие поведение данных систем в критической точке, не меняются с изменением концентрации спинов в указанном диапазоне. Менее исследованными остаются сильно неупорядоченные системы с концентрацией спинов $p < 0.69$ вплоть до порога спиновой перко-

Таблица 1: Значения критических индексов для слабо неупорядоченной модели Гейзенберга с дальнодействующей корреляцией дефектов и сравнение их с другими результатами моделирования методом Монте-Карло (МК) и ренормгруппового подхода (РГ)

	z	θ'	β/ν	ν	β	ω
$m_0 = 1$, [8]	2.257(61)		0.510(78)	0.770(74)	0.393(77)	0.786(45)
$m_0 \ll 1$	2.320(153)	0.453(26)	0.467(39)			0.553(77)
Prudnikov et al., 2000, [3] (РГ)	2.264		0.482	0.798	0.362	
Прудников и др., 2010, [9] (РГ)	2.291(29)		0.490(5)	0.766(17)	0.375(5)	
V. Blavats'ka et al., 2001, [1] (РГ)						0.88
Однородная система						
Medvedeva et al., 2012, [8] (МК)	2.049(31)		0.510(10)	0.705(26)	0.360(9)	
Fernandes et al., 2006, [10] (МК)	1.976(9)	0.482(3)		0.687(6)	0.361(2)	
Chen et al., 1993, [11] (МК)			0.516(10)	0.705(3)	0.364(5)	

ляции $p_c = 0.31$. При теоретическом описании поведения таких систем уже нельзя считать концентрацию дефектов малой величиной. Что сильно затрудняет или даже делает невозможным их теоретическое описание.

Рассматривались простые кубические решетки с линейными размерами $L = 32,\ 48,\ 64$. В ходе дальнейших численных исследований было установлено, что в низкотемпературной области для сильно неупорядоченной модели Гейзенберга с линейными дефектами кластерный алгоритм моделирования должен обязательно модифицироваться многокластерным алгоритмом Свендсена-Ванга (Swendsen R.H., Wang J.S., 1987). Существенное отличие алгоритма Свендсена-Ванга от алгоритма Вольфа (Wolf U., 1989) заключается в том, что в алгоритме Вольфа формируется единственный кластер, который затем переворачивается с вероятностью 1. А в алгоритме Свендсена-Ванга вся система разбивается на кластеры, каждый из которых переворачивается с вероятностью 1/2. Примеры выращивания кластера многокластерным алгоритмом Свендсена-Ванга и однокластерным алгоритмом Вольфа для двумерной

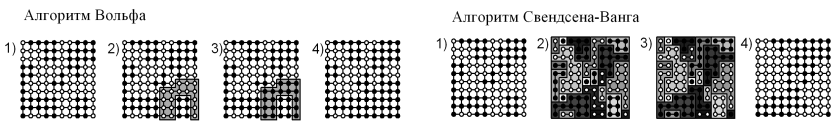

Рис. 8: Примеры выращивания кластера однокластерным алгоритмом Вольфа и многокластерным алгоритмом Свендсена-Ванга для двумерной модели Изинга

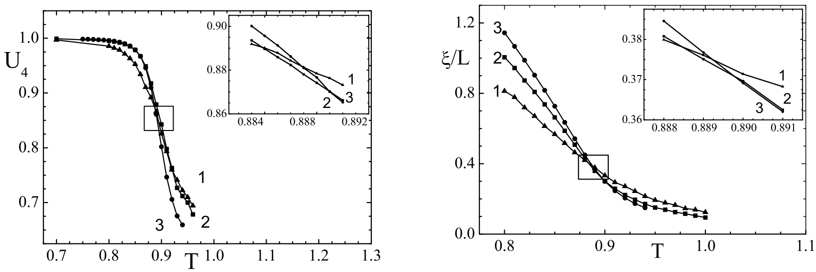

Рис. 9: Зависимость кумулянта Биндера U_4 и отношения ξ/L от температуры для разных линейных размеров решетки $L = 32$ (1), $L = 48$ (2) и $L = 64$ (3)

модели Изинга представлены на рис. 8.

По положению максимума температурной зависимости восприимчивости была оценена область значений критической температуры $T_c \approx 0.90$. Для уточнения значения критической температуры были рассчитаны температурные зависимости кумулянта Биндера 4-го порядка $U_4(L, T)$ и отношения ξ/L рис. 9. Через координату точки пересечения кривых, задающих температурную зависимость $U_4(L, T)$ и $\xi/L(L, T)$ было определено значение критической температуры $T_c = 0.888(5)$.

Используя выражение $dU_4/dT \sim L^{1/\nu}$, которым характеризуется скейлинговая форма кумулянта Биндера U_4 в критической области при $T \to T_c$, были получены значения критического индекса ν для различных линейных размеров решетки и для различных значений температур выше критической.

Известно, что фазовый переход второго рода может проявиться лишь в термодинамическом пределе, когда объем системы и количество частиц в ней стремится к бесконечности. Таким образом эффективное значение критического показателя может быть найдено при взятии предела $L \to \infty$ и

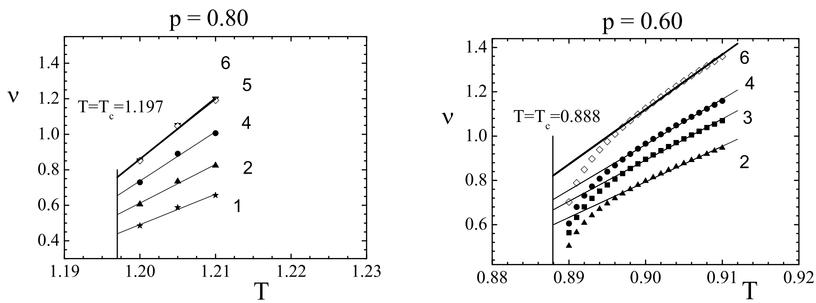

Рис. 10: Температурная зависимость показателя $\nu(T, L)$ $L = 16$ (1), $L = 32$ (2), $L = 48$ (3), $L = 64$ (4), $L = 128$ (5) и $L = \infty$ (6)

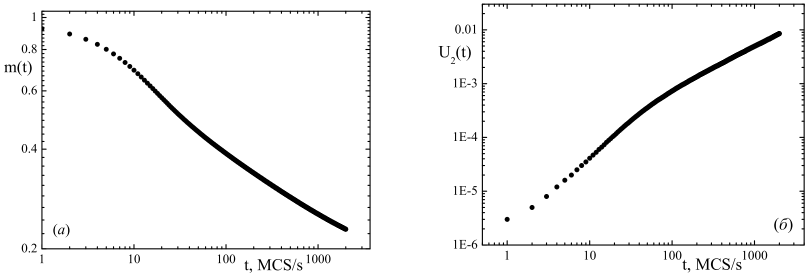

Рис. 11: Временная зависимость намагниченности $m(t)$ (a) и кумулянта Биндера $U_2(t)$ $(б)$ для линейного размера решетки $L = 64$ при температуре $T = T_c = 0.888$.

$T \to T_c$. Реализация данной процедуры для представленной на рис. 10 зависимости позволяет рассчитать асимптотическое значение индекса $\nu = 0.758(10)$ для слабо неупорядоченной и $\nu = 0.821(14)$ для сильно неупорядоченной модели Гейзенберга. В работе [11] получено значение критического индекса $\nu = 0.7048(30)$ для однородной модели Гейзенберга. Сравнивая эти значения, можно сделать вывод, что данные системы принадлежат к разным классам универсальности.

При найденной критической температуре $T_c = 0.888(5)$ было осуществлено численное исследование неравновесной критической динамики в коротковременном режиме для трехмерной сильно неупорядоченной модели Гейзенберга со спиновой концентрацией $p = 0.60$ с линейными дефектами. Было осуществлено моделирование критической релаксации системы из полностью упорядоченного начального состояния с начальной намагниченностью $m_0 = 1$.

При критической температуре $\tau = 0$ релаксация намагниченности характеризуется выражением (8). Для независимого определения динамического критического индекса z была исследована временная зависимость кумулянта Биндера второго порядка $U_2 = m^{(2)}/m^2 - 1$ со скейлинговой зависимостью $U_2(t, L) \sim t^{d/z}$, где $d = 3$ – размерность системы.

Была исследована временная зависимость кумулянта Биндера второго порядка для линейных размеров решетки $L = 64$, 128. Были получены значения показателей $d/z = 0.737(59)$ и $d/z = 0.737(84)$ для $L = 64$ и $L = 128$, соответственно. Временные зависимости намагниченности $m(t)$ и кумулянта Биндера второго порядка $U_2(t)$ представлены на рисунке 11. Данные были получены усреднением по 1200 конфигурациям примеси, каждая из которых усреднялась по 25 прогонкам. Значения показателей $\beta/\nu z = 0.176(4)$, $d/z = 0.691(30)$ и соответствующие им значения критических индексов $\beta/\nu = 0.765(42)$, $z = 4.343(188)$ были получены с помощью линейной аппроксимации на интервале

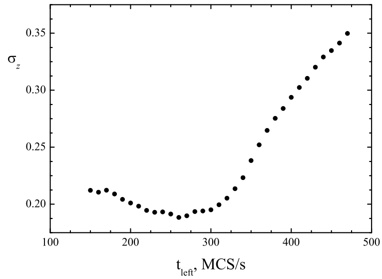

Рис. 12: Зависимость среднеквадратичной погрешности аппроксимации от выбора временного интервала $[t_{\text{left}}; 1330]$ для индекса z.

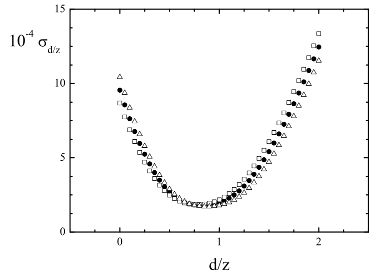

Рис. 13: Зависимость среднеквадратичной погрешности аппроксимации $\sigma_{d/z}$ для различных значений индекса ω/z: $\square$ – $\omega/z = 0.15$, $\bullet$ – $\omega/z = 0.25$, $\triangle$ – $\omega/z = 0.35$.

$t \in [260; 1330]$. Данный интервал был выбран из минимума среднеквадратичной погрешности аппроксимации изображенной на рисунке 12.

Для учета влияния конечности моделируемых систем был осуществлен расчет поправок к асимптотической зависимости измеряемых величин. Для этого применялось выражение (15) для временной зависимости наблюдаемых величин. Показатель $\delta = -\beta/\nu z$ в случае $X \equiv m(t)$ и $\delta = d/z$ в случае $X \equiv U_2(t)$. При анализе полученных кривых была использована схема линейной аппроксимации для зависимости $(Xt^{-\delta})$ от $t^{-\omega/z}$ при изменении значений показателя δ, а также критического индекса ω/z. На рисунке 13 приведены значения среднеквадратичных погрешностей аппроксимации σ_δ исследуемых временных зависимостей кумулянта как функций показателей d/z при различных значениях индекса ω/z. Наименьшее значение σ_δ принимает при $\omega/z = 0.25$. По минимуму σ_δ были определены значения критических индексов $\beta/\nu = 0.946(48)$, $z = 3.529(125)$. Сравнивая значения критических индексов для сильно и слабо неупорядоченной модели Гейзенбурга, можно сделать вывод, что данные системы принадлежат к разным классам универсальности. Установлено, что сильно неупорядоченная модель Гейзенберга характеризуется более медленной динамикой.

В четвертой главе проводилось исследование ультратонких ферромагнитных пленок в рамках анизотропной модели Гейзенберга. Гамильтониан системы выбирался следующим образом (Binder K., Landau D.P., 1976):

$$H = -J \sum_{i,j} [(1 - \Delta)(S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) + S_i^z S_j^z] \tag{16}$$

где $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ – это трехмерный единичный вектор в узле i, $J > 0$ характеризует обменное взаимодействие ближайших спинов, носящее ферро-

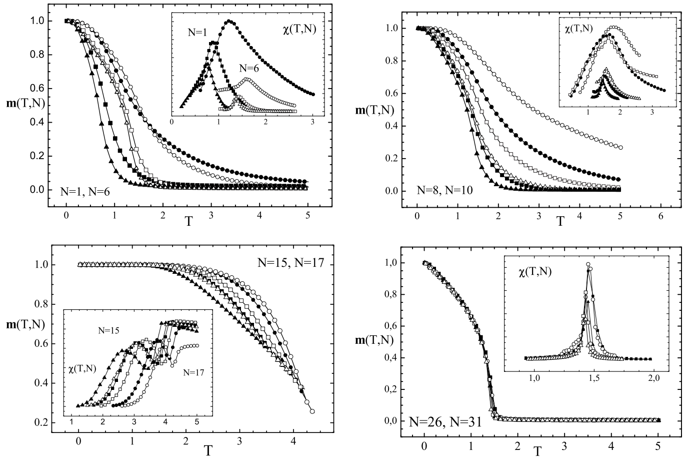

Рис. 14: Температурная зависимость намагниченности и восприимчивости тонких пленок различных размеров $N = 1 \div 31$

магнитный характер, Δ – константа анизотропии ($\Delta = 0$ – изотропная модель Гейзенберга, $\Delta = 1$ – модель Изинга). Выбор константы анизотропии для различных размеров пленки осуществлялся пропорционально температуре соответствующей критической для пленок Ni(111)/W(110) различной толщины [5]. Для трехмерной анизотропной модели Гейзенберга с использованием алгоритма Свендсена-Ванга были исследованы температурные зависимости намагниченности m

$$m = \left\langle \frac{1}{N_s} \left((\sum\nolimits_i^{N_s} S_i^x)^2 + (\sum\nolimits_i^{N_s} S_i^y)^2 + (\sum\nolimits_i^{N_s} S_i^z)^2 \right)^{1/2} \right\rangle, \qquad (17)$$

и ее составляющие: намагниченность ориентированная по нормали к плоскости пленки $m_z = \langle (1/N_s) \sum S_i^z \rangle$ и намагниченность в плоскости пленки $m_{\shortparallel} = \langle (m_x^2 + m_y^2)^{1/2} \rangle$ для различных размеров системы $N_s = L \times L \times N$, где $L \times L$ — число спинов в одном слое, N — толщина пленки (число слоев). Были исследованы пленки с линейным размерами $L = 32,\ 48,\ 64$ с числом слоев от $N = 1$ до $N = 31$ с периодическими граничными условиями в направлении плоскости пленки.

По положению максимума температурной зависимости магнитной восприимчивости $\chi_m \sim [\langle m^2 \rangle] - [\langle m \rangle]^2$ могут быть оценены значения критических температур T_c для различных размеров системы. На рис. 14 представлены температурные зависимости намагниченности и магнитной восприимчивости для пленок различных размеров. Эти кривые были получены усреднением до 3000 прогонок для каждого значения N.

Для пленок с числом слоев от $N = 9$ до $N = 22$ наблюдается два пика восприимчивости. В данной области был обнаружен спин ориентационный переход из фазы, в которой намагниченности выгоднее ориентироваться по нормали к плоскости пленки, в фазу, в которой намагниченность ориентирована вдоль пленки. В экспериментальных [13] и теоретических работах [14], посвященных исследованию однослойных магнетиков, предсказывается, что данный переход является слабым переходом первого рода.

В температурной области спин ориентационного перехода, соответствующей первому пику, были более детально исследованы зависимости намагниченности $m_{\shortparallel}$ и m_z, а также ориентационного параметра порядка [12]

$$O_\alpha = \left\langle \left| \frac{n_h^\alpha - n_v^\alpha}{n_h^\alpha + n_v^\alpha} \right| \right\rangle, \tag{18}$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение, $\alpha \in \{x, y, z\}$, n_h и n_v число горизонтальных и вертикальных пар ближайших спинов с противоположно направленными S_z.

На рис. 15 приведены температурные зависимости $m(T)$, $m_{\shortparallel}(T)$, $m_z(T)$ и восприимчивость $\chi_m(T)$, $\chi_O(T) \sim [\langle O_z^2 \rangle] - [\langle O_z \rangle]^2$. Первый пик соответствует спин ориентационному переходу и при $T = 2.71$ наблюдается спад намагниченности ориентированной по нормали к плоскости пленки. Второй пик при $T = 3.91$ соответствует фазовому переходу второго рода из ферромагнитной фазы в парамагнитную. Через координату точки пересечения кривых, задающих температурную зависимость кумулянта Биндера 4-го порядка $U_4(L, T)$ были уточнены значения температур фазового перехода второго рода из ферромагнитного состояния в парамагнитное. На рис. 16 приведены значения критических температур для различных размеров пленок. Сплошная линия соответствует переходу из ферромагнитного состояния в парамагнитное, пунктирная линия соответствует спин ориентационному переходу.

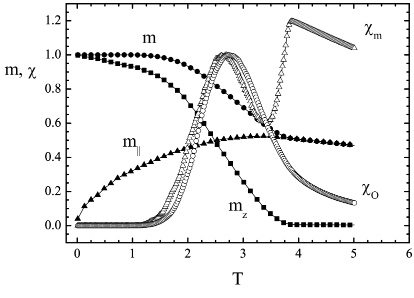

Рис. 15: Температурная зависимость намагниченностей m, $m_{\shortparallel}$, m_z и восприимчивостей $\chi_m(T)$, $\chi_O(T)$ для тонкой пленки размера $N = 15$ $L = 64$

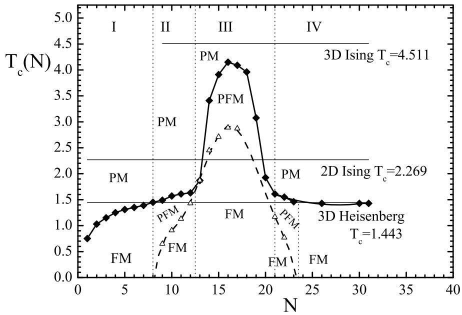

Рис. 16: Фазовая диаграмма для тонких пленок (FM – ферромагнитная фаза, PM – парамагнитная фаза, PFM – планарный ферромагнетик)

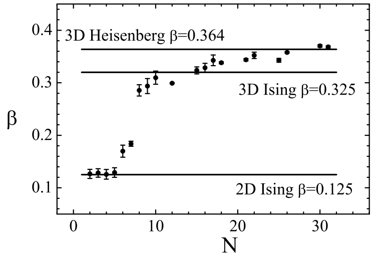

Рис. 17: Зависимость критического индекса намагниченности β от толщины пленки

В исследованиях, посвященным тонким пленкам [5], экспериментально наблюдается переход от двумерных к трехмерным критическим свойствам многослойных магнетиков с ростом толщины пленки. В данной главе диссертации была получена температурная зависимость намагниченности вблизи критической точки $m \sim (T_c - T)^{\beta}$, из которой были определены значения критического индекса β для различных размеров системы. Представленные на рис. 17 данные наглядно демонстрируют размерный переход от поведения двумерной модели Изинга к поведению трехмерной модели Гейзенберга с ростом толщины пленки.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертации.

Основные результаты и выводы

1. Разработана методика численного исследования неравновесного критического поведения структурно неупорядоченной трехмерной модели Гейзенберга с дальней пространственной корреляцией дефектов в коротковременном режиме и методика определения значений универсальных критических показателей с учетом ведущих поправок к скейлингу.

2. Осуществлено компьютерное моделирование трехмерной модели Гейзенберга с дальнодействующей корреляцией дефектов различной концентрации. Были исследованы равновесные характеристики слабо ($p = 0.8$) и сильно ($p = 0.6$) неупорядоченной модели и были рассчитаны значения критических температур $T_c(p = 0.8) = 1.197(2)$ и $T_c(p = 0.6) = 0.888(5)$.

3. С использованием метода коротковременной динамики была исследо-

вана критическая релаксация трехмерной модели Гейзенберга с линейными дефектами из различных начальных состояний. Для слабо неупорядоченной трехмерной модели Гейзенберга со спиновой концентрацией $p = 0.8$ были получены значения динамических и статических критических индексов $z = 2.257(61)$, $\beta = 0.393(77)$, $\nu = 0.770(74)$, $\omega = 0.786(45)$. Данные значения в пределах погрешностей находятся в хорошем согласии с теоретическими результатами.

4. Впервые было получено численное подтверждение о существовании влияния дальней пространственной корреляции дефектов на критическое поведение систем с трехкомпонентным параметром порядка. Для сильно неупорядоченной модели Гейзенберга с концентрацией спинов $p = 0.6$ были получены значения статических критических индексов $\nu = 0.821(14)$, $\beta = 0.946(48)$ и динамического критического индекса $z = 3.529(125)$. Более высокое значение динамического критического индекса демонстрирует, что сильно неупорядоченная модель Гейзенберга характеризуется более медленной динамикой.

5. Показано, что слабо и сильно неупорядоченные модели Гейзенберга с дальнодействующей корреляцией дефектов принадлежат к разным классам универсальности.

6. Исследовано критическое поведение ультратонких магнитных пленок на основе анизотропной модели Гейзенберга. Выявлены размерные эффекты в поведении намагниченности и магнитной восприимчивости. Критическое поведение тонких пленок с толщиной $N \leqslant 5$, соответствует поведению двумерной модели Изинга. Критическое поведение пленок с $6 \leqslant N \leqslant 12$ соответствует кроссоверной области от двумерных свойств к трехмерным. Для пленок с толщиной от $N = 13$ до $N = 21$ критический индекс β соответствует трехмерной модели Изинга. Для пленок с толщиной $N > 21$ система демонстрирует критическое поведение трехмерной модели Гейзенберга. Впервые выявлен переход от двумерных к трехмерным свойствам многослойных магнетиков с ростом толщины пленки.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Prudnikov P.V., Medvedeva M.A. Non-equilibrium critical relaxation of the 3D Heisenberg magnets with long-range correlated disorder. // Progress of Theoretical Physics. 2012. – Vol. 127. – No. 3. – P. 369 – 382.

2. Medvedeva M., Prudnikov P. Non-equilibrium critical relaxation of Heisenberg ferromagnets with long-range correlated defects. // Solid State Phenomena. 2012. – Vol. 190. – P. 39 – 42.

3. Прудников П.В., Медведева М.А. Неравновесное критическое поведение сильно неупорядоченных магнетиков с дальнодействующей корреляцией дефектов. // Физика низких температур, 2014. (в печати)

4. Prudnikov P.V., Medvedeva M.A. Monte Carlo simulation of critical properties of ultrathin anisotropic Heisenberg films. // Journal of Physics: Conference Series, 2014. (в печати)

5. Prudnikov P.V., Elin A.S., Medvedeva M.A. Non-equilibrium critical behaviour of ultrathin magnetic and metamagnetic Ising films. // Journal of Physics: Conference Series, 2014. (в печати)

6. Прудников П.В., Прудников В.В., Колесников В.Ю., Медведева М.А., Желтышев П.А. Численное исследование влияния протяженных дефектов структуры на критическое поведение трехмерных систем методом коротковременной динамики. // Труды Семинара по вычислительным технологиям в естественных науках. Вып. 1. Вычислительная физика / Под ред. Р. Р. Назирова.- М. Изд-во КДУ, 2009. - С. 264-278.

7. Прудников П.В., Медведева М.А., Шакирзянов Ф.Р. Численное исследование неравновесной критической динамики структурно неупорядоченных систем с протяженными дефектами структуры вблизи температуры фазового перехода второго рода. // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2012. – Вып. 3 (21). – С. 209 - 215.

8. Прудников П.В., Медведева М.А. Компьютерное моделирование критического поведения характеристик сильно неупорядоченной модели Гейзенберга с линейными дефектами. // Вестник Омского университета. – 2012. – Вып. 2. – С. 87-91.

9. Прудников П.В., Медведева М.А. Численное исследование влияния протяженных дефектов структуры на критическую релаксацию трехмерной модели Гейзенберга. // Вестник Омского университета. – 2011. – Вып. 2. – С. 88-92.

10. Прудников П.В., Медведева М.А., Желтышев П.А. Численное исследование влияния эффектов корреляции дефектов структуры на критическую динамику модели Гейзенберга. // Вестник Омского университета. – 2010. – Вып. 4. – С. 70-75.

11. Прудников П.В., Медведева М.А., Желтышев П.А. Численное исследование неравновесного критического поведения трехмерной модели Гейзенберга с линейными дефектами. // Вестник Омского университета. – 2009. – Вып. 4. – С. 108-113.

12. Прудников П.В., Прудников В.В., Медведева М.А., Желтышев П.А. Компьютерное моделирование критического поведения трехмерной модели Гейзенберга с линейными дефектами методом коротковременной динамики. // Вестник Омского университета. - 2008. - Вып. 4. - С. 29-34.

13. Прудников П.В., Медведева М.А., Желтышев П.А. Программа расчета характеристик неравновесной критической динамики неупорядоченной модели Гейзенберга с протяженными дефектами структуры с применением параллельных методов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011614137. - 2011.

14. Прудников П.В., Медведева М.А. Программа численного моделирования на многопроцессорной вычислительной системе эффектов старения в неравновесном критическом поведении трехмерной модели Гейзенберга с дальнодействующей корреляцией дефектов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661125. - 2012.

15. Прудников П.В., Прудников В.В., Медведева М.А. Программа моделирования на многопроцессорной вычислительной системе критических свойств ультратонких магнитных пленок на основе анизотропной модели Гейзенберга // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661126. - 2012.

16. Прудников П.В., Прудников В.В., Поспелов Е.А., Медведева М.А., Чабров А.В., Питеримов А.Ю. Программа расчета поправок к скейлингу критического поведения структурно неупорядоченных спиновых систем // Свидетельство о государствен-

ственной регистрации программы для ЭВМ № 2013614924. - 2013.

17. Prudnikov P.V., Medvedeva M.A. Non-equilibrium critical relaxation of Heisenberg ferromagnets with long-range correlated defects. // Book of Abstracts: Moscow International Symposium on Magnetism (MISM), 2011. – P. 447 – 448.

18. Medvedeva M.A., Prudnikov P.V. Monte Carlo simulation of critical properties of ultrathin anisotropic Heisenberg films. // Book of abstract XXV IUPAP Conference on Computational Physics, 2013. – P. 43.

19. Prudnikov P.V., Elin A.S., Medvedeva M.A. Non-equilibrium critical behaviour of ultrathin magnetic and metamagnetic Ising films // Book of abstracts: XXV IUPAP Conference on Computational Physics, 2013. – P. 45.

Список литературы

[1] Blavats'ka V., C. von Ferber and Holovatch Yu. // Phys. Rev. E. - 2001. - V. 64. - P. 041102.

[2] C. Vàsquez R., R. Paredes V., A. Hasmy, and R. Jullien. // Phys. Rev. Lett. - 2003. - V. 90. - P. 170602.

[3] Prudnikov V. V., Prudnikov P. V. and Fedorenko A. A. // Phys. Rev. B. - 2000. - V. 62. - P. 8777.

[4] C. Chappert, A. Fert, F. Nguyen van Dau // Nature Mater. - 2007. - V. 6. - P. 813.

[5] Vaz C.A.F., Bland J.A.C., Lauhoff G. // Rep. Prog. Phys. - 2008. - V. 71. - P. 056501.

[6] Albano E.V., Bab M.A., Baglietto G., Borzi R.A. and et al. // Rep. Prog. Phys. - 2011. - V. 74. - P. 026501.

[7] Ozeki Y. and Ito N. // J. Phys. A. - 2007. - V. 40. - P. R149.

[8] Prudnikov P.V., Medvedeva M.A. // Prog. Theor. Phys. - 2012. - V. 127. - P. 369.

[9] Прудников П.В., Яковлев М.И., Бакланов А.В. и др. // Вестник Омского Университета. - 2010. - Т. 2. - С. 62.

[10] Fernandes H.A., Roberto da Silva, J.R. Drugowich de Felício // J. Stat. Mech. - 2006. - V. 10. - P. 10002.

[11] Chen K., Ferrenberg A.M., Landau D.P. // Phys. Rev. B. - 1993. - V. 48. - P. 3249.

[12] Ambrose M.C. and Stamps R.L. // Phys. Rev. B. - 2013. - V. 87. - P. 184417.

[13] Bordel C., Juraszek J., et al. // Phys. Rev. Lett. - 2012. - V. 109. - P. 117201.

[14] Carubelli M., Billoni O.V., et al // Phys. Rev. B. - 2008. - V. 77. - P. 134417.