

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Молотков Юрий Георгиевич

**Исследование перехода в сверхтекучее состояние в  
формализме временных функций Грина при конечной  
температуре**

Научная специальность 1.3.3.

Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д-р физ.-мат. наук., проф. Налимов Михаил Юрьевич

Санкт-Петербург — 2021

## Оглавление

	Стр.
Введение . . . . .	3
<b>Глава 1. Временные функции Грина при конечной температуре</b>	<b>8</b>
1.1 Неравновесные функции Грина. Теория возмущений . . . . .	8
1.2 Необычные расходимости. Регуляризация . . . . .	14
1.3 Физический смысл $\gamma$ . . . . .	26
<b>Глава 2. ИК эффективная теория. Вычисление <math>z</math> индекса</b> . . . . .	<b>30</b>
2.1 ИК эффективная теория . . . . .	30
2.2 Мультипликативная ренормировка теории . . . . .	37
2.3 Двухпетлевое вычисление критического индекса $z$ . . . . .	40
2.4 Метод Sector Decomposition . . . . .	45
2.5 $\beta$ - функции и динамический критический индекс $z$ . . . . .	51
2.6 Стабильность в ИК фиксированной точки в третьем порядке . . . . .	55
<b>Глава 3. Сведение модели <math>F</math> к модели <math>A</math></b> . . . . .	<b>58</b>
3.1 Размерный анализ, ИК эффективная теория . . . . .	61
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>Приложение А. Двух и трехпетлевые диаграммы. Их значение после <math>R'</math> операции</b> . . . . .	<b>70</b>
А.1 Диаграммы дающие вклад в $Z_5$ . . . . .	70
А.2 Диаграммы дающие вклад в $Z_0, Z_1, Z_2$ . . . . .	72

## Введение

### **Актуальность работы.**

Данная работа посвящена исследованию фазовых переходов второго рода, известных также как непрерывные фазовые переходы, в которых параметр порядка при переходе через критическую точку (точка Кюри в магнетиках,  $\lambda$ -точка в жидком гелии и пр.) меняется непрерывно. Фазовые переходы такого рода характеризуются поведением всевозможных термодинамических характеристик (теплоёмкость, среднее значение параметра порядка, восприимчивость, радиус корреляции и прочие) в окрестности точки фазового рода. Это поведение имеет вид степенной функции, показатель которой, называемый критическим индексом, является экспериментально наблюдаемой величиной. Самое простое описание, которое основано на поведении среднего параметра порядка, было предложено Ландау [1]. Тем не менее, результаты предсказанные этой моделью находились в противоречии с экспериментом из-за пренебрежения флуктуациями параметра порядка, и финальный удар по этой теории был нанесен точным решением двумерной модели Изинга. С тех пор, вместо теории Ландау, работающей со средним параметра порядка, используют флуктуационную теорию, которая рассматривает параметр порядка, в окрестности точки фазового перехода, как случайное поле [2]. Более детально мы интересуемся непрерывными фазовыми переходами в квантовых системах, состоящих из частиц, которые подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна.

**Степень разработанности темы исследования** Описание критического поведения систем в окрестности перехода в сверхтекучую фазу является важной и интересной задачей теоретической физики. Изучение статических свойств этого непрерывного фазового перехода оказало существенное влияние на развитие теории критических явлений в целом. Например, вычисление здесь критического индекса теплоемкости [2] привело к пониманию важности схем пересуммирования многопетлевых вычислений. Экспериментально этот результат был проверен в известном эксперименте на орбите Земли [3].

Эта работа посвящена более сложному вопросу — описанию динамических критических свойств сверхтекучего вещества, то есть влиянию равновесных флуктуаций на критическое поведение.

Классические монографии [2; 4; 5] указывают, что сверхтекучая критическая динамика описывается стохастическими динамическими моделями F или E. В модели F система стохастических уравнений

$$\begin{aligned}\partial_t \psi^+ &= f_{\psi^+} + \lambda(1 + ib)[\partial^2 \psi^+ - g_1(\psi^+ \psi)\psi^+ / 3 + g_2 m \psi^{h^+}] + i\lambda g_3 \psi^+[g_2 \psi^+ \psi - m], \\ \partial_t \psi^- &= f_{\psi^-} + \lambda(1 - ib)[\partial^2 \psi^- - g_1(\psi^+ \psi)\psi^- / 3 + g_2 m \psi^-] - i\lambda g_3 \psi^-[g_2 \psi^+ \psi - m], \\ \partial_t m &= f_m - \lambda u \partial^2 [g_2 \psi^+ \psi - m] + i\lambda g_3 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+].\end{aligned}\quad (1)$$

строится из феноменологических соображений, основанных на законах сохранения. Здесь  $\psi(x, t)$ ,  $\psi^+(x, t)$  – комплексные поля параметра порядка, поле  $m$  ответственно за флуктуации плотности и температуры,  $g_i$ ,  $b$ ,  $u$  – константы связи,  $\lambda$  – кинетический коэффициент,  $f_i$  – случайные силы, для которых предполагается гауссово распределение типа "белого шума".

Большое число сложных пропагаторов и диаграмм в модели F приводило к недостатку известных порядков петлевого разложения. На основе четырехпетлевых расчетов для индекса  $\alpha$  [2] и результатов эксперимента [3], было выдвинуто предположение, что в инфракрасной (ИК-) области динамика описывается более простой моделью E, для которой в (1) надо положить  $b = g_2 = 0$ . Тем не менее в [6; 7] было показано, что микроскопический подход, скорее, свидетельствует в пользу модели F. Несмотря на заметные упрощения в E-модели, а также то, что сформулирована она достаточно давно и попытки ее ренорм-группового исследования неоднократно предпринимались [8–11], динамические характеристики в ней до сих пор неизвестны.

Проблема исследования моделей E и F состояла, в частности, в необходимости выбора устойчивой ИК-фиксированной точки. Для этого необходимо найти поправочные критические  $\omega$ -индексы, пертурбативное вычисление которых на порядок сложнее, чем у основных индексов, а сами они зависят от рассматриваемой модели: в том же классе критической эквивалентности может быть другое число зарядов, а значит – другое количество  $\omega$ -индексов, и другие их значения.

Чтобы определиться с ИК-устойчивой точкой, в [6] была предпринята попытка проверить устойчивость ИК-поведения динамической модели F относительно естественного возмущения среды флуктуациями гидродинамических мод несжимаемой жидкости. Но, в связи со сложностью рассматриваемой модели, подход не привел к однозначному результату.

Итак, анализ ИК-устойчивости связан с аккуратным выбором наиболее точной модели. Поэтому в нашей работе мы стартовали с наиболее микроскопически обоснованной модели взаимодействующих квантовых частиц, рассматриваемых на основе временных функций Грина при ненулевой температуре в формализме функционального интеграла. Мы используем взаимодействие типа "плотность – плотность", применяем размерную регуляризацию,  $4 - \epsilon$  разложение, метод квантово-полевой ренормализационной группы (РГ).

**Целью** данной работы является построение непротиворечивой микроскопической теории пригодной для описания непрерывного фазового перехода в сверхтекучее состояние и последующее вычисление критического индекса  $z$  ответственного за время релаксации системы к равновесию под воздействием равновесных флуктуаций. Также был затронут вопрос устойчивости найденной ИК фиксированной точки. В добавок было замечено, что именно модель  $A$  стохастической динамики отвечает переходу в сверхтекучее состояние.

**Научная новизна** Все результаты полученные в данной работе являются оригинальными результатами по вычислению критического индекса  $z$  для перехода в сверхтекучее состояние. Результаты опубликованы в нескольких статьях, в отечественных и зарубежных журналах.

**Теоретическая и практическая значимость** Модель временных функций Грина при конечной температуре может быть использована для класса моделей в которых потенциал отличен от дельтаобразного, более того эта модель также, с минимальными изменениями, может быть применена для описания системы частиц, которые подчиняются статистике Ферми.

**Методология и методы исследования** Методология работы основана на теоретико-полевых методах квантовой теории поля, ренормгруппового анализа, функционального интегрирования.

**Достоверность полученных результатов** Результаты исследований опубликованы в зарубежных и отечественных журналах. А достоверность сочисланного  $z$  индекса подтверждается значением, получаемым из модели  $A$  стохастической динамики.

#### **Положения выносимые на защиту**

- Построенная теория временных функций Грина при конечной температуре адекватно описывает динамическую квантовую систему при ненулевой температуре. Проведенный анализ расходимостей и после-

дующее построение ИК эффективной теории позволяет проводить исследование непрерывных фазовых переходов.

- Сосчитан динамический критический индекс  $z$  рассматриваемой модели. Оказалось, что в единственной устойчивой ИК фиксированной точке, рассматриваемая модель эквивалентна модели  $A$  стохастической динамики, что ведет к тому, что индекс  $z$  оказывается равен индексу из модели  $A$
- Сосчитанная матрица  $\omega$  в трехпетлевом приближении позволяет утверждать, что устойчивость единственной ИК фиксированной точки сохранится и в этом порядке.
- Введение ненулевой сжимаемости жидкости редуцирует  $F$  модель стохастической динамики к модели  $A$ , что снимает вопрос о том, почему критический индекс  $z$  в модели временных функций Грина при конечной температуре оказался равен индексу из модели  $A$ .

**Апробация работы** По теме работы, опубликованы три статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ и входящих в РИНЦ, WOS:

- Honkonen, Juha & Komarova, M.V. & Molotkov, Yu.G. & Nalimov, M.Yu. (2018). Effective large-scale model of boson gas from microscopic theory. Nuclear Physics B. 939. 10.1016/j.nuclphysb.2018.12.015.
- Honkonen, J., Komarova, M.V., Molotkov, Y.G. et al. Kinetic Theory of Boson Gas. Theor Math Phys 200, 1360–1373 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0040577919090095>
- Zhavoronkov, Y.A., Komarova, M.V., Molotkov, Y.G. et al. Critical Dynamics of the Phase Transition to the Superfluid State. Theor Math Phys 200, 1237–1251 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0040577919080142>

Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- «Science SPbU – 2020»
- VI International Conference "Models in quantum field theory" Saint Petersburg, Peterhof, Russia from August 27 to 31, 2018
- NEGF and hydrodynamic. ТНМЕС 2019 , JINR, 2019

**Личный вклад автора** Все вычисления и основные результаты были получены автором лично или при его прямом участии.

**Структура и объем работы** Работы состоит из трех глав, заключения, одного приложения. Полный объем работы составляет 73 страницы.

- В первой главе развивается формализм временных функций Грина при конечной температуре. Проводится анализ основных объектов квантовой теории поля, строятся соответствующие объекты:  $n$ -точечные функции Грина, выводятся, в наиболее общей форме, теория возмущений для них и лишь в самом конце конкретизируется форма гамильтониана. Далее, имея на руках гамильтониан, проводится анализ возникающих расходимостей, предлагается способ их регуляризации, обсуждается физический смысл регуляризатора. Материал первой главы основан на работах [12],[13]
- Во второй главе, построенная теория подвергается размерному счету для определения ИК несущественных членов. Путем их отбрасывания, строится ИК эффективная теория пригодная для описания рассматриваемого фазового перехода. Показывается, что такая теория является мультипликативно ренормируемой и проводится вычисление в низшем порядке теории возмущений. Проводится расчет следующего порядка теории возмущений и показывается, что сосчитанная матрица  $\omega$  имеет вид асимптотического ряда, что требует пересуммирования. Материалы этой главы основаны на [12],[14]
- В третьей главе, рассматривается введение ненулевой сжимаемости в модель  $F$  стохастической динамики, это приводит к тому, что она эффективно редуцируется к модели  $A$ . Эта глава основана чисто на работе [14]
- В заключении приводятся основные результаты и выводы.
- Приложение содержит сосчитанные значения трехпетлевых диаграмм и их производных по непертурбативному заряду  $u$

# Глава 1. Временные функции Грина при конечной температуре

## 1.1 Неравновесные функции Грина. Теория возмущений

Основным предметом интереса для нас является исследование влияния равновесных флуктуаций на Бозе систему вблизи точки фазового перехода второго рода ( $\lambda$ -точка в жидком гелии). Главным физическим параметром, который показывает нам, насколько быстро система выведенная из равновесного состояния равновесными флуктуациями придет обратно в равновесие является так называемый динамический критический индекс  $z$  [4; 5]. Для его вычисления, мы выведем модель пригодную для описания неравновесных Бозе систем вблизи точки фазового перехода второго рода. Для этого нам потребуется начать с основных объектов в квантовой теории поля: так называемых  $n$ -точечных функций Грина [2].

Имеется несколько подходов к тому, как выводить представление для  $n$ -точечных функций Грина пригодных для построения соответствующей модели: прямой подход с использованием операторного формализма, или подход, в котором соответствующие матричные элементы сразу переписываются с использованием формулы Фейнмана-Каца [15].

Пусть  $\hat{\psi}$  и  $\hat{\psi}^+$  операторы уничтожения и рождения соответственно. Тогда  $n$ -точечная функция Грина может быть записана в следующем виде:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr} \left( \rho T \left[ \hat{\psi}_H(x_1) \hat{\psi}_H^+(x_1) \cdots \hat{\psi}_H(x_n) \hat{\psi}_H^+(x_n) \right] \right), \quad (1.1)$$

где  $\rho$  — статистический оператор,  $x_n$  — пара  $(t_n, x_n)$ , здесь  $x_n \in \mathbb{R}^d$ . Операторы  $\hat{\psi}_H$  и  $\hat{\psi}_H^+$  записаны в представлении Гейзенберга:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_H(t, x) &= e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}-\mu\hat{N})} \hat{\psi}(x) e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}-\mu\hat{N})} \\ \hat{\psi}_H^+(t, x) &= e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}-\mu\hat{N})} \hat{\psi}^+(x) e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}-\mu\hat{N})}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\hat{\psi}(x)$  и  $\hat{\psi}^+(x)$  — операторы в представлении Шредингера. Для дальнейшей простоты записи объединим оператор  $\hat{\psi}$  и комплексно-сопряженный ему  $\hat{\psi}^+$  в одно двухкомпонентное скалярное поле:

$$\hat{\phi}_H(x) = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_H(x) \\ \hat{\psi}_H^+(x) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Тогда  $n$  — точечная функция Грина может быть записана в более компактной форме как:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr}(\rho T[\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n)]). \quad (1.4)$$

Последующие вычисления в теории возмущений полезно проводить сразу под-разумевая работу в схеме размерной регуляризации. Другими словами мы полагаем, что размерность пространства есть некоторое положительное вещественное число  $d$ . Рассмотрим систему слабо-взаимодействующих бозонов вблизи точки фазового перехода второго рода в равновесном состоянии. Удобно работать в большом каноническом ансамбле, который наиболее хорошо описывает системы в состоянии с переменным числом частиц. Выбор ансамбля однозначно фиксирует вид статистического оператора:

$$\rho = \frac{e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}}{Z_G}, \quad (1.5)$$

где  $\hat{H}$  гамильтониан системы,  $\mu$  — химический потенциал, а  $\hat{N}$  — оператор числа частиц,  $\beta$  — обратная температура,  $Z_G$  — статистическая сумма рассматриваемой модели. Вычисления в теории возмущений традиционно проводятся с использованием представления взаимодействия для полевых операторов  $\hat{\psi}, \hat{\psi}^+$  [2; 15]:

$$\hat{\psi}(t, x) = e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \hat{\psi}(x) e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \quad (1.6)$$

$$\hat{\psi}^+(t, x) = e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \hat{\psi}^+(x) e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \quad (1.7)$$

Здесь гамильтониан  $\hat{H}$  подразумевается разбитым на так называемую свободную часть (гармоническую) и взаимодействующую часть. Другими словами  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ . Также в представлении взаимодействия был отдельно выделен начальный момент времени  $t_0$ , начиная с которого в системе установилось равновесие. Выбор  $t_0$  никак не влияет на функции Грина в силу их трансляционной инвариантности по времени.

Временные функции Грина при конечной температуре являются подтипом неравновесных. Это выражается в том, что для неравновесных функций Грина необходимо использовать неравновесный статистический оператор вместо статистического оператора большого канонического ансамбля в (1.5). Неравновесные функции Грина очень часто вводятся и вычисляются на основе идей Швингера [16] о, упорядоченном на специальном контуре, произведении операторов для которых время считается комплексным [17] вместо обычного

упорядочивания в (1.4). Как правило данный подход используется для изучения проблемы Коши уравнения Дайсона (которое иногда называется уравнением Каданова-Бейма) для функций Грина. Отсюда конечно же тоже можно получить соответствующие разложения.

В этом методе, мы однако, построим разложение на всей временной оси с последующим ренормализационным анализом длинноволновой модели, которая будет получена из этого разложения. Для этого, мы получаем теорию возмущений при помощи стандартных теорем Вика [18]. Также мы применяем функциональное представление [19], которое позволяет нам в определенный момент перейти к формализму функционального интеграла.

Для начала, упорядочивание по времени гейзенберговских операторов в (1.4) должно быть переписано в так называемой форме упорядоченного произведения дираковских операторов. Другими словами:

$$T [\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n)] = \hat{U}(t_0, t_f) T \left[ \hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt V_n(\hat{\phi}(t))} \right] \hat{U}(t_i, t_0), \quad (1.8)$$

где  $t_f > t_l > t_i, \forall l = 1, \dots, n$ . Оператор эволюции  $\hat{U}$  в (1.8) :

$$\hat{U}(t, t') = e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} e^{\frac{i(t-t')}{\hbar}(\hat{H} - \mu\hat{N})} e^{-\frac{i(t'-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}, \quad (1.9)$$

и  $V_n(t)$  функционал взаимодействия, записанный в нормальной форме, то есть  $V_n(\hat{\phi}) = N[V_n(\hat{\phi})]$ . Здесь подразумевается, что хронологическое произведение на совпадающих временах определяется, как нормальное произведение. Кроме того, полезно отметить, что в отличие от функций Грина, хронологическое произведение в (1.8) зависит от времени отсчета  $t_0$ .

Моменты времени  $t_i$  и  $t_f$  считаются произвольными и подразумевается, что они будут положены  $t_i \rightarrow -\infty$  и  $t_f \rightarrow \infty$  для облегчения последующего счета в теории возмущений. Поэтому мы представим оба оператора эволюции в (1.8) в форме антихронологической экспоненты:

$$\hat{U}(t', t) = \tilde{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V_n(\hat{\phi}(u)) du}, \quad (1.10)$$

где  $\tilde{T}$  – знак антихронологического произведения и  $t' < t$ , а пределы интеграла в экспоненте записаны в естественном порядке с меньшим аргументом на

нижнем пределе. Конечно, можно вместо антихронологического произведения операторов  $\hat{U}(t',t)$  использовать обычные хронологические операторы  $\hat{U}(t,t')$  определенные как:

$$\hat{U}(t,t') = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V_n(\hat{\phi}(u)) du} . \quad (1.11)$$

Вычисления, конечно же, не зависят от того, какой тип операторов выбран. Главное, чтобы их выбор был сделан единообразно. Для дальнейшего, требуется переписать статистический оператор  $\rho$  в пригодном виде. Для конечной температуры, оказывается убедительно выбирать след (1.4) в обкладках собственных векторов свободного оператора  $\hat{H}_0 - \mu \hat{N}$ . Статистический оператор  $\rho$  (1.5) также должен быть переписан в форме хронологического произведения. Для того, чтобы это сделать, полезно заметить, что соответствующий статистический оператор может быть представлен как оператор эволюции во мнимом времени, так называемый евклидов оператор эволюции, который выглядит следующим образом:

$$\hat{U}_E(t,0) = e^{\frac{t}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} e^{-\frac{t}{\hbar}(\hat{H} - \mu \hat{N})} = T e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t V_n(\hat{\phi}(u)) du} , \quad (1.12)$$

с очевидной подстановкой  $t = \beta \hbar$  для верхнего предела. В представлении взаимодействия, эволюция евклидовых операторов может быть записана как:

$$\hat{\phi}_E(t,x) = e^{\frac{t}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} \hat{\phi}_E(x) e^{-\frac{t}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} , \quad (1.13)$$

где индекс  $E$  относится к евклидовой теории поля получаемой подстановкой  $(t - t_0) \rightarrow -it$ . Конечное время отсчета  $t_0$  заставляет нас использовать другую нотацию для евклидовых операторов эволюции вместо обычной нотации для дираковских операторов с мнимым временем.

Наконец, подставляя представление (1.8) и (1.12) в (1.4) получаем выражение для временных функций Грина при конечной температуре в виде произведения четырех упорядоченных по времени операторов.

Используя выбор  $t_0$  в виде  $t_i < t_0$  получаем:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Tr} \left( \frac{e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})}}{Z_G} T e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta \hbar} V_n(\hat{\phi}(t)) dt} \tilde{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} V_n(\hat{\phi}) dt} \cdot T \left[ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_n) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V_n(\hat{\phi}(t)) dt} \right] \tilde{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_0} V_n(\hat{\phi}(t)) dt} \right) \right) \quad (1.14)$$

Применив стандартные теоремы Вика, произведение упорядоченных по времени произведений может быть переписано в виде единого нормального произведения:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr} \left( \frac{e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})}}{Z_G} N \left[ e^{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \Delta u \frac{\delta}{\delta \varphi_l} + \sum_{k < l} \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n_{kl} \frac{\delta}{\delta \varphi_l}} \varphi_3(x_1) \cdots \varphi_3(x_n) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta \hbar} V_n(\varphi_1) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} V_n(\varphi_2(t)) dt - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V_n(\varphi_3(t)) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_0} V_n(\varphi_4(t)) dt} \right] \Big|_{\varphi_{2,3,4} = \hat{\varphi}, \varphi_1 = \hat{\varphi}_E} \right), \quad (1.15)$$

где  $V_n(t, \varphi)$  нормальная форма функционала взаимодействия и кроме того мы отдельно выделили четыре индекса для каждого поля. Все интегралы в соответствующих экспонентах подразумеваются. Определение свертки стандартное [19]. Индексы в них относятся к типу полей.

Можно также заметить, что соответствующие операторы (1.15) несимметричны относительно индексов. Хронологические свертки – квадратичная форма оператора приведения и определены стандартным образом [19]. Суммарно у нас есть четыре хронологические свертки:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}(x, x') &= T[\hat{\varphi}_1(x) \hat{\varphi}_1(x')] - N[\hat{\varphi}_1(x) \hat{\varphi}_1(x')] \\ \Delta_{22}(x, x') &= T[\hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(x')] - N[\hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(x')] \\ \Delta_{33}(x, x') &= T[\hat{\varphi}_3(x) \hat{\varphi}_3(x')] - N[\hat{\varphi}_3(x) \hat{\varphi}_3(x')] \\ \Delta_{44}(x, x') &= T[\hat{\varphi}_4(x) \hat{\varphi}_4(x')] - N[\hat{\varphi}_4(x) \hat{\varphi}_4(x')] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Используя свойства хронологических свертки, можно увидеть, что только три из них различны, так как:

$$\Delta_{22}(x, x') = \Delta_{44}(x, x') \quad (1.17)$$

Шесть нормальных свертки в (1.15) получаются из соотношения:

$$n(x, x') = \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') - N[\hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x')] \quad (1.18)$$

Расставляя соответствующим образом знаки, получаем набор нормальных свертков:

$$\begin{aligned}
n_{12} &= \hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_2(x') - N[\hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_2(x')] \\
n_{13} &= \hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_3(x') - N[\hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_3(x')] \\
n_{14} &= \hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_4(x') - N[\hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_4(x')] \\
n_{23} &= \hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_3(x') - N[\hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_3(x')] \\
n_{24} &= \hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_4(x') - N[\hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_4(x')] \\
n_{34} &= \hat{\varphi}_3(x)\hat{\varphi}_4(x') - N[\hat{\varphi}_3(x)\hat{\varphi}_4(x')],
\end{aligned} \tag{1.19}$$

где операторы поля, либо суть дираковские поля или евклидовы поля, в зависимости от индекса. Здесь и в дальнейшем все суммы и интегралы будут опускаться для простоты записи. Вычисление средних в большем каноническом ансамбле от нормального произведения для произвольного оператора может быть проведено при помощи следующей формулы, справедливости которой доказывается разложением в ряд обеих частей равенства [2; 15; 19]:

$$\frac{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} N[F(\hat{\varphi})]}{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}} = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\varphi} d \frac{\delta}{\delta\varphi}} F(\varphi) \Big|_{\varphi=0}, \tag{1.20}$$

где функции  $d(x, x')$  ядро соответствующего функционального дифференциального оператора. Мы будем называть их тепловыми свертками. Они могут быть сосчитаны как средние значения нормального произведения полей:

$$d(x, x') = \frac{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} N[\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')]}{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}} \tag{1.21}$$

В силу того, что в (1.15) все поля, либо являются дираковскими, либо евклидовыми и следовательно обладающими тепловыми свертками из (1.21), очень удобно записать квадратичную часть оператора приведения (1.15) в форме квадратной матрицы  $4 \times 4$  состоящей из соответствующих пропагаторов. Это приводит нас, к почти финальной форме пригодной для теории возмущений, для временных функций Грина при конечной температуре:

$$\begin{aligned}
G(x_1, \dots, x_n) &= \frac{Z_0}{Z_G} \left[ e^{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \frac{\delta}{\delta\varphi_l} \Delta_{ll} \frac{\delta}{\delta\varphi_l} + \sum_{k<l} \frac{\delta}{\delta\varphi_k} n_{kl} \frac{\delta}{\delta\varphi_l} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^4 \frac{\delta}{\delta\varphi_k} d_{kl} \frac{\delta}{\delta\varphi_l}} \varphi_3(x_1) \cdots \varphi_3(x_n) \cdot \right. \\
&\quad \left. e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} V_n(\varphi_1) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} V_n(\varphi_2(t)) dt - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V_n(\varphi_3(t)) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_0} V_n(\varphi_4(t)) dt} \right] \Big|_{\varphi_j=0},
\end{aligned} \tag{1.22}$$

где  $Z_0 = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}$ . На этом этапе можно установить соответствие между временным интегралом в функционале взаимодействия и частями контура в комплексной плоскости. Этот контур известен, как контур Швингера-Келдыша. Он позволяет перейти к единому времени, ценой того, что время теперь пробегает этот контур. В этом методе, в этом нет подобной необходимости.

Исходя из (1.22) можно получить стандартные фейнмановские правила для теории возмущений. Легко видеть, что левая часть равенства (1.14) независима от всех временных параметров  $t_f > t_0 > t_i$ . Тем не менее их появление в правой части соответствующего равенства, делает теорию возмущений слишком запутанной, поэтому для конкретного счета, они будут полагаться так, чтобы максимально упростить соответствующие вычисления.

## 1.2 Необычные расходимости. Регуляризация

Дальнейшее упрощение выражения для временных функций Грина при конечной температуре (1.22) требует уточнения формы гамильтониана. Нашей основной задачей является изучение поведения системы, состоящей из частиц, подчиняющихся Бозе статистике, вблизи фазового перехода второго рода. Наиболее общий гамильтониан подобного рода имеет следующую форму:

$$\hat{H} = \int dx \left( \hat{\psi}^+(t,x) \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \hat{\psi}(t,x) + \frac{g}{4} \hat{\psi}^+(t,x) \hat{\psi}^+(t,x) \hat{\psi}(t,x) \hat{\psi}(t,x) \right) \quad (1.23)$$

Гамильтониан записан в нормальной форме и функционал взаимодействия получается простой заменой операторов на соответствующие функции. Хронологические и нормальные свертки вычисляются по приведенным выше формулам. Все свертки, содержащие два оператора уничтожения или рождения равны нулю из-за коммутационных соотношений между ними. В итоге, свертки двухкомпонентного поля (1.3) могут быть представлены матрицей  $2 \times 2$  с нулями на диагонали. В базисе волновых векторов хронологические свертки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta(t,t',k) &= iG^R(t-t',k) = \theta(t-t') e^{-i\omega(k)(t-t')} \\ \tilde{\Delta}(t,t',k) &= -iG^A(t-t',k) = \theta(t'-t) e^{-i\omega(k)(t-t')} \\ \Delta_E(t,t',k) &= \theta(t-t') e^{-\omega(k)(t-t')}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где вид  $\omega(k)$  определяется исходя из свободной части гамильтониана (1.23) и равен:

$$\omega(k) = \frac{\varepsilon(k)}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right). \quad (1.25)$$

Функции  $G^R, G^A$  известны как запаздывающие и опережающие функции Грина для нерелятивистской кинетики. Температурные и нормальные свертки отличаются лишь тем, является ли время чисто мнимым или нет. Прямое вычисление с использованием (1.19) и (1.21) позволяет найти их:

$$\begin{aligned} d_{DD}(t, t', k) &= e^{-i\omega(k)(t-t')} \bar{n}(k) \\ d_{EE}(t, t', k) &= e^{-\omega(k)(t-t')} \bar{n}(k) \\ d_{DE}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-i(t-t_0)+t')} \bar{n}(k) \\ d_{ED}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(i(t'-t_0)-t)} \bar{n}(k), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где индексы показывают какие поля: евклидовы или дираковские стоят в выражении (1.21). Другими словами, они определяют порядок полей в усредненном произведении операторов  $\langle \hat{\psi}^+(t, x) \hat{\psi}(t', x') \rangle$ .  $\bar{n}(k)$  среднее значение чисел заполнения для свободного Бозе газа:

$$\bar{n}(k) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(k)} - 1} \quad (1.27)$$

Как было сказано выше, все свертки, состоящие из двух упорядоченных операторов уничтожения или рождения исчезают в силу коммутационных соотношений. Остальные нормальные свертки имеют одинаковую с тепловыми свертками зависимости от времени, за исключением того, что среднее значение чисел заполнения заменяется на единицу:

$$\begin{aligned} n_{DD}(t, t', k) &= e^{-i\omega(k)(t-t')} \\ n_{EE}(t, t', k) &= e^{-\omega(k)(t-t')} \\ n_{DE}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-i(t-t_0)+t')} \\ n_{ED}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(i(t'-t_0)-t)} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Можно заметить, что комбинация выражений с  $\bar{n}(k)$  и без может привести к вполне определенным расходимостям в теории возмущений. Эта проблема будет рассмотрена чуть позже.

Функциональное представление (1.22) с использованием операторов  $\psi$  и  $\psi^+$  из (1.23) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}
G(x_1, \dots, x_n) = & \frac{Z_0}{Z_G} \left[ e^{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \psi_l} \Delta_{ll} \frac{\delta}{\delta \psi_l^+} + \sum_{k < l} \frac{\delta}{\delta \psi_k} n_{kl} \frac{\delta}{\delta \psi_l^+} + \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \psi_k} d_{kl} \frac{\delta}{\delta \psi_l^+}} \psi_3(x_1) \cdots \psi_3(x_m) \cdot \right. \\
& \cdot \psi_3^+(x_{m+1}) \cdots \psi_3^+(x_n) e^{-\frac{g}{4\hbar} \int_0^{\beta\hbar} dt \int dx \psi_1^{+2}(t, x) \psi_1^2(t, x) + \frac{ig}{4\hbar} \int_{t_0}^{t_f} dt \int dx \psi_2^{+2}(t, x) \psi_2^2(t, x)} \\
& \left. \cdot e^{-\frac{ig}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int dx \psi_3^{+2}(t, x) \psi_3^2(t, x) + \frac{ig}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_0} dt \int dx \psi_4^{+2}(t, x) \psi_4^2(t, x)} \right] \Bigg|_{\psi_i=0, \psi_i^+=0},
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Матрица  $4 \times 4$  пропагаторов содержит соответствующие комбинации функции вычисленных выше и имеет вид:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_E + d_{EE} & n_{ED} + d_{ED} & n_{ED} + d_{ED} & n_{ED} + d_{ED} \\ d_{DE} & \tilde{\Delta} + d_{DD} & n_{DD} + d_{DD} & n_{DD} + d_{DD} \\ d_{DE} & d_{DD} & \Delta + d_{DD} & n_{DD} + d_{DD} \\ d_{DE} & d_{DD} & d_{DD} & \tilde{\Delta} + d_{DD} \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

Несложно заметить, что каждый элемент этой матрицы имеет осциллирующую часть. Будет показано, что данная осциляция приводит к вполне определенным проблемам при вычислениях по теории возмущений и является источником ИК расходимостей в соответствующих диаграммах.

Также должно быть отмечено, что вычисление по теории возмущений с использованием (1.29), (1.30) может считаться наиболее общим видом временных функций Грина при конечной температуре. Моменты времени  $t_f, t_i$  также как и момент отсчета по времени  $t_0$  произвольные величины. Более того в качестве статистического оператор  $\rho$  может быть взят любой эрмитов оператор, который может быть приведен к форме  $\frac{e^{F[\varphi]}}{\text{Tr} e^{F[\varphi]}}$ , где  $F[\varphi]$  локальный полиномиальный операторный функционал. Замена  $\rho$  конечно же ведет к изменению формы соответствующих сверток определенных в (1.19), (1.16).

Каждая квантовая теория поля с взаимодействием содержит в себе расходимости, которые возникают при счете по теории возмущений элементов  $S$ -матрицы или любых других наблюдаемых величин. В физике элементарных частиц, зачастую, основной род таких проблем имеет форму так называемых ультрафиолетовых расходимостей. Очень хорошо известно [**Bog**], что источник подобных расходимостей происходит из того факта, что соответствующий оператор взаимодействия  $V_n$  содержит в себе произведение операторных

распределений. Подобные произведения операторных распределений зачастую требуют доопределения. Тем не менее, с расходимостями можно работать прямо в Фурье представлении с использованием метода ренормализационной группы, который позволяет получать конечные результаты. Однако, в безмассовых моделях появляются именно ИК расходимости и они являются куда большей проблемой, для которой все еще не существует общего рецепта.

В нашем случае, кроме описанных выше расходимостей существует еще один тип необычных для полевых моделей расходимостей при интегрировании по времени (или частоте). Источником этих расходимостей служит осциллирующая часть пропагаторов. Суммарно часть расходимостей возникает из УФ или ИК сингулярностей, связанных с термодинамическим предельным переходом в модели, а часть, на первый взгляд, возникает из осциллирующих частей в матрице пропагаторов. Здесь мы рассматриваем только последний вид сингулярностей, которые возникают при интегрировании по времени.

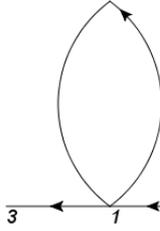
Для более удобного счета при разложении по теории возмущений положим  $t_f \rightarrow \infty, t_i \rightarrow -\infty$ . Для обычных теории этот переход может быть применён к каждой диаграмме отдельно, но в нашем случае возникают проблемы следующего характера. Рассмотрим двухточечную функцию Грина и сосчитаем к ней первую поправку, которая дается соответствующей однопетлевой диаграммой:

$$G_2(x_1, x_2) = \text{Tr} \left( \hat{\rho}_G T \left[ \hat{\psi}_H(x_1) \hat{\psi}_H^+(x_2) \right] \right) \quad (1.31)$$

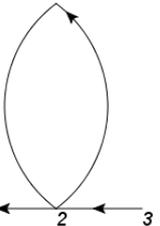
В силу того, что у нас двухкомпонентное поле, у нас есть четыре диаграммы рассматриваемой топологии:

$$G_2(x_1, x_2) = \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \underset{1}{\leftarrow} \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \underset{3}{\leftarrow} + \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \underset{2}{\leftarrow} \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \underset{3}{\leftarrow} + \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \underset{3}{\leftarrow} \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \underset{3}{\leftarrow} + \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \underset{4}{\leftarrow} \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} \overset{\curvearrowright}{\leftarrow} \underset{3}{\leftarrow}, \quad (1.32)$$

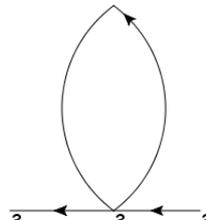
где цифры нумеруют тип полей из (1.22). Аналитическое выражение для каждой диаграммы из (1.32) имеет вид:



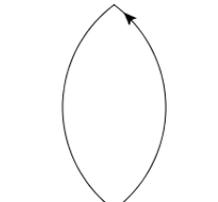
$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\beta\hbar} dt \left( d_{DE}(t_1 - t) \Sigma_{\Psi_1^\dagger \Psi_1}^{(1)} (n_{ED}(t - t_2) + d_{ED}(t - t_2)) \right) = \\
 &= \frac{-g}{4\hbar} \int_0^{\beta\hbar} dt \int dp e^{\omega(k)(-i(t_1-t_0)+t)} \bar{n}(k) e^{\omega(k)(-t+i(t_2-t_0))} (\bar{n}(k) + 1) \cdot \\
 &\cdot (\Theta[0] + n(p)) = \frac{-g}{4\hbar} \int dp n(p) e^{-i\omega(k)(t_1-t_2)} \beta\hbar \bar{n}(k) (1 + \bar{n}(k))
 \end{aligned} \tag{1.33}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{t_0}^{t_f} dt (n_{DD}(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\Psi_2^\dagger \Psi_2}^{(1)} d_{DD}(t - t_2) = \\
 &= \frac{ig}{4\hbar} \int_{t_0}^{t_f} dt \int dp [\Theta[0] + \bar{n}(p)] \left( e^{-i\omega(k)(t_1-t)} (\bar{n}(k) + 1) e^{-i\omega(k)(t-t_2)} \bar{n}(k) \right) = \\
 &= \frac{ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) e^{-i(t_1-t_2)\omega(k)} \bar{n}(k) (1 + \bar{n}(k)) (-t_0 + t_f)
 \end{aligned} \tag{1.34}$$



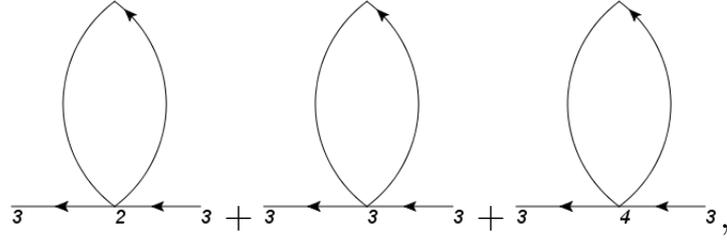
$$\begin{aligned}
&= \int_{t_i}^{t_f} dt (\Delta(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\Psi_3^+ \Psi_3}^{(1)} (\Delta(t - t_2) + d_{DD}(t - t_2)) = \\
&= -\frac{ig}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int dp [\theta(0) + \bar{n}(p)] \left( e^{-i\omega(k)(t_1-t)} (\theta(t_1 - t) + \bar{n}(k)) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot (e^{-i\omega(k)(t-t_2)} (\theta(t - t_2) + \bar{n}(k))) \right) = -\frac{ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) e^{-i\omega(k)(t_1-t_2)} \cdot \\
&\quad \cdot ((t_1 - t_2) + (t_1 - t_i + t_f - t_2) \bar{n}(k) + (t_f - t_i) \bar{n}^2(k))
\end{aligned} \tag{1.35}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{t_i}^{t_0} dt (n_{DD}(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\Psi_4^+ \Psi_4}^{(1)} d_{DD}(t - t_2) = \\
&= \frac{ig}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_0} dt \int dp [\theta[0] + \bar{n}(p)] \left( e^{-i\omega(k)(t_1-t)} (\bar{n}(k) + 1) e^{-i\omega(k)(t-t_2)} \bar{n}(k) \right) = \\
&= \frac{ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) e^{-i(t_1-t_2)\omega(k)} \bar{n}(k) (1 + \bar{n}(k)) (t_0 - t_i)
\end{aligned} \tag{1.36}$$

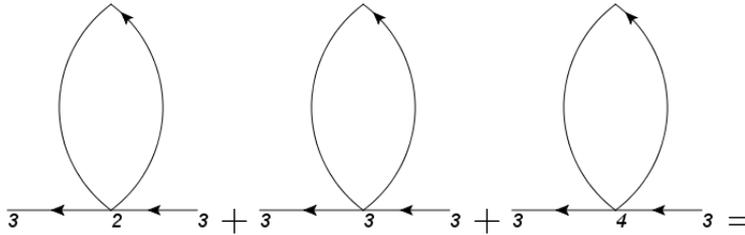
Неоднозначность которая тут появляется связана с наличием тэта функции Хэвисайда в нуле. Хорошо известно, что выбор  $\theta(0) = 0$  для модели свободного Бозе газа ведет к правильным результатам [19]. Поэтому везде мы доопределяем тэта функцию Хэвисайда в нуле - нулём. Интеграл берется по импульсу протекающему в соответствующей петле. Кроме того, эти интегралы содержат в себе среднее число чисел заполнения  $n(p)$ , что делает интегралы несингулярными. С другой стороны, интегралы по времени, при устремлении  $t_f \rightarrow \infty$ ,  $t_i \rightarrow -\infty$  расходятся.

Однако, если мы рассмотрим сумму трех расходящихся диаграмм из (1.32)



$$(1.37)$$

можно заметить, что соответствующие расходимости сокращаются. Более детально, сумма трех диаграмм из (1.32) выглядит следующим образом:



$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_f} dt (n_{DD}(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\psi_2^+ \psi_2}^{(1)} d_{DD}(t - t_2) + \\
&+ \int_{t_i}^{t_f} dt (\Delta(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\psi_3^+ \psi_3}^{(1)} (\Delta(t - t_2) + d_{DD}(t - t_2)) + \\
&+ \int_{t_i}^{t_0} dt (n_{DD}(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\psi_4^+ \psi_4}^{(1)} d_{DD}(t - t_2) = \\
&= \frac{-ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) e^{-i\omega(k)(t_1 - t_2)} (t_1 - t_2) [\theta(t_1 - t_2) + \bar{n}(p)]
\end{aligned}
\tag{1.38}$$

Линейный рост по времени вида  $t_1 - t_2$  вверху не является расходимостью, но тем не менее есть необычное поведение однопетлевой диаграммы по времени. Смысл этого линейного роста хорошо виден, если перейти от времен к частотам. Делая Фурье преобразование правой части (1.38) по  $t_1 - t_2$  получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
&\frac{-ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) \left[ -\frac{1}{(\omega - \omega(k) + i\delta)^2} - 2\pi i \delta'(\omega - \omega(k)) \bar{n}(k) \right] = \\
&= \frac{g}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{i}{\omega - \omega(k) + i\delta} + 2\pi \delta(\omega - \omega(k)) \bar{n}(k) \right],
\end{aligned}
\tag{1.39}$$

где  $\delta'$  – производная дельта функции, а выражение в квадратных скобках на правой части равенства – Фурье преобразование пропагатора  $\Delta + d_{DD}$ . Вот почему (1.38) есть нечто иное, как ведущая поправка дающая вклад к сдвигу частоту.

Эта поправка может быть интерпретирована как сдвиг (или ренормализация) химического потенциала  $\mu$  на величину  $g \int dp \bar{n}(p)$ . Также это можно увидеть, если использовать технику приведенных вершин по отношению к генерации тепловых сверток, что в общей нотации выглядит как:

$$V_{red}(\varphi) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} d_{\delta \varphi} \frac{\delta}{\delta \varphi}} V(\varphi), \quad (1.40)$$

которая в случае взаимодействия в (1.23) дает выражение следующего вида (интегралы в соответствующих функционалах подразумеваются и опущены для простоты записи):

$$\begin{aligned} V_{red}(\psi, \psi^+) &= e^{\frac{\delta}{\delta \psi^+} d_{\delta \psi^+} \frac{\delta}{\delta \psi}} \left( \frac{g}{4} \psi^{+2} \psi^2 \right) = \\ &= \frac{g}{4} \psi^{+2} \psi^2 + g \left( \int dp \bar{n}(p) \right) \psi \psi^{+2} \psi^+ \psi + \frac{g}{2} \left( \int dp \bar{n}(p) \right)^2. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Последний вклад дает обычную константу, которая может быть отброшена, а вот второй вклад дает флуктуационную поправку к химическому потенциалу. Затем используем тот факт, что при использовании приведенных вершин больше не возникает замкнутых петель, состоящих из одного пропагатора в фейнмановских графах для модели. Вот почему, все кажущиеся расходимости, возникающие из-за таких петель, состоящих из одного пропагатора могут быть сокращены сразу и во всех порядках.

Однако, осциллирующая по времени часть пропагаторов ведет к таким же проблемам во всех диаграммах, генерируя "расходимости" подобного рода. Это довольно неудобно каждый раз собирать соответствующие суммы диаграмм и сокращать эти псевдоособенности, поэтому удобно ввести некоторую регуляризацию по времени, чтобы избавиться от подобного рода проблем.

Наиболее простой способ ввести регуляризацию в модель, это ввести ее в пропагаторы нашей модели следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta_{reg}(t, t', k) &= \theta(t - t') e^{-i\omega(k)(t-t') - \gamma(t-t')} \\
\tilde{\Delta}_{reg}(t, t', k) &= \theta(t' - t) e^{-i\omega(k)(t-t') + \gamma(t-t')} \\
d_{DDreg}(t, t', k) &= e^{-i\omega(k)(t-t') - \gamma|t-t'|} \bar{n}(k) \\
d_{DEreg}(t, t', k) &= e^{\omega k(-i(t-t_0) + t' - \gamma|t-t_0|)} \bar{n}(k) \\
d_{EDreg}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-t + i(t'-t_0) - \gamma|t'-t_0|)} \bar{n}(k) \\
n_{DDreg}(t, t', k) &= e^{-i\omega(k)(t-t') - \gamma|t-t'|} \\
n_{DEreg}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-i(t-t_0) + t' - \gamma|t-t_0|)} \\
n_{EDreg}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-t + i(t'-t_0) - \gamma|t'-t_0|)}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Чтобы регуляризовать пропагаторы, вводится некоторый фактор  $\gamma$ , который дает затухание в обе стороны по времени. Зависимость этого затухания  $\gamma > 0$  от волнового числа  $k$  будет определена позже. Физически, эта регуляризация по времени является ничем иным, как введением диссипации энергии в гамильтониан квантовой системы. Это затухание – особенность, которая была получена при помощи петлевой поправки в теории возмущений и как будет выяснено далее является ключевым фактором, который определяет ренормализуемость модели. Имея регуляризованные пропагаторы (1.42) можно перейти к пределу  $t_i \rightarrow -\infty$  and  $t_f \rightarrow \infty$ . Теперь вспомним, что физический смысл времени  $t_0$  – время релаксации системы выведенной из равновесия равновесными флуктуациями. И теперь мы сталкиваемся с двумя возможностями. Если положить  $t_0$  равным некоторому конечному числу, то вершина, которая относится к статистическому оператору  $\rho$  остается связанной с другими и мы имеем полную теорию возмущений (1.29), (1.30). Подобный выбор подходит для исследования проблемы временных масштабов времен релаксации к равновесию. Здесь же, основной задачей является описание фазового перехода второго рода или перехода в сверхтекучее состояние. Тогда рассматриваемые времена намного больше, чем время релаксации, что позволяет выбрать  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Такой выбор приводит к тому, что функции  $d_{DEreg}, d_{EGreg}, n_{DEreg}$  и  $n_{EDreg}$  оказываются равными нулю, а также убирает вклад тепловых полей  $\psi_1, \psi_1^+$  в (1.29) из динамики. Также можно заметить, что статистический оператор перестает зависеть от времени. Имеются другие способы [17], как обращаться с статистическим усреднением упорядоченных операторов в гейзенберговском представлении, которые тут не обсуждаются.

Итого, после совершения всех предельных переходов, матрица пропагаторов (1.30) приводится к более простому виду:

$$\underline{\Delta}_{reg} = \begin{pmatrix} \Delta_E + d_{EE} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta}_{reg} + d_{ddreg} & n_{DDreg} + d_{DDreg} \\ 0 & d_{DDreg} & \Delta_{reg} + d_{DDreg} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Структура пропагаторов такова, что пара операторов  $\psi_1^+$  и  $\psi_1$  отщепляются от остальных в этом подходе. Также можно заметить, что функционалы в  $\psi_1^+$  и  $\psi_1$  дают простой вклад  $\frac{Z_G}{Z_0}$ . Таким образом, функциональное представление (1.29) может быть переписано в следующем виде:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \left[ e^{\sum_{l=2}^3 \frac{\delta}{\delta\psi_l} \underline{\Delta}_{reg} \frac{\delta}{\delta\psi_l^+}} \psi_3(x_1) \cdots \psi_3^+(x_n) e^{\frac{ig}{4\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx \psi_2^{+2} \psi_2^2 - \frac{ig}{4\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx \psi_3^{+2} \psi_3^2} \right] \Big|_{\psi_i} \quad (1.44)$$

с регуляризированной матрицей пропагаторов:

$$\underline{\Delta}_{reg} = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_{reg} + d_{DDreg} & n_{DDreg} + d_{DDreg} \\ d_{DDreg} & \Delta_{reg} + d_{DDreg} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

Теперь можно проводить вычисления в теории возмущений в этой "упрощенной" модели. Полезно отметить, что предел  $t_0 \rightarrow -\infty$  можно рассматривать, как отбрасывание всех корреляций в начальном распределении частиц.

Дальнейшее упрощение вычислений и анализа расходимостей в теории возмущений оказывается удобным перейти к другому набору функций Грина. Чтобы это сделать, произведем замену полей  $\hat{\psi}_3, \hat{\psi}_3^+, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_2^+$  таким образом, чтобы еще сильнее упростить вид матрицы пропагаторов (1.45). Подобная замена была предложена Келдышев в его работе [20] и она выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta^+ \\ \xi \\ \xi^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_3 - \psi_2 \\ \psi_3^+ - \psi_2^+ \\ \psi_2 + \psi_3 \\ \psi_2^+ + \psi_3^+ \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

В терминах этих полей называемых РАК(Retarded-Advanced-Keldysh) полями, оператор приведения для теории возмущений выглядит следующим образом:

$$P = e^{-\frac{\delta}{\delta\eta} \tilde{\Delta}_{reg} \frac{\delta}{\delta\xi^+} + \frac{\delta}{\delta\xi} \Delta_{reg} \frac{\delta}{\delta\eta^+} + \frac{\delta}{\delta\xi} \Delta_{reg}^K \frac{\delta}{\delta\xi^+}}, \quad (1.47)$$

где  $\Delta_{reg}^K$  регуляризованная функция Келдыша:

$$\Delta_{reg}^K = e^{\omega(k)(-i(t-t')-\gamma|t-t'|)(1+2\bar{n}(k))} \quad (1.48)$$

С использованием данной замены полей, функционал взаимодействия превращается в:

$$\begin{aligned} S_I(\eta, \eta^+, \xi, \xi^+) &= \frac{g}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx (\psi_2^{+2} \psi_2^2 - \psi_3^{+2} \psi_3^2) = \\ &= -\frac{g}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx (\eta^+ \xi^+ \xi^2 + \xi^{+2} \xi \eta + \xi^+ \eta^+ \eta^2 + \eta^{+2} \eta \xi) = \\ &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где в правой части равенства применена сокращенная запись для четырех типов взаимодействия. Позже для применения ренормализационной техники, в каждый  $V_i$  будет введен свой заряд  $g_i$  вместо общего заряда  $g$ . Теперь модель может быть переписана с использованием функционального интеграла при помощи стандартного способа [2; 19], что дает в итоге следующее выражение для экспоненты от оператора приведения:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\delta}{\delta \eta} \tilde{\Delta}_{reg} \frac{\delta}{\delta \xi^+} + \frac{\delta}{\delta \xi} \Delta_{reg} \frac{\delta}{\delta \eta^+} + \frac{\delta}{\delta \xi} \Delta_{reg}^K \frac{\delta}{\delta \xi^+}} &= \\ &= \frac{1}{C} \int \mathcal{D}E \int \mathcal{D}E^+ \int \mathcal{D}X \int \mathcal{D}X^+ e^{-X^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k) - \gamma \right] E - E^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k) + \gamma \right] X - 2E^+ \gamma (1 + 2\bar{n}(k)) E} \cdot \\ &\cdot e^{E \frac{\delta}{\delta \eta} + E^+ \frac{\delta}{\delta \eta^+} + X \frac{\delta}{\delta \xi} + X^+ \frac{\delta}{\delta \xi^+}} \end{aligned} \quad (1.50)$$

где нормирующая константа равна:

$$C^{-1} = \det \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k) + \gamma \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k) - \gamma \right] \right| \quad (1.51)$$

Линейные по времени производные дают сдвиги в переменных интегрирования. Вот почему, функционально-дифференциальное представление (1.44) функций Грина дают следующее выражение в виде функционального интеграла в тер-

минах РАК полей:

$$\begin{aligned}
G(A, A^+, B, B^+) &= e^{-\frac{\delta}{\delta \eta} \tilde{\Delta}_{reg} \frac{\delta}{\delta \xi^+} + \frac{\delta}{\delta \xi} \Delta_{reg} \frac{\delta}{\delta \eta^+} + \frac{\delta}{\delta \xi} \Delta_{reg}^K \frac{\delta}{\delta \xi^+}} \\
&\cdot e^{\frac{i}{\hbar} S_I(\eta, \eta^+, \xi, \xi^+) + A^+ \xi + B^+ \eta + A \xi^+ + B \eta^+} \Bigg|_{\eta=0, \xi=0, c_j} = \\
&= \int \mathcal{D}\eta \int \mathcal{D}\eta^+ \int \mathcal{D}\xi \int \mathcal{D}\xi^+ e^{-\xi^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k) - \gamma \right] \eta - \eta^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k) + \gamma \right] \xi} \\
&\cdot e^{-\eta^+ (2\gamma(1+2\bar{n}(k))) \eta + \frac{i}{\hbar} S_I(\xi, \xi^+, \eta, \eta^+) + A^+ \xi + B^+ \eta + A \xi^+ + B \eta^+}
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Данная формула существует только в регуляризованной модели, где  $\gamma > 0$  и  $\Delta_{reg}^K$  не является решением уравнений движения для модели без взаимодействия, потому что в противном случае, матрица пропагаторов (1.45) не может быть обращена из-за того, что ядро соответствующего оператора содержит в себе ненулевые решения соответствующих уравнений движения.

В представлении (1.52) генерирующих функций Грина записанных с использованием РАК полей матрица пропагаторов (1.45) вычисляется как обратный дифференциальный оператор, соответствующей квадратичной формы в действии. Это позволяет восстановить действие для регуляризованной модели:

$$\begin{aligned}
S_0(\eta, \eta^+, \xi, \xi^+) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dk \eta^+(t, -k) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu + i\hbar\gamma \right) \xi(t, k) + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dk \xi^+(t, -k) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu + i\hbar\gamma \right) \eta(t, k) + \\
&+ 2i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dk \eta^+(t, -k) [(1 + 2\bar{n}\hbar\gamma)] \eta(t, k)
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Разделение запаздывающих и опережающих пропагаторов позволяет нам использовать теорему об петлях, аналогичную теореме в стохастической теории поля [2]. Идея основана на двух свойствах пропагаторов в операторе приведения в (1.47). Первое, только запаздывающие и опережающие пропагаторы имеют на себе полевые аргументы  $\eta$  и  $\eta^+$  в функционале взаимодействия. Второе, в запаздывающих и опережающих пропагаторах аргумент с меньшим временем всегда прикреплен к  $\eta$  или  $\eta^+$ . Вот почему, в упорядоченном по времени пропагаторе который стартует из вершины с  $\eta$  или  $\eta^+$  время растет из этой локальной по



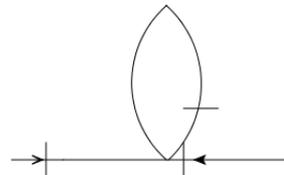
С таким соответствием каждая диаграмма Фейнмана может быть записана в компактной форме. Чтобы обсуждать происхождение диссипации, которая была представлена параметром  $\gamma$  рассмотрим уравнение Дайсона:

$$D^{-1} = \underline{\Delta}^{-1} - \Sigma, \quad (1.55)$$

где  $D$  матрица полных прогаторов, а  $\underline{\Delta}$  матрица затравочных прогаторов в нерегуляризированной модели:

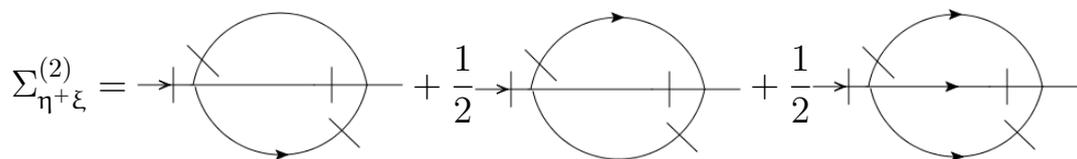
$$\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\Delta} \\ \Delta & \Delta^K \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

Тут мы опускаем знак "reg" для простоты записи и  $\Sigma$  содержит графы ответственные за собственную энергию. Первая поправка к затравочным прогаторам формируется из замкнутых петель. Для примера:



(1.57)

Но в разделе выше было обнаружено, что подобные петли не имеют УФ расходимостей из-за присутствия  $\bar{n}$ . Они только переопределяют значение химического потенциала. Поэтому необходимо рассмотреть двухпетлевые диаграммы. Принимая во внимание теорему о петлях из прошлого раздела, матрица  $\Sigma$  содержит в себе следующие элементы:  $\Sigma_{\eta\eta^+}$ ,  $\Sigma_{\eta^+\xi}$  и  $\Sigma_{\xi^+\eta}$ . Эти элементы – диаграммы с внешними концами  $\eta, \eta^+$ ,  $\eta^+, \xi$  и  $\xi^+, \eta$  соответственно. Рассмотрим элемент  $\Sigma_{\eta^+\xi}$  в двухпетлевом приближении. Он содержит в себе следующие диаграммы:



(1.58)

Здесь индекс сверху показывает порядок теории возмущений. Эти диаграммы содержат в себе УФ расходимости, поэтому, чтобы оценить роль  $\gamma$  нужно ввести регуляризацию по импульсу. В этом разделе, мы хотим оценить вклад, а не проводить полное вычисление. Поэтому, в качестве такой регуляризации выберем обрезание с некоторой константой  $\Lambda$ . Тогда значения каждой диаграммы

могут быть легко получены:

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1} &= -\frac{g^2}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} dk \int_{|q|<\Lambda} dq \int_{-\infty}^{\infty} dt \theta(-t) (2n(k) + 1)(2n(q) + 1) \cdot \\ &\exp\left(\frac{\gamma |t| (4\mu - m\hbar^2 (k^2 + q^2)) + mt\hbar^2 (k - q)(\gamma k - (\gamma + 2i)q) - 2(\gamma + i)\mu t}{2\hbar}\right) \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 2} &= -\frac{g^2}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} dk \int_{|q|<\Lambda} dq \int_{-\infty}^{\infty} dt \theta(-t) (2n(q) + 1)(2n(k - q) + 1) \cdot \\ &\exp\left(\frac{\gamma |t| (4\mu - m\hbar^2 (k^2 - 2kq + 2q^2)) + t (m\hbar^2 (\gamma k^2 - 2ikq + 2iq^2) - 2(\gamma + i)\mu)}{2\hbar}\right) \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 3} &= -\frac{g^2}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} dk \int_{|q|<\Lambda} dq \int_{-\infty}^{\infty} dt \theta(-t) \cdot \\ &\exp\left(\frac{t ((-3\gamma - i)\mu + m\hbar^2 (\gamma k^2 - (\gamma + i)kq + (\gamma + i)q^2))}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (1.61)$$

Несколько одинаковых вкладов сокращаются и затем мы получаем следующее выражение(в фурье представлении ):

$$\begin{aligned} \Sigma_{\eta+\xi}^{(2)} &= \text{Diagram 1} + \frac{1}{2} \text{Diagram 2} + \frac{1}{2} \text{Diagram 3} = \\ &= -\frac{g^2}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} dk \int_{|q|<\Lambda} dq \int_0^{\infty} \exp\left[-i\left(\frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar(k-q)^2}{2m} - \frac{\mu}{\hbar}\right)t\right] \cdot \\ &\cdot \left[n[q] - \frac{1}{2}n[k][n[k-q] + n[k][n[q]]\right] \end{aligned} \quad (1.62)$$

Для простоты, выражения представлены на нулевом внешнем импульсе и частоте соответственно. Существование затухания гарантируется неисчезанием

реальной части этого выражения. Используя следующее выражение можно получить:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} dt \exp \left[ -i \left( \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar(k-q)^2}{2m} - \frac{\mu}{\hbar} \right) t \right] = \\
& = -i \left[ \left( \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar(k-q)^2}{2m} - \frac{\mu}{\hbar} \right) t \right]^{-1} + \\
& + \pi \delta \left( -i \left( \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar(k-q)^2}{2m} - \frac{\mu}{\hbar} \right) t \right)
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Можно заметить, что первый член из правой части (1.63) ведёт к расходимости по  $\Lambda$  мнимой части (1.62), однако второй член из этого выражения даёт положительную сходящуюся вещественную часть  $\Sigma_{\eta+\xi}$ . Тогда матрица  $D^{-1}$  треугольна и вот почему:

$$\det D^{-1} = - \det D_{\xi+\xi}^{-1} \det D_{\xi+\eta}^{-1} \tag{1.64}$$

Нули этого детерминанта дают квазичастичный спектр системы. Может быть показано, что среди нулей этого выражения существуют комплексные, что является прямым признаком наличия затухания в системе. Также это будет частично затронуто при ренормировке модели.

## Глава 2. ИК эффективная теория. Вычисление $z$ индекса

### 2.1 ИК эффективная теория

Мы собираемся исследовать критическое поведение Бозе системы в окрестности  $\lambda$ -точки с помощью метода ренормализационной группы. Основные расходимости, возникающие в таком роде переходов являются инфракрасные расходимости, поэтому для его описания необходимо построение теории в которой отброшены все ИК несущественные члены. Для ренормгруппового анализа необходимо построить эффективную крупномасштабную модель (волновой вектор  $k \rightarrow 0$ ) с вполне определенными каноническими размерностями полей и параметров. Эффективная модель фазового перехода второго рода должна принимать во внимание длинноволновые флуктуации, которые играют первостепенную роль в окрестности критической точки, в которой корреляционный радиус  $r_c$  стремится к бесконечности. Вот почему, все ИК несущественные вклады в такой модели должны быть отброшены. Чтобы определить, какие вклады являются ИК-несущественными требуется сосчитать канонические размерности модели [2]. Для того чтобы это было возможным, пропагаторы должны обладать свойством обобщенной однородности. В окрестности критической точки среднее значение чисел заполнения  $\bar{n}(p)$  содержит расходимости в критической области  $p^2 \sim \mu \rightarrow 0$ . Подобное поведение означает, что для больших относительных расстояний  $|x - x'| \rightarrow \infty$  или, что тоже самое, что для малых волновых чисел  $k \rightarrow 0$  выполняется неравенство  $\bar{n} \gg 1$ . Однако, из-за наличия ненулевых температурных сверток  $d$ , пропагаторы для полей модели  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  не удовлетворяют свойству обобщенной однородности. Другими словами, в изначальных переменных определение канонических размерностей затруднено структурой динамических пропагаторов  $\Delta + d_{DD}$  и  $\tilde{D} + d_{DD}$  в которых температурная свертка  $d_{DD}$  дает ведущий вклад в каноническую размерность в ИК пределе, что ведет к потере динамики модели. Ситуация меняется кардинальным образом при переходе к новым полям  $\eta, \eta^+, \xi, \xi^+$  из (1.46). Пропагаторы в (1.47) обладают свойством обобщенной однородности и единственное упрощение, которое необходимо сделать, это рассмотреть поведение пропагатора  $\Delta_{reg}^K$  из (1.47), в окрестности критической точки.

В этой окрестности нерегуляризованная функция Келдыша есть:

$$\Delta_{IR}^K(\omega, k) = \frac{4\pi T_C \delta(\omega - \omega(k))}{\hbar \omega(k)}, \quad (2.1)$$

где  $T_C$  критическая температура в энергетических единицах. Этот пропагатор конечно обладает обобщенной однородностью по частоте и волновым числам с канонической размерностью  $-4$  при следующих растяжениях:

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \lambda^2 \omega \\ k &\rightarrow \lambda k \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вот почему, подобный пропагатор может быть использован, чтобы получить канонические размерности регуляризованных пропагаторов. Ренормгрупповая теория применяется тут для анализа крупномасштабного поведения модели в том же ключе, как и в теории критического поведения и стохастической динамики. Подобный подход основан на тонкой связи между УФ и ИК расходимостях в критической размерности ( в такой называемой логарифмической теории ).

Из первой главы известно, что нерегуляризованные пропагаторы (1.30) не позволяют получить действие модели, в силу того, что соответствующая матрица пропагаторов (1.30) не имеет обратной. Это приводит к тому, что канонические размерности должны считаться с использованием УФ экспоненты один неприводимого графа  $\gamma$  нерегуляризованной модели:

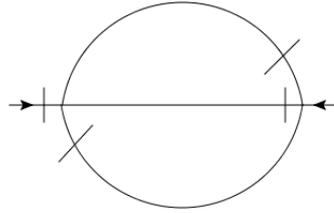
$$\begin{aligned} d_\gamma = d + 2 + (d - 4)V_1 + (d - 4)V_2 + dV_3 + dV_4 - \frac{d + 2}{2}N_{\eta^+} - \\ - \frac{d + 2}{2}N_\eta - \frac{d - 2}{2}N_{\xi^+} - \frac{d - 2}{2}N_\xi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $V_i$  число вершин  $i$  ( помеченных согласно (1.49) ) в один неприводимых графах и  $N_{\eta^+}, N_\eta, N_{\xi^+}, N_\xi$  число внешних аргументов соответствующих полям  $\eta^+, \eta, \xi^+, \xi$ . Используя (2.3) можно найти канонические размерности полей в критической размерности модели  $d_c$ . Более точно:

$$\begin{aligned} d_\xi &= \frac{d}{2} - 1 \\ d_{\xi^+} &= \frac{d}{2} - 1 \\ d_\eta &= \frac{d}{2} + 1 \\ d_{\eta^+} &= \frac{d}{2} + 1 \\ d_c &= 4 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Кроме того, используя результаты выше, можно заключить, что канонические размерности вершин  $V_3, V_4$  в (1.49) строго положительные, поэтому отбрасывание их не влияет на ИК (инфракрасное) поведение [19].

Однако, связь между УФ и ИК расходимостями не так очевидна в регуляризированной модели. Чтобы прояснить этот факт, рассмотрим двухпетлевую ведущую поправку к одной неприводимой функции  $\Gamma_{\eta+\eta}$  с учетом постоянного фактора затухания  $\gamma$ . Единственная двухпетлевая диаграмма, которая дает вклад в  $\Gamma_{\eta+\eta}$  может быть представлена следующим образом:



(2.5)

Диаграмма содержит три регуляризованные келдышевские функции. В представлении Фурье этот пропагатор имеет следующий вид:

$$\Delta_{IRreg}^K(\omega, k) = \frac{4\gamma}{T_C} \hbar \omega(k) [(\omega - \omega(k))^2 + \gamma^2] \quad (2.6)$$

Отбрасывая несущественные коэффициенты мы получаем (здесь и далее  $\gamma^i$  обозначает граф  $\gamma$  с нулевыми внешними импульсами и частотами, где индекс обозначает число петель):

$$\gamma_{\eta+\eta}^{(2)} \sim \gamma \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega(k)\omega(q)\omega(k+q)} \frac{1}{(\omega(k) + \omega(q) - \omega(k+q))^2 + 9\gamma^2} \quad (2.7)$$

Согласно формальному счету расходимостей, Фурье интеграл дающий вклад в  $\Gamma_{\eta+\eta}$  имеет размерность равную:

$$d_\gamma = 2(d - 4) \quad (2.8)$$

Однако, в регуляризированной модели всё немного иначе. В критическом окрестности химический потенциал стремится к нулю, что ведет к тому, что  $\omega(k) \sim \frac{\hbar k^2}{2m}$ . В этом случае, интеграл (2.7) УФ сходится для размерностей  $d < 5$  и для неё зависимость коэффициента затухания  $\gamma$  может быть получена масштабированием:

$$\gamma_{\eta+\eta}^{(2)} \sim \gamma^{d-4} \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega(k)\omega(q)\omega(k+q)} \frac{1}{(\omega(k) + \omega(q) - \omega(k+q))^2 + 9} \quad (2.9)$$

Правая часть выражения (2.9) показывает, что предел  $\gamma \rightarrow 0$  расходится в случае  $d < 4$ . Это сигнализирует о том, что в модели присутствуют ИК расходимости в размерности меньше четырех. В тоже время, УФ поведение соответствующих интегралов отличаются от инфракрасного, что затрудняет напрямую использовать метод ренормализационной группы. Но, принимая во внимание тот факт, что вообще говоря параметр затухания  $\gamma$  произвольный, можно выбрать его таким образом, чтобы скорректировать УФ поведением, сделав его пригодным для использования метода ренормализационной группы.

В критической области временное поведение системы характеризуется так называемым критическим замедлением, то есть исчезанием временных производных с ростом волновых чисел. И для того, чтобы принять во внимание это свойство и сохранить свойство ИК регуляризации, связанной с затуханием, необходимо выбрать зависимость затухающего фактора  $\gamma$  от волнового числа в виде  $\gamma \sim k^2$ . С технической точки зрения, этот выбор позволяет применить метод ренормализационной группы для анализа крупномасштабного поведения, потому что он приводит к модели, в которой ИК расходимости возникают в размерности модели, которая является логарифмической для неё. Действительно, выбрав  $\gamma = \alpha \omega(k) \sim k^2$ , где  $\alpha$  положительное число мы получим:

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta+\eta}^{(2)} \sim \gamma \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega(k)\omega(q)\omega(k+q)} \times \\ \times \frac{1}{(\omega(k) + \omega(q) - \omega(k+q))^2 + (\omega(k) + \omega(q) + \omega(k+q))^2 a^2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

вместо (2.9). Теперь размерность этого интеграла равна  $2d - 8$ , которая равна размерности в нерегуляризованной модели. Эта поверхностная степень расходимости соответствует обычному УФ поведению в четырехмерном пространстве, к которому применяется метод ренормализационной группе с размерной регуляризацией. Наконец, УФ и ИК расходимости оказываются связанными, что позволяет применить стандартную технику ренормализационной группы. Выражение (2.10) обладает конечным пределом  $\alpha \rightarrow 0$  (это будет показано позднее) и оно дает вклад, который полностью меняет структуру теории возмущения в функциональном представлении. Суть в том, что из набора изначальных пропагаторов нельзя получить квадратичную часть действия, так как келдышевская функция  $\Delta_{reg}^K(\gamma = 0)$  является решением однородных полевых уравнений движения и поэтому ядро соответствующего оператора в свободной части действия

не является нулевым. Это ведет к тому, что обратный оператор не существует. Однако, двухпетлевая поправка к келдышевской функции сохраняет форму регуляризованной функции, в которой  $\alpha$  в числителе заменяется конечной величиной порядка  $g^2$ . С использованием этой поправки, набор пропагаторов (1.30) может быть однозначно обращен, что дает нам хорошо определенное действия в функциональном интеграле (1.52).

Также можно заметить, что без коэффициента затухания  $\gamma$  действие модели симметрично относительно следующей замены полей:

$$\begin{aligned}\eta &\rightarrow \xi \\ \eta^+ &\rightarrow \xi^+ \\ \xi &\rightarrow \eta \\ \xi^+ &\rightarrow \eta^+, \end{aligned} \tag{2.11}$$

так как в действии нет члена формы  $\eta^+\eta$ . Введением параметра затухания  $\gamma$  тем не менее нарушает эту симметрию и позволяет ввести различные канонические размерности согласно размерному счету выражения (2.3) для полей прямо из действия.

Для простоты, мы будем работать в безмассовой схеме, чтобы исследовать критическое поведение системы. Это означает, что  $\mu = 0$  и это ведет к упрощению выражения для среднего числа чисел заполнения  $\bar{n}(k) \approx \frac{2mT_C}{k^2}$ . Дополнительные параметры  $T_C$  и  $\hbar$  могут быть убраны из пропагаторов растяжением координат, времени и полей. Это приводит к следующему виду пропагаторов ИК эффективной модели:

$$\begin{aligned}\langle \xi(t, k) \xi^+(t', -k) \rangle_0 &= \Delta_{IRreg}^K(t, k) = \frac{2}{k^2} e^{-iuk^2(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|} \\ \langle \eta(t, k) \eta^+(t', -k) \rangle_0 &= 0 \\ \langle \xi(t, k) \eta^+(t', -k) \rangle_0 &= \Delta_{reg}(t, k) = \theta(t - t') e^{-iuk^2(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|} \\ \langle \xi(t, k) \eta^+(t', -k) \rangle_0 &= -\tilde{\Delta}_{reg}(t, k) = -\theta(t' - t) e^{-iuk^2(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

с безразмерными параметрами  $\alpha$  и  $u$ . Важно отметить, что пропагаторы содержат в себе затухающие факторы. Согласно проведенному анализу из раздела 1.3, в нерегуляризованной модели затухание возникает, как результат двухпетлевой поправки, и оно регуляризует возникающие ИК расходимости в диаграммах. Это ведет к тому, что формально малый параметр  $\sim g^2$  появляется в знаменателе в петлевой поправки. Это ведет к затруднениям при

вычислениях по теории возмущений. Чтобы избежать подобных проблем, введем затухающие вклады в пропагаторы с самого начала. Параметр затухания  $\alpha$  можно рассматривать как дополнительный регуляризатор, чья малость никак не связана с параметром разложения  $g$ . С помощью этого параметра становится возможным построить теорию возмущений очень простым образом. Значение  $\alpha = 0$  соответствует изначальной нерегуляризованной модели, но как будет показано в дальнейшем, ненулевой  $\alpha$  генерируется в ходе процедуры ренормировки теории. С технической точки зрения мы имеем дело с так называемой генерацией вкладов добавленных в исходное действие ренормируемой модели заранее, чтобы сделать модель ренормируемой. Также полезно вспомнить, что затухающий член был выбран в форме  $\alpha k^2$ , из-за того, что мы работаем в безмассовой теории и нам требуется, что канонические размерности эффективной ИК модели и связь между УФ и ИК расходимостями сохранялась в регуляризованной модели.

Обращение матрицы пропагаторов из (2.12) позволяет нам получить действие ИК эффективной модели (знаки интегралов подразумеваются и опущены здесь и в дальнейшем, для простоты):

$$S = -4\alpha\eta^+\eta + \eta^+ \left[ -\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(iu + \alpha) \right] \xi + \xi^+ \left[ -\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(iu - \alpha) \right] \eta - \frac{ig_1}{2}\eta^+\xi^+\xi\xi - \frac{ig_2}{2}\xi^+\xi^+\eta\xi, \quad (2.13)$$

где  $g_1 = g_2 = g \frac{\hbar}{T_C} \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_T} \right)^d$ . Здесь  $\lambda_T$  тепловая длина волны де Бройля вычисленная для критической температуры  $T_C$ . В действии (2.13) константы взаимодействия  $g_1, g_2$  равны только в нерегуляризованной (затравочной) теории. Значки у этих констант показывают лишь то, что соответствующие вершины взаимодействия  $\eta^+\xi^+\xi\xi$  and  $\xi^+\xi^+\eta\xi$  имеют разные константы ренормировки.

Модель (2.13) была сконструирована для решения задач стохастической динамики и вот поэтому, удобно перейти к обозначениям принятым в стохастических теориях, а именно, перейдем от множителя  $e^{iS}$  в функциональном интеграле, который принято писать в квантовой механике, к  $e^{-S}$ , который используется в статистической физике. Другими словами перепишем (2.13) в

следующем виде:

$$S = 4\alpha\eta^+\eta + \eta^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(-iu - \alpha) \right] \xi + \xi^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(-iu + \alpha) \right] \eta + \frac{ig_1}{2}\eta^+\xi + \xi\xi + \frac{ig_2}{2}\xi^+\xi + \eta\xi. \quad (2.14)$$

В динамических моделях принято разделять типы размерностей в соответствии с тем относятся они к переменным имеющим размерность время или к переменным имеющим размерность пространства. Принято считать, что размерности времени  $t$  и пространства  $x$  равны:  $d_\omega^\omega = 1$ ,  $d_x^x = -1$ ,  $d_k^k = 1$ ,  $d_t^t = -1$ ,  $d_t^k = d_k^t = 0$ . Они определяют полную размерности, согласно скейлинговым свойствам параболического дифференциального оператора в действии (2.14):

$$d_Q = d_Q^k + 2d_Q^\omega \quad (2.15)$$

С помощью этого соотношения становится возможным вычислить канонические размерности полей и параметров принадлежащих модели с действием (2.14):

$$\begin{aligned} d_\eta^t + d_{\eta^+}^t + 1 &= 0 \\ d_{\eta^+}^t + d_\xi^t &= 0 \\ d_{\xi^+}^t + d_\eta^t &= 0 \\ d_g^t + 2d_\xi^t + d_{\xi^+}^t + d_{\eta^+}^t + 1 &= 0 \\ d_{\eta^+}^k + d_\xi^k - d &= 0 \\ d_\eta^k + d_{\xi^+}^k - d &= 0 \\ d_{\eta^+}^k + d_\eta^k - d &= 0 \\ d_g^k + 2d_\xi^k + d_{\xi^+}^k + d_{\eta^+}^k - d &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

В итоге, канонические размерности полей и параметров могут быть сведены в одну таблицу:

Таблица 1 — Канонические размерности полей и параметров.

	$\xi, \xi^+$	$\eta, \eta^+$	$\alpha$	$g$
$d_Q^\omega$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
$d_Q^k$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	0	$-d$
$d_Q$	$\frac{d}{2} - 1$	$\frac{d}{2} + 1$	0	$4 - d$

## 2.2 Мультипликативная ренормировка теории

ИК эффективная модель с действием (2.14) рассматривается в пространстве размерности  $4 - \varepsilon$ . УФ поверхностный индекс расходимости 1-неприводимых функций Грина  $\Gamma$  определяется посредством УФ показателя сосчитанным в критической размерности  $d_c = 4$ , то есть:

$$d_\Gamma^* = 6 - 3N_{\eta^+} - 3N_\eta - N_{\xi^+} - N_\xi \quad (2.17)$$

Структура действия (2.14) дополняет это равенство дополнительным соотношением  $N_{\eta^+} + N_{\xi^+} = N_\eta + N_\xi$ . Используя теорему о петлях из раздела 1.2 можно увидеть, что не существует 1-неприводимых функций (и контрчленов) без полей  $\eta, \eta^+$  таких как  $\Gamma_{\xi+\xi}, \Gamma_{\xi+\xi+\xi\xi}$  и  $\Gamma_{\xi+\xi+\xi+\xi\xi\xi}$ . Вот почему, расходящиеся графы целиком содержатся в следующих 1-неприводимых функциях:  $\Gamma_{\xi+\eta}, \Gamma_{\eta+\xi}, \Gamma_{\eta+\eta}, \Gamma_{\eta+\xi+\xi\xi}$  и  $\Gamma_{\xi+\xi+\xi\eta}$ . Следовательно, функции Грина модели с действием (2.14) могут быть ренормированы посредством подсчета степеней, кроме этого никаких новых контрчленов отличных по структуре от (2.14) не возникает. Итого ренормированное действие может быть записано в следующей форме:

$$S = Z_0 \eta \eta^+ + \eta^+ \left( Z_1 \frac{\partial}{\partial t} + Z_2 \nabla^2 \right) \xi + \xi^+ \left( Z_3 \frac{\partial}{\partial t} + Z_4 \nabla^2 \right) \eta + \\ + Z_5 \eta^+ \xi^+ \xi \xi + Z_6 \xi^+ \xi^+ \eta \xi \quad (2.18)$$

с комплексными постоянными  $Z_1, \dots, Z_6$ . Так как  $Z_5$  и  $Z_6$  не являются тождественно равными величинами, нам приходится рассматривать константы ренормировки взаимодействия  $g_1, g_2$ , как абсолютно разные величины. Кроме того, затравочные константы взаимодействия были чисто вещественными числами, здесь же, из-за того, что константы ренормировки  $Z_1, \dots, Z_6$  комплексные числа, мы вынуждены трактовать константы ренормировки взаимодействия как комплексные величины.

Под действием комплексного сопряжения, исходное действие (2.13) подчиняется следующей симметрии (как было упомянуто ранее,  $\alpha$  строго положительное число):

$$S(\eta^+, \eta, \xi^+, \xi, g_1, g_2) = S^*(-\eta^+, -\eta, \xi^+, \xi, g_2^*, g_1^*) = S(\eta^+, \eta, -\xi^+, -\xi, g_2^*, g_1^*) \quad (2.19)$$

Здесь подразумевается интегрирование по частям и отбрасывание граничных вкладов, что возможно в силу хорошего убывания полей теории. Подобная симметрия накладывает определенные соотношения на константы ренормировки,

а именно мы имеем следующую систему на константы ренормировки:

$$\begin{aligned}
Z_0(g_1, g_2) &= Z_0^*(g_2^*, g_1^*) \\
Z_1(g_1, g_2) &= -Z_3^*(g_2^*, g_1^*) \\
Z_2(g_1, g_2) &= -Z_4^*(g_2^*, g_1^*) \\
Z_5(g_1, g_2) &= -Z_6^*(g_2^*, g_1^*)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Также можно заметить остатки калибровочной симметрии в (2.14). Другими словами, действие обладает следующей очевидной симметрией:

$$\begin{aligned}
\xi &\rightarrow \xi e^{ic} \\
\xi^+ &\rightarrow \xi^+ e^{-ic} \\
\eta &\rightarrow \eta e^{ic} \\
\eta^+ &\rightarrow \eta^+ e^{-ic}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

с некоторой константой  $c$ . Эта симметрия позволяет выбрать одно из полей сугубо вещественным. Для простоты дальнейшего счета мы подразумеваем, что константы ренормировки полей  $\eta, \eta^+$  сугубо вещественные числа.

Двухпетлевой вклад в  $Z_0$  можно сосчитать в схеме MS (схема минимальный вычитаний) и оказывается, что он имеет конечный предел при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 4\alpha - \frac{g_1^2}{64\pi^4(u^2 + \alpha^2)\varepsilon} \left( \pi u + 2u \arctan \left( \frac{u}{4\alpha} - \frac{3\alpha}{4u} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha \log \left[ \frac{4096\alpha^8}{(u^2 + \alpha^2)(u^2 + 9\alpha^2)^3} \right] \right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

где подразумевается, что  $g_2 = g_1$ . Данное выражение или эквивалентное ему может быть получено несколькими способами. Что важно, это выражение показывает, что  $Z_0$  стремится к конечной величине в пределе  $\alpha \rightarrow 0$ , Этот факт демонстрирует, что  $\alpha$  генерируется в ходе процесса ренормировки. Гипотеза о связи между диссипацией в гидродинамическом пределе и влияние жестких мод на мягкие здесь обосновывается тем фактом, что параметр затухания  $\alpha$  генерируется здесь в ходе УФ ренормировки. Можно также сказать, что УФ ренормировка является методом при помощи которого можно учесть влияние жестких мод на мягкие в смысле преобразования Каданова. Базовое действие (2.14) содержит в себе  $\alpha$  и  $\nabla^2$ . Сравнивая его с классическими динамическими стохастическими моделями можно трактовать коэффициент  $\alpha$ , как кинетический коэффициент. Чтобы выделить его явно в действии перед оператором

Лапласа введем новый заряд  $u$ . В этой модели,  $u$  играет роль непертурбативного заряда, который обычно появляется в моделях стохастической динамики. Масштабируя параметр  $u \rightarrow \alpha u$  получаем следующий вид ИК-эффективного действия модели:

$$S = 4\alpha\eta^+\eta + \eta^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(-iu\alpha - \alpha) \right] \xi + \xi^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(-iu\alpha + \alpha) \right] \eta + \frac{ig_1\alpha}{2}\eta^+\xi^+\xi\xi + \frac{ig_2\alpha}{2}\xi^+\xi^+\eta\xi, \quad (2.23)$$

В этом выражении, у нас есть две разные константы взаимодействия. Как было замечено ранее, они были сделаны различными только потому, что они ренормируются по-разному. Тем не менее только гиперповерхность  $g_1 = g_2^*$  позволяет сделать ренормировку мультипликативной. Необычные расходимости рассмотренные в разделе 1.2 проявляются в виде полюсов по  $\alpha$ . Именно поэтому, член с  $\alpha$  выделен перед зарядами  $g_1$  и  $g_2$  в формуле (2.23).

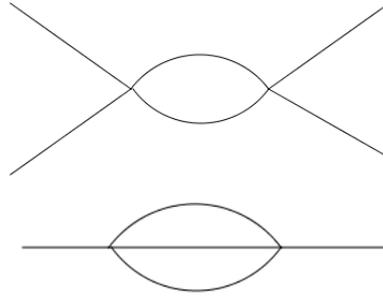
Симметричные равенства (2.20) позволяют заключить, что действие (2.18) может быть мультипликативно ренормируемым при помощи констант ренормировки полей и параметров  $Z_\eta, Z_{\eta^+}, Z_\xi, Z_{\xi^+}, Z_{g_1}, Z_\alpha, Z_u$ . Кроме того, в силу того, что параметры  $\alpha$  и  $u$  вещественные, соответствующие константы ренормировки  $Z_\alpha$  и  $Z_u$  также вещественные величины. Эти константы ренормировки связаны системой уравнений, которая будет решаться итеративно:

$$\begin{aligned} 4\alpha Z_\alpha Z_{\eta^+} Z_\eta &= Z_0 \\ Z_{\eta^+} Z_\xi &= Z_1 \\ Z_\eta Z_{\xi^+} &= Z_1^* \\ iZ_\alpha Z_u Z_{\eta^+} Z_\xi \alpha u + Z_{\eta^+} Z_\xi Z_\alpha \alpha &= Z_2 \\ \frac{ig_1\alpha}{2} Z_{\eta^+} Z_\xi^2 Z_{\xi^+} Z_{g_1} &= Z_5 \end{aligned} \quad (2.24)$$

В MS схеме, константы ренормировки  $Z_\alpha, Z_\eta, Z_{\eta^+}, Z_\xi, Z_{\xi^+}, Z_{g_1}, Z_{g_2}$  являются суммой единицы и членов имеющих полюса по  $\epsilon$ . В этом случае, система уравнений (2.24) может быть однозначно разрешена на рассматриваемой гиперповерхности  $g_1 = g_2^*$ . Чтобы избавиться от комплексных параметров, разделим вещественные и мнимые части зарядов. Другими словами  $g_1 = g_{1r} + ig_{1i}$  и  $g_2 = g_{2r} + ig_{2i}$ .



равны нулю. Значит, существует лишь два типа топологий диаграмм, которые дают вклад в константы ренормировки, а именно:



(2.28)

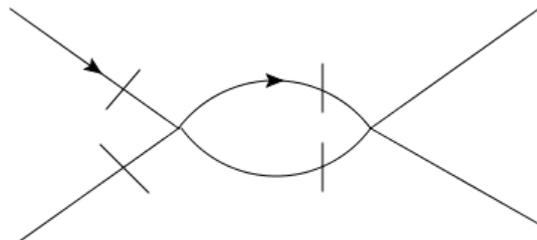
Первые из них мы будем называть "рыбками" а вторые "арбузами" . "Рыбки" очевидно дают вклад в соответствующие 1-неприводимые функции  $\Gamma_{V_i}$ , где  $V_i$  вершины из (2.53), то есть  $V_1 = \eta^+\xi^+\xi\xi$  или  $V_2 = \eta\xi\xi^+\xi^+$ . "Рыбки" могут быть вычислены без всякие проблем. Суммарно существует шесть диаграмм подобной топологии, которые приведены в таблице ниже:

Таблица 2 – FishDiagrams

№	Diagram	s.c	$Z_i$	value
1		$\frac{1}{2}$	$Z_5$	$\frac{-g_1^2}{8\alpha\pi^2(1+iu)\epsilon}$
2		1	$Z_5$	$\frac{-g_1^2}{8\pi^2\alpha\epsilon}$
3		1	$Z_5$	$\frac{g_1g_2}{8\pi^2\epsilon}$
4		$\frac{1}{2}$	$Z_6$	$\frac{g_1^2}{8\pi^2(1+iu)\epsilon}$
5		1	$Z_6$	$-\frac{g_1g_2}{8\pi^2\epsilon}$
6		1	$Z_6$	$\frac{g_1g_2}{8\pi^2\epsilon}$

Диаграммы изображены во втором столбце, в третьем столбце приведены симметричные коэффициенты, четвертый столбец показывает в какую константу ренормировки вносит вклад данная диаграмма, и наконец, пятый столбец дает значение полюсной части диаграммы. Произведение значения в пятом столбце на симметричный коэффициент из третьего столбца даёт вклад диаграммы в контрчлен ренормированного действия.

Используя симметрию (2.20) можно снизить кол-во вычислений, для этого достаточно найти значение первые трех диаграмм и воспользоваться симметрий. В действительности можно вычислить либо  $Z_5$  и через него найти  $Z_6$ , либо наоборот. Для полноты счета, мы вычислим все шесть диаграмм, но в дальнейшем будем пользоваться указанной выше симметрией. Для примера рассмотрим первую диаграмму из таблицы выше (диаграммы данной топологии вычисляются на нулевом внешнем импульсе и частоте):



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{2\theta(-t)e^{-2\alpha k^2|t|+2i\alpha k^2 t u}}{k^2} = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left( -\frac{i}{\alpha k^4(u-i)} \right) = -\frac{i}{8\alpha\pi^2(u-i)\varepsilon} - \frac{i(2-\gamma+\log(4\pi))}{16\alpha\pi^2(u-i)} + O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

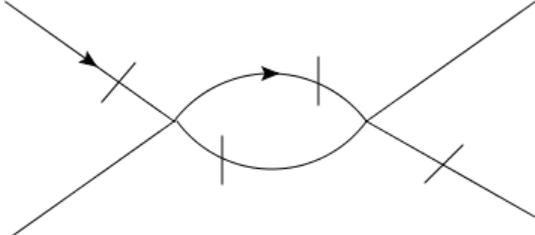
Здесь,  $\varepsilon = 4 - d$ , где  $d$  – размерность пространства. Интегрируя по  $k$  можно воспользоваться стандартным трюком:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left( -\frac{i}{\alpha k^4(u-i)} \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^{-d}} \left( -\frac{i}{\alpha(k^2+m)^2(u-i)} \right) \tag{2.30}$$

и затем воспользоваться справочной формулой:

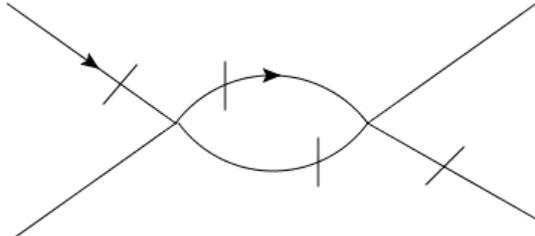
$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} dk (k^2+m)^{-\alpha} = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} m^{d/2-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.31}$$

Другие диаграммы данной топологии могут быть вычислены в таком же стиле:



$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{2\theta(-t)e^{-2ak^2|t|}}{k^2} \right\} = \quad (2.32)$$

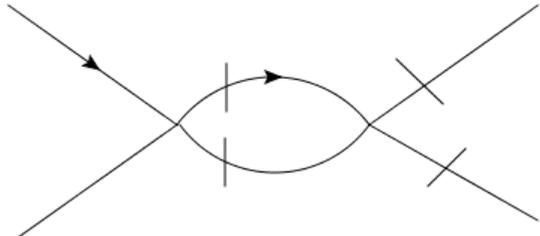
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\alpha k^4} = \frac{1}{8\alpha\pi^2\varepsilon} - \frac{-2 + \gamma - \log(4\pi)}{16\alpha\pi^2} + O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ -\frac{2\theta(-t)e^{-2ak^2|t|}}{k^2} \right\} = \quad (2.33)$$

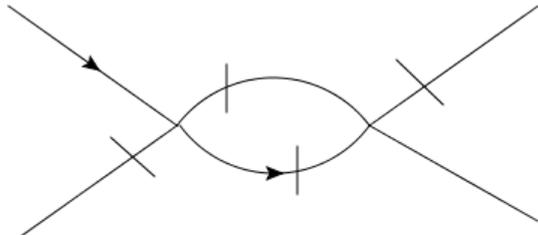
$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\alpha k^4} = \frac{-2 + \gamma - \log(4\pi)}{16\pi^2} - \frac{1}{8\pi^2\varepsilon} + O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0$$

Оставшиеся три диаграммы могут быть получены с использованием симметрии (2.20), тем не менее мы приведем здесь их явное вычисление:



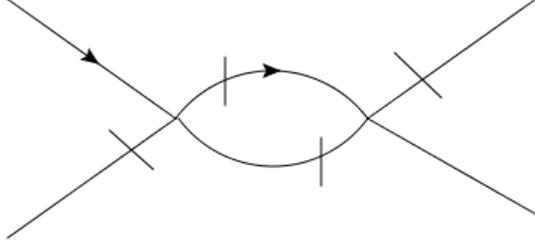
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ -\frac{2\theta(-t)e^{-2\alpha k^2|t| - 2i\alpha k^2 tu}}{k^2} \right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left( -\frac{i}{\alpha k^4(u+i)} \right) = \frac{2 - \gamma + \log(4\pi)}{16\pi^2(-1 + iu)} - \frac{i}{8\pi^2(u+i)\varepsilon} + O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.34)$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{2\theta(-t)e^{-2ak^2|t|}}{k^2} \right\} = \quad (2.35)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\alpha k^4} = \frac{1}{8\alpha\pi^2\varepsilon} - \frac{-2 + \gamma - \log(4\pi)}{16\alpha\pi^2} + O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ -\frac{2\theta(-t)e^{-2ak^2|t|}}{k^2} \right\} = \quad (2.36)$$

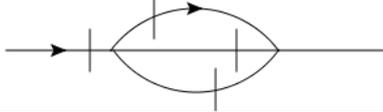
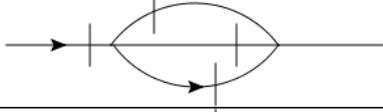
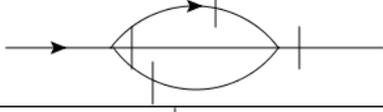
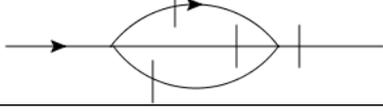
$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\alpha k^4} = \frac{-2 + \gamma - \log(4\pi)}{16\pi^2} - \frac{1}{8\pi^2\varepsilon} + O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0$$

Легко увидеть, что значения этих трех диаграмм, могут быть получены из первых трех с использованием симметрии (2.20) действия (2.53). Итого, все однопетлевые диаграммы дающие вклад в  $\Gamma_{V_i}$  были успешно посчитаны. Значит, в лидирующем порядке теории возмущений  $Z_5$  имеет следующий вид:

$$Z_5 = \frac{ig_1\alpha}{2} - \frac{g_1^2\alpha}{16(1+iu)\pi^2\varepsilon} - \frac{g_1^2\alpha}{8\pi^2\varepsilon} + \frac{g_1g_2\alpha}{8\pi^2\varepsilon} \quad (2.37)$$

Чтобы получить константы ренормировки  $Z_0, Z_1, Z_2$  следующие диаграммы должны быть вычислены:

Таблица 3 — Melon Diagrams

№	Diagram	s.c	$Z_i$	value
1		$\frac{1}{2}$	$Z_0$	$\frac{g_1g_2\alpha M_1}{4^3\pi^4\varepsilon}$
2		1	$Z_1, Z_2$	$\frac{g_1^2 M_3}{2^7\pi^4\varepsilon}, \frac{\alpha(u+2i)g_1^2}{2^8\pi^4\varepsilon(u+3i)}$
3		1	$Z_1, Z_2$	$\frac{g_1g_2 M_2}{2^8\pi^4\varepsilon}, \frac{-\alpha g_1g_2(u+i)}{2^8(u+3i)\pi^4\varepsilon}$
4		$\frac{1}{2}$	$Z_3, Z_4$	c.j
5		1	$Z_3, Z_4$	c.j

Здесь вклад в  $Z_1, Z_3$  даются коэффициентов перед  $i\omega$  а вклады в  $Z_2, Z_4$  перед  $k^2$  в тейлоровском разложении диаграмм, как функций внешних импульсов и частот. Значение этих диаграмм может быть вычислено несколькими способами.

Наиболее стандартный подход к вычислению многопетлевых диаграмм это метод известный под названием Sector Decomposition(SD) метод, тем не менее это чисто численный метод который не позволяет получить диаграммы, как функции непертурбативного заряда. Но существует метод [21], который позволяет получать точные ответы для диаграмм определенной топологии. Двухпетлевые и трехпетлевые диаграммы модели (2.53) обладают необходимой топологией, чтобы применить этот метод. Мы кратко опишем SD метод, который позволяет получать ответы в независимости от топологии диаграммы. Однако метод из [21] позволяет получать для данных диаграмм ответы в виде аналитических функции от непертурбативного заряда  $u$ .

## 2.4 Метод Sector Decomposition

Вычисление диаграмм методом Sector Decomposition(SD) основано на следующем факте, который может быть доказан непосредственно. Более подробно, рассмотрим простую модель  $\varphi^4$  с затравочным действием:

$$S(\varphi) = \int dx \left[ \frac{(\partial\varphi)^2}{2} + \frac{\tau\varphi^2}{2} + \frac{g\varphi^4}{4!} \right] \quad (2.38)$$

Тогда типичное выражение для диаграмм данной модели может быть записано как:

$$J_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int dk_1 \cdots dk_n \prod_{i=1}^N E_i^{-1} \quad (2.39)$$

Здесь  $n$  число петель в диаграмме,  $N$  число линий в диаграмме, а  $E_i = k_i^2 + \tau$  стандартный пропагатор с импульсом  $k$  модели типа  $\varphi^4$ . Этот импульс есть линейная комбинация импульсов интегрирования. Вот почему, данное выражение может быть преобразовано в следующую форму:

$$J_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int dk_1 \cdots dk_n \prod_{i=1}^l E_i^{-\lambda_i} \quad (2.40)$$

где  $l$  число разных энергий и  $\lambda_i$  число линий несущих эту энергию. Знаменатель выражения выше является произведением квадратичных форм по

отношению к импульсам интегрирования. Используя Фейнмановское представление, подобное произведение может быть сведено к одной квадратичной форме с интегрирования по некоторым дополнительным параметрам  $x_i$ :

$$E_1^{\lambda_1} \cdots E_n^{-\lambda_l} = \frac{\Gamma(\sum_{k=1}^l \lambda_k)}{\prod_{i=1}^l \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \frac{\delta(\sum_{k=1}^l x_k - 1) \prod_{k=1}^l x_k^{\lambda_k - 1}}{\left[ \sum_{k=1}^l E_k x_k \right]^{\sum_{k=1}^l \lambda_k}} \quad (2.41)$$

Знаменатель этого выражения есть квадратичная форма импульсов интегрирования  $k_i$ . Вот почему, подобный интеграл может быть вычислен по справочной формуле:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int dk_1 \cdots dk_n \frac{1}{(a_{ij} k_i k_j + b_i k_i + c)^\alpha} = \frac{(4\pi)^{-\frac{dn}{2}} \Gamma(\alpha - \frac{dn}{2}) (\det(u))^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha) (c - (a^{-1})_{ij} b_i b_j)^{\alpha - \frac{dn}{2}}}, \quad (2.42)$$

где  $\alpha = \sum \lambda_i$ , проблема вычисления соответствующих диаграмм была сведена к более простой, на первый взгляд проблеме, интегрирования по фейнмановским параметрам  $x_i$ .

Размерный анализ модели (2.38) показывает, что единственный расходящийся тип диаграмм, это так называемые четырехвостки и двухвостки. Их общий вид дается следующим выражением:

$$I_n^{(4)} = \frac{\Gamma(\frac{n\varepsilon}{2}) \Gamma^n(2 - \frac{\varepsilon}{2})}{2^n \prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i - 1} \delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{(\det x)^{2 - \frac{\varepsilon}{2}}} \quad (2.43)$$

$$I_n^{(2)} = \frac{\Gamma(\frac{n\varepsilon}{2}) \Gamma^n(2 - \frac{\varepsilon}{2})}{2^n \prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{C \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i - 1} \delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{(\det x)^{3 - \frac{\varepsilon}{2}}},$$

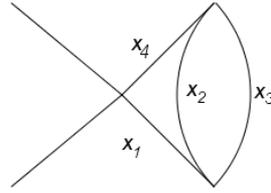
где  $n$  обозначает число петель в диаграмме,  $C$  и  $\det x$  определяются следующими формулами:

$$C = (a_{ij}^{-1} b_i b_j - c) \sum_{i=1}^n E_i x_i = 1 + cp^2 + 2b_i(p, k_i) + a_{ij}(k_i, k_j), \quad (2.44)$$

где  $p$  – внешний импульс, а  $(\square, \square)$  обозначает скалярное произведение между соответствующими векторами. Структура величин  $C$  и  $\det x$  может быть получена без прямого вычисления диаграмм. Более подробно:  $\det x$  для  $n$ -петлевой

диаграммы равен сумме всевозможных произведений фейнмановских параметров с числом слагаемых равным числу петель в диаграмме из которых исключены запрещенные комбинации. Запрещенные слагаемые имеют вид законов сохранения импульса, который возникает в диаграммах. Величина  $S$  равна сумме всех возможных комбинаций фейнмановских параметров с числом слагаемых на один больше чем число петель, за исключением произведений запрещенных законами сохранения. Для примера рассмотрим следующую диаграмму: здесь  $n = 2$  и всего имеется четыре фейнмановских параметров.

Рисунок 2.1 — Двухпетлевая диаграмма теории  $\phi^4$ .



Сумма всевозможных их произведений выглядит как  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$ . В диаграмме есть несколько запрещенных термов, а именно:  $x_1x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_3$ . Среди них важен только  $x_1x_4$ . Используя эти правила, можно получить выражение для детерминанта диаграммы:

$$\det x = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \quad (2.45)$$

Подобные правила могут быть обобщены для действия отличных от (2.38). Теперь продемонстрируем метод SD на примере диаграммы 2.1. Её фейнмановское представление может быть получено с использованием (2.43) и оно имеет вид:

$$J_0 = \frac{1}{4} \Gamma(\varepsilon) \Gamma^2\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) J$$

$$J = \left[ \prod_{i=1}^4 \int_0^1 dx_i \right] \frac{\delta(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)}{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)^{2 - \frac{\varepsilon}{2}}} \quad (2.46)$$

Здесь  $d = 4 - \varepsilon$ ,  $d$  – размерность пространства. Знаменатель может расходиться, когда  $x_1, x_2, x_3$  идут к 0, а  $x_4$  к 1 (включая дельта-функцию) или когда  $x_1, x_2, x_4$  идут к 0 а  $x_3$  к 1 и последняя возможность когда  $x_2, x_3$  и  $x_4$  идут к 0, но  $x_1$  к 1. Эти сингулярности в подинтегральном выражении ведут к расходимости данного интеграла при  $\varepsilon = 0$  и имеют вид полюса по  $\varepsilon$  когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Sector Decomposition метод позволяет извлекать вычеты из соответствующих полюсов в явном виде. Алгоритм состоит из двух шагов. В первом, изначальная зона

интегрирования делится на сектора, где один из фейнмановских параметров объявляется главным и его значение больше чем все остальные. Затем каждый сектор, подходящей заменой, возвращается к единичному кубу. Эти два шага делаются до тех пор, пока сингулярность не выделится в явном виде. Затем вычет при полюсе может быть получен прямым из выражения для диаграммы. Прделаем эти шаги для диаграммы вида 2.43: Первая секторизация и подстановки:

$$\begin{aligned}
& \left[ \prod_{i=1}^4 \int_0^1 dx_i \right] f(x_1, \dots, x_4) = \\
& = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 dx_3 dx_4 f(x_1, \dots, x_4) + \\
& + \int_0^1 dx_2 \int_0^{x_2} dx_1 dx_3 dx_4 f(x_1, \dots, x_4) + \\
& + \int_0^1 dx_3 \int_0^{x_3} dx_1 dx_2 dx_4 f(x_1, \dots, x_4) + \\
& + \int_0^1 dx_4 \int_0^{x_4} dx_1 dx_2 dx_3 f(x_1, \dots, x_4) = \\
& = \int_0^1 dx_1 \prod_{i=2,3,4} d\tilde{x}_i x_1^3 f(x_1, \tilde{x}_2 x_1, \tilde{x}_3 x_1, \tilde{x}_4 x_1) + \\
& + \int_0^1 dx_2 \prod_{i=1,3,4} d\tilde{x}_i x_2^3 f(\tilde{x}_1 x_2, x_2, \tilde{x}_3 x_2, \tilde{x}_4 x_2) + \\
& + \int_0^1 dx_3 \prod_{i=1,2,4} d\tilde{x}_i x_3^3 f(\tilde{x}_1 x_3, \tilde{x}_2 x_3, x_3, \tilde{x}_4 x_3) + \\
& + \int_0^1 dx_4 \prod_{i=1,2,3} d\tilde{x}_i x_4^3 f(\tilde{x}_1 x_4, \tilde{x}_2 x_4, \tilde{x}_3 x_4, x_4) = \\
& = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \tilde{J}_3 + \tilde{J}_4
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Затем мы опять делаем шаг один для каждого  $\tilde{J}_i$ . Другими словами:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_4 f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ & = \tilde{J}_{1,2} + \tilde{J}_{1,3} + \tilde{J}_{2,1} + \tilde{J}_{2,3} + \tilde{J}_{2,4} + \tilde{J}_{3,1} + \tilde{J}_{3,2} + \tilde{J}_{3,4} + \tilde{J}_{4,2} + \tilde{J}_{4,3} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Из-за симметрии диаграммы, можно увидеть следующие соотношения между частями:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{2,3} &= \tilde{J}_{3,2} \\ \tilde{J}_{1,2} &= \tilde{J}_{1,3} \\ \tilde{J}_{1,3} &= \tilde{J}_{4,2} \\ \tilde{J}_{4,2} &= \tilde{J}_{4,3} \\ \tilde{J}_{2,1} &= \tilde{J}_{3,1} \\ \tilde{J}_{3,1} &= \tilde{J}_{2,4} \\ \tilde{J}_{2,4} &= \tilde{J}_{3,4} \end{aligned} \quad (2.49)$$

В силу этих соотношений, существуют только четыре различные величины и результат может быть записан как:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{1,2} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{(1 + x_2 + x_2 x_3 + x_2 x_4)^{-\varepsilon}}{x_2^{1-\frac{\varepsilon}{2}} (1 + x_3 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4)^{2-\frac{\varepsilon}{2}}} \\ \tilde{J}_{2,3} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{(1 + x_1 x_3 + x_3 + x_4 x_3)^{-\varepsilon}}{x_3^{1-\frac{\varepsilon}{2}} (1 + x_1 + x_1 x_3 + x_4 + x_3 x_4)^{2-\frac{\varepsilon}{2}}} \\ \tilde{J}_{2,1} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{(1 + x_1 + x_3 x_1 + x_4 x_1)^{-\varepsilon}}{x_1^{1-\frac{\varepsilon}{2}} (1 + x_3 + x_1 x_3 + x_4 + x_1 x_3 x_4)^{2-\frac{\varepsilon}{2}}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Несложно увидеть, что в (2.50) интегралы имеют сингулярность по одной переменной. В общем случае, после изоляции сингулярностей, могут быть два возможных сценария. Первый из них: если сингулярность имеет вид  $x^{-1+n\varepsilon}$ ,

тогда вычисление вычета в полюса проводится следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-1+n\varepsilon} f(x) dx &= \int_0^1 x^{-1+n\varepsilon} f(x) dx + \int_0^1 x^{-1+n\varepsilon} f(0) dx - \int_0^1 x^{-1+n\varepsilon} f(0) dx = \\
&= \int_0^1 x^{-1+n\varepsilon} f(0) dx + \int_0^1 x^{-1+n\varepsilon} (f(x) - f(0)) dx = \frac{f(0)}{n\varepsilon} + \int_0^1 x^{-1+n\varepsilon} (f(x) - f(0)) dx = \\
&= \frac{f(0)}{\varepsilon n} + \int_0^1 x^{-1+n\varepsilon} \int_0^1 (x f'(ax)) da dx
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Интеграл по переменной  $a$  позволяет улучшить численное интегрирование. Итого, подинтегральное выражение в последнем слагаемом представляется как ряд по  $\varepsilon$ . Второй сценарий: если сингулярность имеет форму  $x^{-m+n\varepsilon}$ , где  $m > 1$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-m+n\varepsilon} f(x) dx &= \\
&= \int_0^1 dx da x^{-m+\varepsilon n} \frac{(1-a)^{m-1}}{(m-1)!} \partial_a^m f(ax) + \frac{\partial_x^{m-1} f(0)}{n\varepsilon} + \frac{\partial_x^1 f(0)}{n\varepsilon - 1} + \dots + \frac{f(0)}{n\varepsilon - m + 1}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Подводя итог, sector decomposition метод позволяет явно вычислить вычет в полюсе. Однако, один из главных недостатков этого метода — большое число секторов для многопетлевых диаграмм. Тем не менее для диаграмм определенной топологии можно использовать другие методы для вычисления диаграмм. Используя специальный вид пропагаторов можно провести серию трансформации, которые позволяют также выделить полюс в явном виде. Этот метод мы назовем — метод интегрирования цепочки впервые представленный в работе [21]

## 2.5 $\beta$ - функции и динамический критический индекс $z$

Вспомним ренормированное действие нашей модели, которое было выведено ранее:

$$S = Z_0 \eta \eta^+ + \eta^+ \left( Z_1 \frac{\partial}{\partial t} + Z_2 \nabla^2 \right) \xi + \xi^+ \left( Z_3 \frac{\partial}{\partial t} + Z_4 \nabla^2 \right) \eta + \\ + Z_5 \eta^+ \xi^+ \xi \xi + Z_6 \xi^+ \xi^+ \eta \xi, \quad (2.53)$$

где параметры  $\alpha$  и  $u$  действительные числа по определению. Это действие содержит девять независимых членов и только восемь полей и параметров, чего недостаточно для мультипликативной ренормируемости. Однако принимая во внимание симметрию действия (2.19) можно увидеть, что гиперповерхность  $g_1 = g_2^*$  дает нам недостающее соотношение, чтобы сделать ренормировку мультипликативной. Коэффициенты в контрчленах  $Z_i$  были сосчитаны в схеме MS в ведущем порядке теории возмущений в таблице 2 и 6. Они могут быть записаны в следующем виде:

$$Z_0 = 4\alpha + \frac{g_1 g_2 \alpha M_1}{4^3 \pi^4 \varepsilon} \\ Z_1 = 1 + \frac{g_1^2 M_3}{2^7 \pi^4 \varepsilon} + \frac{g_1 g_2 M_2}{2^8 \pi^4 \varepsilon} \\ Z_2 = (1 + iu)\alpha + \frac{\alpha(u + 2i)g_1^2}{2^8 \pi^4 \varepsilon(u + 3i)} - \frac{\alpha g_1 g_2 (u + i)}{2^8 (u + 3i) \pi^4 \varepsilon} \\ Z_5 = \frac{i g_1 \alpha}{2} - \frac{g_1^2 \alpha}{16(1 + iu)\pi^2 \varepsilon} - \frac{g_1^2 \alpha}{8\pi^2 \varepsilon} + \frac{g_1 g_2 \alpha}{8\pi^2 \varepsilon} \quad (2.54)$$

где

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{A + 3B - \pi u - 2u \arctan(C_-)}{u^2 + 1} \\
M_2 &= \frac{(u - i)^2(2i \arctan(2C_+) - \pi i - A - B)}{(u^2 + 1)^2} \\
M_3 &= \frac{(u + i)^2(B - 2i \arctan(\frac{u}{3}))}{(u^2 + 1)^2} \\
A &= \log(u^2 + 1) \\
B &= \log\left(\frac{u^2 + 9}{16}\right) \\
C_+ &= \frac{u^2 + 3}{4u} \\
C_- &= \frac{u^2 - 3}{4u}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Имея на руках константы ренормировки можно разрешить систему уравнений (2.24). По определению  $\beta$  и  $\gamma$  функции модели определены как:

$$\begin{aligned}
\beta_{g_n} &= -\varepsilon g_n + \varepsilon g_n \sum_{m=1,2} g_m \frac{\partial Z_{g_m}}{\partial g_m} \\
\beta_u &= \varepsilon u \sum_{n=1,2} g_n \frac{\partial Z_u}{\partial g_n} \\
\gamma_\zeta &= -\varepsilon \sum_{n=1,2} g_n \frac{\partial Z_\zeta}{\partial g_n}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

С помощью сосчитанных констант ренормировок полей и параметров можно получить соответствующие бета и гамма функции полей и параметров:

$$\begin{aligned}
\beta_{g_1} &= -\frac{2(2u^2 + 3)g_1g_2 + ug_2^2 - ug_1^2}{8\pi^2(u^2 + 1)} - \varepsilon g_1 \\
\beta_{g_2} &= \frac{2ug_1g_2 - (4u^2 + 5)g_2^2 + g_1^2}{8\pi^2(u^2 + 1)} - \varepsilon g_2
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
\beta_u &= \frac{(g_1 + ug_2)((u^2 + 6)g_2 - ug_1)}{64\pi^4(u^2 + 9)} - \\
&\quad - \frac{(u^2 + 1) [(g_1^2 + g_2^2)Im(M_2) + 2(g_1^2 - g_2^2)Im(M_3) + 4g_1g_2Re(M_3)]}{128\pi^4} \\
\gamma_\alpha &= -\frac{3g_1^2 + 2ug_1g_2 - (2u^2 + 9)g_2^2}{128\pi^4(u^2 + 9)} + \frac{(g_1^2 + g_2^2)(ReM_2 - uImM_2)}{128\pi^4} + \\
&\quad + \frac{(g_1^2 - 2ug_1g_2 - g_2^2)ReM_3}{64\pi^4} - \frac{(ug_1^2 + 2g_1g_2 - ug_2^2)ImM_3}{64\pi^4} \\
\gamma_\eta &= \frac{3g_1^2 + 2ug_1g_2 - (2u^2 + 9)g_2^2}{256\pi^4(u^2 + 9)} - \frac{(g_1^2 + g_2^2)(M_1 + ReM_2 - uImM_2)}{256\pi^4} - \\
&\quad - \frac{(g_1^2 - 2ug_1g_2 - g_2^2)ReM_3}{128\pi^4} + \frac{(ug_1^2 + 2g_1g_2 - ug_2^2)ImM_3}{128\pi^4} \\
\gamma_\xi &= -\frac{3g_1^2 + 2ug_1g_2 - (2u^2 + 9)g_2^2}{256\pi^4(u^2 + 9)} - \frac{(g_1^2 + g_2^2)(ReM_2 + (u + 2i)ImM_2 - M_1)}{256\pi^4} - \\
&\quad - \frac{(g_1^2 + 2(u + 2i)g_1g_2 - g_2^2)ReM_3}{128\pi^4} - \frac{((u + 2i)g_1^2 - 2g_1g_2 - (u + 2i)g_2^2)ImM_3}{128\pi^4}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

В отличии от модели  $E$  (и особенно  $F$ ) где наличие множества нулей бета функций затрудняет выбор ИК-устойчивой фиксированной точки,  $\beta$  – функции (2.57),(2.58) обращаются в нуль в трех случаях:

- Тривиальная фиксированная точка  $g_{1*} = g_{2*} = 0$  для произвольного  $u$ . Её матрица  $\omega_{ij}$  имеет следующие собственные числа  $(-\varepsilon, -\varepsilon, 0)$ , что подтверждает ее ИК неустойчивость
- Случай  $g_{1*} = 0$ ,  $g_{2*} = -\frac{8\pi^2\varepsilon}{5}$  и  $u_* = 0$ . Собственные числа матрицы  $\omega_{ij}$  есть  $(\varepsilon, 0.2\varepsilon, 0.023\varepsilon^2)$ . Положительный знак всех собственных чисел доказывает, что данная точка ИК устойчивая.
- Случай  $g_{2*} = -2\pi\varepsilon$ ,  $\omega_* \equiv \frac{1}{u} = 0$  для произвольного  $g_{1*}$ . Здесь, бесконечное значение  $u$  может быть выбрано из-за того, что данный заряд не является пертурбативным. Для этой фиксированной точки имеем следующие собственные числа  $\omega_{ij}$  are  $(\varepsilon, -\frac{\varepsilon}{16}, 0)$ . Таким образом, это фиксированная точка типа седло. Это точка соответствует квантовомеханическому поведению систему с осциллирующими пропагаторами без какого-либо затухания. Неудивительно, что эта точка не имеет отношения к рассматриваемому фазовому переходу.

Вычисляя  $\gamma$ - функции в найденной ИК-фиксированной точки получаем следующие критические размерности:

$$\begin{aligned}\gamma_{\xi}^* &= \frac{\varepsilon^2}{100} \\ \gamma_{\eta}^* &= \frac{\varepsilon^2}{100} \left( 12 \log \frac{4}{3} - 1 \right) \\ \gamma_{\alpha}^* &= \frac{\varepsilon^2}{50} \left( 1 - 6 \log \frac{4}{3} \right)\end{aligned}\tag{2.59}$$

Важно заметить, что в единственной ИК-устойчивой фиксированной точки, заряды  $g$  и  $\bar{g}$  чисто мнимые. В этом случае, действие (2.13) отличается от известного MSR-действия двухкомпонентной модели  $A$  стохастической динамики:

$$S_A = -\alpha \varphi'^2 + \varphi' \left( \partial_t \varphi - \alpha \Delta \varphi + \frac{\alpha g}{6} \varphi^3 \right)\tag{2.60}$$

заменой переменных:

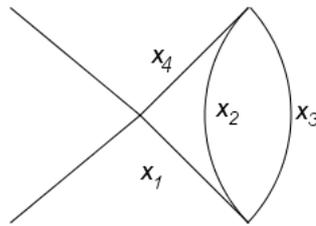
$$\begin{aligned}\eta^+ &= \varphi'_1 + i\varphi'_2 \\ \eta &= -\varphi'_1 + i\varphi'_2 \\ \xi^+ &= \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \xi &= \varphi_1 - i\varphi_2\end{aligned}\tag{2.61}$$

и тривиальным растяжением полей и параметров. Знак  $g_{2*}$  соответствует знак в модели (2.60). Именно по этой причине понятно, почему результат (2.59) совпадает с первым порядком  $\varepsilon$  разложения критических размерностей для модели  $A$ . Также можно заметить, что среди многих других моделей, обобщающих модели  $A$  действие (2.13) полученное здесь имеет много схожего в своей структуре. Но они отличаются в физических предположениях, которые делаются в модели. К примеру, в стохастическом подходе к описанию Ленгмюровской турбулентности в плазме, приводит к комплексности кинетических коэффициентов, но это является проявлением хорошо известно затухания Ландау. В стохастическом уравнении Гросса-Питаевского также присутствуют кинетические коэффициенты, но они связаны с неравновесным происхождением фазового перехода. В нашей же модели, комплексный кинетический коэффициент возникает строго при описании равновесных флуктуаций в большом каноническом ансамбле. Конечно, аналитическая схожесть действий ведет к формальной схожести соответствующих диаграмм. Подытоживая вышесказанное мы обнаружили и исследовали динамический критический индекс модели (1.23) основанной на

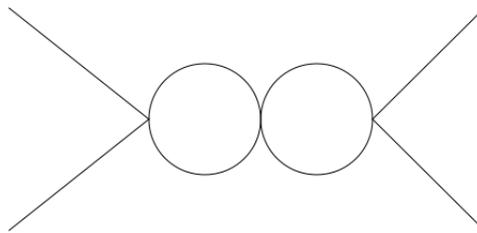
микроскопическом подходе и временных функций Грина. Он совпал с динамическим критическим индексом  $z$  для двухкомпонентной модели  $A$  критической динамики, где он был сосчитан, как минимум до порядка  $O(\varepsilon^4)$ . Многопетлевые вычисления могут лишь подтвердить ИК устойчивость единственной фиксированной точки.

## 2.6 Стабильность в ИК фиксированной точки в третьем порядке

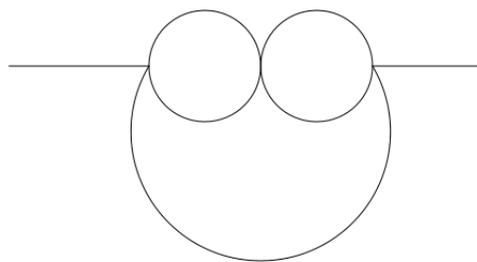
Диаграммы дающие вклады в следующем порядке теории возмущений к 1-неприводимым функциям  $\Gamma$  делятся на следующие типы топологий:



(2.62)



(2.63)



(2.64)

В силу того факта, что соответствующие  $\beta$  и  $\gamma$  функции в (2.56) могут быть сосчитаны с использованием вычета в простом полюсе [2], счет вычетов при высших полюсах не требуется и не дает вклад в критические показатели. Вот почему, диаграммы вида (2.63) могут быть опущены, потому что они являются произведением 1-неприводимых диаграмм и не содержат простого полюса.

Выражения для констант ренормировок в следующем порядке принимают тогда вид:

$$\begin{aligned}
Z_0(g_1, g_2, u) &= 4\alpha - \frac{\alpha g_1 g_2 M_1(u)}{2 \cdot 16^2 \pi^4 \varepsilon} + \frac{(-i) g_1 g_2^2 Q_4(u)}{\varepsilon} + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_5(u)}{\varepsilon} \\
Z_1(g_1, g_2, u) &= 1 + \frac{g_1^2 M_3(u)}{16^2 \pi^4 \varepsilon} - \frac{g_1 g_2 M_2(u)}{2 \cdot 16^2 \pi^4 \varepsilon} + \frac{(-i) g_1^3 Q_6(u)}{\varepsilon} + \\
&\quad + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_7(u)}{\varepsilon} + \frac{(-i) g_1 g_2^2 Q_8(u)}{\varepsilon} \\
Z_2(g_1, g_2, u) &= (1 + iu)\alpha + \frac{g_1^2 \alpha (2 - iu)}{16^2 \pi^4 (3 - iu)} - \frac{g_1 g_2 \alpha (1 - iu)}{16^2 (3 - iu) \pi^4} + \\
&\quad + \frac{(-i) g_1^3 Q_9(u)}{\varepsilon} + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_{10}(u)}{\varepsilon} + \frac{g_1 g_2^2 Q_{11}(u)}{\varepsilon} \\
Z_5(g_1, g_2, u) &= \frac{i g_1 \alpha}{2} - \frac{g_1^2 \alpha}{16(1 + iu) \pi^2 \varepsilon} - \frac{g_1^2 \alpha}{8 \pi^2 \varepsilon} + \frac{g_1 g_2 \alpha}{8 \pi^2 \varepsilon} - \\
&\quad - \frac{i g_1^3}{\varepsilon} Q_1(u) - \frac{i g_1^2 g_2}{\varepsilon} Q_2(u) - \frac{i g_1 g_2^2}{\varepsilon} Q_3(u)
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Тут как было сказано выше, мы опускаем вклады вида  $\frac{B}{\varepsilon^2}$ , которые, как было отмечено ранее не дают вклад в критические показатели модели.  $Q_i(u)$  соответствует суммам диаграмм с симметричными коэффициентами топологий (2.62), (2.64). Также можно заметить, что диаграммы соответствующих топологий содержат расходящиеся подграфы. Этот факт заставляет нас воспользоваться соответствующей  $R'$  операцией вычитания [2], чтобы сделать диаграммы нашей модели УФ конечными. Чтобы подтвердить стабильность нашей устойчивой точки необходимо сосчитать собственные числа матрицы  $\omega$ , состоящей из соответствующих производных бета функций по их зарядам, в ИК устойчивой фиксированной точки:

$$\omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{g_1}}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_{g_1}}{\partial g_2} & \frac{\partial \beta_{g_1}}{\partial u} \\ \frac{\partial \beta_{g_2}}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_{g_2}}{\partial g_2} & \frac{\partial \beta_{g_2}}{\partial u} \\ \frac{\partial \beta_u}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_u}{\partial g_2} & \frac{\partial \beta_u}{\partial u} \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

Вычисление собственных чисел этой матрицы в третьем порядке теории возмущений даёт следующее разложение собственных чисел в виде следующего  $\varepsilon$  разложения:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon + 0.68\varepsilon^2 \\
&0.2\varepsilon + 0.245739\varepsilon^2 \\
&0.0230146\varepsilon^2 - 0.0258336\varepsilon^3
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Несмотря на то, что при  $\varepsilon = 1$  одно собственное значение меняет знак, хорошо известно, что подобные ряды являются асимптотическими расходящимися рядами. Используя пересуммирование Бореля [22] с известной асимптотикой высоких порядков модели  $A$  [23] получаются следующие собственные числа матрицы  $\omega$ :  $(0.254264, 1.09057, 0.00703(\varepsilon = 1))$ . Это подтверждает, что ИК фиксированная точка является устойчивой в данном порядке.

### Глава 3. Сведение модели $F$ к модели $A$

Результаты предыдущего раздела вошли в явное противоречие с классическими работами предшественников [2; 4], в которых именно Е-модель предлагается для описания рассматриваемого явления. Для подтверждения наших результатов необходимо объяснить природу данного противоречия.

Построение стохастических уравнений критической динамики базируется на известной статической (равновесной) модели критического поведения. Стационарное действие этой модели может быть выбрано в виде [2]

$$S_{st} = \partial\psi^+ \partial\psi + \frac{g_1(\psi^+\psi)^2}{6} - g_2 m \psi^+ \psi + \frac{m^2}{2} + \frac{w\rho v^2}{2}, \quad (3.1)$$

где поля  $\psi$ ,  $\psi^+$  — комплексный параметр порядка, соответствующий средним бозонных операторов поля  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\psi}^+$ , поле  $m$  — линейная комбинация внутренней энергии и плотности, эффективно описывающая флуктуации температуры,  $\rho$  — поле плотности среды,  $v$  — векторное поле скорости,  $g_1$ ,  $g_2$  — некоторые новые по сравнению с предыдущими разделами константы связи,  $w$  — необходимая размерная константа.

Во времена написания классических работ единственным известным примером сверхтекучести был фазовый переход в жидком гелии, при котором, следуя классической монографии Ландау и Лифшица [24], жидкость объявлялась несжимаемой. Исходя из размерного анализа, максвелловский член  $\rho v^2/2$  в (3.1) дает лишь ИК-несущественные вклады в стохастические уравнения [2; 4]; однако, если его просто отбросить, динамические уравнения полностью теряют зависимость от таких важных характеристик сверхтекучего поведения как скорость и вязкость. Поэтому в работе [6] была предпринята попытка учесть динамические вклады в стохастические уравнения на основе регулярного разложения по двум параметрам; при этом, по традиции, сверхтекучая жидкость рассматривалась несжимаемой.

Из развитого в предыдущих разделах микроскопического анализа несжимаемость никак не следует. Поэтому посмотрим, к чему приводит в окрестности  $\lambda$  — точки учёт сжимаемости для феноменологически сконструированных уравнений F-модели.

В соответствии с классической монографией [2], система стохастических уравнений для  $\varphi_a \in \{\psi, \psi^+, m, v, \}$  при описании критических равновесных

флуктуаций должна иметь вид

$$\partial_t \varphi_a = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S_{st}}{\delta \varphi_b} + \eta_a, \quad (3.2)$$

коэффициенты Онзагера  $\alpha_{ab}$  и межмодовой связи  $\beta_{ab}$  удовлетворяют условиям

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba}^T, \quad \beta_{ab} = -\beta_{ba}^T, \quad \frac{\delta \beta_{ab}(\vec{x}; \varphi)}{\delta \varphi_a(\vec{x})} = 0. \quad (3.3)$$

здесь  $T$  – символ транспонирования; его действие на операторы  $\partial_i^T = -\partial_i$  подразумевается.

Чтобы включить поле скорости в динамическую F-модель (1), удовлетворяя при этом требованиям (3.2, 3.3), в уравнения Ланжевена для введенных ранее полей  $\psi$ ,  $\psi^+$ ,  $m$ , а также в уравнение Навье-Стокса должны быть включены дополнительные члены, так что система стохастических уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} (\partial_t + u_i \partial_i) \psi &= \\ &= \lambda(1 + ib) \left[ \partial^2 \psi - \frac{g_1}{3} \psi^+ \psi^2 + g_2 m \psi \right] + i\lambda g_3 \psi \left[ g_2 \psi^+ \psi - m - r\omega \frac{u^2}{2} \right] + f_{\psi^+} \\ (\partial_t + u_i \partial_i) \psi^+ &= \\ &= \lambda(1 - ib) \left[ \partial^2 \psi^+ - \frac{g_1}{3} (\psi^+)^2 \psi + g_2 m \psi^+ \right] - i\lambda g_3 \psi^+ \left[ g_2 \psi^+ \psi - m - r\omega \frac{u^2}{2} \right] + f_{\psi} \\ \partial_t m + \left( \frac{r^2 c^2 \omega}{\rho_0} + 1 \right) \partial_i (m u_i) &= \\ &= -\lambda u \partial^2 \left[ g_2 \psi \psi^+ - m - r\omega \frac{u^2}{2} \right] + i\lambda g_3 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+] + f_m \\ \partial_t u_i &= \frac{\gamma}{\rho_0} \partial^2 u_i + \frac{(3\zeta + \gamma) \partial_j \partial_i u_i}{3\rho_0} - \partial_j (u_i u_j) - \frac{1}{\omega \rho_0} \left[ \partial^2 - \frac{g_1}{3} \psi^+ \psi^2 + g_2 m \psi \right] - \\ &- \frac{1}{2} \partial_i u^2 - \frac{1}{\omega \rho_0} (\partial_i \psi) \left[ \partial^2 \psi^+ - \frac{g_1 (\psi^+)^2 \psi}{3} + g_2 m \psi^+ \right] + \\ &+ \left( \frac{rc^2}{\rho_0} + \frac{1}{r\omega} \right) \partial_i \left[ g_2 \psi^+ \psi - m - \frac{\omega r u^2}{2} \right] + f_u \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\gamma$  и  $\zeta$  – сдвиговая и объёмная вязкость,  $\lambda$  – кинетический коэффициент,  $b$  и  $g_3$  коэффициенты межмодовой связи,  $u$  – непертурбативный заряд F-модели,  $c$  – скорость звука,  $\rho_0$  – средняя плотность, при выводе полагалось  $\rho = \rho_0 + rm$ , где  $r$  – новый размерный параметр. В уравнении произведена замена  $\rho$  на  $\rho_0$ ,

отброшенные при этом вклады соответствуют старшим нелинейностям. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что (3.4) соответствует форме (3.2, 3.3).

По уравнениям (1) стандартным образом несложно построить MSR-динамическое действие, вводя вспомогательный набор полей  $\{\psi', \psi^+, m', v, \}$ :

$$\begin{aligned}
-S_{dyn} = & b_1 \psi^+ \psi' - b_2 m' \partial^2 m' + b_3 \partial_i u'_j \partial_i u'_j + b_4 \partial_j u'_j \partial_i u'_i + a_1 \psi^+ \partial^2 \psi + a_2 \psi' \partial^2 \psi^+ + \\
& + a_3 m' \partial_i u_i + a_4 m' \partial^2 m + a_5 u'_i \partial^2 u_i + a_6 u'_i \partial_i \partial_j u_j + \\
& + a_7 u'_i \partial_i m - \psi^+ \partial_t \psi - \psi' \partial_t \psi^+ - \\
& - m' \partial_t m - u' \partial_t u + \psi^+ [-u_i \partial_i \psi + a_8 \psi^+ \psi \psi + a_9 m \psi + a_{10} \psi u^2] + \\
& + \psi' [-u_i \partial_i \psi^+ + a_{11} (\psi^+)^2 \psi + a_{12} m \psi^+ + a_{13} \psi^+ u^2] + \\
& + m' [-m \partial_i u_i + a_{14} \partial^2 \partial^2 (\psi^+ \psi) + a_{15} \partial^2 u^2 + a_{16} \psi^+ \partial^2 \psi + a_{17} \psi \partial^2 \psi^+] + \\
& + u'_i [-\partial_j (u_i u_j) + a_{18} (\partial_i \psi^+) \partial^2 \psi + a_{19} \psi^+ \psi^2 \partial_i \psi^+ + a_{20} m \psi \partial_i \psi^+ + \\
& + a_{21} (\partial_i \psi)] \partial^2 \psi^+ + a_{22} (\psi^+)^2 \psi \partial_i \psi + a_{23} m \psi^+ \partial_i \psi + a_{24} \partial_i (\psi^+ \psi) + a_{25} \partial_i u^2]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

При этом в функциональном интеграле мы используем форму записи  $\exp(-S_{dyn})$ , характерную для статистической физики.

Приведенная форма MSR-действия удобна для дальнейшего ренормгруппового анализа, связь коэффициентов  $a_i$ ,  $b_j$  ( $i = 1, 2 \dots 25$   $j = 1, 2, 3$ ) с физическими параметрами приведена в таблице 4.

Таблица 4 — Параметры динамического действия (3.5): соответствие введенных обозначений реальным физическим величинам.

$b_1$	$2\lambda$	$a_5$	$\gamma/\rho_0$	$a_{13}$	$i\lambda g_3 w r/2$	$a_{21}$	$-\frac{1}{\rho_0 w}$
$b_2$	$\lambda u$	$a_6$	$(3\zeta + \gamma)/(3\rho_0)$	$a_{14}$	$-\lambda u g_2$	$a_{22}$	$\frac{g_1}{3\rho_0 w}$
$b_3$	$\gamma/\rho_0$	$a_7$	$r c^2/\rho_0 + 1/(r w)$	$a_{15}$	$\lambda u w r/2$	$a_{23}$	$-\frac{g_2}{\rho_0 w}$
$b_4$	$(\gamma + 3\zeta)/(3\rho_0)$	$a_8$	$i\lambda g_3 g_2 - \lambda(1 + ib)g_1/3$	$a_{16}$	$i\lambda g_3$	$a_{24}$	$-\frac{g_2}{\rho_0 w}$
$a_1$	$\lambda(1 + ib)$	$a_9$	$\lambda(1 + ib)g_2 - i\lambda g_3 g_2$	$a_{17}$	$-i\lambda g_3$	$a_{25}$	$-\frac{r^2 c^2 \omega + \rho_0}{r \omega \rho_0} - \frac{1}{2}$
$a_2$	$\lambda(1 - ib)$	$a_{10}$	$-i\lambda g_3 w r/2$	$a_{18}$	$-1/\rho_0 w$		
$a_3$	$-r^2 c^2 w/\rho_0 - 1$	$a_{11}$	$-i\lambda g_3 g_2 - \lambda(1 - ib)g_1/3$	$a_{19}$	$g_1/(3\rho_0 w)$		
$a_4$	$-\lambda u$	$a_{12}$	$\lambda(1 - ib)g_2 + i\lambda g_3 g_2$	$a_{20}$	$-g_2/(\rho_0 w)$		

### 3.1 Размерный анализ, ИК эффективная теория

Как и положено произвольному действию MSR модели (3.5) обладает одновременно и пространственной и временной масштабной инвариантностью [2], поэтому для всех полей и параметров можно ввести независимые пространственную  $d^p$  и временную  $d^\omega$  канонические размерности. Данные размерности приведены в таблице 5. Традиционно полагается  $d_x^p = d_t^\omega = -1$ ,  $d_t^p = d_x^\omega = 0$ .

Действие (3.5) диктует дисперсионное соотношение в форме  $i\omega \sim k^2$ . Поэтому полная каноническая размерность  $d_F$  определяется формулой  $d_F = 2d_F^\omega + d_F^p$  [2]. Именно эти размерности определяют ИК существенность или несущественность отдельных членов действия (3.5), и они также приведены в таблице 5.

Из таблицы видно, что наиболее ИК-существенным параметром теории является  $a_3$ . Если бы этот параметр являлся пертурбативным зарядом, для построения ИК-эффективной теории следовало бы в динамическом действии просто отбросить все прочие, менее существенные члены взаимодействия. Однако, в данном случае  $a_3$  является коэффициентом при квадратичном по полям члене действия  $m' \partial_i(v_i)$ , поэтому его влияние на диаграммы теории возмущений априори неочевидно. Аналогичная ситуация имеет место, например, в H-модели критической динамики фазового перехода жидкость – пар, и в соответствии с [2] требует специального анализа.

В работе [25] был предложен самосогласованный подход к такому анализу, основанный на исследовании ИК-существенности всей совокупности пропагаторов модели. Применим его в нашей работе.

Таблица 5 — Канонические размерности полей и параметров модели

$F$	$\psi, \psi^+$	$\psi', \psi^{+'}$	$m, m'$	$v$	$v'$	$b_1, b_2$	$b_3, b_4$
$d_F^p$	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	$d/2$	$-1$	$d + 1$	$-2$	$-8$
$d_F^\omega$	$0$	$0$	$0$	$1$	$-1$	$1$	$3$
$d_F$	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	$d/2$	$1$	$d - 1$	$0$	$-2$

$F$	$a_1, a_2, a_4, a_5, a_6$	$a_8, a_{11}$	$a_9, a_{12}, a_{14}, a_{16}, a_{17}$	$a_{10}, a_{13}$	$a_3$	$a_{15}$
$d_F^p$	$-2$	$2 - d$	$-d/2$	$2$	$d/2$	$-d/2$
$d_F^\omega$	$1$	$1$	$1$	$-1$	$0$	$1$
$d_F$	$0$	$4 - d$	$2 - d/2$	$0$	$d/2$	$-2 - d/2$

$F$	$a_{18}, a_{21}$	$a_{19}, a_{22}$	$a_{20}, a_{23}$	$a_{24}$	$a_7$	$a_{25}$
$d_F^p$	$-2 - d$	$2 - 2d$	$-3d/2$	$-d$	$-d/2 - 2$	$0$
$d_F^\omega$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$0$
$d_F$	$2 - d$	$6 - 2d$	$4 - 3d/2$	$4 - d$	$2 - d/2$	$0$

Квадратичная часть действия (3.5) определяет пропагаторы полей

$$\begin{aligned}
G_{\psi\psi^+} &= \frac{b_1}{(a_1k^2 + i\omega)(a_2k^2 - i\omega)}, G_{\psi^+\psi'} = \frac{1}{a_2k^2 - i\omega}, G_{\psi'+\psi} = \frac{1}{a_1k^2 + i\omega} \\
G_{mm} &= \frac{b_2(a_{56}^2k^4 + \omega^2)k^2 + a_3^2b_{34}k^4}{R_+R_-}, G_{v'_\perp v_\perp} = \frac{P_\perp}{a_5k^2 - i\omega}, G_{v_\perp v_\perp} = \frac{b_4k^2P_\perp}{a_5^2k^4 + \omega^2} \\
G_{v_\parallel m} &= \frac{a_3b_{34}(i\omega - a_4k^2) + a_7b_2(a_{56}k^2 + i\omega)}{R_+R_-}i\vec{k}, G_{v_\parallel v_\parallel} = \frac{b_{34}k^2(a_4^2k^4 + \omega^2) + a_7^2b_2k^4}{R_+R_-}P_\parallel \\
G_{v'_\parallel v_\parallel} &= \frac{(a_4k^2 + i\omega)}{R_+}P_\parallel, G_{m'm} = \frac{a_{56}k^2 + i\omega}{R_+}, G_{m'v_\parallel} = -\frac{ia_7\vec{k}}{R_+}, G_{v'_\parallel m} = -\frac{ia_3\vec{k}}{R_+} \\
a_{56} &= a_5 + a_6, b_{34} = b_3 + b_4, R_\pm = a_3a_7k^2 + (a_4k^2 \pm i\omega)(a_{56}k^2 \pm i\omega)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь мы использовали обозначения  $P_{\perp}$  и  $P_{\parallel}$  для поперечного и продольного проекторов,  $P_{\parallel}\partial^2 = \partial_i\partial_j$ ,  $P_{\perp} + P_{\parallel} \equiv 1$ . Коэффициенты при квадратичных членах свободной части динамического MSR действия имеют разные канонические размерности, поэтому неудивительно, что и пропагаторы содержат вклады в разной степени существенные в ИК-области. В соответствии с проведенным размерным анализом в пропагаторах полей  $m, m', v_{\parallel}, v'_{\parallel}$  главными оказываются члены с коэффициентом  $a_3$ . Отбрасывая в пропагаторах ИК-несущественные вклады, заметим, что некоторые из них упрощаются и в ИК-эффективной теории приобретают вид:

$$\begin{aligned} G_{mm} &= \frac{b_{34}}{a_7^2}, & G_{m'm} &= \frac{a_{56}k^2 + i\omega}{a_3a_7k^2}, & G_{m'v_{\parallel}} &= -\frac{i\vec{k}}{a_3k^2}, & G_{v'_{\parallel}m} &= -\frac{i\vec{k}}{a_7k^2}, \\ G_{v_{\parallel}m} &= \frac{a_3b_{34}(i\omega - a_4k^2) + a_7b_2(a_{56}k^2 + i\omega)}{a_3^2a_7^2k^2}i\vec{k}, & G_{v_{\parallel}v_{\parallel}} &= \frac{b_2}{a_3^2}P_{\parallel}, \\ G_{v'_{\parallel}v_{\parallel}} &= \frac{a_4k^2 + i\omega}{a_3a_7k^2}P_{\parallel}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В этих выражениях мы оставили лишь главные, однородные с учетом используемого дисперсионного уравнения члены в числителях и знаменателях пропагаторов. Наличие коэффициента  $a_3$  с положительной канонической размерностью в квадратичной части действия привело к тому, что в числителе пропагатора  $G_{v_{\parallel}m}$ , встречается комбинация параметров  $a_3b_{34}$ , содержащая формально ИК-несущественный коэффициент  $b_{34}$ . Соответствующая комбинация обладает, однако, нулевой канонической размерностью, т.е. маргинальна.

Ещё более важно, что пропагаторы  $G_{mm'}$ ,  $G_{m'v_{\parallel}}$ ,  $G_{v_{\parallel}m}$ ,  $G_{v_{\parallel}v_{\parallel}}$  и  $G_{v'_{\parallel}v_{\parallel}}$  содержат ИК-существенный коэффициент  $a_3$  в знаменателе. Это делает ИК-несущественными вклады всех диаграмм со вставками этих пропагаторов. Аналогично можно отбросить все вклады пропагаторов  $G_{v_{\perp}v_{\perp}}$  и  $G_{mm}$  так как они имеют ИК-несущественный множитель  $b_{34}$  в числителе. Здесь важно отметить, что несущественные пропагаторы можно отбросить, поскольку в соответствии с результатами Таблицы 5 в действии (3.5) при вершинах нет зарядов с положительной канонической размерностью.

Интересуясь критической динамикой полей параметра порядка  $\psi$ ,  $\psi^+$ , заметим, что все пропагаторы, содержащие поля  $m'$ , оказались ИК-несущественными. Значит, вершины с полем  $m'$  не дают вклада в ведущие члены ИК-асимптотик функций Грина этих полей. Обращая матрицу оставшихся маргинальных пропагаторов  $G_{\psi'\psi^+}$ ,  $G_{\psi\psi'}$ ,  $G_{\psi\psi}$ ,  $G_{v'_{\parallel}m}$ ,  $G_{v'_{\perp}v_{\perp}}$ , и отбрасывая все

ИК-несущественные вершины действия (3.5), запишем ИК-эффективный производящий функционал функций Грина полей параметра порядка в виде

$$G_{eff} = \int D\psi^+ D\psi D\psi'^+ D\psi' Dm Dm' Dv Dv' \delta^F(m') e^{-S'_{dyn} + A\psi^+ + A^+\psi + A'\psi'^+ + A'^+\psi'}, \quad (3.8)$$

где введены  $A, A^+, A', A'^+$  — источники полей,  $\delta^F(\dots)$  — функциональная дельта-функция, а действие имеет вид

$$\begin{aligned} -S'_{dyn} = & b_1\psi'^+\psi' + a_1\psi'^+\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ + a_5v'_\perp\partial^2v_\perp + a_7v'_i\partial_i m \\ & -\psi'^+\partial_t\psi - \psi'\partial_t\psi^+ - v'_\perp\partial_tv_\perp + \psi'^+[-v_i\partial_i(\psi) + a_8\psi^+\psi\psi + a_9m\psi + a_{10}\psi v^2] \\ & +\psi'[-v_i\partial_i\psi^+ + a_{11}\psi^+\psi\psi^+ + a_{12}m\psi^+ + a_{13}\psi^+v^2] + m'[-m\partial_iv_i + a_{14}\partial^2(\psi^+\psi) \\ & + a_{16}\psi^+\partial^2\psi + a_{17}\psi\partial^2\psi^+] + v'_i[-\partial_j(v_iv_j) + a_{24}\partial_i(\psi^+\psi) + a_{25}\partial_iv^2] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Поля  $v'_\perp, v'_\parallel$  в (3.9) играют роль множителей Лагранжа, интегрирование по ним в (3.8) может быть выполнено явно и приводит к появлению новых функциональных дельта-функций:

$$\delta^F(\partial_tv_\perp + P_\perp(v\nabla v) - \nu\partial^2v_\perp), \quad \delta^F(a_7\nabla m - P_\parallel(v\nabla v) + a_{24}\nabla(\psi^+\psi) + a_{25}\nabla v^2).$$

Диктуемая первой  $\delta$ -функцией связь представляет собой просто уравнение Навье-Стокса. В рассматриваемом случае равновесных флуктуаций она, очевидно, разрешается тривиально,  $v \equiv 0$ . Тогда вторая связь приводит к соотношению  $m = -a_{24}(\psi^+\psi)/a_7$  на рассматриваемом множестве убывающих полей. Снимая в (3.8) интегрирования по полям  $m, m'$  и  $v$  при помощи функциональных  $\delta$ -функций, получим окончательное ИК-эффективное динамическое MSR-действие для описания критической динамики основных полей:

$$\begin{aligned} -S_{dyn,eff} = & b_1\psi'^+\psi' + a_1\psi'^+\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ - \psi'^+\partial_t\psi - \psi'\partial_t\psi^+ + \psi'^+[a_8\psi^+\psi^2 \\ & - a_9a_{24}(\psi^+\psi^2)/a_7] + \psi'[a_{11}(\psi^+)^2\psi - a_{12}a_{24}(\psi^+)^2\psi/a_7] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Несложно установить, что данное действие также отличается от динамического действия стохастической модели А лишь растяжением полей и параметров, что подтверждает результаты анализа раздела 2 данной работы.

## Заключение

В результате проведенного анализа мы показали, что именно стохастическая модель А описывает динамическое поведение в окрестности  $\lambda$ -точки. Динамический критический индекс  $z$  при этом можно считать установленным. Из всех стандартных стохастических моделей А-модель, самая простая, исследована лучше всего. Именно в ней впервые были проведены трехпетлевые вычисления [21], в настоящий момент  $4 - \varepsilon$  разложение индекса  $z$  известно [26] до порядка  $\varepsilon^4$ :

$$z = 2 + 0.0145218\varepsilon^2 + 0.0110586\varepsilon^3 - 0.00526542\varepsilon^4.$$

Асимптотика высоких порядков квантово-полевого разложения для динамического критического индекса в модели А исследована в [22]. Наиболее точные результаты для индекса  $z$  в А-модели соответствуют борель-пересуммированию четырех порядков  $\varepsilon$ -разложения с учетом асимптотики высоких порядков и некоторых дополнительных соображений о поведении рядов теории возмущений [26]. К сожалению в данной работе не приведены результаты расчетов для интересующей нас теории  $\varphi^4(n = 2)$ . Поэтому наиболее точным опубликованным значением искомого динамического индекса следует признать результат работы [23]:

$$z(\varepsilon = 1) = 2.014_{-0.00}^{+0.01}.$$

Данный результат существенно отличается от предсказаний стохастических F- и E-моделей, где, хотя значения динамического индекса и не определены, наиболее вероятным считается значение  $z = 1.5$ .

Подтвержденные экспериментальные результаты по измерению  $z$ -индекса в критических сверхтекучих системах автору данной диссертации неизвестны; в связи со сложностью проведения экспериментов существующая точность измерения пока недостаточна для обоснованных заключений. Численные симуляции ограничены необходимостью выбора правильной модели, а корректный учет гидродинамики сжимаемого флюида, ведет к практически неразрешимым на современном вычислительном уровне сложностям. Так что наше заключение можно считать оригинальным результатом вычисления динамического индекса  $\lambda$ -точки.

Модель временных функций Грина может быть адекватно использована для счета динамического критического индекса уже в низших порядках теории возмущений. Тем не менее, следующие порядки требуют пересуммирования по причине того, что ряды для матрицы  $\omega$  начиная уже со второго порядка ведут себя как расходящиеся асимптотические ряды. Тем не менее их пересуммирование доказывает, что единственная ИК фиксированная точка является устойчивой.

## Список литературы

1. *Landau, L.* On the Theory of Phase Transitions / L. Landau // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1937. — No. 7. — P. 19.
2. *Vasil'ev, A. N.* The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics / A. N. Vasil'ev. — Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2004.
3. *Lipa, J. A.* Specific heat of liquid helium in zero gravity very near the lambda point / J. A. Lipa, J. A. Nissen // Phys. Rev. B. — 2003. — No. 68.
4. *Hohenberg, P. C.* Theory of dynamic critical phenomena / P. C. Hohenberg, B. I. Halperin // Rev. Mod. Phys. — 1977. — No. 49. — P. 435—479.
5. *Folk, R.* Critical dynamics: a field-theoretical approach / R. Folk, G. Moser // J. Phys. A. — 2006. — No. 39. — P. 207—313.
6. Superfluid phase transition with activated velocity fluctuations: Renormalization group approach / Dančo [et al.] // Phys. Rev. E. — 2016. — No. 93.
7. *Hnatich, M.* Superfluid phase transition with activated velocity fluctuations: Renormalization group approach / M. Hnatich, M. V. Komarova, M. Y. Nalimov // Theor. Math. Phys. — 2013. — No. 175. — P. 779—787.
8. *DeDominicis, C.* Deviations from Dynamic Scaling in Helium and Antiferromagnets / C. DeDominicis, L. Peliti // Phys. Rev. Lett. — 1977. — No. 38. — P. 505—508.
9. *DeDominicis, C.* Field-theory renormalization and critical dynamics above  $T_c$ : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems / C. DeDominicis, L. Peliti // Phys. Rev. B. — 1978. — No. 18. — P. 353—376.
10. *Dohm, V.* Density Correlation Function and Dynamic Transient Exponents of Liquid Helium at and above  $T_{\lambda}$  / V. Dohm // Z. Physik B. — 1979. — No. 33. — P. 79—95.
11. *Adzhemyan, L.* Numerical Calculation of Scaling Exponents of Percolation Process in the Framework of Renormalization Group Approach / L. Adzhemyan, Dančo, H. M. // EPJ Web of Conferences. — 2016. — No. 108.

12. Effective large-scale model of boson gas from microscopic theory / J. Honkonen [et al.] // Nucl.Phys. B. — 2019. — No. 939. — P. 105.
13. Kinetic Theory of Boson Gas. / J. Honkonen [et al.] // Theor Math Phys. — 2019. — No. 200. — P. 1360–1373.
14. Critical Dynamics of the Phase Transition to the Superfluid State / Y. Zhavoronkov [et al.] // Theor Math Phys. — 2019. — No. 200. — P. 1237–1251.
15. *Hall, B.* Quantum Theory for Mathematicians / B. Hall. — Springer, 20013. — 267 p.
16. *Schwinger, J.* Brownian Motion of a Quantum Oscillator / J. Schwinger // Math. Phys. — 1961. — No. 2. — P. 407.
17. *Rammer, J.* Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals / J. Rammer // Rev.Mod.Ohys. — 1986. — No. 58. — P. 323–359.
18. *Honkonen, J.* Contour-ordered Green's functions in stochastic field theory / J. Honkonen // Theor. Math. Phys. — 2013. — No. 175. — P. 827–834.
19. *Vasil'ev, A. N.* Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics / A. N. Vasil'ev. — Amsterdam : Gordon, Breach Science, 1998.
20. *Keldysh, L. V.* Diagram Technique for Nonequilibrium Processes / L. V. Keldysh // Sov. Phys. JETP. — 1965. — No. 20. — P. 1018–1026.
21. *Antonov, N. V.* Critical dynamics as a field theory / N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev // TMP. — 1984. — No. 60. — P. 671–679.
22. *Honkonen, J.* Large-order asymptotes for dynamic models near equilibrium / J. Honkonen, M. V. Komarova, M. Y. Nalimov // Nucl.Phys. B. — 2005. — No. 707. — P. 493–508.
23. *M.Yu.Nalimov.* Borel resummation of the  $\varepsilon$ -expansion of the dynamical exponent  $z$  in model A of the  $\varphi^4(\text{O}(n))$  theory / M.Yu.Nalimov, V.A.Sergeev, L.Sladkoff // Theor. and Math. Phys. — 2009. — No. 159. — P. 496–507.
24. *Landau, L.* Course of Theoretical Physics, Volume 6, Fluid Mechanics / L. Landau, E. Lifshitz. — Pergamon, 1987. — 554 p.
25. *M.Nalimov.* Infrared permutation theory as a method for excluding sonic modes from stochastic dynamics equations / M.Nalimov, Nikitin.I.S // Vestnik SPbU. — 1999. — No. 4. — P. 105–109.

26. Diagram reduction in problem of critical dynamics of ferromagnets: 4-loop approximation / L. T. Adzhemyan [et al.] // J.Phys. A: Mathematical and Theoretical. — 2018. — No. 51. — P. 496—507.

## Приложение А

Двух и трехпетлевые диаграммы. Их значение после  $R'$  операцииА.1 Диаграммы дающие вклад в  $Z_5$ 

Вклад диаграммы в  $Z_5$  получается умножением значения диаграммы на соответствующий симметричный коэффициент из второго столбца.

Таблица 6 — Диаграммы дающие вклад в  $Z_5$ 

№	Диаграмма	с.к	$Z_5 (u = 0)$	$D_u Z_5 (u = 0)$
1		1	$-\frac{3ig_1^3 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^3 \log(\frac{4}{3})}{16\pi^4 \epsilon}$
2		2	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^3 (-1 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4 \epsilon}$
3		2	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^3 (\log(\frac{256}{81}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
4		2	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^3 (-3 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4 \epsilon}$
5		2	$-\frac{ig_1^3 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^3 (1 - 6 \log(\frac{4}{3}))}{192\pi^4 \epsilon}$
6		2	$-\frac{ig_1^3 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^3 (1 + \log(\frac{4096}{729}))}{384\pi^4 \epsilon}$
7		1	$-\frac{ig_1^3 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^3 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 \epsilon}$

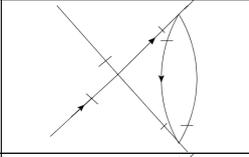
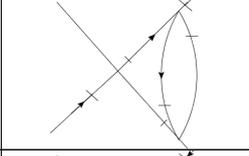
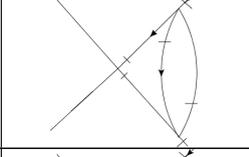
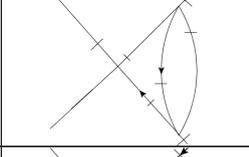
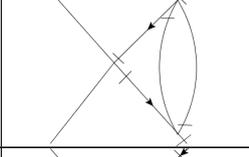
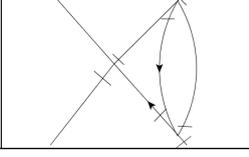
Продолжение на следующей странице

Таблица 6 — Начало на предыдущей странице

№	Диаграмма	с.к	Значение ( $u = 0$ )	Значение $D_u(u = 0)$
8		2	$\frac{ig_1^3(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3(-1+14\log(2)-7\log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
9		1	$\frac{ig_1^3(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3(-3+14\log(2)-7\log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
10		2	$\frac{ig_1g_2^2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1g_2^2(1-14\log(2)+7\log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
11		2	$\frac{ig_1g_2^2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1g_2^2(\log(\frac{256}{81})-1)}{128\pi^4\epsilon}$
12		1	$-\frac{ig_1g_2^2\log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1g_2^2(\log(\frac{64}{27})-1)}{96\pi^4\epsilon}$
13		2	$\frac{ig_1^2g_2(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{768\pi^4\epsilon}$
14		2	$\frac{ig_1^2g_2(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2}{384\pi^4\epsilon}$
15		1	$-\frac{ig_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{1024}{243})-1)}{256\pi^4\epsilon}$
16		1	$\frac{3ig_1^2g_2\log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	0
17		2	$\frac{3ig_1^2g_2\log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	0
18		2	$-\frac{ig_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{16}{9})-1)}{128\pi^4\epsilon}$

Продолжение на следующей странице

Таблица 6 — Начало на предыдущей странице

№	Диаграмма	с.к	Значение ( $u = 0$ )	Значение $D_u(u = 0)$
19		2	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{1024}{243}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$
20		2	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{16}{9}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
21		1	$\frac{ig_1^2 g_2 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$
22		2	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{16}{9}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
23		1	$\frac{ig_1^2 g_2 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	0
24		2	$\frac{ig_1 g_2^2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1 g_2^2 (\log(\frac{256}{81}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$

## А.2 Диаграммы дающие вклад в $Z_0, Z_1, Z_2$

Диаграммы дающие вклад в  $Z_0$  — диаграммы под номерами 1 — 6. Так как они не дают вклад в  $\beta_u$  значение их производных не требуется. Для диаграмм 7 — 17 первое значение соответствует вкладу диаграммы в  $Z_1$ , второе в  $Z_2$ . Все значения диаграмм и их производные берутся при  $u = 0$ . Вклад диаграммы в соответствующий  $Z_i$  получается умножением значения диаграммы на симметричный коэффициент из второго столбца.

Таблица 7 — Диаграммы дающие вклад в  $Z_0, Z_1, Z_2$ 

№	Диаграмма	с.к	$Z_i$	$D_u Z_i$
1		1	$-7.69766 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$	—
2		1	$7.69766 \cdot 10^{-7} i g_1 g_2^2$	—
3		0.5	$7.69766 \cdot 10^{-7} i g_1 g_2^2$	—
4		1	$-7.69766 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$	—
5		0.5	$-7.69766 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$	—
6		1	$7.69766 \cdot 10^{-7} i g_2^2 g_1$	—
7		1	$3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1^3$ $-6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1^3$	$-1.64641 \cdot 10^{-7} g_1^3$ $-1.25562 \cdot 10^{-7} g_1^3$
8		1	$-3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1^2 g_2$ $6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1^2 g_2$	$-1.40674 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $-5.66049 \cdot 10^{-8} g_1^2 g_2$
9		1	$3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1 g_2^2$ $-6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1 g_2^2$	$9.52617 \cdot 10^{-8} g_1 g_2^2$ $1.38559 \cdot 10^{-8} g_1 g_2^2$
10		1	$4.58812 \cdot 10^{-7} i g_1^3$ $2.45901 \cdot 10^{-7} i g_1^3$	$7.02411 \cdot 10^{-7} g_1^3$ $1.82199 \cdot 10^{-7} g_1^3$
11		0.5	$-4.58812 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$ $-2.45901 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$	$-1.91228 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $-1.40869 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$

Продолжение на следующей странице

Таблица 7 – Начало на предыдущей странице

№	Диаграмма	с.к	$Z_i$	$D_u Z_i$
12		1	$-4.58812 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$ $-2.45901 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$	$-2.31183 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $-1.64529 \cdot 10^{-8} g_1^2 g_2$
13		1	$-1.51717 \cdot 10^{-7} i g_1^3$ $-6.42517 \cdot 10^{-8} i g_1^3$	$-8.9346 \cdot 10^{-8} g_1^3$ $-7.1044 \cdot 10^{-9} g_1^3$
14		1	$1.51717 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$ $6.42517 \cdot 10^{-8} i g_1^2 g_2$	$1.78565 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $5.46681 \cdot 10^{-8} g_1^2 g_2$
15		1	$-3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1^2 g_2$ $6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1^2 g_2$	$-1.40674 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $-5.66049 \cdot 10^{-8} g_1^2 g_2$
16		0.5	$-1.51717 \cdot 10^{-7} i g_2^2 g_1$ $-6.42517 \cdot 10^{-8} i g_2^2 g_1$	$3.67808 \cdot 10^{-7} g_2^2 g_1$ $2.14054 \cdot 10^{-7} g_2^2 g_1$
17		1	$3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1^3$ $-6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1^3$	$1.86087 \cdot 10^{-7} g_1^3$ $9.9354 \cdot 10^{-8} g_1^3$

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

As Manuscript

Molotkov Iurii

**Dynamics investigation of Bose system in the vicinity of lambda- point on the base of microscopic theory in the framework of time-dependent Green's function at finite temperature.**

Scientific Specialization 1.3.3. Theoretical Physics

Dissertation

is submitted for the degree of

Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Translated from Russian

Scientific Supervisor

Prof.,Dr.Sci.(Phys-Math)

Nalimov Mikhail Yu.

Saint-Petersburg – 2021

# Contents

<b>Introduction</b> . . . . .	3
<b>Chapter 1. Time-Dependent Green's functions at finite temperature.</b> . . . . .	9
1.1. Nonequilibrium Green's functions.Perturbation theory. . . . .	9
1.2. Non-standard divergence.Regularization. . . . .	17
1.2.1. Physical meaning of $\gamma$ . . . . .	30
<b>Chapter 2. Infra-red model. Calculation of <math>z</math> critical exponent</b> .	34
2.1. Effective Infra-red model . . . . .	34
2.2. Multiplicative renormalization of the theory . . . . .	41
2.3. Two-loop calculation of the critical exponent $z$ . . . . .	45
2.3.1. Sector Decomposition method . . . . .	51
2.4. $\beta$ - functions and $z$ critical exponent . . . . .	58
2.5. Stability of the IR fixed point at the third order. . . . .	62
<b>Chapter 3. Reduction of stochastic model E</b> . . . . .	65
3.1. Dimensional analysis, IR-effective theory . . . . .	67
<b>Conclusion</b> . . . . .	73
<b>Bibliography</b> . . . . .	75
<b>Appendix</b> . . . . .	78

# Introduction

**Relevance of the topic** This thesis is devoted to study of phase transition of the second order also known as continuous phase transition. In these kind of transitions, so called order parameter is continuous function at critical point. At the vicinity of critical point phase transition of such order are characterized by behaviour of numerous thermodynamic characteristic such as heat capacity, mean of order parameter, magnetic susceptibility, correlation radius and other. Such behaviour has form of a power function and its exponent called critical exponent are vital measurable characteristic that can be measure by experiment. The most basic framework for such kind of problems was introduced by L. Landau in [1]. However, such naive model leads to the contradictions with experiment. The main reason of this is neglecting of the order parameter's fluctuations. Later, instead of a naive Landau's theory, the new fluctuation theory was introduced [2]. In this theory at the vicinity of critical point order parameter are treated as a random field. Such assumption allow to construct a theory without contradiction with experiment. More detail, the main goal of this work is to develop methods to calculate so called critical dynamic exponent  $z$ , which characterize the dynamic properties of the phase transitions of the second order.

**The elaboration extent of the topic** Describing the critical behavior of a system in a neighborhood of the transition to the superfluid phase is an important and interesting problem in theoretical physics. Studying the static properties of this continuous phase transition significantly influenced the development of the theory of critical phenomena as a whole. For example, calculating the critical index of the heat capacity [2] led to understanding the importance of resummation schemes in multiloop calculations. This result was experimentally verified in the well-known experiment in Earth orbit [3]. This paper is devoted to a more complicated problem, namely, to describing the critical properties of a superfluid substance, i.e., to the influence of equilibrium fluctuations on the critical behavior.

The classical works [2; 4; 5] , indicate that the superfluid critical dynamics are described by the stochastic dynamical models F or E. In model F, the system of stochastic equations

$$\begin{aligned}\partial_t\psi^+ &= f_{\psi^+} + \lambda(1+ib)[\partial^2\psi^+ - g_1(\psi^+\psi)\psi^+/3 + g_2m\psi^{h^+}] + i\lambda g_3\psi^+[g_2\psi^+\psi - m], \\ \partial_t\psi &= f_{\psi} + \lambda(1-ib)[\partial^2\psi - g_1(\psi^+\psi)\psi/3 + g_2m\psi] - i\lambda g_3\psi[g_2\psi^+\psi - m], \\ \partial_t m &= f_m - \lambda u\partial^2[g_2\psi^+\psi - m] + i\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+].\end{aligned}\quad (1)$$

is constructed from phenomenological considerations based on conservation laws. Here,  $\psi(x, t)$  and  $\psi^+(x, t)$  are complex order parameter fields, the field  $m$  is responsible for the density and temperature fluctuations,  $g_i$ ,  $b$ , and  $u$  are coupling constants,  $\lambda$  is the kinetic coefficient, and  $f_i$  are random forces, for which Gaussian distribution of the “white noise” type is assumed. In view of the many complicated propagators and diagrams in model F, the number of known orders of the loop expansion turns out to be insufficient. Based on four-loop calculations for the superscript  $\alpha$  [2] and on the experimental results in [3], it was assumed that the dynamics in the infrared (IR) region is described by a simpler model  $E$ , for which  $b = g_2 = 0$  (1) must be set in formulas . On the other hand, it was shown in [6; 7] , that the microscopic approach tends to favour model  $F$ . Despite noticeable simplifications in model  $E$  and also the fact that it was formulated rather long ago and studying its renormalization group (RG) was attempted several times [8–11] , its dynamical characteristics are still unknown. In particular, the problem in studying models  $E$  and  $F$  consisted in choosing the IR-stable fixed point. For this, we must find the correction critical  $\omega$ -indices, whose perturbative calculation is more complicated by an order than for the main indices, and they depend on the considered model: the same critical equivalence class can contain a different number of charges and consequently a different number of  $\omega$ -indices and other values of them. To decide on the IR stable point, an effort was made in [6] to verify the stability of the IR behavior of the dynamical model F under the natural perturbation of the medium by fluctuations of hydrodynamic modes of an

incompressible liquid, but the approach did not lead to an unambiguous result because of the complexity of the considered model. Analyzing the IR stability is thus related to correctly choosing the most exact model. Therefore, we begin our presentation here with the most microscopically substantiated model of interacting quantum particles considered using the time-dependent Green's functions at a nonzero temperature in the formalism of the functional integral. We use an interaction of the “density–density” type and apply a dimensional regularization, the  $4 - \epsilon$ -expansion, and the method of the quantum field RG. We find that a single IR-relevant fixed point exists in the first nontrivial order of the perturbation theory, while two points claim the IR-stable role in the stochastic model  $E$  [1], and at least three points in model  $F$  [4]. The nontrivial coordinates of the IR-stable point that we find show that neither model  $F$  nor model  $E$  is appropriate for describing the critical dynamics in a neighborhood of the  $\lambda$  point. The simplest stochastic model  $A$  of the critical dynamics corresponds most completely to the microscopic description taken into account. We note that the phenomenological applicability of model  $A$  for describing the critical dynamics of the superfluid state was already discussed but rejected. If the stochastic model  $A$  describes the considered critical dynamics, then its dynamical critical index was already calculated in the fourth order of the  $\epsilon$ -expansion, and the calculated results were resummed including the known higher-order asymptotic approximations of the perturbation theory and were given in . The contradiction to previous research papers force us to seek a possible reason for such a discrepancy. After the classical monograph appeared, liquid systems were regarded as incompressible in hydrodynamic problems. For a long time, liquid helium was the only experimental example of superfluidity. Taking hydrodynamic modes into account in the incompressible liquid approximation therefore seemed to be quite justified. Paper was also written from this standpoint. On the other hand, transitions to a Bose condensed state of a gas system are now widely studied. It is therefore important to also generalize the critical superfluidity models to them. In the second part of this paper, we take the

influence of the compressibility on the critical properties of model F into account. Our analysis shows that the compressibility affects the stability of the IR-relevant fixed point and reduces the dynamical critical properties of the superfluid phase transition to model A, which corresponds to results of the microscopic approach implemented in the first part of the thesis

**The main goal of this work** is to develop consistency microscopic theory appropriate for description of the continuous phase transition at the superfluid state. Moreover we calculate critical exponent at lower order and then confirm stability of the infra-red fixed point. Furthermore we discuss reduction of the F model of the stochastic dynamics to A model.

**Scientific novelty** The goals and problems of the thesis that were formulated above are new. All the main results of the thesis were obtained for the first time, which is confirmed by their publication in leading domestic and international journals and approbation at the international conferences.

**Theoretical and practical significance** Framework of the time-dependent Green's at finite temperature can be used for a class model with arbitrary interactions, moreover this framework could be applied to the systems with Fermi statistics.

### **Methodology and research methods**

The methodology of the thesis is based on the use of field-theoretical methods – the method of functional integration, Feynman diagram technique, diagram reduction method, renormalization theory and renormalization group, the numerical calculation of the diagrams by Sector Decomposition method, Borel resummation method of the divergent series.

**The reliability of the results** is ensured by proven field-theoretical methods. The results of the research conducted in the thesis, published in leading peer-reviewed journals, were reported at Russian and international conferences. The calculations were also verified by comparison with previously obtained results of other authors.

### Thesis statements to be defended

- Framework of the time-dependent Green's function at the finite temperature are adequate for description phase transition occurring in the quantum-field systems at non zero temperature.
- Critical exponent  $z$  are calculated at lowest order of perturbation expansion. Obtained value coincide with those from model A of stochastic theory.
- Calculated and resummed  $\omega$  confirm that IR fixed point are stable one
- Introduction of non zero compressibility allow model F be reduced to the model A of stochastic field theory.

**The approbation of the research** Three articles were published in journals, on the topic of the thesis, recommended by the Higher Attestation Commission of the Russian Federation and included in the RSCI, Web of Science and Scopus databases.

- Honkonen, Juha & Komarova, M.V. & Molotkov, Yu.G. & Nalimov, M.Yu. (2018). Effective large-scale model of boson gas from microscopic theory. Nuclear Physics B. 939. 10.1016/j.nuclphysb.2018.12.015.
- Honkonen, J., Komarova, M.V., Molotkov, Y.G. et al. Kinetic Theory of Boson Gas. Theor Math Phys 200, 1360–1373 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0040577919080142>
- Zhavoronkov, Y.A., Komarova, M.V., Molotkov, Y.G. et al. Critical Dynamics of the Phase Transition to the Superfluid State. Theor Math Phys 200, 1237–1251 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0040577919080142>

The results of the work were reported and discussed at the following scientific conferences:

- «Science SPbU – 2020»

- VI International Conference "Models in quantum field theory" Saint Petersburg, Peterhof, Russia from August 27 to 31, 2018
- NEGF and hydrodynamic. THMEC 2019 , JINR, 2019

**Personal contribution of the author** All the main results were obtained by the applicant personally, or with his direct participation in the inseparable co-authorship.

**Thesis structure** The thesis consists of Introduction, four Chapters, Conclusion and three Appendices. The full volume of the thesis is 72 pages. The thesis contains 2 tables and a list of references from 29 titles.

- In the first chapter framework of the time-dependent Green's function at finite temperature are introduced and developed. Corresponding analysis of the main objects of the quantum field theory are conducted. From that the theory is constructed and perturbation expansion are derived. Material of this chapter is based on [12],[13]
- In the second chapter of the thesis constructed theory analysed and all IR irrelevant terms are dropped. Infra-red theory is constructed and it is shown that such theory are appropriate for further calculation. It's shown that the theory in fact are multiplicative renormalized and further calculation of  $z$  critical exponent are provided. Three-loop calculation proved the IR stability of fixed point. This material are based on [12],[14]
- In the third chapter introduction of non zero compressibility allow to reduce F theory to A theory. This are based on [14]
- The Conclusion of the thesis presents the main results and findings.
- In appendix A the main three-loop calculation are presented.

## Chapter 1

# Time-Dependent Green's functions at finite temperature.

## 1.1. Nonequilibrium Green's functions. Perturbation theory.

The formal description of every experiment can be split into two phases. [1] Firstly, one has to determine the initial state of the system at a given time  $t_0$ . However, to know the initial moment of time is not sufficient to determine the exact state. That is why, we are obliged to describe initial preparation in a probabilistic way. In other words [4; 5], a probability distribution function  $\rho$  must be taken. This leads to the well-known concept of the density matrix from quantum mechanics. Then expectation value of an arbitrary observables  $O$  at  $t_0$  can be yield by following:

$$\langle O(t_0) \rangle = \text{Tr} [\rho(t_0) O(t_0)] = \sum_n \langle n(t_0) | \rho(n) O(t_0) | n(t_0) \rangle \quad (1.1)$$

The most intriguing observable measured in experiments are, of course, two-point functions:

$$\langle O(t, t') \rangle = \langle O_1(t) O_2(t') \rangle \quad (1.2)$$

In many theories, such functions known as correlation functions. With their help, every one-particle property may be derived. However a several problem arises. The first impending problem is that in solid-state physics the system is usually in interacting many-particle system at time  $t_0$ . Hence states  $|n\rangle$  occurring in the definition of density matrix are many-particle states. And secondly, the time-development operator corresponding to the equation of motion involves many-particle contributions via Hamiltonian  $H(t)$ . The main interest of the present work is to calculate critical exponent of the Bose system near  $\lambda$ -point. In other words,

we are interested in effect of equilibrium fluctuation on critical behaviour of the system. For that purpose, let us define  $n$ -point Green's function.

There is, at least, two equivalent ways to define Green's functions: using classical operator-like approach and the second one is to derive Green's function within framework of functional(path) integral [15]. Both of them begins with classical expression from quantum field theory. Let  $\hat{\psi}$  and  $\hat{\psi}^+$  be annihilation and creation operators respectively. Then  $n$ -point Green's function can be written in the following form [2] :

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr} \left( \rho T \left[ \hat{\psi}_H(x_1) \hat{\psi}_H^+(x_1) \cdots \hat{\psi}_H(x_n) \hat{\psi}_H^+(x_n) \right] \right) \quad (1.3)$$

Here  $\rho$  is a density operator,  $x_n$  is a pair  $(t_n, x_n)$ , where  $x \in \mathbb{R}^d$ . The operators  $\psi$  and  $\psi^+$  are written in Heisenberg representation:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_H(t, x) &= e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}-\mu\hat{N})} \hat{\psi}(x) e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}-\mu\hat{N})} \\ \hat{\psi}_H^+(t, x) &= e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}-\mu\hat{N})} \hat{\psi}^+(x) e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}-\mu\hat{N})}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

where  $\psi(x), \psi^+(x)$  are the operators in Schrödinger's representation. We unite the operator field  $\psi$  and complex-conjugate field  $\psi^+$  into complex scalar field:

$$\hat{\varphi}_H(x) = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_H(x) \\ \hat{\psi}_H^+(x) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Then  $n$ -point Green's function could be represented in a more compact form:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr} (\rho T [\hat{\varphi}_H(x_1) \cdots \hat{\varphi}_H(x_n)]), \quad (1.6)$$

For the purpose of the following calculations, it is useful to consider the dimension of the spatial space to be positive integer  $d$ . Our system is considering of weak-interacting bosons near  $\lambda$  transition point in the equilibrium state. That is why, it is appropriate to work in the most suitable ensemble for such system. Grand-canonical ensemble gives us certain expression for the density operator  $\rho$ :

$$\rho = \frac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{Z_G}, \quad (1.7)$$

where  $\hat{H}$  is a Hamiltonian of the system,  $\mu$  – a chemical potential,  $N$  – is a particle number operator,  $\beta$  – is a thermodynamic beta ( $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ),  $Z_G$  – a partition function. Perturbation expansions is usually being constructed with the aid of interaction representation of the field operators  $\hat{\psi}, \hat{\psi}^+$ :

$$\hat{\psi}(t, x) = e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \hat{\psi}(x) e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \quad (1.8)$$

$$\hat{\psi}^+(t, x) = e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \hat{\psi}^+(x) e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \quad (1.9)$$

Here Hamiltonian is assumed to be able to split into so-called "free" Hamiltonian and interaction part. In other words,  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ . Moreover, to analyse the effect of various auxiliary time instants introduced in the construction of the perturbation theory we have introduced explicitly a reference time instant for operator evolution  $t_0$ . However, due to translation-invariance of the system consisting of weakly interacting bosons in whole  $\mathbb{R}^{d+1}$ , the time-dependent Green functions at finite temperature are independent of  $t_0$ .

Time-dependent Green's functions at finite temperature are a subtype of non-equilibrium one. Subsequently, the expectation value is calculated with aid of some non-equilibrium density operator instead of the grand-canonical one in (1.7). Non-equilibrium Green's function are often introduced and calculated on the basis of the idea of Schwinger [16] of a contour-ordered product of operators in a complex time plane [17] instead of the usual time-ordered product used in (1.6). In this approach the main goal is not perturbation expansion but the Cauchy problem of Dyson equations (called Kadanoff-Baym equations in this context) for Green's function, from which, of course, perturbation expansion may be inferred.

Here, our aim is to construct the standard perturbation expansion on the whole time axis with the subsequent renormalization-group analysis of an effective large scale model inferred from perturbation expansion. For this setup of the problem we find it useful to resort to the construction of the perturbation theory on the basis of standard Wick's theorems [18]. Here, we apply the el-

egant functional-differential representation, which also allows a straightforward transformation to a functional integral in a way, which, in particular, elucidates the problems appearing in the construction of the functional integral for time-dependent Green's functions at finite temperature [19].

Firstly, the time-ordered product of the Heisenberg operators in (1.6) should be rewritten in the form of the time-ordered product of Dirac operators. In other words:

$$T [\hat{\varphi}_H(x_1) \cdots \hat{\varphi}_H(x_n)] = \hat{U}(t_0, t_f) T \left[ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_n) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt V_n(\hat{\varphi}(t))} \right] \hat{U}(t_i, t_0), \quad (1.10)$$

where  $t_f > t_l > t_i, \forall l = 1, \dots, n$ . The evolution operator  $\hat{U}$  in (1.10) is

$$\hat{U}(t, t') = e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} e^{\frac{i(t-t')}{\hbar}(\hat{H} - \mu\hat{N})} e^{-\frac{i(t'-t_0)}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \quad (1.11)$$

and  $V_n(t)$  is the interaction operator functional written in the normal form, i.e.  $V_n(\hat{\varphi}) = N[V_n(\hat{\varphi})]$ . This implies the amendment of the definition of the chronological product at coinciding times as the normal product. Moreover, unlike the Green's functions, the chronological product (1.10) strictly dependent on the reference time instant  $t_0$ .

Instances of time  $t_i$  and  $t_f$  are arbitrary ones and assuming  $t_i \rightarrow -\infty$  and  $t_f \rightarrow \infty$  are quite fruitful for calculation expectation in perturbation expansion. For that reason, we use the representation on both evolution operators in (1.10) in the form of antichronological exponential:

$$\hat{U}(t', t) = \tilde{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V_n(\hat{\varphi}(u)) du}, \quad (1.12)$$

where  $\tilde{T}$  is a antichronological product and  $t' < t$ , but the time-integral in the exponential is written in the natural ordering with the lesser time argument as the lower limit. Of course, instead of antichronological representation of operators

$\hat{U}(t', t)$  one can use chronological one of  $\hat{U}(t, t')$  defined as:

$$\hat{U}(t, t') = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V_n(\hat{\varphi}(u)) du} \quad (1.13)$$

Though choosing representation must be cohesive, the calculations are not dependent on such choice because it determines orientation of time-axis.

To use Wick's theorem to obtain corresponding representation one should transform density operator  $\rho$  in a appropriate form. At a finite temperature it is convenient to take trace in (1.6) in the basis spanned by the eigenstates of the free operator  $\hat{H}_0 - \mu\hat{N}$ . In case of using grand-canonical ensemble with (1.7), then corresponding factorization of the density operator transforms exponential of grand canonical density operator into evolution operator of the Euclidian field theory. Such evolution operator can be represented as usual evolution operator with imaginary time. More precisely:

$$\hat{U}_E(t, 0) = e^{\frac{t}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} e^{-\frac{t}{\hbar}(\hat{H} - \mu\hat{N})} = T e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t V_n(\hat{\varphi}(u)) du} \quad (1.14)$$

with the obvious substitution of  $t = \beta\hbar$  for the upper limit. In the interaction picture evolution of the Euclidean field operators is given by the following rule:

$$\hat{\varphi}_E(t, x) = e^{\frac{t}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} \hat{\varphi}_E(x) e^{-\frac{t}{\hbar}(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}, \quad (1.15)$$

where the subscript  $E$  refers to the Euclidean field theory obtained by the substitution  $(t - t_0) \rightarrow -it$ . The finite reference time  $t_0$  forced us to use different notation for operators with Euclidean time evolution instead of using typical Dirac Operators with imaginary time.

Finally, substitution of representation (1.10) and (1.14) in (1.6) gives rise to the expectation value of a product of four time-ordered products of operators.

Using the choice  $t_i < t_0$  one can obtain:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Tr} \left( \frac{e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})}}{Z_G} T e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta \hbar} V_n(\hat{\varphi}(t)) dt} \tilde{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} V_n(\hat{\varphi}) dt} \cdot T \left[ \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \cdots \hat{\varphi}(x_n) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V_n(\hat{\varphi}(t)) dt} \right] \tilde{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_0} V_n(\hat{\varphi}(t)) dt} \right) \quad (1.16)$$

Here applying Wick's theorems, product of time-ordered products can be transformed into single normal-ordered product of the following form:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr} \left( \frac{e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})}}{Z_G} N \left[ e^{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \Delta_{ll} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} + \sum_{k < l} \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n_{kl} \frac{\delta}{\delta \varphi_l}} \varphi_3(x_1) \cdots \varphi_3(x_n) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta \hbar} V_n(\varphi_1) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} V_n(\varphi_2(t)) dt - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V_n(\varphi_3(t)) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_0} V_n(\varphi_4(t)) dt} \right] \Big|_{\varphi_{2,3,4} = \hat{\varphi}, \varphi_1 = \hat{\varphi}_E} \right), \quad (1.17)$$

where  $V_n(t, \varphi)$  is the normal form of the interaction functional and moreover we have denoted explicitly all four field arguments, whose labelling follow the order of factors in the operator product in (1.16). All integrals in corresponding exponential differential reduction operators are implied. Contractions are defined in a classical way [19]. Here subscripts refer to enumeration of the fields.

One could note that the differential reduction operator in (1.17) is not symmetric one in field indices. Chronological contractions in the quadratic form of the reduction operator are defined by the standard technique. Overall we have four chronological contractions obtained by following formula [19]:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}(x, x') &= T[\hat{\varphi}_1(x) \hat{\varphi}_1(x')] - N[\hat{\varphi}_1(x) \hat{\varphi}_1(x')] \\ \Delta_{22}(x, x') &= T[\hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(x')] - N[\hat{\varphi}_2(x) \hat{\varphi}_2(x')] \\ \Delta_{33}(x, x') &= T[\hat{\varphi}_3(x) \hat{\varphi}_3(x')] - N[\hat{\varphi}_3(x) \hat{\varphi}_3(x')] \\ \Delta_{44}(x, x') &= T[\hat{\varphi}_4(x) \hat{\varphi}_4(x')] - N[\hat{\varphi}_4(x) \hat{\varphi}_4(x')] \end{aligned} \quad (1.18)$$

From the properties of chronological contractions, one can obtain that only three

of them are distinct. In other words:

$$\Delta_{22}(x, x') = \Delta_{44}(x, x') \quad (1.19)$$

Six normal contractions in (1.17) are constructed according to the following expression:

$$n(x, x') = \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x') - N[\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')] \quad (1.20)$$

Applying different indices to operator field  $\hat{\varphi}$  one can yield six contractions  $n_{kl}$ :

$$\begin{aligned} n_{12} &= \hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_2(x') - N[\hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_2(x')] \\ n_{13} &= \hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_3(x') - N[\hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_3(x')] \\ n_{14} &= \hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_4(x') - N[\hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_4(x')] \\ n_{23} &= \hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_3(x') - N[\hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_3(x')] \\ n_{24} &= \hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_4(x') - N[\hat{\varphi}_2(x)\hat{\varphi}_4(x')] \\ n_{34} &= \hat{\varphi}_3(x)\hat{\varphi}_4(x') - N[\hat{\varphi}_3(x)\hat{\varphi}_4(x')], \end{aligned} \quad (1.21)$$

where the field operators are either Dirac operators or Euclidean free field operators depending on the label of the field argument (1.17). Here and hereafter, all sums and integrations over variables and indices are implied in the shorthand notation in the reduction operator (1.17) and will be omitted.

Calculation of the grand-canonical expectation value of the normal product for arbitrary operator functional is yielded by following formula which can be proved by functional perturbation expansion of both sides following expression:

$$\frac{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} N[F(\hat{\varphi})]}{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}} = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\varphi} d \frac{\delta}{\delta\varphi}} F(\varphi) \Big|_{\varphi=0}, \quad (1.22)$$

where function  $d(x, x')$  is the kernel of above functional differential operator. We will call it thermal contraction. It can be calculated as expected value of the normal product of fields. In other words:

$$d(x, x') = \frac{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})} N[\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')]}{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}} \quad (1.23)$$

Since in (1.17) all fields can be either Euclidean or Dirac functional operator and consequently there are a set of functions (1.23) with different temporal behaviour, it is convenient to write the quadratic form of the reduction operator (1.22) as the completed square over the four field of (1.17), which adds the functions  $d_{kl}$  to all matrix elements of the  $4 \times 4$  propagator matrix in (1.17). In summary, the almost final form for generating the perturbation expansion of the time-dependent Green's function at finite temperature are obtained:

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{Z_0}{Z_G} \left[ e^{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \varphi_l} \Delta_{ll} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} + \sum_{k < l} \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n_{kl} \frac{\delta}{\delta \varphi_l} + \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \varphi_k} d_{kl} \frac{\delta}{\delta \varphi_l}} \varphi_3(x_1) \cdots \varphi_3(x_n) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta \hbar} V_n(\varphi_1) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} V_n(\varphi_2(t)) dt - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V_n(\varphi_3(t)) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_0} V_n(\varphi_4(t)) dt} \right] \Big|_{\varphi_j=0}, \quad (1.24)$$

where  $Z_0 = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})}$ . Here, we could establish a correspondence between time integral in the interaction function and parts of a contour in the complex time plane with a single field variable. Such contour are known as Schwinger-Keldysh contour. We discuss this approach some latex using functional integral formalism. Here, for our purpose, it is more convenient to preserve the rather complicated structure of propagators in the expression for the Green's function.

The standard Feynman rules for diagrams are produced by functional derivation of the reduction operator in (1.24). It is obvious observation that left-hand side of (1.16) is independent of all time parameters  $t_f > t_0 > t_i$  but these time parameters appear explicitly in the components of the perturbation expansion determined by the right-hand side. This makes constructing the perturbation theory rather tedious.

## 1.2. Non-standard divergence.Regularization.

Further simplifications of the (1.24) require specifying the Hamiltonian of the system. Our main area of interest is critical behaviour of a boson system in a neighbourhood of the transition to the superfluid phase. One of the most common Hamiltonian for such system has following form:

$$\hat{H} = \int dx \left( \hat{\psi}^+(t, x) \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \hat{\psi}(t, x) + \frac{g}{4} \hat{\psi}^+(t, x) \hat{\psi}^+(t, x) \hat{\psi}(t, x) \hat{\psi}(t, x) \right) \quad (1.25)$$

which, following the tradition of quantum field theory, is written in the normal form, so that the interaction functional  $V_n$  is obtained by simply replacing the field operators by the corresponding functions, i.e by omitting operator hats. The chronological contraction and normal ones can be evaluated by corresponding formulas. More precisely, all contractions of two annihilation operators as well as two creation operators vanish due to commutation relations between them. Overall, the contractions of the two-component field (1.5) can be represented as  $2 \times 2$  matrices with zero diagonal elements. In the time-wave-vector representation the chronological contractions are(in the plane-wave basis):

$$\begin{aligned} \Delta(t, t', k) &= iG^R(t - t', k) = \theta(t - t') e^{-i\omega(k)(t-t')} \\ \tilde{\Delta}(t, t', k) &= -iG^A(t - t', k) = \theta(t' - t) e^{-i\omega(k)(t-t')} \\ \Delta_E(t, t', k) &= \theta(t - t') e^{-\omega(k)(t-t')}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

where dispersion law  $\omega(k)$  defined by free part of the Hamiltonian (1.25) and has the following form:

$$\omega(k) = \frac{\epsilon(k)}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) \quad (1.27)$$

and  $G^R, G^A$  are well-known retarded and advanced Green's functions of non-relativistic kinetic theory. Thermal and normal contractions are differed by the rule of time evolution of the Euclidean and Dirac operators. Direct calculation

using (1.21) and (1.23) allow one to obtain corresponding non-zero contractions:

$$\begin{aligned}
d_{DD}(t, t', k) &= e^{-i\omega(k)(t-t')} \bar{n}(k) \\
d_{EE}(t, t', k) &= e^{-\omega(k)(t-t')} \bar{n}(k) \\
d_{DE}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-i(t-t_0)+t')} \bar{n}(k) \\
d_{ED}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(i(t'-t_0)-t)} \bar{n}(k),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

where the subscripts refer to the time evolution of the field operators defined in (1.23). In other words, subscripts define the order of times in the averaged operator product  $d(x, x') = \langle \hat{\psi}^+(t, x) \hat{\psi}(t', x') \rangle$ .  $\bar{n}(k)$  is the mean occupation number of the state with wave vector  $k$  in the free boson gas:

$$\bar{n}(k) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon(k)} - 1} \tag{1.29}$$

All simple contractions generated by normal-ordered products of two fields operators vanish due to commutations relations between creation and annihilation operators. The rest of contractions have the same time dependence as the thermal ones, however the mean occupation number is replaced by the unity:

$$\begin{aligned}
n_{DD}(t, t', k) &= e^{-i\omega(k)(t-t')} \\
n_{EE}(t, t', k) &= e^{-\omega(k)(t-t')} \\
n_{DE}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-i(t-t_0)+t')} \\
n_{ED}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(i(t'-t_0)-t)}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

One can observe here that combination factor with  $\bar{n}(k)$  and without can lead to certain divergences in the perturbation expansions. This problem will be exposed a bit later.

In terms of field  $\psi$  and  $\psi^+$  corresponding to the field operators in (1.25), the

functional representation (1.24) transform into the following form:

$$\begin{aligned}
G(x_1, \dots, x_n) = & \frac{Z_0}{Z_G} \left[ e^{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \psi_l} \Delta_{ll} \frac{\delta}{\delta \psi_l^+} + \sum_{k < l} \frac{\delta}{\delta \psi_k} n_{kl} \frac{\delta}{\delta \psi_l^+} + \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^4 \frac{\delta}{\delta \psi_k} d_{kl} \frac{\delta}{\delta \psi_l^+}} \psi_3(x_1) \cdots \psi_3(x_m) \cdot \right. \\
& \cdot \psi_3^+(x_{m+1}) \cdots \psi_3^+(x_n) e^{-\frac{g}{4\hbar} \int_0^{\beta\hbar} dt \int dx \psi_1^{+2}(t, x) \psi_1^2(t, x) + \frac{ig}{4\hbar} \int_{t_0}^{t_f} dt \int dx \psi_2^{+2}(t, x) \psi_2^2(t, x)} \\
& \left. \cdot e^{-\frac{ig}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int dx \psi_3^{+2}(t, x) \psi_3^2(t, x) + \frac{ig}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_0} dt \int dx \psi_4^{+2}(t, x) \psi_4^2(t, x)} \right] \Bigg|_{\psi_i=0, \psi_i^+=0},
\end{aligned} \tag{1.31}$$

The complete  $4 \times 4$  matrix of contractions contains different combinations of functions defined above. Corresponding matrix has the following form:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_E + d_{EE} & n_{ED} + d_{ED} & n_{ED} + d_{ED} & n_{ED} + d_{ED} \\ d_{DE} & \tilde{\Delta} + d_{DD} & n_{DD} + d_{DD} & n_{DD} + d_{DD} \\ d_{DE} & d_{DD} & \Delta + d_{DD} & n_{DD} + d_{DD} \\ d_{DE} & d_{DD} & d_{DD} & \tilde{\Delta} + d_{DD} \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

One can note that each matrix element contain an oscillating part. It will be shown later that such oscillations lead to certain problem in the perturbation expansions and is the source of unusual IR divergences in the corresponding diagrams.

Also it should be noted that the perturbation expansion (1.31), (1.32) refers to the most common case of time dependent Green's function at finite temperature: the time moments  $t_f, t_i$  as well the reference time  $t_0$  are arbitrary ones. Furthermore the density operator  $\rho$  can be choose arbitrary Hermitian operator of the form  $\frac{e^{F[\varphi]}}{\text{Tr} e^{F[\varphi]}}$ , where  $F[\varphi]$  is a local polynomial operator functional. Such change of  $\rho$ , of course, leads to the certain alternation of contractions from definitions (1.21), (1.18).

Every quantum field theory with interaction contains of divergences occurring in the perturbation expansion of  $S$ -matrix or any other physical observables. In particle field theories the main problem are, so called, UV divergences in the Fourier space of wave vectors. It is well known, that source of such divergences

lies in position space where corresponding interaction operator  $V_n$  represented as a product of operator-valued distributions. Such products of operator-valued operators should be treated very carefully and firstly was considered in. However, usually problems with divergences in interacting field theory can be dealt with by the theory of renormalization group framework which allow to arrive at a meaningful physical theory. Nevertheless, in massless models IR(infra red divergences which occur at small wave vectors  $k$  or at big relative distance  $x$  in position space) are one of the biggest problem, to which there is no generic solution yet. In relativistic models of particle physics wave vectors and frequencies may be treated on equal footing due to the definite structure of propagators. On the other hand, in non-relativistic field theory, which is our case, wave vectors and frequency variables should be treated separately. In the latter, all divergences are brought about by the wave-vector space. But there is some unusual divergences which appear in the time(frequency) integration of Feynman diagrams. Such divergences are direct consequence of the oscillatory behaviour of the propagators ( in contrast to the exponential attenuation in stochastic field theory).

Some of these divergences are due to peculiarities of representation and disappear order by order in perturbation theory, others are genuine UV or IR singularities related to the thermodynamic limit of the model. Here the main concern will be discussing apparent temporal divergences brought about by the structure of perturbation theory.

In the perturbation expansion of ordinary Green functions - calculated as expectation values of time-ordered products of Heisenberg operators in the ground state instead of the grand-canonical trace over all basis state - the limit  $t_f \rightarrow \infty, t_i \rightarrow -\infty$  is customary to facilitate the use of Fourier transform. In case of the usual Green functions this limit may be carried out in each Feynman graph of the perturbation expansion separately. Alas, this is not the case here. Let us consider the most simple one-loop self-energy contribution of the physical fields

to the two-point Green function:

$$G_2(x_1, x_2) = \text{Tr} \left( \hat{\rho}_G T \left[ \hat{\psi}_H(x_1) \hat{\psi}_H^+(x_2) \right] \right) \quad (1.33)$$

The one-loop correction include of four diagrams of the following topology:

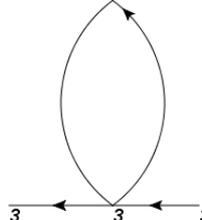
$$G_2(x_1, x_2) = \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ \text{diagram 2} \\ \text{diagram 3} \\ \text{diagram 4} \end{array} + \dots, \quad (1.34)$$

(Note: The diagrams in (1.34) are four identical loop diagrams with external lines labeled 3, 1, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 3 respectively.)

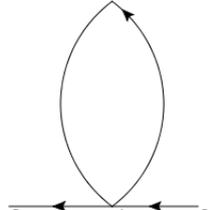
where labels represent numbers of fields. Analytical expression for each part in (1.34) can written in the following form:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ \text{diagram 2} \end{array} &= \int_0^{\beta\hbar} dt \left( d_{DE}(t_1 - t) \Sigma_{\psi_1^+ \psi_1}^{(1)} (n_{ED}(t - t_2) + d_{ED}(t - t_2)) \right) = \\ &= \frac{-g}{4\hbar} \int_0^{\beta\hbar} dt \int dp e^{\omega(k)(-i(t_1-t_0)+t)} \bar{n}(k) e^{\omega(k)(-t+i(t_2-t_0))} (\bar{n}(k) + 1) \cdot \\ &\cdot (\theta[0] + n(p)) = \frac{-g}{4\hbar} \int dp n(p) e^{-i\omega(k)(t_1-t_2)} \beta\hbar \bar{n}(k) (1 + \bar{n}(k)) \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{diagram 3} \\ \text{diagram 4} \end{array} &= \int_{t_0}^{t_f} dt (n_{DD}(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\psi_2^+ \psi_2}^{(1)} d_{DD}(t - t_2) = \\ &= \frac{ig}{4\hbar} \int_{t_0}^{t_f} dt \int dp [\theta[0] + \bar{n}(p)] \left( e^{-i\omega(k)(t_1-t)} (\bar{n}(k) + 1) e^{-i\omega(k)(t-t_2)} \bar{n}(k) \right) = \\ &= \frac{ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) e^{-i(t_1-t_2)\omega(k)} \bar{n}(k) (1 + \bar{n}(k)) (-t_0 + t_f) \end{aligned} \quad (1.36)$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{t_i}^{t_f} dt (\Delta(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\psi_3^+ \psi_3}^{(1)} (\Delta(t - t_2) + d_{DD}(t - t_2)) = \\
&= -\frac{ig}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int dp [\theta(0) + \bar{n}(p)] \left( e^{-i\omega(k)(t_1-t)} (\theta(t_1 - t) + \bar{n}(k)) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot (e^{-i\omega(k)(t-t_2)} (\theta(t - t_2) + \bar{n}(k))) \right) = -\frac{ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) e^{-i\omega(k)(t_1-t_2)} \\
&\quad \cdot ((t_1 - t_2) + (t_1 - t_i + t_f - t_2) \bar{n}(k) + (t_f - t_i) \bar{n}^2(k))
\end{aligned} \tag{1.37}$$

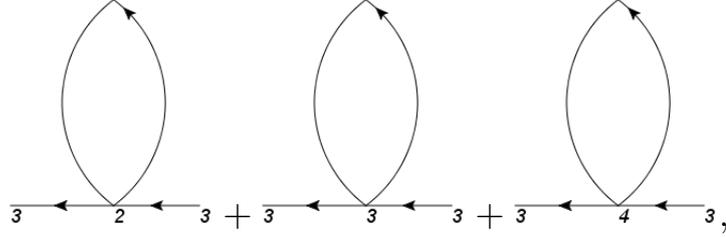


$$\begin{aligned}
&= \int_{t_i}^{t_0} dt (n_{DD}(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\psi_4^+ \psi_4}^{(1)} d_{DD}(t - t_2) = \\
&= \frac{ig}{4\hbar} \int_{t_i}^{t_0} dt \int dp [\theta[0] + \bar{n}(p)] \left( e^{-i\omega(k)(t_1-t)} (\bar{n}(k) + 1) e^{-i\omega(k)(t-t_2)} \bar{n}(k) \right) = \\
&= \frac{ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) e^{-i(t_1-t_2)\omega(k)} \bar{n}(k) (1 + \bar{n}(k)) (t_0 - t_i)
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Here, the convention  $\theta(0) = 0$  are implied which mean that a chronological contraction equal to normal one at coinciding time arguments. The wave-vector  $p$  integral of the propagators with coinciding time arguments is taken over the closed loop. Moreover, the wave-vector integral consist of the mean occupation factor  $n(p)$  which makes such integral convergent. On the other hand, the time integral gives rise to terms which diverge in the limit  $t_f \rightarrow \infty$ ,  $t_i \rightarrow -\infty$ . It should be noted that if the model is analysed in the frequency representation on the whole

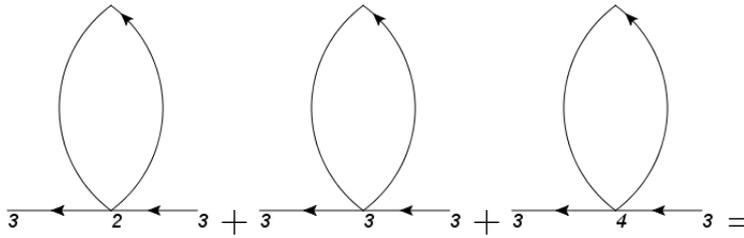
time axis this singularity appears in the form of a pinch singularity( integration contour in the complex plane pinched between two poles of propagators of contraction) as a product of two frequency  $\delta$  functions with coinciding arguments.

However, taking into account sum of three diagrams(with Dirac operators only) in (1.34):



$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}, \quad (1.39)$$

one can notice that corresponding divergences are cancelled. More specific, the above sum can be written in the following form:



$$\begin{aligned} &= \int_{t_0}^{t_f} dt (n_{DD}(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\psi_2^+ \psi_2}^{(1)} d_{DD}(t - t_2) + \\ &+ \int_{t_i}^{t_f} dt (\Delta(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\psi_3^+ \psi_3}^{(1)} (\Delta(t - t_2) + d_{DD}(t - t_2)) + \\ &+ \int_{t_i}^{t_0} dt (n_{DD}(t_1 - t) + d_{DD}(t_1 - t)) \Sigma_{\psi_4^+ \psi_4}^{(1)} d_{DD}(t - t_2) = \\ &= \frac{-ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) e^{-i\omega(k)(t_1 - t_2)} (t_1 - t_2) [\theta(t_1 - t_2) + \bar{n}(p)] \end{aligned} \quad (1.40)$$

The linear growth in time  $t_1 - t_2$  of the above formula is not a divergence, but nevertheless is unusual behaviour of the loop correction. The meaning of this linear growth is more transparent in the frequency space: the Fourier transformation of the right side of (1.40) with respect to  $t_1 - t_2$  gives rise to the following expression:

$$\begin{aligned}
& \frac{-ig}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) \left[ -\frac{1}{(\omega - \omega(k) + i\delta)^2} - 2\pi i \delta'(\omega - \omega(k)) \bar{n}(k) \right] = \\
& = \frac{g}{4\hbar} \int dp \bar{n}(p) \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{i}{\omega - \omega(k) + i\delta} + 2\pi \delta(\omega - \omega(k)) \bar{n}(k) \right], \tag{1.41}
\end{aligned}$$

where  $\delta'$  is the derivative of delta function and the expression in square brackets on the right side is the Fourier transform of the propagator  $\Delta + d_{DD}$ . That is why, (1.40) is just the leading term of an expansion in a shift of the frequency. Curious fact, that (1.41) is not obtainable by direct substitution Fourier transformation in propagators.

Now one can notice, that the term (1.40) in frequency space could be interpreted as a shift (renormalization) of the chemical potential by the amount  $g \int dp \bar{n}(p)$ . More conveniently this fact may be seen by the use of the reduced vertex (1.26) with respect to the generation of thermal contraction, i.e. (in generic notation):

$$V_{red}(\varphi) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} d \frac{\delta}{\delta \varphi} V(\varphi)}, \tag{1.42}$$

which in the case of interaction in (1.25) amount to (integrals in functionals are implied):

$$\begin{aligned}
V_{red}(\psi, \psi^+) &= e^{\frac{\delta}{\delta \psi^+} d \frac{\delta}{\delta \psi}} \left( \frac{g}{4} \psi^{+2} \psi^2 \right) = \\
&= \frac{g}{4} \psi^{+2} \psi^2 + g \left( \int dp \bar{n}(p) \right) \psi \psi^{+2} \psi^+ \psi + \frac{g}{2} \left( \int dp \bar{n}(p) \right)^2. \tag{1.43}
\end{aligned}$$

The last term on the right side is an unimportant constant, however the second one directly yields a fluctuation correction to the chemical potential. Then one can use the fact that when reduced vertices are used, there are no more closed loops of single propagators in the Feynman graphs of the model. That is why the apparent divergences produced by closed loops of single propagators may be dealt with explicitly once and for all.

Nonetheless, oscillating time dependence occurs in other graphs as well with the subsequent generation apparent divergences. It is quite tedious to collect all

such divergences for every type of the diagrams. That is why, it is convenient to introduce some temporal regularization to deal with this kind of divergence.

The most obvious way to introduce regularization is to alter propagators of the model in the following way:

$$\begin{aligned}
\Delta_{reg}(t, t', k) &= \theta(t - t') e^{-i\omega(k)(t-t') - \gamma(t-t')} \\
\tilde{\Delta}_{reg}(t, t', k) &= \theta(t' - t) e^{-i\omega(k)(t-t') + \gamma(t-t')} \\
d_{DDreg}(t, t', k) &= e^{-i\omega(k)(t-t') - \gamma|t-t'|} \bar{n}(k) \\
d_{DEreg}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-i(t-t_0) + t' - \gamma|t-t_0|)} \bar{n}(k) \\
d_{EDreg}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-t + i(t'-t_0) - \gamma|t'-t_0|)} \bar{n}(k) \\
n_{DDreg}(t, t', k) &= e^{-i\omega(k)(t-t') - \gamma|t-t'|} \\
n_{DEreg}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-i(t-t_0) + t' - \gamma|t-t_0|)} \\
n_{EDreg}(t, t', k) &= e^{\omega(k)(-t + i(t'-t_0) - \gamma|t'-t_0|)}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Here, to regularize the propagators we introduce some attenuation  $\gamma$  with respect to time in both time direction. The dependence of the attenuation coefficient  $\gamma > 0$  on  $k$  will be specified later. Physicality, this temporal regularization corresponds to introduction of energy dissipation to a Hamiltonian quantum system. The attenuation is a feature brought about by loop correction in the perturbation expansion anyway and, as will be demonstrated and discussed in the following section, is a crucial feature in the renormalization of the model. Having regularized propagators (1.44) allow one to safely pass to the limit  $t_i \rightarrow -\infty$  and  $t_f \rightarrow \infty$ . Now we recall that physical meaning of  $t_0$  is a relaxation time in the system and one faces two possible option. If we put  $t_0$  (or choose any other finite value), then the vertices of the density operator field remain connected to others and we are left with the full perturbation theory (1.31),(1.32). Such choice is appropriate for problems with time scales of the order of relaxation time (to equilibrium if steady state). Here, our main concern is describing the critical behaviour of a system in a neighbourhood of the transition to the superfluid phase. Therefore the time considering here is much larger that the relaxation time and in this case

it is reasonable to send the reference time  $t_0$  to  $-\infty$ , which makes the correlation functions  $d_{DEreg}, d_{EGreg}, n_{DEreg}$  and  $n_{EDreg}$  vanish and also removes the contribution of the fields  $\psi_4, \psi_4^+$  in (1.31). It should be noted, that in this argument the density operator is time-independent. There are other options to deal with statistical averaging of the time-ordered products of Heisenberg operators, which are not discussed here.

Overall, after passing considering limits (1.32) are transformed in the following form:

$$\underline{\Delta}_{reg} = \begin{pmatrix} \Delta_E + d_{EE} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta}_{reg} + d_{ddreg} & n_{DDreg} + d_{DDreg} \\ 0 & d_{DDreg} & \Delta_{reg} + d_{DDreg} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

The structure of the propagator matrix reveals that the pair the fields  $\psi_1^+$  and  $\psi_1$  is decoupled from the rest in this approach and the only temperature dependence remains in the propagators. Also one can notice that the functional in  $\psi_1^+$  and  $\psi_1$  gives rise to  $\frac{Z_G}{Z_0}$ , thus the functional representation (1.31) is replaced by [17]

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \left[ e^{\sum_{l=2}^3 \frac{\delta}{\delta\psi_l} \underline{\Delta}_{reg} \frac{\delta}{\delta\psi_l^+}} \psi_3(x_1) \cdots \psi_3^+(x_n) e^{\frac{ig}{4\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx \psi_2^{+2} \psi_2^2 - \frac{ig}{4\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx \psi_3^{+2} \psi_3^2} \right] \Big|_{\psi_i=0} \quad (1.46)$$

with the regularized propagator:

$$\underline{\Delta}_{reg} = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_{reg} + d_{DDreg} & n_{DDreg} + d_{DDreg} \\ d_{DDreg} & \Delta_{reg} + d_{DDref} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

This gives rise the perturbation theory for the time-dependent Green's function at finite temperature proposed by Keldysh [20]. From this line of argument it is clear that the limit  $t_0 \rightarrow -\infty$  in the presence approach is equal to neglecting all correlations in the initial distribution of particles.

To simplify following calculation and analysis of divergences with perturbation theory and for analysis of divergences it is convenient to use different set

of Green's function. To do this one must propose a substitution of the field  $\hat{\psi}_3, \hat{\psi}_3^+, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_2^+$  which make the matrix propagators (1.32) more simpler function than (1.47). Such substitution written in terms of functional variables was proposed by Keldysh in his original paper:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta^+ \\ \xi \\ \xi^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_3 - \psi_2 \\ \psi_3^+ - \psi_2^+ \\ \psi_2 + \psi_3 \\ \psi_2^+ + \psi_3^+ \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

In term of these Retarded-Advanced-Keldysh(RAK) fields the reduction operator of the perturbation expansion is

$$P = e^{-\frac{\delta}{\delta\eta}\tilde{\Delta}_{reg}\frac{\delta}{\delta\xi^+} + \frac{\delta}{\delta\xi}\Delta_{reg}\frac{\delta}{\delta\eta^+} + \frac{\delta}{\delta\xi}\Delta_{reg}^K\frac{\delta}{\delta\xi^+}}, \quad (1.49)$$

where  $\Delta_{reg}^K$  is the (regularized) Keldysh function:

$$\Delta_{reg}^K = e^{\omega(k)(-i(t-t')-\gamma|t-t'|)(1+2\bar{n}(k))} \quad (1.50)$$

Under such substitution of fields the interaction functional becomes:

$$\begin{aligned} S_I(\eta, \eta^+, \xi, \xi^+) &= \frac{g}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx (\psi_2^{+2}\psi_2^2 - \psi_3^{+2}\psi_3^2) = \\ &= -\frac{g}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dx (\eta^+\xi^+\xi^2 + \xi^{+2}\xi\eta + \xi^+\eta^+\eta^2 + \eta^{+2}\eta\xi) = \\ &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4, \end{aligned} \quad (1.51)$$

where the shorthand notation on the right side will be used further to identify the different field structure of the interaction terms. Later, for the purpose of the renormalization group, each  $V_i$  will have each coupling constant  $g_i$ . In the regularized model a functional-integral representation may be constructed with

the use of the standard trick [2; 19], which assumes the form:

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{\delta}{\delta\eta}\tilde{\Delta}_{reg}\frac{\delta}{\delta\xi^+}+\frac{\delta}{\delta\xi}\Delta_{reg}\frac{\delta}{\delta\eta^+}+\frac{\delta}{\delta\xi}\Delta_{reg}^K\frac{\delta}{\delta\xi^+}} = \\
& = \frac{1}{C} \int \mathcal{D}E \int \mathcal{D}E^+ \int \mathcal{D}X \int \mathcal{D}X^+ e^{-X^+[\frac{\partial}{\partial t}+i\omega(k)-\gamma]E-E^+[\frac{\partial}{\partial t}+i\omega(k)+\gamma]X-2E^+\gamma(1+2\bar{n}(k))E} \\
& \cdot e^{E\frac{\delta}{\delta\eta}+E^+\frac{\delta}{\delta\eta^+}+X\frac{\delta}{\delta\xi}+X^+\frac{\delta}{\delta\xi^+}}
\end{aligned} \tag{1.52}$$

where the normalization factor is

$$C^{-1} = \det \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k) + \gamma \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k) - \gamma \right] \right| \tag{1.53}$$

Linear exponential of derivatives produce shifts in the integration variables. Therefore, the functional-differential representation (1.46) of Green's function gives rise to the functional integral representation of Green's functions of RAK field in the following form

$$\begin{aligned}
G(A, A^+, B, B^+) & = e^{-\frac{\delta}{\delta\eta}\tilde{\Delta}_{reg}\frac{\delta}{\delta\xi^+}+\frac{\delta}{\delta\xi}\Delta_{reg}\frac{\delta}{\delta\eta^+}+\frac{\delta}{\delta\xi}\Delta_{reg}^K\frac{\delta}{\delta\xi^+}} \\
& \cdot e^{\frac{i}{\hbar}S_I(\eta,\eta^+,\xi,\xi^+)+A^+\xi+B^+\eta+A\xi^++B\eta^+} \Bigg|_{\eta=0,\xi=0,cj} = \\
& = \int \mathcal{D}\eta \int \mathcal{D}\eta^+ \int \mathcal{D}\xi \int \mathcal{D}\xi^+ e^{-\xi^+[\frac{\partial}{\partial t}+i\omega(k)-\gamma]\eta-\eta^+[\frac{\partial}{\partial t}+i\omega(k)+\gamma]\xi} \\
& \cdot e^{-\eta^+(2\gamma(1+2\bar{n}(k)))\eta+\frac{i}{\hbar}S_I(\xi,\xi^+,\eta,\eta^+)+A^+\xi+B^+\eta+A\xi^++B\eta^+}
\end{aligned} \tag{1.54}$$

It should be noted that such formula exists only in regularized model, when  $\gamma > 0$  and  $\Delta_{reg}^K$  is not a solution of the free-field equation of motion, because in other way, (1.32) cannot be inverted due to non zero kernel of one of operators.

In representation (1.54) of the generating function of Green's function in RAK fields of the regularized model the propagator matrix is given unambiguously as the inverse of the differential operator in the following quadratic form of the

action functional:

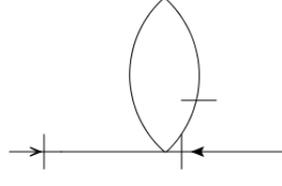
$$\begin{aligned}
S_0(\eta, \eta^+, \xi, \xi^+) = & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dk \eta^+(t, -k) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu + i\hbar\gamma \right) \xi(t, k) + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dk \xi^+(t, -k) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu + i\hbar\gamma \right) \eta(t, k) + \quad (1.55) \\
& + 2i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dk \eta^+(t, -k) [(1 + 2\bar{n}\hbar\gamma)] \eta(t, k)
\end{aligned}$$

Separation of the advanced and retarded propagators allows to probe a loop theorem similar to that in stochastic field theory [2]. The idea is based on two properties of the propagators in the reduction operator (1.49). First, only retarded and advanced propagators are attached to field arguments  $\eta$  and  $\eta^+$  in the interaction functional. Second, in the retarded and advanced propagators the lesser time argument is always that of  $\eta$  or  $\eta^+$ . Thus, in a time-ordered propagator starting from the  $\eta$  or  $\eta^+$  field of a vertex, the time argument grows from that of the (time-local) vertex. In the vertices brought about by the interaction functional (1.51), there is always at least one field  $\eta$  or  $\eta^+$  which thus gives rise to at least one time-ordered propagator with time direction from the vertex. In interaction vertices there is always at least one field  $\xi$  or  $\xi^+$  as well, which makes it possible (but not necessary, in general) to attach a time-ordered propagator to that vertex with the time direction to the vertex. Due to these properties, if in a connected graph there is a time-ordered propagator between two vertices, then in this graph there is necessarily a chain of time-ordered propagators with the same direction of time in all of them. There are now two possibilities: the end points of the chain of time-ordered propagators correspond to external field arguments of a connected Green's function or the chain forms a closed loop, in which case  $\theta(0)$  arise and value of the whole graph is equal to zero.

This theorem has an essential consequence: one-irreducible graphs with external  $\xi$  or  $\xi^+$  arguments are equal zero because they are obliged to have a closed



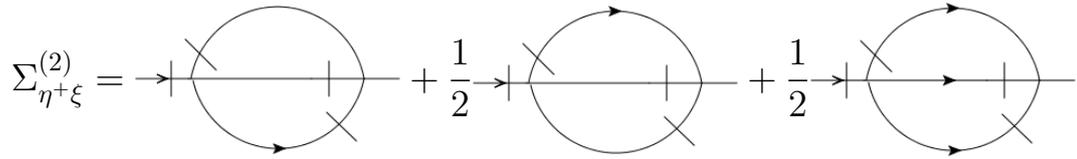
For example:



$$(1.59)$$

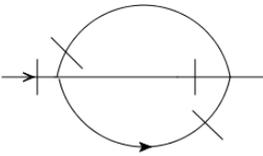
But in above section was discovered that such loops do not have UV divergences due to presence of  $\bar{n}$ . They only redefine the value of the chemical potential. It is necessary to consider two-loop graphs. According to the loop theorem of previous section, the  $\Sigma$  matrix contains the elements  $\Sigma_{\eta\eta^+}$ ,  $\Sigma_{\eta^+\xi}$  and  $\Sigma_{\xi^+\eta}$ . Such elements are the diagrams with external fields  $\eta, \eta^+, \eta^+, \xi$  and  $\xi^+, \eta$  respectively.

Let us consider the element  $\Sigma_{\eta^+\xi}$  in two loop approximation. In consist of following diagrams:



$$\Sigma_{\eta^+\xi}^{(2)} = \text{Diagram 1} + \frac{1}{2} \text{Diagram 2} + \frac{1}{2} \text{Diagram 3} \quad (1.60)$$

Here superscript refers to the perturbation order. Above diagrams contain of UV divergences, thus to estimate the role of  $\gamma$  one have to introduce some momentum regularization here. Our main concern is not evaluation above diagrams rather estimation their value and discover role of  $\gamma$ . Therefore, let us consider that all momentum bounded by some momentum cutoff  $\Lambda$ . Then value of each diagram can be easily obtained:



$$= -\frac{g^2}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} dk \int_{|q|<\Lambda} dq \int_{-\infty}^{\infty} dt \theta(-t) (2n(k) + 1)(2n(q) + 1) \cdot \exp\left(\frac{\gamma |t| (4\mu - m\hbar^2 (k^2 + q^2)) + mt\hbar^2 (k - q)(\gamma k - (\gamma + 2i)q) - 2(\gamma + i)\mu t}{2\hbar}\right) \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= -\frac{g^2}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} dk \int_{|q|<\Lambda} dq \int_{-\infty}^{\infty} dt \theta(-t) (2n(q) + 1) (2n(k - q) + 1) \\
&\exp \left( \frac{\gamma |t| (4\mu - m\hbar^2 (k^2 - 2kq + 2q^2)) + t (m\hbar^2 (\gamma k^2 - 2ikq + 2iq^2) - 2(\gamma + i)\mu)}{2\hbar} \right)
\end{aligned} \tag{1.62}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= -\frac{g^2}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} dk \int_{|q|<\Lambda} dq \int_{-\infty}^{\infty} dt \theta(-t) \\
&\exp \left( \frac{t ((-3\gamma - i)\mu + m\hbar^2 (\gamma k^2 - (\gamma + i)kq + (\gamma + i)q^2))}{\hbar} \right)
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Several similar term in different graphs cancel, whereafter one can obtain the following expression( in the wavevector-frequency representation):

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\eta+\xi}^{(2)} &= \text{Diagram 1} + \frac{1}{2} \text{Diagram 2} + \frac{1}{2} \text{Diagram 3} = \\
&= -\frac{g^2}{(2\pi)^6} \int_{|k|<\Lambda} dk \int_{|q|<\Lambda} dq \int_0^{\infty} \exp \left[ -i \left( \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar(k - q)^2}{2m} - \frac{\mu}{\hbar} \right) t \right] \cdot \\
&\cdot \left[ n[q] - \frac{1}{2} n[k][n[k - q] + n[k][n[q]] \right]
\end{aligned} \tag{1.64}$$

For simplicity the expression is presented at zero external wave vector and frequency respectively. The existence of dissipation is ensured by the non vanishing real part of this formula. Using the following identity, one can obtain:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} dt \exp \left[ -i \left( \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar(k - q)^2}{2m} - \frac{\mu}{\hbar} \right) t \right] = \\
&= -i \left[ \left( \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar(k - q)^2}{2m} - \frac{\mu}{\hbar} \right) t \right]^{-1} + \\
&+ \pi \delta \left( -i \left( \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar(k - q)^2}{2m} - \frac{\mu}{\hbar} \right) t \right)
\end{aligned} \tag{1.65}$$

It can be noted that the first term of r.h.s of (1.65) leads to the divergent in  $\Lambda$  imaginary part of (1.64), however the second one in r.h.s of (1.65) yields the positive convergent real part of  $\Sigma_{\eta+\xi}$ . Therefore matrix of  $D^{-1}$  is triangular, that is why

$$\det d^{-1} = -\det D_{\xi+\xi}^{-1} \det D_{\xi+\eta}^{-1} \quad (1.66)$$

The zeros of this determinant determine the quasi-particle spectrum of system. It will be showed in the following, that the among zeros there are complex ones.

## Chapter 2

# Infra-red model. Calculation of $z$ critical exponent

### 2.1. Effective Infra-red model

We are going to investigate critical behaviour of Bose systems in vicinity of  $\lambda$ -point with the aid of the renormalization group. Main divergences occurring in such systems are mainly infra-red ones, that is why one has to construct effective infra-red model in following sense. For the renormalization group analysis it is necessary to construct an effective large-scale (wave vector  $k \rightarrow 0$ ) model with certain canonical dimension of the fields and subsequent dimensions of parameters [2]. The effective model of a continuous (or the phase transition of the second order) phase transition takes into account that long-wave fluctuations play essential roles in a neighbourhood of the critical point and correlation radius  $r_c$  becomes infinite at the phase transition point. Thus, all infra-red's irrelevant terms must be dropped in such a model. To define, what term are IR-irrelevant one need to calculate canonical dimensions of the model. Prescription of canonical dimensions implies that all propagator of perturbation theory posses the property of generalized homogeneity. The choice of the parameters of the latter then determines the region of dynamic variables in which the asymptotic behaviour is sought. The average occupation number  $\bar{n}(p)$  factor contains certain divergences in the critical region where  $p^2 \sim \mu \rightarrow 0$ . Such behaviour means that in the region of large relative distances  $|x - x'| \rightarrow \infty$  or, what is equivalent, of small wave vectors  $k \rightarrow 0$  the inequality  $\bar{n} \gg 1$  holds. However, due to thermal contractions  $d$ , the propagators for basic fields  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  do not satisfy the above property of generalized homogeneity. In other words, in the original variables determination of canonical dimensions is obscured by the structure of the dynamic propagators  $\Delta + d_{DD}$  and

$\tilde{D} + d_{DD}$  in which the thermal contraction  $d_{DD}$  yields the dimensionally leading contribution in the IR limit and dynamic of the model is lost. The situation changes drastically in the new pair of the fields  $\eta, \eta^+, \xi, \xi^+$  from (1.48). The propagators in (1.49) possess the usual homogeneity of a non-relativistic theory at the outset and approximations are required only in the Keldysh function  $\Delta_{reg}^K$  from (1.49).

In IR limit the unregularized Keldysh function:

$$\Delta_{IR}^K(\omega, k) = \frac{4\pi T_C \delta(\omega - \omega(k))}{\hbar \omega(k)}, \quad (2.1)$$

where  $T_C$  is the critical temperature in energy units. This propagator is obviously generalized homogeneous function of the frequency and wave numbers with the canonical dimension  $-4$  under following scaling:

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \lambda^2 \omega \\ k &\rightarrow \lambda k \end{aligned} \quad (2.2)$$

That is why, such propagator can be used to obtain the canonical dimension of the regularized propagators. The renormalization theory will be applied here to analysis of the large-scale behaviour of the model in the way similar to that in the theory of the critical phenomena and stochastic dynamics. Such approach is based on the subtle connection between ultraviolet(UV) and infra-red(IR) divergences at the critical dimension(so called logarithmic theory).

From the first chapter, one know that with unregularized propagators (1.32) it is not possible to obtain action for the model, due to the fact that corresponding matrix (1.32) is not invertible. Therefore canonical dimensions are calculated through the UV exponent (degree of divergence) of a one-irreducible graph  $\gamma$  of the model:

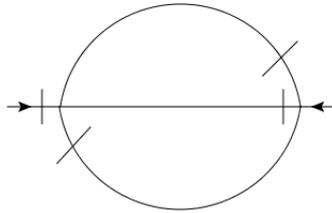
$$\begin{aligned} d_\gamma &= d + 2 + (d - 4)V_1 + (d - 4)V_2 + dV_3 + dV_4 - \frac{d + 2}{2}N_{\eta^+} - \\ &- \frac{d + 2}{2}N_\eta - \frac{d - 2}{2}N_{\xi^+} - \frac{d - 2}{2}N_\xi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where  $V_i$  is the number of vertices  $i$  (labelled according to (1.51)) in the one-irreducible graph and  $N_{\eta^+}, N_{\eta}, N_{\xi^+}, N_{\xi}$  are the number of external arguments corresponding to the fields  $\eta^+, \eta, \xi^+, \xi$  respectively. Using (2.3) one can immediately find the canonical dimensions of the fields and the critical dimension of the model  $d_c$ . More precisely:

$$\begin{aligned} d_{\xi} &= \frac{d}{2} - 1 \\ d_{\xi^+} &= \frac{d}{2} - 1 \\ d_{\eta} &= \frac{d}{2} + 1 \\ d_{\eta^+} &= \frac{d}{2} + 1 \\ d_c &= 4 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Furthermore, using above results it can be concluded that canonical dimensions of the vertices  $V_3, V_4$  in (1.51) are strictly positive, thus omitting them has no impact on the infra-red behaviour [19].

Nevertheless, the connection between the UV and IR divergences is less straightforward in the regularized model. Discovering that fact require to consider the leading two-loop contribution to the one-irreducible function  $\Gamma_{\eta^+\eta}$  assuming constant attenuation factor  $\gamma$ . The only two-loop graph which gives contribution to  $\Gamma_{\eta\eta^+}$  can be represented in the following way:



(2.5)

The diagram contains three regularized Keldysh functions. In the frequency-wave representation the propagator have the following form:

$$\Delta_{IRreg}^K(\omega, k) = \frac{4\gamma}{T_C} \hbar\omega(k) [(\omega - \omega(k))^2 + \gamma^2] \tag{2.6}$$

Omitting irrelevant coefficients we have( here and henceforth  $\gamma^{(i)}$  denotes a graph  $\gamma$  with vanishing external frequency and wave vector; the superscript refers to the

number of loops)

$$\gamma_{\eta+\eta}^{(2)} \sim \gamma \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega(k)\omega(q)\omega(k+q)} \frac{1}{(\omega(k) + \omega(q) - \omega(k+q))^2 + 9\gamma^2} \quad (2.7)$$

According to the formal degree of divergence, the Fourier integral contributing to  $\Gamma_{\eta+\eta}$  has the wave-number dimension equal to

$$d_\gamma = 2(d - 4) \quad (2.8)$$

However, in the regularized model things are different. In the critical region chemical potential tends to the zero, that is why one can adopt the following behaviour of  $\omega(k) \sim \frac{\hbar k^2}{2m}$ . In this case, the integral (2.7) is UV convergent at  $d < 5$  and below five dimension the dependence on the attenuation coefficient  $\gamma$  can be obtained by scaling it out.

$$\gamma_{\eta+\eta}^{(2)} \sim \gamma^{d-4} \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega(k)\omega(q)\omega(k+q)} \frac{1}{(\omega(k) + \omega(q) - \omega(k+q))^2 + 9} \quad (2.9)$$

R.h.s of the expression (2.9) shows that its limit  $\gamma \rightarrow 0$  diverges below four dimensions, which signals that there are IR divergences in the model below four dimensions as expected. However, the UV behaviour of the corresponding integral is quite different from the IR behaviour and that fact complicate using framework of renormalization group. Nevertheless the attenuation parameter  $\gamma$  is quite arbitrary and that's allow one to make a choice of  $\gamma$  such that UV behaviour becomes more suitable for our purpose.

In the critical region the temporal behaviour of the system characterized by critical slowing down, i.e by vanishing of time derivatives with wave number. Thus, to take into account such property and preserve in the critical region the IR regularization due to attenuation, one must choose the wave-number dependent attenuation factor of the form  $\gamma \sim k^2$ . From the technical point of view this choice allows to use the the theory of UV renormalization and the renormalization group for the analysis of the large-scale behaviour, because it leads to a model in

which the IR divergences appear just below the dimension, at which the model is logarithmic. Indeed, if we choose  $\gamma = a\omega(k) \sim k^2$ , where  $a$  is a positive number, we obtain:

$$\gamma_{\eta^+\eta}^{(2)} \sim \gamma \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega(k)\omega(q)\omega(k+q)} \frac{1}{(\omega(k) + \omega(q) - \omega(k+q))^2 + (\omega(k) + \omega(q))} \quad (2.10)$$

instead of (2.9). Now the wave-number dimension of this integral is  $2d - 8$  as in the unregularized model. This superficial degree of divergence corresponds to the usual UV divergence at four dimensions, to which dimensional regularization is applied under the renormalization. Finally IR and UV divergences are entangled and that's allow one to use standard renormalization group's technique.

The expression (2.10) posses a finite limit, as  $a$  tend to zero(it will be shown later) and produce a term to effective action which completely changes the structure of the perturbation theory in the functional representation. The point is that with the set of original propagators the quadratic form in the free part of the action cannot be inverted, because the Keldysh function  $\Delta_{reg}^K(\gamma = 0)$  is a solution of the homogeneous free-field equation of motion, therefore kernel of the operator in the free part of the action is not equal to 0, thus the inverse of the operator does not exit. However, with account of the two-loop correction the Keldysh's function retains the form of the regularized function, in which  $a$  in the numerator is replaced by a finite quantity of the order  $g^2$ . Such correction the set of propagators (1.32) can be inverted unambiguously giving rise to a well-defined action in the functional integral (1.54).

It should be noted that without the attenuation term the action of the model if fully symmetric with respect to the changes of fields:

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow \xi \\ \eta^+ &\rightarrow \xi^+ \\ \xi &\rightarrow \eta \\ \xi^+ &\rightarrow \eta^+, \end{aligned} \quad (2.11)$$

since there is no term of the form  $\eta^+\eta$  in that case. Introduction  $\gamma$  however, break this symmetry and allows to introduce different canonical dimensions in accordance with the power-counting expression (2.3) for the fields directly in the action.

For the sake of simplicity, we will use the massless scheme to investigate the critical phenomena, in the model considered it implies  $\mu = 0$ , so that  $\bar{n}(k) \approx \frac{2mT_C}{k^2}$ . The extra parameters  $T_C$  and  $\hbar$  can be eliminated from the propagators by the scaling of coordinated, time and fields. This lead to propagators of the effective IR theory in dimensionless variables in the form:

$$\begin{aligned}
\langle \xi(t, k)\xi^+(t', -k) \rangle_0 &= \Delta_{IRreg}^K(t, k) = \frac{2}{k^2} e^{-iuk^2(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|} \\
\langle \eta(t, k)\eta^+(t', -k) \rangle_0 &= 0 \\
\langle \xi(t, k)\eta^+(t', -k) \rangle_0 &= \Delta_{reg}(t, k) = \theta(t - t') e^{-iuk^2(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|} \\
\langle \xi(t, k)\eta^+(t', -k) \rangle_0 &= -\tilde{\Delta}_{reg}(t, k) = -\theta(t' - t) e^{-iuk^2(t-t') - \alpha k^2 |t-t'|}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

with the dimensionless parameters  $\alpha$  and  $u$ . It is useful to observe that propagators include dissipative factors. According to the analysis of Sec 1.2.1, in the unregularized model dissipation appears as a result of two-loop corrections and it regularizes the apparent IR divergences in diagrams. Therefore, the formal small ( $\sim g^2$ ) parameter occurs in the denominators of loop contributions. This is inconvenient from the point of construction of the perturbation theory. To avoid these problems the dissipative factors were introduced into the regularized propagators at the outset. The dissipation parameter  $\alpha$  can be considered an additional regulator, whose smallness is not connected with the parameter of expansion  $g$ . With the aid of this regulator it is possible to construct the perturbation expansion in a straightforward manner. The value  $\alpha = 0$  corresponds to the initial unregularized model, but it will be shown in the following sections that non-zero  $\alpha$  is generated during renormalization of the theory. Therefore, from the technical point of view we are dealing with "generating terms" added to the basic action of the renormalized model at the outset in order to achieve renormalizability. Recall

that the dissipative term is chosen in the form  $\alpha k^2$  because we consider massless theory and require both canonical dimensions of the effective IR model and the connection between IR and UV divergences to hold in regularized model.

Inverting the matrix of (2.12) allow one to obtain the action of the effective infra-red model(integrals implied here and henceforth):

$$S = -4\alpha\eta^+\eta + \eta^+ \left[ -\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(iu + \alpha) \right] \xi + \xi^+ \left[ -\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(iu - \alpha) \right] \eta - \frac{ig_1}{2}\eta^+\xi^+\xi\xi - \frac{ig_2}{2}\xi^+\xi^+\eta\xi, \quad (2.13)$$

where  $g_1 = g_2 = g\frac{\hbar}{T_C}(\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_T})^d$ . Here  $\lambda_T$  is the thermal de Broglie wavelength at the critical temperature  $T_C$ . In the basic action (2.13) the coupling constants  $g_1, g_2$  are the equal ones only in the nonrenormalizable (i.e bare) theory. The labels here indicate that corresponding vertices  $\eta^+\xi^+\xi\xi$  and  $\xi^+\xi^+\eta\xi$  have different renormalization constants.

The model (2.13) was constructed for the problem of stochastic dynamics that is why it is appropriate to the notation implies the change of weight factor  $e^{iS}$  in the functional integral, which is usual in quantum mechanics, to  $e^{-S}$  adopted in statistical physics. In other words (2.13) can be transform to the following form:

$$S = 4\alpha\eta^+\eta + \eta^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(-iu - \alpha) \right] \xi + \xi^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(-iu + \alpha) \right] \eta + \frac{ig_1}{2}\eta^+\xi^+\xi\xi + \frac{ig_2}{2}\xi^+\xi^+\eta\xi, \quad (2.14)$$

In dynamics model it is convenient to use separate scaling dimensions with respect temporal and spatial variable with the convention  $d_\omega^\omega = 1, d_x^x = -1, d_k^k = 1, d_t^t = -1, d_t^k = d_k^t = 0$  and define the full canonical dimensions according to the scaling of the parabolic differential operator in the action (2.14):

$$d_Q = d_Q^k + 2d_Q^\omega \quad (2.15)$$

Using this formula, one can obtain canonical dimensions of field of and parameters

belonging to the model (2.14):

$$\begin{aligned}
d_\eta^t + d_{\eta^+}^t + 1 &= 0 \\
d_{\eta^+}^t + d_\xi^t &= 0 \\
d_{\xi^+}^t + d_\eta^t &= 0 \\
d_g^t + 2d_\xi^t + d_{\xi^+}^t + d_{\eta^+}^t + 1 &= 0 \\
d_{\eta^+}^k + d_\xi^k - d &= 0 \\
d_\eta^k + d_{\xi^+}^k - d &= 0 \\
d_{\eta^+}^k + d_\eta^k - d &= 0 \\
d_g^k + 2d_\xi^k + d_{\xi^+}^k + d_{\eta^+}^k - d &= 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Overall, the canonical dimensions of the fields and parameters listed in the following table.

	$\xi, \xi^+$	$\eta, \eta^+$	$\alpha$	$g$
$d_Q^\omega$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
$d_Q^k$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	0	$-d$
$d_Q$	$\frac{d}{2} - 1$	$\frac{d}{2} + 1$	0	$4 - d$

## 2.2. Multiplicative renormalization of the theory

The effective IR model with action (2.14) are considered in  $4 - \epsilon$  space dimensions. The superficial UV divergences of one-irreducible Green's functions  $\Gamma$  of the model (2.14) are determined by the UV exponent (2.3) at the critical dimension  $d_c = 4$ , i.e :

$$d_\Gamma^* = 6 - 3N_{\eta^+} - 3N_\eta - N_{\xi^+} - N_\xi \tag{2.17}$$

The structure of (2.14) bring the additional relation  $N_{\eta^+} + N_{\xi^+} = N_\eta + N_\xi$ . Using the loop theorem of Sec. 1.2 it can be see that there are no one-irreducible functions( and counterterms) without fields  $\eta, \eta^+$  such as  $\Gamma_{\xi+\xi}, \Gamma_{\xi+\xi+\xi\xi}$  and  $\Gamma_{\xi+\xi+\xi+\xi\xi\xi}$ . Thus, the divergent graphs are entirely contains in the following one-irreducible function:  $\Gamma_{\xi+\eta}, \Gamma_{\eta+\xi}, \Gamma_{\eta+\eta}, \Gamma_{\eta+\xi+\xi\xi}$  and  $\Gamma_{\xi+\xi+\xi\eta}$ . Hence, Green's functions of the

model (2.14) can be renormalized by power counting, moreover there are no counterterms of structure different from (2.14). Then the renormalizable action can be written in the form:

$$\begin{aligned}
S = & Z_0 \eta \eta^+ + \eta^+ \left( Z_1 \frac{\partial}{\partial t} + Z_2 \nabla^2 \right) \xi + \xi^+ \left( Z_3 \frac{\partial}{\partial t} + Z_4 \nabla^2 \right) \eta + \\
& + Z_5 \eta^+ \xi^+ \xi \xi + Z_6 \xi^+ \xi^+ \eta \xi
\end{aligned} \tag{2.18}$$

with complex renormalization constants  $Z_1, \dots, Z_6$ , Because  $Z_5$  and  $Z_6$  are not equal constants, we are obliged to consider renormalizable coupling constants  $g_1, g_2$  as absolutely different quantities. Furthermore, the bare coupling constants was real numbers, here, due to the fact that the renormalization constants  $Z_1, \dots, Z_6$  are the complex numbers, one must treat the renormalizable coupling constants in the same way, as complex quantities.

Under complex conjugation, the basic action (2.13) obeys the following symmetries( as was mentioned before  $\alpha$  is strictly positive number,  $\alpha \in \mathbb{R}$ )

$$S(\eta^+, \eta, \xi^+, \xi, g_1, g_2) = S^*(-\eta^+, -\eta, \xi^+, \xi, g_2^*, g_1^*) = S(\eta^+, \eta, -\xi^+, -\xi, g_2^*, g_1^*) \tag{2.19}$$

Integration by parts and vanishing of surface terms is implied here. Such symmetry oblige renormalization constants  $Z_1, \dots, Z_6$  to obey the following set of equations:

$$\begin{aligned}
Z_0(g_1, g_2) &= Z_0^*(g_2^*, g_1^*) \\
Z_1(g_1, g_2) &= -Z_3^*(g_2^*, g_1^*) \\
Z_2(g_1, g_2) &= -Z_4^*(g_2^*, g_1^*) \\
Z_5(g_1, g_2) &= -Z_6^*(g_2^*, g_1^*)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Also one can notice remnants of the gauge symmetry in (2.14). In other words,

the action has the obvious symmetry:

$$\begin{aligned}
\xi &\rightarrow \xi e^{ic} \\
\xi^+ &\rightarrow \xi e^{-ic} \\
\eta &\rightarrow \xi e^{ic} \\
\eta^+ &\rightarrow \xi e^{-ic}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

with the constants  $c$ . This symmetry allows to choose one of the fields as a real function. For simplicity of calculation we will assume that renormalization constants of field  $\eta, \eta^+$  are real.

Calculation of the two-loop counterterm to  $Z_0$  in the MS(minimal subtract scheme) yields a result finite in the limit  $\alpha \rightarrow 0$  and leads to:

$$\begin{aligned}
Z_0 = 4\alpha - \frac{g_1^2}{64\pi^4(u^2 + \alpha^2)\epsilon} &\left( \pi u + 2u \arctan \left( \frac{u}{4\alpha} - \frac{3\alpha}{4u} \right) + \right. \\
&\left. + \alpha \log \left[ \frac{4096\alpha^8}{(u^2 + \alpha^2)(u^2 + 9\alpha^2)^3} \right] \right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

where  $g_2 = g_1$  is implied. Details of calculations of the diagrams will be provided in the following sections. This expression shown that  $Z_0$  tend to a finite value even in the limit  $\alpha \rightarrow 0$ . This fact demonstrate that  $\alpha$  is generated during the process of renormalization. The common hypothesis about connection between dissipation in the hydrodynamic limit and the influence of hard modes to soft modes is here substantiated by the fact that the attenuation parameter  $\alpha$  is generated due to UV renormalization. It may be said that the UV renormalization is a method to take into account the influence of hard modes on the soft in the sense of the Kadanoff transformation.

The basic action (2.14) contains  $\alpha$  and  $\nabla^2$ . Comparing such action with the classical dynamic stochastic field theories one can regard  $\alpha$  as a kinetic coefficient. To select it in the other Laplace operators, we introduce some new charge  $u$ . In the model, the charge  $u$  plays role of a nonperturbative charge, which is characteristic for stochastic models of critical dynamics. That is why, we rescale parameter

$u \rightarrow \alpha u$  and the final form of the IR-effective action can be written as:

$$\begin{aligned}
S = & 4\alpha\eta^+\eta + \eta^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(-iu\alpha - \alpha) \right] \xi + \xi^+ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla^2(-iu\alpha + \alpha) \right] \eta^+ \\
& + \frac{ig_1\alpha}{2}\eta^+\xi^+\xi\xi + \frac{ig_2\alpha}{2}\xi^+\xi^+\eta\xi,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

In the expression, we have two different coupling constants. As mentioned before, they made different from each other because they renormalized differently. However, the only hyperspace  $g_1 = g_2^*$  leads to multiplicative renormalization.

The unusual divergences of theory discussed in Sec. 1.2 are manifested as poles in  $\alpha$  in the renormalization. Hence, the factor  $\alpha$  is explicitly separated from the charges  $g_1$  and  $g_2$  in the formula (2.23).

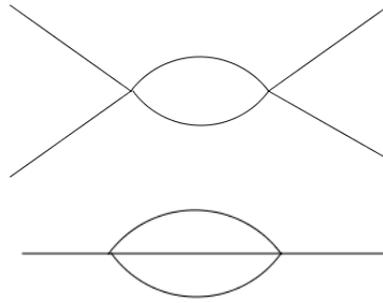
The symmetry relations (2.20) allow to conclude that action (2.53) can be multiplicatively renormalized by renormalization constants  $Z_\eta, Z_{\eta^+}, Z_\xi, Z_{\xi^+}, Z_{g_1}, Z_\alpha, Z_u$ . Moreover, due to the fact that parameters  $\alpha$  and  $u$  are real ones, the corresponding renormalization constants  $Z_\alpha$  and  $Z_u$  are also real quantities. These constants are connected with counterterms by equations:

$$\begin{aligned}
4\alpha Z_\alpha Z_{\eta^+} Z_\eta &= Z_0 \\
Z_{\eta^+} Z_\xi &= Z_1 \\
Z_\eta Z_{\xi^+} &= Z_1^* \\
iZ_\alpha Z_u Z_{\eta^+} Z_\xi \alpha u + Z_{\eta^+} Z_\xi Z_\alpha \alpha &= Z_2 \\
\frac{ig_1\alpha}{2} Z_{\eta^+} Z_\xi^2 Z_{\xi^+} Z_{g_1} &= Z_5
\end{aligned} \tag{2.24}$$

In the MS scheme, the renormalization constants  $Z_\alpha, Z_\eta, Z_{\eta^+}, Z_\xi, Z_{\xi^+}, Z_{g_1}, Z_{g_2}$  are the sum of unity and terms that have poles in  $\epsilon$ . In this case, the system of equation (2.24) is compatible and uniquely solvable on the considered hypersurface  $g_1 = g_2^*$ . To eliminate the complex parameters, one has to separate real and imaginary parts of the charges. In other words  $g_1 = g_{1r} + ig_{1i}$  and  $g_2 = g_{2r} + ig_{2i}$ . Therefore the



topology types of the diagrams:



(2.28)

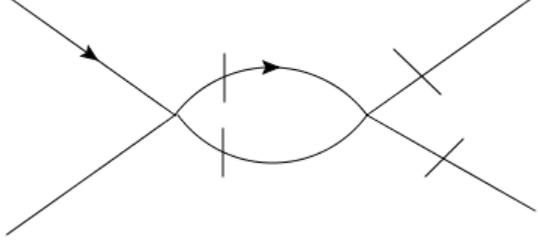
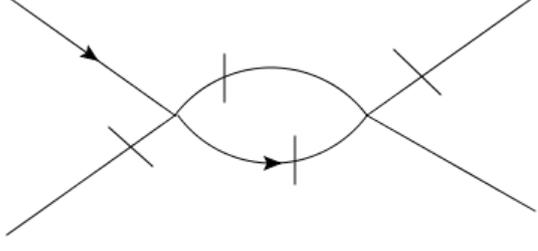
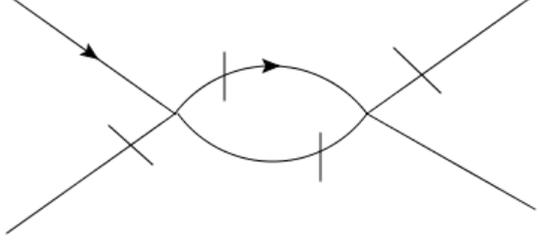
First of them, we are going to denote as "fishes" and second one as "melons". "Fishes" are obviously contribute to the corresponding one-irreducible functions  $\Gamma_{V_i}$ , where  $V_i$  is a vertices of the (2.53), i.e  $V_1 = \eta^+\xi^+\xi\xi$  or  $V_2 = \eta\xi\xi^+\xi^+$ . The "fishes" can be easily evaluated without any problems during the integration. In total, there are exist six diagrams of this topology:

Table 2.1. FishDiagrams

Nº	Diagram	s.c	$Z_i$	value
1		$\frac{1}{2}$	$Z_5$	1
2		1	$Z_5$	1
3		1	$Z_5$	1

*Continued on next page*

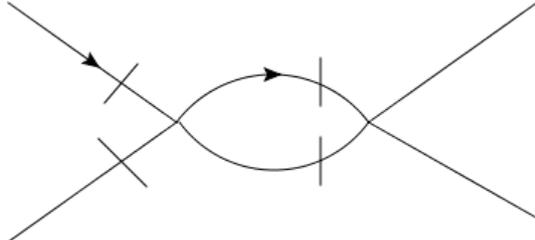
Table 2.1 — *Continued from previous page*

№	Diagram	s.c	$Z_i$	value
4		$\frac{1}{2}$	$Z_6$	1
5		1	$Z_6$	1
6		1	$Z_6$	1

Here diagrams are depicted in the second column, in the third the symmetry coefficients(s.c) are quoted. The fourth column indicates the renormalization constant to which diagram contributes. In the fifth column value of the pole parts of the diagrams are quoted in the renormalization of propagators and vertices corresponding to the basic action (2.14). The product of the value in the fifth column and the symmetry coefficient of the third column yields the contribution of the graph to the counterterm of renormalization action.(2.53).

Using the symmetry (2.20) one can reduce amount of evaluation by calculating the first three diagram of the above table then use (2.20) to obtain remain values. In fact, we can evaluate one of  $Z_5, Z_6$  to obtain other. For example, let us consider the first diagram from the table above(here and henceforth, zero external

frequency and momentum are implied for all diagrams of the fish's type):



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{2\theta(-t)e^{-2\alpha k^2|t|+2i\alpha k^2 t u}}{k^2} = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left( -\frac{i}{\alpha k^4(u-i)} \right) = -\frac{i}{8\alpha\pi^2(u-i)\epsilon} - \frac{i(2-\gamma+\log(4\pi))}{16\alpha\pi^2(u-i)} + O(\epsilon), \epsilon \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

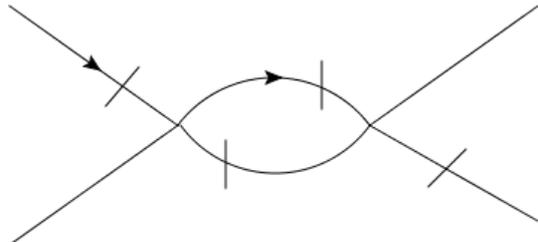
Here,  $\epsilon = 4 - d$ , where  $d$  - the dimension of the spatial space. Here, when integrating over  $k$  we use standard trick:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left( -\frac{i}{\alpha k^4(u-i)} \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^{-d}} \left( -\frac{i}{\alpha(k^2+m)^2(u-i)} \right) \tag{2.30}$$

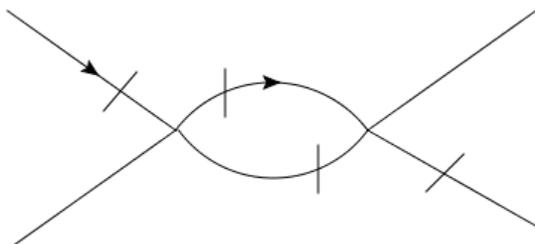
and then using the reference formula:

$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} dk (k^2+m)^{-\alpha} = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} m^{d/2-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha-\frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.31}$$

Other fish diagrams can be calculated in the similar fashion:

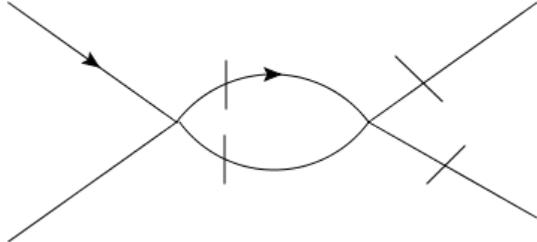


$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{2\theta(-t)e^{-2\alpha k^2|t|}}{k^2} \right\} = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\alpha k^4} = \frac{1}{8\alpha\pi^2\epsilon} - \frac{-2+\gamma-\log(4\pi)}{16\alpha\pi^2} + O(\epsilon), \epsilon \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{2.32}$$



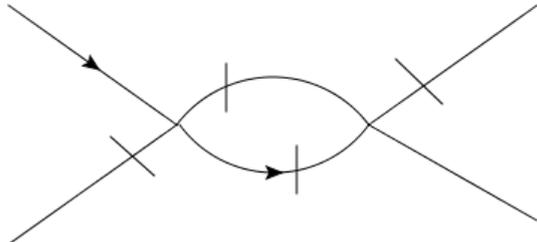
$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ -\frac{2\theta(-t)e^{-2\alpha k^2|t|}}{k^2} \right\} = \\
 &= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\alpha k^4} = \frac{-2+\gamma-\log(4\pi)}{16\pi^2} - \frac{1}{8\pi^2\epsilon} + O(\epsilon), \epsilon \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

The other three diagrams can be obtain from the symmetry (2.20), however here we are going to provide corresponding calculations.



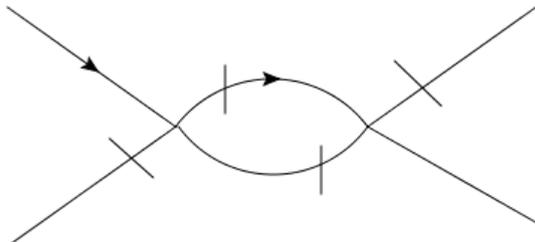
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ -\frac{2\theta(-t)e^{-2\alpha k^2|t|-2i\alpha k^2 t u}}{k^2} \right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left( -\frac{i}{\alpha k^4(u+i)} \right) = \frac{2-\gamma+\log(4\pi)}{16\pi^2(-1+iu)} - \frac{i}{8\pi^2(u+i)\epsilon} + O(\epsilon), \epsilon \rightarrow 0$$
(2.34)



$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{2\theta(-t)e^{-2ak^2|t|}}{k^2} \right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\alpha k^4} = \frac{1}{8\alpha\pi^2\epsilon} - \frac{-2+\gamma-\log(4\pi)}{16\alpha\pi^2} + O(\epsilon), \epsilon \rightarrow 0$$
(2.35)



$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \left\{ -\frac{2\theta(-t)e^{-2ak^2|t|}}{k^2} \right\} =$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\alpha k^4} = \frac{-2+\gamma-\log(4\pi)}{16\pi^2} - \frac{1}{8\pi^2\epsilon} + O(\epsilon), \epsilon \rightarrow 0$$
(2.36)

Here one can notice that the value of last three diagrams could be extracted using the symmetry (2.20) of the action (2.53). Thus, all one-loop diagrams contributing to the  $\Gamma_{V_i}$  was successfully evaluated. Hence, in the leading order of the perturbation theory  $Z_5$  has the following form:

$$Z_5 = \frac{ig_1\alpha}{2} - \frac{g_1^2\alpha}{16(1+iu)\pi^2\epsilon} - \frac{g_1^2\alpha}{8\pi^2\epsilon} + \frac{g_1g_2\alpha}{8\pi^2\epsilon} \quad (2.37)$$

To evaluate coefficient at the counterterms  $Z_0, Z_1, Z_2$  the following diagrams are calculated:

Table 2.2. Melon Diagrams

№	Diagram	s.c	$Z_i$	value
1		$\frac{1}{2}$	$Z_0$	1
2		1	$Z_1, Z_2$	1
3		1	$Z_1, Z_2$	1
4		$\frac{1}{2}$	$Z_3, Z_4$	1
5		1	$Z_3, Z_4$	1

Here contribution to  $Z_1, Z_3$  are the coefficients of  $i\omega$  and contribution to  $Z_2, Z_4$  are the coefficients of  $k^2$  in the MacLaurin expansion of the diagrams as functions of external frequency and wave number. The value of these diagrams can be calculated though several methods. The most common approach to deal with many-loop calculation is the well-known Sector Decomposition(SD), however it is a pure numeric method that is not allow to obtain value of the diagrams as functions from non-perturbative charge  $u$ . Nevertheless, there are exits technique which allow extract exact answers for diagrams of certain topology. Two and even three loops diagrams of the model (2.53) posses necessary topology to apply method mentioned above. We revised two of these methods but in following prefer

which allow to extract analytical answers for some diagrams.

### 2.3.1. Sector Decomposition method

Calculation of the diagrams using Sector Decomposition method are mainly based on the following fact, which can be directly proved. More precisely, let us consider simple  $\varphi^4$  theory with basic action:

$$S(\varphi) = \int dx \left[ \frac{(\partial\varphi)^2}{2} + \frac{\tau\varphi^2}{2} + \frac{g\varphi^4}{4!} \right] \quad (2.38)$$

Then typical expression for the diagrams can be written as:

$$J_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int dk_1 \cdots dk_n \prod_{i=1}^N E_i^{-1} \quad (2.39)$$

Here  $n$  is the number of loops in a diagram,  $N$  is a number of line in the graph,  $E_i = k_i^2 + \tau$  typical propagator with momentum  $k$  of the model like  $\varphi^4$ . This momentum is a linear combination of momentum of integration. Therefore, one can transform above expression into the following form:

$$J_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int dk_1 \cdots dk_n \prod_{i=1}^l E_i^{-\lambda_i} \quad (2.40)$$

where  $l$  is the number of different energies and  $\lambda_i$  is the number of line with corresponding energy. The denominator of the above expression is a product of quadratic forms with respect to a momentum of integration. Using Feynman representation, such product can be reduced to one quadratic form with integration over the auxiliary parameter  $x_i$ :

$$E_1^{\lambda_1} \cdots E_n^{-\lambda_l} = \frac{\Gamma(\sum_{k=1}^l \lambda_k)}{\prod_{i=1}^l \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \frac{\delta(\sum_{k=1}^l x_k - 1) \prod_{k=1}^l x_k^{\lambda_k - 1}}{\left[ \sum_{k=1}^l E_k x_k \right]^{\sum_{k=1}^l \lambda_k}} \quad (2.41)$$

The denominator of the expression above is a quadratic form of the momentum of integration  $k_i$ . That is why, such integral can be calculated using the reference

formula:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int dk_1 \cdots dk_n \frac{1}{(a_{ij}k_i k_j + b_i k_i + c)^\alpha} = \frac{(4\pi)^{-\frac{dn}{2}} \Gamma(\alpha - \frac{dn}{2}) (\det(u))^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha) (c - (a^{-1})_{ij} b_i b_j)^{\alpha - \frac{dn}{2}}} \quad (2.42)$$

Here  $\alpha = \sum \lambda_i$ . Now, the problem of calculation corresponding diagrams are reduced to the more easier problem, at the first glance, of integrating over Feynman parameters  $x_i$ .

Dimension analysis of the model (2.38) shows that the only divergent types of diagrams are 4-tailed diagram and 2-tailed. Their common expressions can be easily obtained:

$$I_n^{(4)} = \frac{\Gamma(\frac{n\epsilon}{2}) \Gamma^n(2 - \frac{\epsilon}{2})}{2^n \prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i - 1} \delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{(\det x)^{2 - \frac{\epsilon}{2}}} \quad (2.43)$$

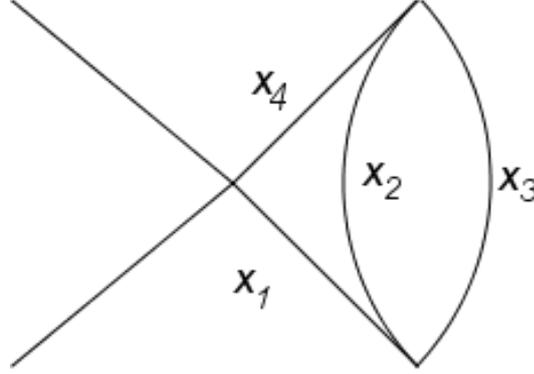
$$I_n^{(2)} = \frac{\Gamma(\frac{n\epsilon}{2}) \Gamma^n(2 - \frac{\epsilon}{2})}{2^n \prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{C \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i - 1} \delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{(\det x)^{3 - \frac{\epsilon}{2}}},$$

where  $n$  - denote the number of the loops,  $C$  and  $\det x$  are defined by following formulas:

$$C = (a_{ij}^{-1} b_i b_j - c) \sum_{i=1}^n E_i x_i = 1 + cp^2 + 2b_i(p, k_i) + a_{ij}(k_i, k_j), \quad (2.44)$$

where  $p$  - external momentum,  $(\square, \square)$  denotes the dot product between corresponding vectors. Structure of the quantities  $\det x$ ,  $C$  can be yield without direct calculation of the integrals and can be extract from the topology of a diagram itself. More precisely:  $\det x$  of  $n$ -loops diagram is equal to the sum of all possible product of Feynman parameters with the number of factors equal to the number of loops from which the forbidden multiplications are erased. The forbidden terms are formed taking into account the laws of conservation( momentum conservation laws) occurring in a diagram. The quantity  $C$  is equal to the sum of all possible

combination of Feynman parameters with the number of factors; one greater than the number of loops, taking into account forbidden terms, from which in this case prohibitions associated with conservation principle in vertices congaing external line are excluded. For example, consider the following diagram: Here,  $n = 2$  and Figure 2.1. Two-loops four-tailed diagram of  $\varphi^4$  model with corresponding Feynman's parameters  $x_i$  on the lines.



overall there are four Feynman's parameters. The sum of various product of Feynman's parameters with the number of factors equal to the number of the loops like  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$ . In the diagram there are several forbidden terms:  $x_1x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_3$ . Among them only  $x_1x_4$  is important. Using above rules, one can derive expression for the determinant  $x$  of the diagram:

$$\det x = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \quad (2.45)$$

Such rules can be generalized for the actions differ from (2.38). Now let us demonstrate and describe sector decomposition method using the diagram at Fig. 2.1. The Feynman's representation of the diagram are obtained by (2.43) and can be written as:

$$J_0 = \frac{1}{4} \Gamma(\epsilon) \Gamma^2\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) J$$

$$J = \left[ \prod_{i=1}^4 \int_0^1 dx_i \right] \frac{\delta(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)}{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \quad (2.46)$$

Here  $d = 4 - \epsilon$ ,  $d$  - is a spatial dimension of the space. The denominator in can be divergent when  $x_1, x_2, x_3$  tend to 0, and  $x_4$  tends to 1 (including the delta function)

or when  $x_1, x_2, x_4$  goes to 0 and  $x_2$  to 1, and the last possibility, when  $x_2, x_3$  and  $x_4$  tend to 0, but  $x_1$  to 1. These singularities in the integrand lead to divergences of the integral for  $\epsilon = 0$  and to the poles by  $\epsilon = 0$  for  $\epsilon- > 0$

Sector Decomposition method (SD) are allow one to extract corresponding residue at these poles in the explicit form. The algorithm is consistent of two steps. First one divided the initial area of integration into sectors where one Feynman's variable is "main", i.e, its magnitude is more than other ones. Then that in each sector it is necessary to return the integration domain to the unit cube by replacing the variables. This two steps one need to make until singularity of the integrand is determined by the simple degree of one of Feynman's variables. Then residue at the pole can be obtained directly from the expression. Let us consider these steps for the diagram at Fig.2.43:

First sectorization and substitution:

$$\begin{aligned}
& \left[ \prod_{i=1}^4 \int_0^1 dx_i \right] f(x_1, \dots, x_4) = \\
&= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 dx_3 dx_4 f(x_1, \dots, x_4) + \\
&+ \int_0^1 dx_2 \int_0^{x_2} dx_1 dx_3 dx_4 f(x_1, \dots, x_4) + \\
&+ \int_0^1 dx_3 \int_0^{x_3} dx_1 dx_2 dx_4 f(x_1, \dots, x_4) + \\
&+ \int_0^1 dx_4 \int_0^{x_4} dx_1 dx_2 dx_3 f(x_1, \dots, x_4) = \\
&= \int_0^1 dx_1 \prod_{i=2,3,4} d\tilde{x}_i x_1^3 f(x_1, \tilde{x}_2 x_1, \tilde{x}_3 x_1, \tilde{x}_4 x_1) + \\
&+ \int_0^1 dx_2 \prod_{i=1,3,4} d\tilde{x}_i x_2^3 f(\tilde{x}_1 x_2, x_2, \tilde{x}_3 x_2, \tilde{x}_4 x_2) + \\
&+ \int_0^1 dx_3 \prod_{i=1,2,4} d\tilde{x}_i x_3^3 f(\tilde{x}_1 x_3, \tilde{x}_2 x_3, x_3, \tilde{x}_4 x_3) + \\
&+ \int_0^1 dx_4 \prod_{i=1,2,3} d\tilde{x}_i x_4^3 f(\tilde{x}_1 x_4, \tilde{x}_2 x_4, \tilde{x}_3 x_4, x_4) = \\
&= \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \tilde{J}_3 + \tilde{J}_4
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Then we again make step one for each  $\tilde{J}_i$ . In other words:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_4 f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\
&= \tilde{J}_{1,2} + \tilde{J}_{1,3} + \tilde{J}_{2,1} + \tilde{J}_{2,3} + \tilde{J}_{2,4} + \tilde{J}_{3,1} + \tilde{J}_{3,2} + \tilde{J}_{3,4} + \tilde{J}_{4,2} + \tilde{J}_{4,3}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Due to the symmetry of the diagram, one can obtain the following relations:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{2,3} &= \tilde{J}_{3,2} \\
\tilde{J}_{1,2} &= \tilde{J}_{1,3} \\
\tilde{J}_{1,3} &= \tilde{J}_{4,2} \\
\tilde{J}_{4,2} &= \tilde{J}_{4,3} \\
\tilde{J}_{2,1} &= \tilde{J}_{3,1} \\
\tilde{J}_{3,1} &= \tilde{J}_{2,4} \\
\tilde{J}_{2,4} &= \tilde{J}_{3,4}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

From such relations between sectors, there are only 4 different quantities and result of the sector decomposition can be written as:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{1,2} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{(1 + x_2 + x_2 x_3 + x_2 x_4)^{-\epsilon}}{x_2^{1-\frac{\epsilon}{2}} (1 + x_3 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \\
\tilde{J}_{2,3} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{(1 + x_1 x_3 + x_3 + x_4 x_3)^{-\epsilon}}{x_3^{1-\frac{\epsilon}{2}} (1 + x_1 + x_1 x_3 + x_4 + x_3 x_4)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \\
\tilde{J}_{2,1} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{(1 + x_1 + x_3 x_1 + x_4 x_1)^{-\epsilon}}{x_1^{1-\frac{\epsilon}{2}} (1 + x_3 + x_1 x_3 + x_4 + x_1 x_3 x_4)^{2-\frac{\epsilon}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

It is not hard to notice that in (2.50) the singularity only in one of the variable determines the poles. In the general case, after isolation of the singularities, one can confront with two possible situations. First situation: if the singularity has the form  $x^{-1+n\epsilon}$ , then the calculation of the residue at the pole occurs is as follows:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-1+n\epsilon} f(x) dx &= \int_0^1 x^{-1+n\epsilon} f(x) dx + \int_0^1 x^{-1+n\epsilon} f(0) dx - \int_0^1 x^{-1+n\epsilon} f(0) dx = \\
&= \int_0^1 x^{-1+n\epsilon} f(0) dx + \int_0^1 x^{-1+n\epsilon} (f(x) - f(0)) dx = \frac{f(0)}{n\epsilon} + \int_0^1 x^{-1+n\epsilon} (f(x) - f(0)) dx = \\
&= \frac{f(0)}{\epsilon n} + \int_0^1 x^{-1+n\epsilon} \int_0^1 (x f'(ax)) da dx
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Integral over a parameter  $a$  allow to reduce singularity of the last term. Then, the integrand of the last term is represented as a series of  $\epsilon$ . The second situation: if the singularity has the form  $x^{-m+n\epsilon}$ , where  $m > 1$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-m+n\epsilon} f(x) dx &= \\
&= \int_0^1 dx da x^{-m+\epsilon n} \frac{(1-a)^{m-1}}{(m-1)!} \partial_a^m f(ax) + \frac{\partial_x^{m-1} f(0)}{n\epsilon} + \frac{\partial_x^1 f(0)}{n\epsilon - 1} + \dots + \frac{f(0)}{n\epsilon - m + 1}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Overall, Sector Decomposition method allows one to calculate residue at a pole explicitly. However, one of essential disadvantage of this method is a large number of sectors in multi loop diagrams. Nevertheless, for a certain topology type of diagrams, other method can be developed and introduced. Using specific structure of propagators of the model, one can perform series of transforms which allow to calculate residue at pole almost directly [21]. We are going to call such method as "Chain integration rule".

## 2.4. $\beta$ - functions and $z$ critical exponent

Let us recall the renormalized action of the model which was derived in the previous section:

$$\begin{aligned}
S = & Z_0 \eta \eta^+ + \eta^+ \left( Z_1 \frac{\partial}{\partial t} + Z_2 \nabla^2 \right) \xi + \xi^+ \left( Z_3 \frac{\partial}{\partial t} + Z_4 \nabla^2 \right) \eta + \\
& + Z_5 \eta^+ \xi^+ \xi \xi + Z_6 \xi^+ \xi^+ \eta \xi,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

where the parameters  $\alpha$  and  $u$  are real ones by definition. The above action contains nine marginal independent terms and only eight fields and parameters, which are insufficient for a multiplicative renormalization. However, using the symmetry of the action (2.19), one can notice that hypersurface  $g_1 = g_2^*$  gives us lacking relation to make renormalization to be multiplicative.

The coefficient at the counterterms  $Z_i$  were calculated in the MS scheme in the leading order of perturbation theory in Tab. 2.1 and Tab. 3. They can be written in the following form:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 4\alpha + \frac{g_1 g_2 \alpha M_1}{4^3 \pi^4 \epsilon} \\
Z_1 &= 1 + \frac{g_1^2 M_3}{2^7 \pi^4 \epsilon} + \frac{g_1 g_2 M_2}{2^8 \pi^4 \epsilon} \\
Z_2 &= (1 + iu)\alpha + \frac{\alpha(u + 2i)g_1^2}{2^8 \pi^4 \epsilon(u + 3i)} - \frac{\alpha g_1 g_2 (u + i)}{2^8 (u + 3i) \pi^4 \epsilon} \\
Z_5 &= \frac{i g_1 \alpha}{2} - \frac{g_1^2 \alpha}{16(1 + iu)\pi^2 \epsilon} - \frac{g_1^2 \alpha}{8\pi^2 \epsilon} + \frac{g_1 g_2 \alpha}{8\pi^2 \epsilon}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

where

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{A + 3B - \pi u - 2u \arctan(C_-)}{u^2 + 1} \\
M_2 &= \frac{(u - i)^2(2i \arctan(2C_+) - \pi i - A - B)}{(u^2 + 1)^2} \\
M_3 &= \frac{(u + i)^2(B - 2i \arctan(\frac{u}{3}))}{(u^2 + 1)^2} \\
A &= \log(u^2 + 1) \\
B &= \log\left(\frac{u^2 + 9}{16}\right) \\
C_+ &= \frac{u^2 + 3}{4u} \\
C_- &= \frac{u^2 - 3}{4u}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Introducing the required renormalization constants one can obtain system of equations (2.24).

By definition  $\beta$  and  $\gamma$  - functions of the model are defined by following expressions:

$$\begin{aligned}
\beta_{g_n} &= -\epsilon g_n - \epsilon g_n \sum_{m=1,2} g_m \frac{\partial Z_{g_m}}{\partial g_m} \\
\beta_u &= -\epsilon u \sum_{n=1,2} g_n \frac{\partial Z_u}{\partial g_n} \\
\gamma_\zeta &= -\epsilon \sum_{n=1,2} g_n \frac{\partial Z_\zeta}{\partial g_n}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

With the aid of the calculated  $Z_i$  one can yield corresponding  $\beta$  and  $\gamma$  functions of the charges and fields respectively:

$$\begin{aligned}
\beta_{g_1} &= -\frac{2(2u^2 + 3)g_1g_2 + ug_2^2 - ug_1^2}{8\pi^2(u^2 + 1)} - \epsilon g_1 \\
\beta_{g_2} &= \frac{2ug_1g_2 - (4u^2 + 5)g_2^2 + g_1^2}{8\pi^2(u^2 + 1)} - \epsilon g_2
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
\beta_u &= \frac{(g_1 + ug_2)((u^2 + 6)g_2 - ug_1)}{64\pi^4(u^2 + 9)} - \\
&\quad - \frac{(u^2 + 1) [(g_1^2 + g_2^2)Im(M_2) + 2(g_1^2 - g_2^2)Im(M_3) + 4g_1g_2Re(M_3)]}{128\pi^4} \\
\gamma_\alpha &= -\frac{3g_1^2 + 2ug_1g_2 - (2u^2 + 9)g_2^2}{128\pi^4(u^2 + 9)} + \frac{(g_1^2 + g_2^2)(ReM_2 - uImM_2)}{128\pi^4} + \\
&\quad + \frac{(g_1^2 - 2ug_1g_2 - g_2^2)ReM_3}{64\pi^4} - \frac{(ug_1^2 + 2g_1g_2 - ug_2^2)ImM_3}{64\pi^4} \\
\gamma_\eta &= \frac{3g_1^2 + 2ug_1g_2 - (2u^2 + 9)g_2^2}{256\pi^4(u^2 + 9)} - \frac{(g_1^2 + g_2^2)(M_1 + ReM_2 - uImM_2)}{256\pi^4} - \\
&\quad - \frac{(g_1^2 - 2ug_1g_2 - g_2^2)ReM_3}{128\pi^4} + \frac{(ug_1^2 + 2g_1g_2 - ug_2^2)ImM_3}{128\pi^4} \\
\gamma_\xi &= -\frac{3g_1^2 + 2ug_1g_2 - (2u^2 + 9)g_2^2}{256\pi^4(u^2 + 9)} - \frac{(g_1^2 + g_2^2)(ReM_2 + (u + 2i)ImM_2 - M_1)}{256\pi^4} - \\
&\quad - \frac{(g_1^2 + 2(u + 2i)g_1g_2 - g_2^2)ReM_3}{128\pi^4} - \frac{((u + 2i)g_1^2 - 2g_1g_2 - (u + 2i)g_2^2)ImM_3}{128\pi^4}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Unlike model  $E$  ( and especially model  $F$ ), where the presence of many zeroes of the  $\beta$ -functions makes it difficult to choose the IR-stable fixed point,  $\beta$  - functions (2.57),(2.58) vanish in only three cases:

- The trivial fixed point  $g_{1*} = g_{2*} = 0$  for arbitrary  $u_*$ . The corresponding matrix  $\omega_{ij}$  has the eigenvalues  $(-\epsilon, -\epsilon, 0)$  which confirms its IR instability
- The case  $g_{1*} = 0$ ,  $g_{2*} = -\frac{8\pi^2\epsilon}{5}$  and  $u_* = 0$ . The eigenvalue of the matrix  $\omega_{ij}$  are  $(\epsilon, 0.2\epsilon, 0.023\epsilon^2)$ . The positive signs of all eigenvalues prove that this point is IR stable.
- The case  $g_{2*} = -2\pi\epsilon$ ,  $\omega_* \equiv \frac{1}{u} = 0$  for an arbitrary  $g_{1*}$ . Here, the infinite  $u$  is considered due to nonperturbative nature of the charge  $u$ . For this fixed point the eigenvalues of the matrix  $\omega_{ij}$  are  $(\epsilon, -\frac{\epsilon}{16}, 0)$ . Therefore, this point is an IR-unstable point of the "saddle" type. This point corresponds to the quantum mechanical behaviour of the system with oscillating propagators

without any damping. Hence it is not unsurprising that it is not related to the described phase transition.

Calculating the  $\gamma$ -functions at the found IR-stable fixed point, one can yield the following critical dimensions:

$$\begin{aligned}\gamma_\xi^* &= \frac{\epsilon^2}{100} \\ \gamma_\eta^* &= \frac{\epsilon^2}{100} \left( 12 \log \frac{4}{3} - 1 \right) \\ \gamma_\alpha^* &= \frac{\epsilon^2}{50} \left( 1 - 6 \log \frac{4}{3} \right)\end{aligned}\tag{2.59}$$

It is essential to notice that at the single IR-stable fixed point, the charges  $g$  and  $\bar{g}$  are purely imaginary. In this case, action (2.13) differs from the known MSR-type action of the stochastic two-component model  $A$  :

$$S_A = -\alpha\varphi'^2 + \varphi' \left( \partial_t\varphi - \alpha \Delta \varphi + \frac{\alpha g}{6}\varphi^3 \right)\tag{2.60}$$

only by the change of notation:

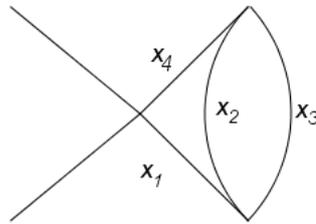
$$\begin{aligned}\eta^+ &= \varphi'_1 + i\varphi'_2 \\ \eta &= -\varphi'_1 + i\varphi'_2 \\ \xi^+ &= \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \xi &= \varphi_1 - i\varphi_2\end{aligned}\tag{2.61}$$

and a trivial rescaling of the fields and parameters. The sing of  $g_{2*}$  also correspond to completely to the true positive sign of  $g$  in model (2.60). Precisely for this reason, it is unsurprising that the result (2.59) coincides with the first order of the  $\epsilon$ -expansions for the critical dimensions in model A. Also, one can note that among many other examples of using the stochastic model A and its generalizations, action (2.13) obtained and studied here and the actions previously obtained in the other problems have structure in common. But they differ in the physical assumption of the model. For example, in , the stochastic approach to Langmuir turbulence in plasma leads to the complexity of kinetic coefficients, but in just a

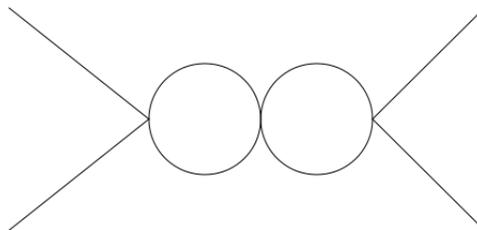
manifestation of well-known Landau damping. In , the stochastic Gross-Pitaevskii equation was also given with complex coefficients, where they were due to the non-equilibrium of the considered phase transition. Here, the complex kinetic coefficients appears when describing strictly equilibrium fluctuations in the grand canonical ensemble. Of course, the similarity of the analytic structures of the actions leads to a similarity of the formally calculated diagrams. Overall, we have discovered and established that dynamical index of the model (1.25) based on the microscopic approach and the time-dependent Green's function coincides with  $z$  - index of model  $A$  of critical dynamics, where the latter was calculated up to  $O(\epsilon^4)$ . Multiloop calculations can only confirm that the single fixed point is IR stable.

## 2.5. Stability of the IR fixed point at the third order.

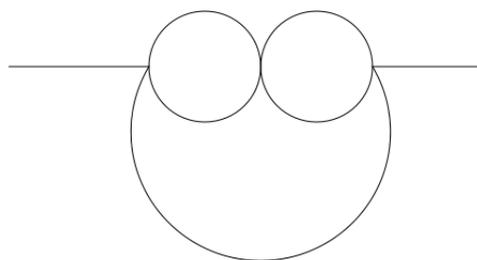
The following contribution to the one irreducible  $\Gamma$  - functions consist of diagrams of following topology:



(2.62)



(2.63)



(2.64)

Due to the fact, that corresponding  $\beta$  and  $\gamma$  functions in (2.56), in fact, can be calculated with only residue at a simple pole  $\epsilon^{-1}$ . More higher poles are not contribute to the value of critical exponents. That is why, the diagram of the type (2.63) can be omit because they are the product of the corresponding 1-order diagram. Thus, the simple pole  $\epsilon^{-1}$  are cancelled for such type. Then the expression for the counterterms  $Z_i$  can be written as:

$$\begin{aligned}
Z_0(g_1, g_2, u) &= 4\alpha - \frac{\alpha g_1 g_2 M_1(u)}{2 \cdot 16^2 \pi^4 \epsilon} + \frac{(-i) g_1 g_2^2 Q_4(u)}{\epsilon} + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_5(u)}{\epsilon} \\
Z_1(g_1, g_2, u) &= 1 + \frac{g_1^2 M_3(u)}{16^2 \pi^4 \epsilon} - \frac{g_1 g_2 M_2(u)}{2 \cdot 16^2 \pi^4 \epsilon} + \frac{(-i) g_1^3 Q_6(u)}{\epsilon} + \\
&\quad + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_7(u)}{\epsilon} + \frac{(-i) g_1 g_2^2 Q_8(u)}{\epsilon} \\
Z_2(g_1, g_2, u) &= (1 + iu)\alpha + \frac{g_1^2 \alpha (2 - iu)}{16^2 \pi^4 (3 - iu)} - \frac{g_1 g_2 \alpha (1 - iu)}{16^2 (3 - iu) \pi^4} + \\
&\quad + \frac{(-i) g_1^3 Q_9(u)}{\epsilon} + \frac{(-i) g_1^2 g_2 Q_{10}(u)}{\epsilon} + \frac{g_1 g_2^2 Q_{11}(u)}{\epsilon} \\
Z_5(g_1, g_2, u) &= \frac{i g_1 \alpha}{2} - \frac{g_1^2 \alpha}{16(1 + iu) \pi^2 \epsilon} - \frac{g_1^2 \alpha}{8 \pi^2 \epsilon} + \frac{g_1 g_2 \alpha}{8 \pi^2 \epsilon} - \\
&\quad - \frac{i g_1^3 Q_1(u)}{\epsilon} - \frac{i g_1^2 g_2 Q_2(u)}{\epsilon} - \frac{i g_1 g_2^2 Q_3(u)}{\epsilon}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Here we omit contributions of the form  $\frac{B}{\epsilon^2}$  due to their insignificance for calculation of the critical exponents.  $Q_i(u)$  are corresponding to sums of the diagrams of the topologies (2.62),(2.64). Also one can note that diagrams of considering topologies consist of divergent subgraphs. That fact force us to use corresponding operator  $R'$  to subtract such divergences. We are going to follow operation  $R'$  from To confirm stability of the IR fixed point discovered in the previous section, one must evaluate the eigenvalue of the  $\omega$  - matrix at IR-fixed point. Such matrix consists of corresponding derivatives of the  $\beta$  functions:

$$\omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{g_1}}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_{g_1}}{\partial g_2} & \frac{\partial \beta_{g_1}}{\partial u} \\ \frac{\partial \beta_{g_2}}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_{g_2}}{\partial g_2} & \frac{\partial \beta_{g_2}}{\partial u} \\ \frac{\partial \beta_u}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_u}{\partial g_2} & \frac{\partial \beta_u}{\partial u} \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

Corresponding eigenvalues of  $\omega$  in fact are divergent series, thus the Borel resummation is required. Using high-order asymptotic of  $A$  model [22],[23] one can obtain the following eigenvalues( $\epsilon = 1$ ):  $\omega$ : (0.254264, 0.00704136, 1.09057). The positive sign of all three eigenvalues confirm that IR fixed points are stable at third order of the perturbation theory.

## Chapter 3

### Reduction of stochastic model E

Our results in Sec. 4 obviously contradict the previous classical works of researchers [2; 4] where precisely model E was proposed to describe the considered phenomenon. To confirm our results, we must explain the nature of this contradiction. The construction of the stochastic equations of critical dynamics is based on the known static (equilibrium) model of critical behavior. The stationary action of this model can be chosen in the form

$$S_{st} = \partial\psi^+\partial\psi + \frac{g_1(\psi^+\psi)^2}{6} - g_2m\psi^+\psi + \frac{m^2}{2} + \frac{w\rho v^2}{2}, \quad (3.1)$$

where the fields  $\psi$  and  $\psi^+$  are the complex order parameters corresponding to the means of the boson field operators  $\psi$  and  $\psi^+$ , the field  $m$  is a linear combination of the internal energy and the density effectively describing temperature fluctuations,  $\rho$  is the density field of the medium,  $u$  is the vector velocity field,  $g_1$  and  $g_2$  are the coupling constants (which are new with respect to those in the preceding sections), and  $\omega$  is the required dimensional constant.

During the time when the classical papers were written, the only example of superfluidity was the phase transition in liquid helium, for which the liquid was declared to be incompressible in accordance with the classical monograph by Landau and Lifshitz [24]. Proceeding from the dimensional analysis, the Maxwell term  $\frac{\rho u^2}{2}$  in formula (15) gives only IR-irrelevant contributions to the stochastic equations [2; 4]. But if it is dropped, then the dynamical equations completely lose the dependence on important characteristics of the superfluid behavior, such as the velocity and viscosity. Therefore, an effort was made in [6] to take the dynamical contributions to the stochastic equations into account based on the regular expansion in terms of two parameters. In this case, the superfluid liquid was regarded as incompressible in accordance with tradition.

Incompressibility does not follow in any way from the microscopic analysis

developed in the preceding sections. Therefore, we clarify what including compressibility in a neighborhood of the  $\lambda$  point implies for the phenomenologically constructed equations of model  $F$ . In accordance with the classical monograph [2], when describing critical equilibrium fluctuations, the system of stochastic equations for  $\varphi_A \in \{\psi, \psi^+, m, u\}$  must have the form

$$\partial_t \varphi_a = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S_{st}}{\delta \varphi_b} + \eta_a, \quad (3.2)$$

and the Onsager coefficients  $\alpha_{ab}$  and intermode coupling  $\beta_{ab}$  satisfy the conditions

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba}^T, \quad \beta_{ab} = -\beta_{ba}^T, \quad \frac{\delta \beta_{ab}(\mathbf{x}; \varphi)}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} = 0. \quad (3.3)$$

where  $T$  denotes transposition (its action on the operators  $\partial_i^T = -\partial_i$  is understood). To include the velocity field in the dynamical model  $F$  given by and satisfy requirements and in this case, we must include additional terms in the Langevin equations for the previously introduced fields  $\psi$ ,  $\psi^+$ , and  $m$  and also in the Navier–Stokes equation,

$$\begin{aligned} & (\partial_t + u_i \partial_i) \psi = \\ & = \lambda(1 + ib) \left[ \partial^2 \psi - \frac{g_1}{3} \psi^+ \psi^2 + g_2 m \psi \right] + i\lambda g_3 \psi \left[ g_2 \psi^+ \psi - m - r\omega \frac{u^2}{2} \right] + f_{\psi^+} \\ & (\partial_t + u_i \partial_i) \psi^+ = \\ & = \lambda(1 - ib) \left[ \partial^2 \psi^+ - \frac{g_1}{3} (\psi^+)^2 \psi + g_2 m \psi^+ \right] - i\lambda g_3 \psi^+ \left[ g_2 \psi^+ \psi - m - r\omega \frac{u^2}{2} \right] + f_{\psi} \\ & \partial_t m + \left( \frac{r^2 c^2 \omega}{\rho_0} + 1 \right) \partial_i (m u_i) = \\ & = -\lambda u \partial^2 \left[ g_2 \psi \psi^+ - m - r\omega \frac{u^2}{2} \right] + i\lambda g_3 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+] + f_m \\ & \partial_t u_i = \frac{\gamma}{\rho_0} \partial^2 u_i + \frac{(3\zeta + \gamma) \partial_j \partial_i u_i}{3\rho_0} - \partial_j (u_i u_j) - \frac{1}{\omega \rho_0} \left[ \partial^2 - \frac{g_1}{3} \psi^+ \psi^2 + g_2 m \psi \right] - \\ & - \frac{1}{2} \partial_i u^2 - \frac{1}{\omega \rho_0} (\partial_i \psi) \left[ \partial^2 \psi^+ - \frac{g_1 (\psi^+)^2 \psi}{3} + g_2 m \psi^+ \right] + \\ & + \left( \frac{rc^2}{\rho_0} + \frac{1}{r\omega} \right) \partial_i \left[ g_2 \psi^+ \psi - m - \frac{\omega r u^2}{2} \right] + f_u \end{aligned} \quad (3.4)$$

where  $\gamma$  and  $\xi$  are the shear and volume viscosities,  $\lambda$  is the kinetic coefficient,  $b$  and  $g_3$  are the intermode coupling coefficients,  $u$  is the nonperturbative charge of model  $F$ ,  $c$  is the speed of sound, and  $\rho_0$  is the average density. In the derivation, we assume that  $\rho = \rho_0 + rm$ , where  $r$  is the new dimensional parameter. The quantity  $\rho$  was replaced with  $\rho_0$  in the equation; in this case, the dropped contribution corresponds to higher nonlinearities. If the direct substitution is used, it is possible to ensure that corresponds to forms and . If are used, then it is simple to construct a dynamical action of the MSR type standardly by introducing the additional set  $\{\psi', \psi^+, m', u\}$  of fields:

$$\begin{aligned}
-S_{dyn} = & b_1 \psi'^+ \psi' - b_2 m' \partial^2 m' + b_3 \partial_i u'_j \partial_i u'_j + b_4 \partial_j u'_j \partial_i u'_i + a_1 \psi'^+ \partial^2 \psi + a_2 \psi' \partial^2 \psi^+ + \\
& + a_3 m' \partial_i u_i + a_4 m' \partial^2 m + a_5 u'_i \partial^2 u_i + a_6 u'_i \partial_i \partial_j u_j + \\
& + a_7 u'_i \partial_i m - \psi'^+ \partial_t \psi - \psi' \partial_t \psi^+ - \\
& - m' \partial_t m - u' \partial_t u + \psi'^+ [-u_i \partial_i \psi + a_8 \psi^+ \psi \psi + a_9 m \psi + a_{10} \psi u^2] + \\
& + \psi' [-u_i \partial_i \psi^+ + a_{11} (\psi^+)^2 \psi + a_{12} m \psi^+ + a_{13} \psi^+ u^2] + \\
& + m' [-m \partial_i u_i + a_{14} \partial^2 \partial^2 (\psi^+ \psi) + a_{15} \partial^2 u^2 + a_{16} \psi^+ \partial^2 \psi + a_{17} \psi \partial^2 \psi^+] + \\
& + u'_i [-\partial_j (u_i u_j) + a_{18} (\partial_i \psi^+) \partial^2 \psi + a_{19} \psi^+ \psi^2 \partial_i \psi^+ + a_{20} m \psi \partial_i \psi^+ + \\
& + a_{21} (\partial_i \psi)] \partial^2 \psi^+ + a_{22} (\psi^+)^2 \psi \partial_i \psi + a_{23} m \psi^+ \partial_i \psi + a_{24} \partial_i (\psi^+ \psi) + a_{25} \partial_i u^2]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

In this case, we use the form  $e^{-S_{dyn}}$  characteristic for statistical physics in the functional integral. The above form of the MSR-type action is convenient for the further RG analysis. The relation between the coefficients  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 25$ ) and  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) and the physical parameters is given in Table 1.

### 3.1. Dimensional analysis, IR-effective theory

Action has both space and time invariance simultaneously as must be for an arbitrary MSR-type action. Therefore, for all fields and parameters, we can introduce the independent space and time canonical dimensions  $d^p$  and  $d^\omega$ . These

Table 3.1. Parameters of dynamical action : the correspondence between the introduced notation and the actual physical quantities.

$b_1$	$2\lambda$	$a_5$	$\gamma/\rho_0$	$a_{13}$	$i\lambda g_3 w r/2$	$a_{21}$	$-\frac{1}{\rho_0 \omega}$
$b_2$	$\lambda u$	$a_6$	$(3\zeta + \gamma)/(3\rho_0)$	$a_{14}$	$-\lambda u g_2$	$a_{22}$	$\frac{g_1}{3\rho_0 \omega}$
$b_3$	$\gamma/\rho_0$	$a_7$	$r c^2/\rho_0 + 1/(r w)$	$a_{15}$	$\lambda u w r/2$	$a_{23}$	$-\frac{g_2}{\rho_0 \omega}$
$b_4$	$(\gamma + 3\zeta)/(3\rho_0)$	$a_8$	$i\lambda g_3 g_2 - \lambda(1 + ib)g_1/3$	$a_{16}$	$i\lambda g_3$	$a_{24}$	$-\frac{g_2}{\rho_0 \omega}$
$a_1$	$\lambda(1 + ib)$	$a_9$	$\lambda(1 + ib)g_2 - i\lambda g_3 g_2$	$a_{17}$	$-i\lambda g_3$	$a_{25}$	$-\frac{r^2 c^2 \omega + \rho_0}{r \omega \rho_0} - \frac{1}{2}$
$a_2$	$\lambda(1 - ib)$	$a_{10}$	$-i\lambda g_3 w r/2$	$a_{18}$	$-1/\rho_0 w$		
$a_3$	$-r^2 c^2 w/\rho_0 - 1$	$a_{11}$	$-i\lambda g_3 g_2 - \lambda(1 - ib)g_1/3$	$a_{19}$	$g_1/(3\rho_0 w)$		
$a_4$	$-\lambda u$	$a_{12}$	$\lambda(1 - ib)g_2 + i\lambda g_3 g_2$	$a_{20}$	$-g_2/(\rho_0 w)$		

dimensions are given in Table 2. It is traditionally assumed that  $d_x^p = d_t^\omega = -1$ ,  $d_t^p = d_x^\omega = 0$ . Action dictates a dispersion relation in the form  $i\omega \sim k^2$ . Therefore, the total canonical dimension  $d_F$  is defined by the formula  $d_F = 2d_F^\omega + d_F^p$ . These dimensions determine the IR relevance or irrelevance of individual terms of action, and they are also given in Table 2. It can be seen from Table 2 that  $a_3$  is the most IR-relevant theory parameter. If this parameter was a perturbative charge, then all other less relevant interaction terms could be dropped in the dynamical action to construct the IR-effective theory [2]. But in this case,  $a_3$  is the coefficient of the action term  $m' \partial_i(v_i)$ , which is quadratic in the fields, and its influence on the perturbation theory diagrams is therefore not initially obvious. An analogous case occurs, for example, in model H of the critical dynamics of the liquid–vapor phase transition and requires a special analysis in accordance with the results in [2]. A self-consistent approach to such an analysis based on studying the IR relevance of the total set of model propagators was proposed in [25]. We use it here. The

quadratic part of action defines the field propagators

$$\begin{aligned}
G_{\psi\psi^+} &= \frac{b_1}{(a_1k^2 + i\omega)(a_2k^2 - i\omega)}, \quad G_{\psi^+\psi'} = \frac{1}{a_2k^2 - i\omega}, \quad G_{\psi'+\psi} = \frac{1}{a_1k^2 + i\omega} \\
G_{mm} &= \frac{b_2(a_{56}^2k^4 + \omega^2)k^2 + a_3^2b_{34}k^4}{R_+R_-}, \quad G_{v'_\perp v_\perp} = \frac{P_\perp}{a_5k^2 - i\omega}, \quad G_{v_\perp v_\perp} = \frac{b_4k^2 P_\perp}{a_5^2k^4 + \omega^2} \\
G_{v_\parallel m} &= \frac{a_3b_{34}(i\omega - a_4k^2) + a_7b_2(a_{56}k^2 + i\omega)}{R_+R_-}i\mathbf{k}, \quad G_{v_\parallel v_\parallel} = \frac{b_{34}k^2(a_4^2k^4 + \omega^2) + a_7^2b_2k^4}{R_+R_-}P_\parallel \\
G_{v'_\parallel v_\parallel} &= \frac{(a_4k^2 + i\omega)}{R_+}P_\parallel, \quad G_{m'm} = \frac{a_{56}k^2 + i\omega}{R_+}, \quad G_{m'v_\parallel} = -\frac{ia_7\mathbf{k}}{R_+}, \quad G_{v'_\parallel m} = -\frac{ia_3\mathbf{k}}{R_+} \\
& \quad a_{56} = a_5 + a_6, \quad b_{34} = b_3 + b_4, \quad R_\pm = a_3a_7k^2 + (a_4k^2 \pm i\omega)(a_{56}k^2 \pm i\omega)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

where  $P_\perp$  and  $P_\parallel$  denote the transverse and longitudinal projectors,  $P_\parallel \partial^2 = \partial_i \partial_j$ ,  $P_\perp + P_\parallel \equiv 1$ . The coefficients at the quadratic terms of the free part of the dynamical MSR-type action have different canonical dimensions. Therefore, it is unsurprising that the propagators also contain contributions that are relevant in the IR region to a different extent. In accordance with the performed dimensional analysis, the terms with the coefficient  $a_3$  are leading in the field propagators  $m, m', v_\parallel, v'_\parallel$ . Dropping the IR-irrelevant contribution in the propagators, we note that some of them are simplified and in the IR-effective theory become

$$\begin{aligned}
G_{mm} &= \frac{b_{34}}{a_7^2}, \quad G_{m'm} = \frac{a_{56}k^2 + i\omega}{a_3a_7k^2}, \quad G_{m'v_\parallel} = -\frac{i\mathbf{k}}{a_3k^2}, \quad G_{v'_\parallel m} = -\frac{i\mathbf{k}}{a_7k^2}, \\
G_{v_\parallel m} &= \frac{a_3b_{34}(i\omega - a_4k^2) + a_7b_2(a_{56}k^2 + i\omega)}{a_3^2a_7^2k^2}i\mathbf{k}, \quad G_{v_\parallel v_\parallel} = \frac{b_2}{a_3^2}P_\parallel, \\
G_{v'_\parallel v_\parallel} &= \frac{a_4k^2 + i\omega}{a_3a_7k^2}P_\parallel.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

In these expressions, we retain only the leading homogeneous terms (with the used dispersion equation taken into account) in the propagator numerator and denominator. The presence of the coefficient  $a_3$  with a positive canonical dimension in the quadratic part of the action lead to the fact that the combination of the parameters  $a_3, b_{34}$  including the formally IR-irrelevant coefficient  $b_{34}$  remains in the propagator numerator  $G_{v_\parallel m}$ . Nevertheless, the corresponding combination

has a zero canonical dimension, i.e., it is marginal. Another more important fact is that the propagators  $G_{mm'}$ ,  $G_{m'v_{\parallel}}$ ,  $G_{v_{\parallel}m}$ ,  $G_{v_{\parallel}v_{\parallel}}$  and  $G_{v'_{\parallel}v_{\parallel}}$  contain the IR-relevant coefficient  $a_3$  in the denominator. This makes the contributions of all diagrams that include these propagators IR-irrelevant. All contributions of the propagators  $G_{v_{\perp}v_{\perp}}$  and  $G_{mm}$  can be similarly dropped because they have the IR-irrelevant factor  $b_{34}$  in the numerator. It is important here that the irrelevant operators can be dropped because there are no charges with positive canonical dimensions at the vertices in the action according to the results in Table 2. Being interested in the critical dynamics of the order-parameter fields  $\psi$  and  $\psi^+$ , we note that all propagators containing the fields  $m'$  turn out to be IR-irrelevant. This means that the vertices with the field  $m'$  do not contribute to the leading terms of the IR-asymptotic Green's functions of these fields. Inverting the matrix of the remaining marginal propagators  $G_{\psi'\psi^+}$ ,  $G_{\psi\psi^+}$ ,  $G_{\psi\psi}$ ,  $G_{v'_{\parallel}m}$ ,  $G_{v'_{\perp}v_{\perp}}$  and dropping all IR-irrelevant vertices of the action, we write the IR-effective generating functional of the Green's functions of the order-parameter fields as

$$G_{eff} = \int D\psi^+ D\psi D\psi'^+ D\psi' Dm Dm' Dv Dv' \delta^F(m') e^{-S'_{dyn} + A\psi^+ + A^+\psi + A'\psi'^+ + A'^+\psi'}, \quad (3.8)$$

where we introduce the field sources  $A$ ,  $A^+$ ,  $A'$ ,  $A'^+$ ,  $\delta^F(\dots)$  is the functional delta function, and the action has the form

$$\begin{aligned} -S'_{dyn} = & b_1\psi'^+\psi' + a_1\psi'^+\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ + a_5v'_{\perp}\partial^2v_{\perp} + a_7v'_i\partial_i m \\ & -\psi'^+\partial_t\psi - \psi'\partial_t\psi^+ - v'_{\perp}\partial_tv_{\perp} + \psi'^+[-v_i\partial_i(\psi) + a_8\psi^+\psi\psi + a_9m\psi + a_{10}\psi v^2] \\ & +\psi'[-v_i\partial_i\psi^+ + a_{11}\psi^+\psi\psi^+ + a_{12}m\psi^+ + a_{13}\psi^+v^2] + m'[-m\partial_iv_i + a_{14}\partial^2(\psi^+\psi) \\ & +a_{16}\psi^+\partial^2\psi + a_{17}\psi\partial^2\psi^+] + v'_i[-\partial_j(v_iv_j) + a_{24}\partial_i(\psi^+\psi) + a_{25}\partial_iv^2]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

The fields  $v'_{\perp}$ ,  $v'_{\parallel}$  in play the role of Lagrange multipliers. The integration over them in formula can be performed explicitly, and it leads to the appearance of the new delta functions

$$\delta^F(\partial_tv_{\perp} + P_{\perp}(v\nabla v) - \nu\partial^2v_{\perp}), \quad \delta^F(a_7\nabla m - P_{\parallel}(v\nabla v) + a_{24}\nabla(\psi^+\psi) + a_{25}\nabla v^2).$$

The relation dictated by the first delta function is just the Navier–Stokes equation. In the case of the considered equilibrium fluctuations, it is obvious that it is solved trivially,  $v = 0$ . The second relation leads to the expression  $m = -a_{24}(\psi^+\psi)/a_7$  for the considered set of decreasing fields. Without the integration over the fields  $m$ ,  $m'$  and  $v$  in functional , using the functional delta functions, we obtain the final IR-effective dynamical action of the MSR type for describing the critical dynamics of the main fields:

$$\begin{aligned}
-S_{dyn,eff} = & b_1\psi^{+'}\psi' + a_1\psi^{+'}\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ - \psi^{+'}\partial_t\psi - \psi'\partial_t\psi^+ + \psi^{+'}[a_8\psi^+\psi^2 \\
& - a_9a_{24}(\psi^+\psi^2)/a_7] + \psi'[a_{11}(\psi^+)^2\psi - a_{12}a_{24}(\psi^+)^2\psi/a_7].
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

It is easy to establish that this action also differs from the dynamical action of the stochastic model A only in the rescaling of the fields and parameters, which confirms the results of our previous analysis.

Table 3.2. Canonical dimensions of the fields and model parameters.

$F$	$\psi, \psi^+$	$\psi', \psi^{+'}$	$m, m'$	$v$	$v'$	$b_1, b_2$	$b_3, b_4$
$d_F^p$	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	$d/2$	$-1$	$d + 1$	$-2$	$-8$
$d_F^\omega$	$0$	$0$	$0$	$1$	$-1$	$1$	$3$
$d_F$	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	$d/2$	$1$	$d - 1$	$0$	$-2$

$F$	$a_1, a_2, a_4, a_5, a_6$	$a_8, a_{11}$	$a_9, a_{12}, a_{14}, a_{16}, a_{17}$	$a_{10}, a_{13}$	$a_3$	$a_{15}$
$d_F^p$	$-2$	$2 - d$	$-d/2$	$2$	$d/2$	$-d/2$
$d_F^\omega$	$1$	$1$	$1$	$-1$	$0$	$1$
$d_F$	$0$	$4 - d$	$2 - d/2$	$0$	$d/2$	$-2 - d/2$

$F$	$a_{18}, a_{21}$	$a_{19}, a_{22}$	$a_{20}, a_{23}$	$a_{24}$	$a_7$	$a_{25}$
$d_F^p$	$-2 - d$	$2 - 2d$	$-3d/2$	$-d$	$-d/2 - 2$	$0$
$d_F^\omega$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$0$
$d_F$	$2 - d$	$6 - 2d$	$4 - 3d/2$	$4 - d$	$2 - d/2$	$0$

## Conclusion

As a result of our analysis, we have shown that the stochastic model A correctly describes the dynamical behavior in a neighborhood of the  $\lambda$  point. We can assume that the dynamical index  $z$  is established in this case. Among all standard stochastic models, model A is the simplest and the best studied. In [21] it, the three-loop calculations were first performed, and the  $(4 - \epsilon)$ -expansion of the critical index  $z$  is currently known up to the order of  $\epsilon^4$  [26] ,

$$z = 2 + 0.0145218\epsilon^2 + 0.0110586\epsilon^3 - 0.00526542\epsilon^4.$$

The higher-order asymptotic form of the quantum-field expansion for the dynamical critical index in model A was studied in [23] . For the index  $z$  in model A, the most exact results correspond to the Borel resummation of the four orders of the  $\epsilon$ -expansion with inclusion of the higher-order asymptotic values and some additional considerations concerning the behavior of the perturbation theory series [26]. Unfortunately, calculation results for the theory that interests us,  $\varphi_4$  ( $n = 2$ ), were not given there. Hence, the result in [22], namely,

$$z(\epsilon = 1) = 2.014_{-0.00}^{+0.11}.$$

, must be regarded as the most exact published value of the sought dynamical index. This result differs significantly from predictions of the stochastic models F and E, where the value  $z = 1.5$  was assumed to be most probable although the dynamical index values were not determined. We do not know confirmed experimental results of measuring the  $z$  index in critical superfluid systems; the existing measurement accuracy is now insufficient for justifiable conclusions because implementing the experiments is complicated. The numerical simulation is limited by the necessity to choose the correct model, and the correct inclusion of the hydrodynamics of a compressible fluid leads to complexities that are almost unsolvable with current computational capabilities. Therefore, our conclusions

can be regarded as an original result of calculating the dynamical index of the  $\lambda$  point. In previous section, we restricted ourselves to using only the one-loop approximation for the  $\beta$ -functions of the charges  $g_i$  and the two-loop approximation for the charge  $u$ . But the IR-instability of the trivial fixed point obtained in previous section is obviously also preserved in higher orders of the perturbation theory. The structure of the phase trajectories (the repulsion of the trivial point and the line  $u^* = \infty$  for any  $g_i^*$ ) suggests the presence of a single IR-stable fixed point in the first order of the  $\epsilon$ -expansion. The assertion of such a structure must hold in all orders of the regular expansion if, of course, studies do not discover the principally nonperturbative character of the studied phase transition, but this is hardly probable.

## Bibliography

1. *Landau L.* On the Theory of Phase Transitions // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1937. — No. 7. — P. 19.
2. *Vasil'ev A. N.* The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics. — Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2004.
3. *Lipa J. A., Nissen J. A.* Specific heat of liquid helium in zero gravity very near the lambda point // Phys. Rev. B. — 2003. — No. 68.
4. *Hohenberg P. C., Halperin B. I.* Theory of dynamic critical phenomena // Rev. Mod. Phys. — 1977. — No. 49. — P. 435–479.
5. *Folk R., Moser G.* Critical dynamics: a field-theoretical approach // J. Phys. A. — 2006. — No. 39. — P. 207–313.
6. Superfluid phase transition with activated velocity fluctuations: Renormalization group approach / Dančo [et al.] // Phys. Rev. E. — 2016. — No. 93.
7. *Hnatich M., Komarova M. V., Nalimov M. Y.* Superfluid phase transition with activated velocity fluctuations: Renormalization group approach // Theor. Math. Phys. — 2013. — No. 175. — P. 779–787.
8. *DeDominicis C., Peliti L.* Deviations from Dynamic Scaling in Helium and Antiferromagnets // Phys. Rev. Lett. — 1977. — No. 38. — P. 505–508.
9. *DeDominicis C., Peliti L.* Field-theory renormalization and critical dynamics above  $T_c$ : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems // Phys. Rev. B. — 1978. — No. 18. — P. 353–376.
10. *Dohm V.* Density Correlation Function and Dynamic Transient Exponents of Liquid Helium at and above  $T_{\lambda}$  // Z. Physik B. — 1979. — No. 33. — P. 79–95.

11. *Adzhemyan L., Dančo, M. H.* Numerical Calculation of Scaling Exponents of Percolation Process in the Framework of Renormalization Group Approach // EPJ Web of Conferences. — 2016. — No. 108.
12. Effective large-scale model of boson gas from microscopic theory / J. Honkonen [et al.] // Nucl.Phys. B. — 2019. — No. 939. — P. 105.
13. Kinetic Theory of Boson Gas. / J. Honkonen [et al.] // Theor Math Phys. — 2019. — No. 200. — P. 1360–1373.
14. Critical Dynamics of the Phase Transition to the Superfluid State / Y. Zavoronkov [et al.] // Theor Math Phys. — 2019. — No. 200. — P. 1237–1251.
15. *Hall B.* Quantum Theory for Mathematicians. — Springer, 20013.
16. *Schwinger J.* Brownian Motion of a Quantum Oscillator // Math. Phys. — 1961. — No. 2. — P. 407.
17. *Rammer J.* Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals // Rev.Mod.Phys. — 1986. — No. 58. — P. 323–359.
18. *Honkonen J.* Contour-ordered Green's functions in stochastic field theory // Theor. Math. Phys. — 2013. — No. 175. — P. 827–834.
19. *Vasil'ev A. N.* Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics. — Amsterdam : Gordon, Breach Science, 1998.
20. *Keldysh L. V.* Diagram Technique for Nonequilibrium Processes // Sov. Phys. JETP. — 1965. — No. 20. — P. 1018–1026.
21. *Antonov N. V., Vasil'ev A. N.* Critical dynamics as a field theory // TMP. — 1984. — No. 60. — P. 671–679.
22. *M. Yu. Nalimov, V.A. Sergeev, L. Sladkoff.* Borel resummation of the  $\epsilon$ -expansion of the dynamical exponent  $z$  in model A of the  $\varphi^4(\text{O}(n))$  theory // Theor. and Math. Phys. — 2009. — No. 159. — P. 496–507.

23. *Honkonen J., Komarova M. V., Nalimov M. Y.* Large-order asymptotes for dynamic models near equilibrium // Nucl.Phys. B. — 2005. — No. 707. — P. 493–508.
24. *Landau L., Lifshitz E.* Course of Theoretical Physics, Volume 6, Fluid Mechanics. — Pergamon, 1987.
25. *M.Nalimov, Nikitin.I.S.* Infrared permutation theory as a method for excluding sonic modes from stochastic dynamics equations // Vestnik SPbU. — 1999. — No. 4. — P. 105–109.
26. Diagram reduction in problem of critical dynamics of ferromagnets: 4-loop approximation / L. T. Adzhemyan [et al.] // J.Phys. A: Mathematical and Theoretical. — 2018. — No. 51. — P. 496–507.

## Appendix

Таблица 3. Diagrams contribute to в  $Z_5$ 

N	Diagrams	s.c	$Z_5 (u = 0)$	$D_u Z_5(u = 0)$
1		1	$-\frac{3ig_1^3 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1^3 \log(\frac{4}{3})}{16\pi^4\epsilon}$
2		2	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3 (-1 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
3		2	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3 (\log(\frac{256}{81}) - 1)}{128\pi^4\epsilon}$
4		2	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3 (-3 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
5		2	$-\frac{ig_1^3 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3 (1 - 6 \log(\frac{4}{3}))}{192\pi^4\epsilon}$
6		2	$-\frac{ig_1^3 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1^3 (1 + \log(\frac{4096}{729}))}{384\pi^4\epsilon}$
7		1	$-\frac{ig_1^3 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1^3 (1 + \log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$
8		2	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3 (-1 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
9		1	$\frac{ig_1^3 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^3 (-3 + 14 \log(2) - 7 \log(3))}{256\pi^4\epsilon}$
10		2	$\frac{ig_1 g_2^2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1 g_2^2 (1 - 14 \log(2) + 7 \log(3))}{256\pi^4\epsilon}$

Continued on next page

## 3 — Beginning on previous page

N	Diagrams	s.c	Value ( $u = 0$ )	Value $D_u(u = 0)$
11		2	$\frac{ig_1g_2^2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1g_2^2(\log(\frac{256}{81})-1)}{128\pi^4\epsilon}$
12		1	$-\frac{ig_1g_2^2\log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1g_2^2(\log(\frac{64}{27})-1)}{96\pi^4\epsilon}$
13		2	$\frac{ig_1^2g_2(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{768\pi^4\epsilon}$
14		2	$\frac{ig_1^2g_2(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2}{384\pi^4\epsilon}$
15		1	$-\frac{ig_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{1024}{243})-1)}{256\pi^4\epsilon}$
16		1	$\frac{3ig_1^2g_2\log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	0
17		2	$\frac{3ig_1^2g_2\log(\frac{4}{3})}{64\pi^4\epsilon}$	0
18		2	$-\frac{ig_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{16}{9})-1)}{128\pi^4\epsilon}$
19		2	$-\frac{ig_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{1024}{243})-1)}{256\pi^4\epsilon}$
20		2	$-\frac{ig_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{16}{9})-1)}{128\pi^4\epsilon}$
21		1	$\frac{ig_1^2g_2(1+\log(\frac{4}{3}))}{256\pi^4\epsilon}$	$-\frac{g_1^2g_2(\log(\frac{64}{27})-1)}{256\pi^4\epsilon}$

Continued on next page

3 — Beginning on previous page

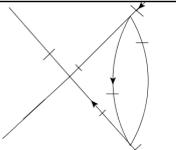
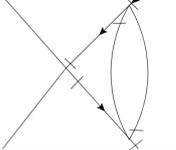
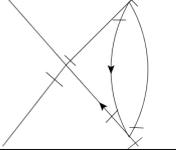
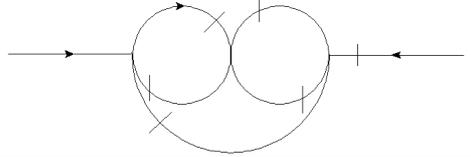
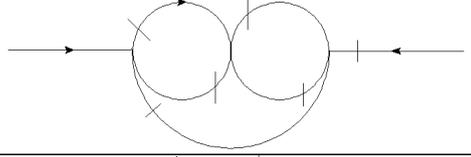
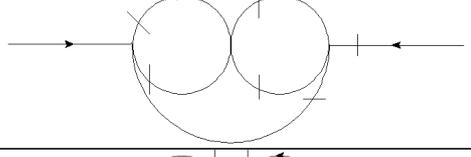
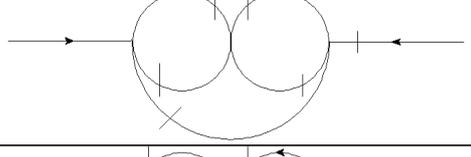
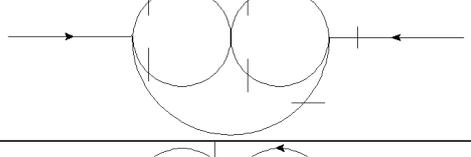
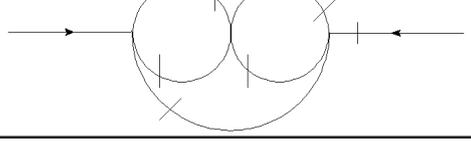
N	Diagrams	s.c	Value ( $u = 0$ )	Value $D_u(u = 0)$
22		2	$-\frac{ig_1^2 g_2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1^2 g_2 (\log(\frac{16}{9}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$
23		1	$\frac{ig_1^2 g_2 \log(\frac{4}{3})}{64\pi^4 \epsilon}$	0
24		2	$\frac{ig_1 g_2^2 (\log(\frac{64}{27}) - 1)}{256\pi^4 \epsilon}$	$-\frac{g_1 g_2^2 (\log(\frac{256}{81}) - 1)}{128\pi^4 \epsilon}$

Таблица 4. Diagram in  $Z_0, Z_1, Z_2$ 

№	Diagram	s.c	$Z_i$	$D_u Z_i$
1		1	$-7.69766 \cdot 10^{-7} ig_1^2 g_2$	—
2		1	$7.69766 \cdot 10^{-7} ig_1 g_2^2$	—
3		0.5	$7.69766 \cdot 10^{-7} ig_1 g_2^2$	—
4		1	$-7.69766 \cdot 10^{-7} ig_1^2 g_2$	—
5		0.5	$-7.69766 \cdot 10^{-7} ig_1^2 g_2$	—
6		1	$7.69766 \cdot 10^{-7} ig_2^2 g_1$	—

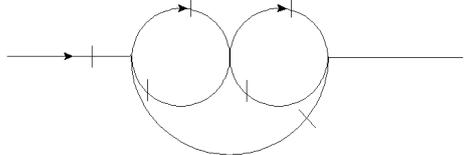
Continued on next page

Таблица 4 – *Beginning on previous page*

№	Diagram	s.c	$Z_i$	$D_u Z_i$
7		1	$3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1^3$ $-6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1^3$	$-1.64641 \cdot 10^{-7} g_1^3$ $-1.25562 \cdot 10^{-7} g_1^3$
8		1	$-3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1^2 g_2$ $6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1^2 g_2$	$-1.40674 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $-5.66049 \cdot 10^{-8} g_1^2 g_2$
9		1	$3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1 g_2^2$ $-6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1 g_2^2$	$9.52617 \cdot 10^{-8} g_1 g_2^2$ $1.38559 \cdot 10^{-8} g_1 g_2^2$
10		1	$4.58812 \cdot 10^{-7} i g_1^3$ $2.45901 \cdot 10^{-7} i g_1^3$	$7.02411 \cdot 10^{-7} g_1^3$ $1.82199 \cdot 10^{-7} g_1^3$
11		0.5	$-4.58812 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$ $-2.45901 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$	$-1.91228 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $-1.40869 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$
12		1	$-4.58812 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$ $-2.45901 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$	$-2.31183 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $-1.64529 \cdot 10^{-8} g_1^2 g_2$
13		1	$-1.51717 \cdot 10^{-7} i g_1^3$ $-6.42517 \cdot 10^{-8} i g_1^3$	$-8.9346 \cdot 10^{-8} g_1^3$ $-7.1044 \cdot 10^{-9} g_1^3$
14		1	$1.51717 \cdot 10^{-7} i g_1^2 g_2$ $6.42517 \cdot 10^{-8} i g_1^2 g_2$	$1.78565 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $5.46681 \cdot 10^{-8} g_1^2 g_2$
15		1	$-3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1^2 g_2$ $6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1^2 g_2$	$-1.40674 \cdot 10^{-7} g_1^2 g_2$ $-5.66049 \cdot 10^{-8} g_1^2 g_2$
16		0.5	$-1.51717 \cdot 10^{-7} i g_2^2 g_1$ $-6.42517 \cdot 10^{-8} i g_2^2 g_1$	$3.67808 \cdot 10^{-7} g_2^2 g_1$ $2.14054 \cdot 10^{-7} g_2^2 g_1$

*Continued on next page*

Таблица 4 – *Beginning on previous page*

№	Diagram	s.c	$Z_i$	$D_u Z_i$
17	 <p>The diagram shows two overlapping circles. The left circle has an arrow pointing right along its top edge. The right circle has an arrow pointing right along its top edge. A horizontal line passes through the center of both circles. There are tick marks on the horizontal line: one on the left side of the left circle, one at the point of tangency between the two circles, and one on the right side of the right circle. A curved arrow at the bottom of the circles indicates a clockwise direction.</p>	1	$3.89026 \cdot 10^{-8} i g_1^3$ $-6.17611 \cdot 10^{-9} i g_1^3$	$1.86087 \cdot 10^{-7} g_1^3$ $9.9354 \cdot 10^{-8} g_1^3$