

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Воробьева Светлана Евгеньевна

Многопетлевые расчеты в модели Λ критической динамики

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н. проф. Аджемян Л.Ц.

Санкт-Петербург – 2018

Содержание

Введение	4
1 Модель А критической динамики.	
Ренормировка. Теория возмущений	10
1.1 Явление критического замедления, динамический скейлинг	10
1.2 Модель А критической динамики	11
1.3 Ренормировка модели	13
1.4 Уравнения РГ	16
1.5 Диаграммная техника в импульсно-временном представлении. Интегрирование по временным версиям	18
1.6 Диаграммная техника в представлении Фейнмана	19
2 Расчет динамического индекса в “теории без расходимостей”	25
2.1 Расчет аномальных размерностей без использования констант ренормировки	25
2.2 Ренормировка величин f_i и их связь с F_i	29
2.3 Представление R-операции в схеме с точкой нормировки	31
2.4 R-операция после интегрирования по времени	32
2.5 Вычисление диаграмм	34
2.6 Динамический критический индекс z	36
3 Расчет динамического индекса в схеме MS	42
3.1 Метод Sector Decomposition в задачах динамики	42
3.2 Редукция диаграмм	46
3.3 Расчет динамического индекса в схеме MS	51
4 Пересуммирование ε-разложения индекса z методом конформ-Бореля	59
Заключение	63
Приложение	65

Список литературы

104

Введение

Актуальность темы.

Метод ренормализационной группы (РГ) широко используется в настоящее время при изучении фазовых переходов II рода и критических явлений. Он позволяет обосновать критический скейлинг и дает возможность построения регулярных разложений критических показателей в форме рядов по формально малому параметру ε – отклонению размерности пространства от ее критического значения. Основной технической задачей при таком подходе является вычисление диаграмм Фейнмана, определяющих так называемые РГ-функции. В задачах критической динамики такой расчет сопряжен со значительно большими трудностями, чем в задачах статики, поэтому продвинуться в старшие порядки теории возмущений весьма сложно. В то же время такое продвижение необходимо для корректного определения критических показателей, поскольку ряды теории возмущений являются асимптотическими и их надо суммировать по Борелю.

Модель А критической динамики (по терминологии обзоров [1], [2]), рассматриваемая в настоящей работе, является в некотором смысле простейшей, и на ней удобно отрабатывать технические приемы расчета многопетлевых динамических диаграмм.

С другой стороны, сегодня наблюдается существенный интерес к релаксационным процессам в различных материалах, описываемых моделью А. Это относится как к традиционным для данной модели системам типа ферромагнетиков [3], так и к новым материалам, попадающим в тот же класс универсальности [4], [5]. В связи с этим получение надежных количественных результатов для данной модели является весьма актуальным.

Степень разработанности темы исследования.

Применение метода ренормализационной группы к задачам критической динамики сталкивается со значительно большими трудностями по сравнению с задачами критической статики. Полученные здесь аналитические результаты ограничиваются в лучшем случае третьим порядком теории возмущений, тогда как в статической теории φ^4 в настоящее время достигнут шестипетлевой результат [6, 7, 8], а для аномальной размерности поля – семипетлевой [9]. Заметное отставание имеет место и в численных расчетах, в которых метод разделения на сектора (Sector Decomposition) при расчете диаграмм Фейнмана

[10] оказался весьма эффективным в задачах критической статики (5 петель в теории φ^4 [11]), в то время как в задачах критической динамики этот метод до сих пор применялся лишь в двухпетлевом приближении [12].

Применительно к А модели критической динамики метод ренормгруппы был впервые применен в работе [13], в которой динамический критический индекс z был рассчитан во втором порядке ε -разложения (первый порядок вклада не дает). Отметим, что в этой же работе индекс z рассчитан в главном порядке $1/n$ -разложения, где n – число компонент параметра порядка. Проведенный в работе [14] расчет третьего порядка по ε оказался ошибочным из-за технической погрешности, хотя идейно был верным. Правильный результат получен в работе [15]. Отметим, что в обзоре [1] цитируется ошибочный результат работы [14], в то время как в более позднем обзоре [2] приведен уже правильный результат работы [15]. Численный расчет индекса z в четвертом порядке ε -разложения проведен в работе [16]. Вычисления проводились в импульсном представлении, в котором трудно обеспечить высокую точность для диаграмм со сложной структурой подграфов. В результате погрешность расчета составила порядка 1%. В работе [17] на основе четырехпетлевого результата работы [16] проведено борелевское суммирование ε -разложения критического индекса z .

Целью работы является высокоточное численное определение динамического критического индекса z А-модели критической динамики в четвертом порядке теории возмущений. Вычисления проводятся двумя методами, обобщающими соответствующие подходы в задачах критической статики: методом расчета критических показателей без использования констант ренормировок, позволяющим избежать численного расчета сингулярных интегралов, и методом Sector Decomposition, который позволяет свести задачу к численному расчету вычетов при полюсах.

Для этого решаются следующие **задачи**:

1) Обобщить метод расчета ренормгрупповых функций без использования констант ренормировки на задачи критической динамики.

2) Разработать метод записи фейнмановского представления для динамических диаграмм непосредственно по их внешнему виду, минуя импульсное представление.

3) Обобщить метод “Sector Decomposition” на задачи критической динамики и вычислить с помощью этого метода динамический критический индекс А-модели в “теории без расходимостей” и в схеме минимальных вычитаний.

4) Выполнить пересуммирование четырехпетлевого ε -разложения динамического критического индекса A -модели методом конформ-Бореля.

Научная новизна. Сформулированные выше цели и задачи диссертации являются новыми. Все основные результаты диссертации получены впервые, что подтверждается их публикацией в ведущих отечественных и международных журналах и апробацией на представительных международных конференциях.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в широком классе моделей критической динамики, таких, как модель E , описывающая переход гелия в сверхтекучее состояние, модель H , описывающая критическую динамику в окрестности критической точки жидкость-пар, задаче протекания и т.д.

Методология и методы исследования. Методология диссертации основана на использовании теоретико-полевых методов – методе функционального интегрирования, диаграммной технике Фейнмана, теории ренормировок и ренормализационной группы, численного расчета диаграмм методом Sector Decomposition, методе борелевского суммирования расходящихся рядов.

Положения, выносимые на защиту:

1) Проведено обобщение метода расчета ренормгрупповых функций без использования констант ренормировок (“теория без расходимостей”) на задачи критической динамики. Эффективность этого метода продемонстрирована ренормгрупповым расчетом A -модели, описывающей эффект критического замедления в окрестности критической точки ферромагнетиков.

2) Разработан метод построения представления Фейнмана диаграмм критической динамики непосредственно по виду диаграмм, минуя импульсное представление. Произведено обобщение этого метода на диаграммы “теории без расходимостей”.

3) Выполнено обобщение метода разбиения на сектора при вычислении диаграмм Фейнмана (“Sector Decomposition”) на задачи критической динамики. С помощью этого метода произведен расчет динамического критического индекса A -модели в “теории без расходимостей” и в схеме минимальных вычитаний. Точность расчета на два порядка превышает достигнутую в работах предшественников.

4) Произведено суммирование четырехпетлевого ε -разложения динамического критического индекса A -модели методом конформ-Бореля. Показано,

что учет параметра сильной связи существенно улучшает сходимость процедуры суммирования.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием апробированных теоретико-полевых методов. Результаты исследования, проведенного в диссертации, опубликованы в ведущих рецензируемых журналах, докладывались на российских и международных конференциях. Также расчеты проверялись на сравнение с ранее полученными результатами других авторов.

Апробация работы

Результаты и положения работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

“16th Small Triangle Meeting” (Ptičie, Slovakia, 2014),

“The XX International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists” (Dubna, Russia, 2016),

“42nd Conferences of the Middle European Cooperation in Statistical Physics” (Lyon, France, 2017).

Список публикаций по теме диссертации.

По теме диссертации опубликовано 4 статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ и входящих в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus

1. Л. Ц. Аджемян, С. Е. Воробьева, М. В. Компаниец, *Представление несингулярными интегралами β -функции и аномальных размерностей в моделях критической динамики*, ТМФ, **185**:1 (2015), 3–11.

2. Л. Ц. Аджемян, С. Е. Воробьева, М. В. Компаниец, Э. В. Иванова, *Представление ренормгрупповых функций несингулярными интегралами в модели критической динамики ферромагнетиков: четвертый порядок ε -разложения*, ТМФ, **195**: 1 (2018), 103-114.

3. L. Adzhemyan, E. Ivanova, M. Kompaniets, S. Vorobyeva, *Diagram Reduction in Problem of Critical Dynamics of Ferromagnets: 4-Loop Approximation*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **51** (2018), 155003. arXiv:1712.05917 [cond-mat.stat-mech].

4. С. Е. Воробьева, Э.В. Иванова, В.Д. Серов, *Борелевское пересуммирование динамического индекса z в модели А критической динамики с учетом асимптотики сильной связи*, Вестник СПбГУ. Физика и химия, Т. 5 (63). Вып. 1, (2018), 13-19.

Личный вклад автора. Все основные результаты получены соискате-

лем лично, либо при его прямом участии в неразделимом соавторстве.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из Введения, 4 глав, Заключения и 1 приложения. Полный объем диссертации составляет 107 страниц. Диссертация содержит 5 рисунков, 4 таблицы и список литературы из 36 наименований.

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, описаны методология и методы исследования, степень разработанности темы исследования, а также показана практическая значимость полученных результатов и представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая часть **главы 1** посвящена постановке задачи исследования явления критического замедления в рамках А-модели. С использованием феноменологии динамического скейлинга сформулировано понятие критического замедления и введен динамический критический индекс z . Задачей последующего статистического подхода является обоснование динамического скейлинга и расчет показателя z в рамках ренормгруппового подхода и ε -разложения. Такой подход основан на использовании стохастического уравнения Ланжевена с последующим переходом к эквивалентной квантово-полевой модели. Сформулирована общая схема ренормировки этой модели, две различные конкретные реализации которой используются в главах 2 и 3. Рассмотрены уравнения ренормгруппы, отвечающие описанной схеме ренормировки, они являются общими для обеих конкретных схем, используемых в главах 2 и 3.

Оригинальной частью **первой главы** является обобщение фейнмановского представления на диаграммы динамической модели, позволяющее сопоставлять диаграмме интеграл по фейнмановским параметрам непосредственно по виду диаграммы, минуя импульсное представление. Эта часть первой главы основана на материале работы [18].

Во **второй главе** проведено обобщение метода вычисления РГ-функций без использования констант ренормировок (“теория без расходимостей”) на случай динамической теории. Сформулирована отвечающая этой цели схема ренормировки с использованием R -операции. С помощью уравнений ренормгруппы получено представление РГ-функций через ренормированные 1-неприводимые функции. Полученные выражения приведены к виду, сводящему определение РГ-функций к вычислению интегралов, не содержащих особенностей. Произведен численный четырехпетлевой расчет индекса z . Часть вкладов была рас-

считана в импульсном представлении, наиболее сложные – в фейнмановском представлении с использованием техники Sector Decomposition. Материал **второй главы** основан на работах [18] и [19].

В третьей главе на основе полученного в главе 1 фейнмановского представления диаграмм динамической модели рассчитаны константы ренормировки в схеме минимальных вычитаний с помощью метода Sector Decomposition в четырехпетлевом приближении. Использована процедура редукции диаграмм, позволившая существенно сократить количество диаграмм и, соответственно, общий объем вычислений. В результате получено разложение динамического индекса z с точностью до ε^4 . Материал **третьей главы** основан на работе [20].

В четвертой главе проведено суммирование полученных рядов ε -разложения индекса z методом конформ-Бореля с использованием параметра сильной связи. На примере нульмерной теории путем сравнения с известным в данном случае точным результатом показано, что использование параметра сильной связи значительно повышает скорость сходимости процедуры суммирования. Показано, что при суммировании ряда для индекса z при подходящем выборе этого параметра также наблюдается значительное улучшение сходимости по сравнению с нулевым значением параметра, использованным ранее. Материал **четвертой главы** основан на работе [21].

В Заключение диссертации представлены основные результаты и выводы.

В Приложении приведен расчет в импульсном представлении диаграмм “теории без расходимостей”.

1 Модель А критической динамики. Ренормировка. Теория возмущений

1.1 Явление критического замедления, динамический скейлинг

Поведение физических систем в окрестности точек непрерывных фазовых переходов и критических точек описывается в терминах параметра порядка $\psi(\mathbf{r}, t)$. Всюду в дальнейшем рассматривается однофазная система при температурах $T > T_c$ выше температуры фазового перехода. Эта область характеризуется при $T \rightarrow T_c$ ростом размера флуктуаций параметра порядка и увеличением времени их жизни (критическое замедление).

Проиллюстрируем явление критического замедления на примере поведения парного коррелятора

$$G(r, t) = \langle \psi(r_1, t_1) \psi(r_2, t_2) \rangle, \quad r \equiv r_1 - r_2, \quad t \equiv t_1 - t_2. \quad (1)$$

В известном приближении Орнштейна-Цернике фурье-образ одновременного коррелятора описывается выражением

$$G(k) = \frac{1}{k^2 + r_c^{-2}}, \quad (2)$$

в котором корреляционный радиус r_c возрастает по мере приближения температуры T к значению T_c в критической точке по закону $r_c^2 \sim (T - T_c)^{-1}$. В трехмерной системе в координатном представлении из (2) следует, что

$$G(r) = \frac{\exp(-r/r_c)}{4\pi r}. \quad (3)$$

Гипотеза подобия постулирует для $G(k)$ представление вида

$$G(k) = \frac{1}{k^{2-\eta}} f(kr_c), \quad r_c \sim (T - T_c)^{-\nu}, \quad (4)$$

совпадающее с (2) при значении критических индексов $\nu = 1/2$ для корреляционного радиуса и $\eta = 0$ для индекса Фишера.

Обобщение формулы Орнштейна-Цернике на разновременный коррелятор

для несохраняющегося параметра порядка имеет вид

$$G(k, t) = \frac{\exp(-t/t_c)}{k^2 + r_c^{-2}}, \quad t_c^{-1} = \lambda(k^2 + r_c^{-2}), \quad (5)$$

где λ – кинетический коэффициент, не зависящий от близости к критической точке. При $k = 0$ время затухания $t_c = r_c^2/\lambda$ возрастает при приближении к критической точке пропорционально $(T - T_c)^{-1}$ – в этом и состоит явление критического замедления.

Динамическая гипотеза подобия постулирует для $G(k, t)$ представление вида

$$G(k, t) = \frac{1}{k^{2-\eta}} f(kr_c, t/r_c^z), \quad r_c \sim (T - T_c)^{-\nu}, \quad (6)$$

в котором критический рост времени затухания при $k = 0$ определяется динамическим индексом z : $t_c \sim r_c^z \sim (T - T_c)^{-z\nu}$. В приближении (5) $z = 2$. Задача последовательной статистической теории состоит в обосновании динамического скейлинга и вычислении критических показателей ν, η и z .

1.2 Модель А критической динамики

Мы будем использовать модель критической динамики, основанную на стохастическом уравнении Ланжевена. Стохастичность в этом уравнении, вызванная хаотичным движением молекул, моделируется феноменологически путем введения в динамические уравнения некоторого “шума” – случайных сил с гауссовым распределением. Коррелятор шума выбирается из требования согласования динамики со статикой. Первым шагом является выбор статической модели. Наиболее известной является так называемая ϕ^4 -модель, для которой действие $S_0^{\text{st}}(\psi_0)$ имеет вид

$$S_0^{\text{st}}(\psi_0) = - \int d\mathbf{r} \left(\frac{(\partial\psi_0(\mathbf{r}))^2}{2} + \frac{\tau_0\psi_0^2(\mathbf{r})}{2} + \frac{1}{4!}g_0\psi_0^4(\mathbf{r}) \right) \quad (7)$$

Среднее значение функционала $F(\psi_0)$ от поля параметра порядка $\psi(\mathbf{r})$ определяется функциональным интегралом

$$\langle F(\psi_0) \rangle = C \int D\psi_0 F(\psi_0) \exp(S_0^{\text{st}}(\psi_0)), \quad (8)$$

где C – нормировочная постоянная. Величина $\tau_0 \sim T - T_c$ в (7) пропорциональна отклонению температуры T от ее значения в критической точке. В дальнейшем для краткости записи интеграл по координате в выражениях, аналогичных (7), будем опускать.

Модели с действием (7) описывают широкий класс физических систем в окрестности критической точки, в них параметр порядка может быть многокомпонентным $\psi_{0k}, k = 1..n$. В зависимости от симметрии системы степени параметра порядка в (7) могут иметь различный смысл, в рассматриваемых в дальнейшем $O(n)$ симметричных системах $\psi^2 \equiv \sum_{k=1}^n \psi_k^2$, $\psi^4 \equiv (\psi^2)^2$.

Определяемое по статическому действию уравнение стохастической динамики имеет различный вид в зависимости от того, является ли параметр порядка сохраняющейся величиной (точнее, интеграл от него по объему) и взаимодействует ли он с какими-либо другими “мягкими” модами. Модель А отвечает несохраняющемуся параметру порядка и отсутствию межмодового взаимодействия, уравнение Ланжевена имеет в этом случае вид

$$\partial_t \psi_0(\mathbf{r}, t) = \lambda \cdot \left. \frac{\delta S_0^{st}}{\delta \psi_0(\mathbf{x})} \right|_{\psi_0(\mathbf{r}) \rightarrow \psi_0(\mathbf{r}, t)} + f(\mathbf{r}, t), \quad \psi_0(\mathbf{r}, t \rightarrow -\infty) \rightarrow 0, \quad (9)$$

где λ – кинетический коэффициент Онсагера, f – гауссова “случайная сила” с коррелятором

$$\langle f(\mathbf{r}_1, t_1) f(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 2\lambda \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (10)$$

Граничное условие в (9) соответствует описанию равновесных тепловых флуктуаций. Заметим также, что замена $\lambda \rightarrow -\partial^2 \lambda$ в (9) и (10) (∂^2 – оператор Лапласа) определяет уравнение Ланжевена для сохраняющегося параметра порядка (“модель В” критической динамики).

Нахождение средних значений в стохастической задаче (9), (10) подразумевает решение уравнения (9) (нахождение “траектории”) и последующее усреднение взятого на траектории функционала по распределению случайной силы (10). Коррелятор (10) выбран так, что для одновременных средних (все поля взяты в один момент времени) результат совпадает с соответствующим средним, вычисленным по (8).

Анализ стохастической модели (9), (10) значительно облегчается, если переформулировать ее в виде квантово-полевой модели [22]. В такой модели средние вычисляются в виде функционального интеграла по набору $\phi_0 \equiv \{\psi_0, \psi'_0\}$

основного ψ_0 и вспомогательного ψ'_0 полей

$$\langle F(\psi_0, \psi'_0) \rangle = C \int D\psi_0 \int D\psi'_0 F(\psi_0, \psi'_0) \exp(S_0(\phi_0)), \quad (11)$$

где действие $S_0(\phi_0)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} S_0(\phi_0) &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 \left[-\partial_t \psi_0 + \lambda_0 \frac{\delta S_0^{\text{st}}}{\delta \psi_0} \right] = \\ &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 \left[\partial_t \psi_0 + \lambda_0 \left(\partial^2 \psi_0 - \tau_0 \psi_0 - \frac{1}{3!} g_0 \psi_0^3 \right) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

в котором подразумеваются интегрирования по координате (как в (7)) и по времени. Средние (11), (12) от основного поля совпадают с соответствующими средними по случайной силе от решения стохастического уравнения, средние, включающие вспомогательное поле, имеют смысл функций отклика [22]. Переход к квантово-полевой модели позволяет воспользоваться развитым математическим аппаратом теории поля – техникой континуального интегрирования, диаграммами Фейнмана, теорией ренормировок, ренормализационной группой и т.д.

1.3 Ренормировка модели

В критической области (при $\tau \rightarrow 0$) роль флуктуаций сильно возрастает, и теория возмущений по константе связи g_0 становится неэффективной как в статической, так и в динамической теории. Эта роль уменьшается с увеличением размерности пространства d и при $d > d_c = 4$ становится справедливой теория среднего поля. На этом основана идея К. Вильсона вычисления средних в виде так называемого эpsilon-разложения – ряда по формально малому параметру $\varepsilon \equiv 4 - d$. Техника ε -разложения в настоящее время широко используется в теории критических явлений [22]. Ее реализация сопряжена со значительными техническими трудностями. При переходе от реальной размерности пространства d к критической $d_c = 4$ диаграммы теории возмущений приобретают ультрафиолетовые расходимости, проявляющиеся в виде полюсов по ε . Поэтому в качестве первого шага построения ε -разложения необходимо произвести УФ-перенормировку. Следующим шагом является использование ренормализационной группы, отражающей неоднозначность процедуры ренормировки. Уравнения ренормгруппы позволяют обосновать критический скейлинг и вы-

числять критические индексы, однако для корректного их определения необходимо преодолеть еще одну трудность. Дело в том, что ряды ε -разложения являются асимптотическими, с факториально растущими коэффициентами, и их необходимо пересуммировать, рассчитав по возможности большее число членов ε -разложения.

Изложенная программа реализуется в настоящей работе применительно к A -модели. Начнем с процедуры перенормировки.

Рассмотрим A -модель критической динамики в пространстве размерности $d = 4 - \varepsilon$. Ренормировка действия этой модели заключается в переходе от неренормированного действия (12) к ренормированному

$$S_R = Z_1 \lambda \psi' \psi' + \psi' \left[-Z_2 \partial_t \psi + \lambda \left(Z_3 \partial^2 \psi - Z_4 \tau \psi - \frac{1}{3!} Z_5 \mu^\varepsilon g \psi^3 \right) \right], \quad (13)$$

где Z_i – константы ренормировки. Действие (13) может быть представлено в виде суммы базового действия S_B и контрчленов ΔS :

$$S_R = S_B + \Delta S, \quad (14)$$

где базовое действие имеет вид

$$S_B = \lambda \psi' \psi' + \psi' \left[-\partial_t \psi + \lambda \left(\partial^2 \psi - \tau \psi - \frac{1}{3!} \mu^\varepsilon g \psi^3 \right) \right]. \quad (15)$$

Контрчлены ΔS должны быть выбраны таким образом, чтобы устранить УФ-расходимости (полюса по ε) в диаграммах базовой теории. Для этого достаточно устранить их в определенной совокупности 1-неприводимых функций. Введем для таких функций обозначения

$$\Gamma_{(n_1, n_2)} \equiv \langle \underbrace{\psi \dots \psi}_{n_1} \underbrace{\psi' \dots \psi'}_{n_2} \rangle_{1\text{-непр}}.$$

Поверхностные ультрафиолетовые расходимости при $\varepsilon = 0$ присутствуют в диаграммах 1-неприводимых функций $\Gamma_{(0,2)}$, $\Gamma_{(3,1)}$, имеющих логарифмическую расходимость, и в квадратично-расходящихся диаграммах функции $\Gamma_{(1,1)}$ с возможными контрчленами $\psi' \partial_t \psi$, $\psi' \partial^2 \psi$ и $\psi' \tau \psi$.

Таким образом, константы ренормировки необходимо выбрать так, чтобы

были конечны ренормированные аналоги Γ^R следующих функций:

$$\bar{\Gamma}_1 = \frac{\Gamma_{(0,2)}}{2\lambda} \Big|_{p=0, \omega=0}, \quad (16)$$

$$\bar{\Gamma}_2 = \partial_{i\omega} \Gamma_{(1,1)} \Big|_{p=0, \omega=0}, \quad (17)$$

$$\bar{\Gamma}_3 = -\frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma_{(1,1)}}{\lambda} \Big|_{p=0, \omega=0}, \quad (18)$$

$$\bar{\Gamma}_4 = -\frac{\Gamma_{(1,1)} - \Gamma_{(1,1)}|_{\tau=0}}{\lambda\tau} \Big|_{p=0, \omega=0}, \quad (19)$$

$$\bar{\Gamma}_5 = -\frac{\Gamma_{(3,1)}}{\lambda g \mu^\varepsilon} \Big|_{p=0, \omega=0}. \quad (20)$$

Коэффициенты в функциях $\bar{\Gamma}_i$ выбраны так, чтобы в беспетлевом приближении (при $g = 0$) они равнялись единице.

Доказано (см., напр., [22]), что модель А мультипликативно ренормируема. Это означает, что ренормированное действие (13) может быть получено из неренормированного (12) мультипликативной ренормировкой параметров и полей:

$$\lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g, \quad \psi_0 = \psi Z_\psi, \quad \psi'_0 = \psi' Z_{\psi'}, \quad (21)$$

при этом константы ренормировки в (13) выражаются через константы ренормировки в (21) соотношениями

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\lambda Z_{\psi'}^2, & Z_2 &= Z_{\psi'} Z_\psi, & Z_3 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\psi, \\ Z_4 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\tau Z_\psi, & Z_5 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_g Z_\psi^3. \end{aligned} \quad (22)$$

Из мультипликативной ренормируемости моделей (12), (7) следует [22], что динамические константы ренормировки Z_ψ, Z_τ, Z_g совпадают со статическими (константами ренормировки модели (7))

$$Z_\psi = (Z_\psi)_{st}, \quad Z_\tau = (Z_\tau)_{st}, \quad Z_g = (Z_g)_{st}, \quad (23)$$

и справедливо соотношение

$$Z_{\psi'} Z_\lambda = Z_\psi. \quad (24)$$

Это означает, что константы ренормировки Z_3, Z_4, Z_5 – чисто статические, и

$$Z_1 = Z_2. \quad (25)$$

Единственной новой константой ренормировки является

$$Z_\lambda = Z_1^{-1} Z_\psi^2 = Z_2^{-1} Z_\psi^2. \quad (26)$$

Конкретный выбор схемы ренормировки будет обсуждаться в следующих двух главах.

1.4 Уравнения РГ

В используемых в дальнейшем схемах ренормировки константы ренормировки зависят только от константы связи и от размерности пространства, поэтому уравнения ренормгруппы для 1-неприводимых функций $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ можно получить аналогично тому, как это делается в монографии [22] для схемы MS. Введем обозначения

$$e_0 = \{g_0, m_0, \lambda_0, \mu\}, \quad e = \{g, m, \lambda, \mu\}$$

для набора затравочных и ренормированных параметров. Для удобства мы включили в первый из них ренормировочную массу μ , от которой затравочное действие не зависит. Формулы ренормировки для 1-неприводимых функций $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ имеют вид

$$\Gamma_{(n_1, n_2)}^{(0)}(e_0) = Z_\psi^{-n_1} Z_{\psi'}^{-n_2} \Gamma_{(n_1, n_2)}^R(e). \quad (27)$$

Уравнения РГ для $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ получаются из условия независимости $\Gamma_{(n_1, n_2)}^{(0)}(e_0)$ от μ :

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \Gamma_{(n_1, n_2)}^{(0)} = 0,$$

где $\tilde{\mathcal{D}}_\mu \equiv \mu \partial_\mu|_{m_0, g_0, \lambda_0}$. Для ренормированных функций $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ отсюда с учетом (27) получаем

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu [\ln \Gamma_{(n_1, n_2)}^R - n_1 \ln Z_\psi - n_2 \ln Z_{\psi'}] = 0,$$

таким образом, положив

$$\gamma_\phi \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\phi, \quad (28)$$

находим

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \Gamma_{(n_1, n_2)}^R = (n_1 \gamma_\psi + n_2 \gamma_{\psi'}) \Gamma_{(n_1, n_2)}^R.$$

Переходя в этом выражении к дифференцированию по ренормированным переменным e с помощью равенства

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu)_{g_0, m_0, \lambda_0} &= (\mathcal{D}_\mu)_{g, m, \lambda} + (\mathcal{D}_\mu g)_{g_0, m_0, \lambda_0} \partial_g + \\ &+ (\mathcal{D}_\mu \tau)_{g_0, m_0, \lambda_0} \partial_\tau + (\mathcal{D}_\mu \lambda)_{g_0, m_0, \lambda_0} \partial_\lambda, \end{aligned}$$

имеем

$$(\mathcal{D}_\mu + (\tilde{\mathcal{D}}_\mu g) \partial_g + (\tilde{\mathcal{D}}_\mu \tau) \partial_\tau + (\tilde{\mathcal{D}}_\mu \lambda) \partial_\lambda) \Gamma_{(n_1, n_2)}^R = (n_1 \gamma_\psi + n_2 \gamma_{\psi'}) \Gamma_{(n_1, n_2)}^R. \quad (29)$$

Вводя с учетом (21) РГ-функции

$$\gamma_\tau \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\tau, \quad \gamma_\lambda \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\lambda, \quad \gamma_g \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_g, \quad \beta \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = -g(\varepsilon + \gamma_g), \quad (30)$$

получаем из (29) искомое уравнение ренормгруппы:

$$(\mathcal{D}_\mu + \beta \partial_g - \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau - \gamma_\lambda \mathcal{D}_\lambda) \Gamma_{(n_1, n_2)}^R = (n_1 \gamma_\psi + n_2 \gamma_{\psi'}) \Gamma_{(n_1, n_2)}^R, \quad (31)$$

где $\mathcal{D}_\mu \equiv \mu \partial_\mu|_{\tau, \lambda, g}$, $\mathcal{D}_\tau \equiv \tau \partial_\tau|_{\lambda, \mu, g}$, $\mathcal{D}_\lambda \equiv \lambda \partial_\lambda|_{\tau, \mu, g}$.

Уравнения (31) позволяют обосновать критический скейлинг. Условие $\beta(g_*) = 0$ определяет значение заряда g_* в неподвижной точке, для устойчивой неподвижной точки подстановка $g = g_*$ в уравнения (31) превращает их в уравнения Эйлера для однородных функций, а величины $\gamma_\tau^* \equiv \gamma_\tau(g_*)$ и $\gamma_\phi^* \equiv \gamma_\phi(g_*)$ определяют критические показатели соответствующих величин. Необходимые для расчета этих показателей РГ-функции β и γ_i находят обычно по теории возмущений, вычисляя константы ренормировки. Как следует из (30), РГ-функции выражаются через них с помощью соотношений

$$\beta(g) = -\varepsilon \frac{g}{1 + g \partial_g \ln Z_g}, \quad \gamma_i(g) = -\varepsilon \frac{g \partial_g \ln Z_i}{1 + g \partial_g \ln Z_g}. \quad (32)$$

1.5 Диаграммная техника в импульсно-временном представлении. Интегрирование по временным версиям

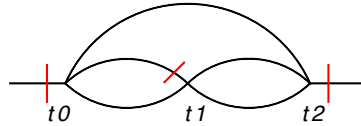
Диаграммные представления функций $\bar{\Gamma}_i$ строятся по обычным правилам Фейнмана. Линиям диаграмм модели (15) в импульсно-временном $(\mathbf{k}, t)$ представлении соответствуют пропагаторы

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bullet_{t_1} \text{---} \bullet_{t_2} &= \langle \psi(t_1) \psi(t_2) \rangle_0 = \frac{1}{E_k} \exp^{-\lambda E_k |t_1 - t_2|}, \\
 \text{---} \bullet_{t_1} \text{---} |_{t_2} &= \langle \psi(t_1) \psi'(t_2) \rangle_0 = \theta(t_1 - t_2) \exp^{-\lambda E_k (t_1 - t_2)}, \\
 |_{t_1} \text{---} |_{t_2} &= \langle \psi'(t_1) \psi'(t_2) \rangle_0 = 0, \\
 E_k &\equiv k^2 + \tau,
 \end{aligned} \tag{33}$$

а вершинам $\psi' \psi \psi \psi$ – множители $-\lambda g \mu^\varepsilon$.

Простой экспоненциальный вид зависимости пропагаторов (33) от времени позволяет легко провести интегрирование диаграмм по времени. Результат интегрирования удобно представлять с помощью введения понятия "временных версий". Для каждой диаграммы рассматриваются все возможные временные версии, то есть варианты упорядочения соответствующих вершинам времен t_i с учетом свойств запаздывания линий $\langle \psi \psi' \rangle$. Результат интегрирования представляется в виде суммы вкладов каждой из версий.

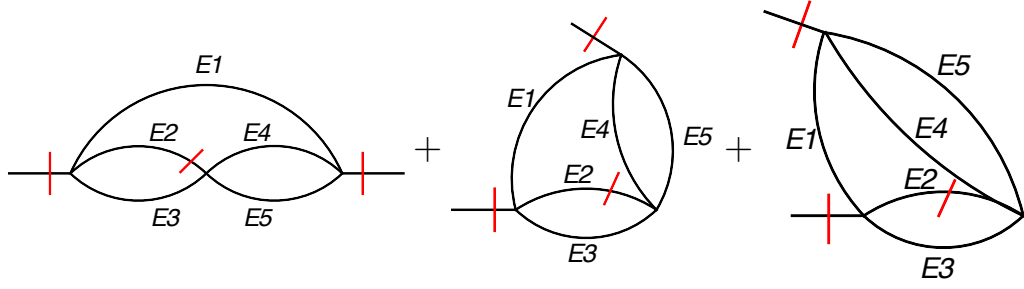
Рассмотрим подробнее процедуру интегрирования по времени на конкретном примере диаграммы



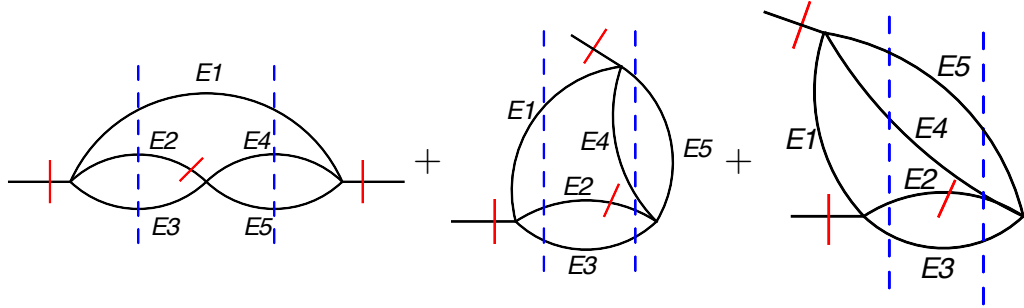
Поскольку интегрирование ведется по относительным временам, то одно из времен, к примеру t_0 , можно положить равным нулю. Возможны следующие соотношения между временами в вершинах диаграммы

$$0 < t_1 < t_2, \quad 0 < t_2 < t_1, \quad t_2 < 0 < t_1, \tag{34}$$

поэтому данная диаграмма имеет три временные версии:



Определим понятие “сечения”, как вертикальную линию, расположенную между двумя соседними вершинами диаграммы. Каждой линии в диаграмме припишем “энергию” E_i , которая по ней “протекает”. Тогда энергия в сечении – это сумма энергий линий диаграммы, находящихся в данном сечении. Результатом интегрирования по времени будет сумма по всем временным версиям произведений обратных энергий в каждом сечении.



$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_1 + E_2 + E_3} \cdot \frac{1}{E_1 + E_4 + E_5} + \frac{1}{E_1 + E_2 + E_3} \cdot \frac{1}{E_5 + E_4 + E_2 + E_3} + \\ & + \frac{1}{E_5 + E_4 + E_1} \cdot \frac{1}{E_5 + E_4 + E_2 + E_3} \end{aligned} \quad (35)$$

В нашем случае зависимость энергии от импульса соответствующей линии дается соотношением $E_i = k_i^2 + \tau$.

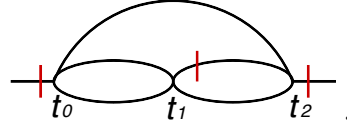
1.6 Диаграммная техника в представлении Фейнмана

В статической модели (7) переход к представлению Фейнмана основан на том, что в импульсном представлении подынтегральные выражения для диаграмм представляют собой произведения пропагаторов вида $1/(k^2 + \tau)$, зависящих от квадратов импульсов интегрирования. Представление для подынте-

гральных выражений в терминах фейнмановских параметров может быть получено в этих случаях непосредственно по виду диаграмм.

Для расчета РГ-функций требуется вычислять диаграммы $\bar{\Gamma}_i$ на нулевой внешней частоте. Интегрирование по временам с пропагаторами (33), легко выполняется по правилам предыдущего раздела и дает совокупность квадратичных по импульсам множителей в знаменателе. После этого возникает возможность перехода к представлению Фейнмана. Отличие от статического случая (модель (7)) состоит в том, что множители в знаменателе являются в данном случае суммой “энергий” E_k , и в то же время в пропагаторе (33) множитель E_k в знаменателе отсутствует. Мы рассмотрим на примере трехпетлевой диаграммы необходимые модификации для построения фейнмановского представления, а затем сформулируем общие правила его построения прямо по виду диаграммы.

В третьем порядке теории возмущений вклад в величину $\bar{\Gamma}_{(0,2)}$ определяется единственной диаграммой, которую требуется рассчитать на нулевой внешней частоте

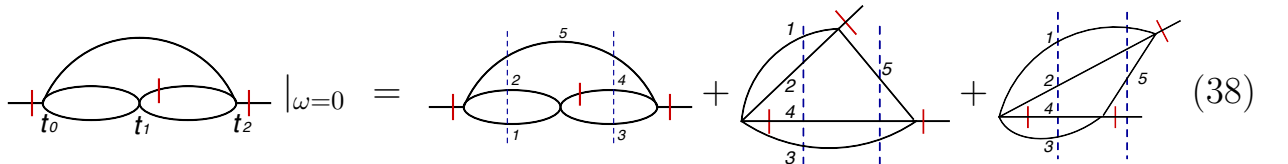

(36)

Для диаграммы (36) это соответствует взятию интеграла по всевозможным временам t_1 и t_2 .

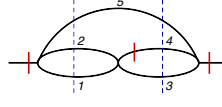
С учетом θ -функции в пропагаторе $\psi\psi'$ область интегрирования в (36) можно представить в виде 3-х вкладов (трех временных версий)

$$(t_0 > t_1 > t_2) \quad + \quad (t_0 > t_2 > t_1) \quad + \quad (t_2 > t_0 > t_1) \quad (37)$$

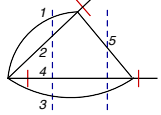
В каждой из областей (37) интегрирование по времени легко осуществляется, результат можно представить графически в виде


(38)

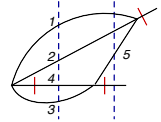
Приведем подынтегральные выражения в импульсном представлении для диаграмм в правой части (38)



$$\sim \frac{1}{E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3} E_{k_5}} \cdot \frac{1}{(E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_5})} \cdot \frac{1}{(E_{k_3} + E_{k_4} + E_{k_5})} \quad (39)$$



$$\sim \frac{1}{E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3} E_{k_5}} \cdot \frac{1}{(E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3} + E_{k_4})} \cdot \frac{1}{(E_{k_3} + E_{k_4} + E_{k_5})} \quad (40)$$



$$\sim \frac{1}{E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3} E_{k_5}} \cdot \frac{1}{(E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3} + E_{k_4})} \cdot \frac{1}{(E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_5})} \quad (41)$$

Первая дробь в выражениях (39-41) учитывает “статические” множители $1/E_{k_i}$ в пропагаторах $\psi\psi$, вторая и третья дроби – результат интегрирования по времени. Проведенные между каждой парой соседних вершин вертикальные пунктиры (“сечения”) определяют множители в знаменателях, равные сумме “энергий” E_k линий в этом сечении.

Зависимость от импульсов интегрирования в диаграммах после проведения интегрирования по временам имеет структуру, позволяющую перейти к фейнмановскому представлению, что позволяет воспользоваться в дальнейшем методом Sector Decomposition, как и в задачах критической статики. Рассмотрим такой переход на примере временной версии (39). С учетом множителей $1/E_k$ в пропагаторах (33) диаграмме сопоставляется интеграл:

$$J = \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_5 \frac{\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5)}{E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3} E_{k_5} (E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_5}) (E_{k_3} + E_{k_4} + E_{k_5})}. \quad (42)$$

Используя в (42) формулу Фейнмана

$$A_1^{-\lambda_1} \dots A_n^{-\lambda_n} = \frac{\Gamma(\sum_i \lambda_i)}{\prod_i \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 \dots \int_0^1 dv_1 \dots dv_n \frac{\delta(\sum_i v_i - 1) \prod_i v_i^{\lambda_i - 1}}{(\sum_j A_j v_j)^{\sum_i \lambda_i}} \quad (43)$$

где A_i – сомножители в знаменателе (42) и в нашем случае все $\lambda_i = 1$, получим:

$$J = (\alpha - 1)! \int_0^1 \prod dv_i \delta\left(\sum v_i - 1\right) F(\{v\}), \quad (44)$$

где

$$F(\{v\}) = \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_5 \frac{\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5)}{Q^\alpha}, \quad (45)$$

$$Q = v_1 E_{k_1} + v_2 E_{k_2} + v_3 E_{k_3} + v_5 E_{k_5} + v_6 (E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_5}) + v_7 (E_{k_3} + E_{k_4} + E_{k_5}) \quad (46)$$

$\alpha = 6$ – общее число фейнмановских параметров v_i , равное числу сомножителей в знаменателе формулы (42) (при нумерации параметров мы пропустили v_4 ввиду отсутствия в знаменателе (42) множителя E_{k_4} , что облегчает дальнейшее сравнение со статическим аналогом диаграммы). Записывая Q в виде

$$Q = u_1 E_{k_1} + u_2 E_{k_2} + u_3 E_{k_3} + u_4 E_{k_4} + u_5 E_{k_5}, \quad (47)$$

где

$$u_1 = v_1 + v_6, \quad u_2 = v_2 + v_6, \quad u_3 = v_3 + v_7, \quad u_4 = v_7, \quad u_5 = v_5 + v_6 + v_7, \quad (48)$$

из (45), (47) получаем

$$F(\{v\}) = \int d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_5 \frac{\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5)}{(u_1 E_{k_1} + u_2 E_{k_2} + u_3 E_{k_3} + u_4 E_{k_4} + u_5 E_{k_5})^\alpha}. \quad (49)$$

Выбирая в (49) в качестве независимых переменных некоторый набор $\{\mathbf{k}_{i_1}, \mathbf{k}_{i_2}, \mathbf{k}_{i_3}\}$ и выполняя интегрирования с помощью δ -функций, приходим к выражению вида

$$F(\{v\}) = \int d\mathbf{k}_{i_1} \int d\mathbf{k}_{i_2} \int d\mathbf{k}_{i_3} \frac{1}{(C + V_{i_j, i_l} \mathbf{k}_{i_j} \mathbf{k}_{i_l})^\alpha}, \quad C \equiv \tau \sum_{j=1}^5 u_j. \quad (50)$$

Вычисляя интеграл от степени квадратичной формы, получаем

$$F(\{v\}) = \pi^{dn/2} C^{dn/2-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - dn/2)}{\Gamma(\alpha)} (\det V)^{-d/2}, \quad (51)$$

где n – число петель в диаграмме, в рассматриваемом случае $n = 3$. Подставляя (51) в (44), получаем окончательно

$$J = \pi^{dn/2} \tau^{dn/2-\alpha} \Gamma(\alpha - dn/2) \int_0^1 \prod dv_i \delta\left(\sum v_i - 1\right) \left(\sum_{j=1}^5 u_j\right)^{dn/2-\alpha} (\det V)^{-d/2}, \quad (52)$$

с u_j из (48).

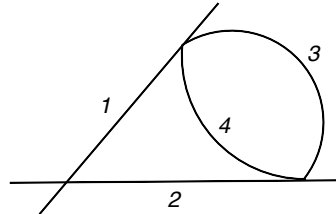
Значение детерминанта $\det V$ в (51) не зависит от выбора переменных интегрирования $\{\mathbf{k}_{i_1}, \mathbf{k}_{i_2}, \mathbf{k}_{i_3}\}$ и может быть определено прямо по виду диа-

граммы. По построению $\det V$ представляет собой сумму произведений трех сомножителей u_i . Для любого набора независимых переменных интегрирования $\{\mathbf{k}_{i_1}, \mathbf{k}_{i_2}, \mathbf{k}_{i_3}\}$ диагональные элементы матрицы V равны $u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}$, их произведение дает вклад в $\det V$ с коэффициентом единица. Недиагональные элементы матрицы V не содержат величин $u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}$, следовательно, $\det V$ не содержит старших степеней u_i . В качестве независимых переменных нельзя выбирать наборы импульсов, входящих в “законы сохранения” (аргументы δ -функций в (49)), в рассматриваемом случае это наборы $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_5\}$, $\{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5\}$, и соответствующие произведения $u_1 u_2 u_5$ и $u_3 u_4 u_5$ будут отсутствовать в $\det V$. Таким образом, для диаграммы (36) $\det V$ дается выражением

$$\det V = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_1 u_3 u_5 + u_1 u_4 u_5 + u_2 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_5 + u_2 u_4 u_5, \quad (53)$$

в котором величины u_i надо выразить через v_i согласно (48). Во временных версиях (40) и (41) выражение (53) сохраняется, изменятся соответствующим образом лишь связи переменных u_i и v_i , которые легко находятся по виду диаграмм.

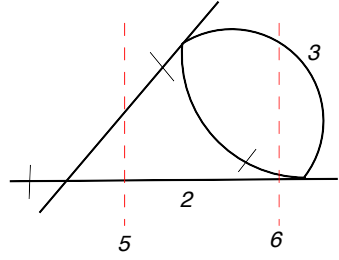
Заметим, что выражения (47), (53) совпадают по виду с соответствующими выражениями для статической диаграммы (36) (без перечеркнутых линий) теории ϕ^4 . Этот факт является общим при построении детерминанта в динамической теории и позволяет сформулировать общий рецепт построения детерминанта непосредственно по виду диаграммы (без использования импульсного представления), который проиллюстрируем на примере следующей двухпетлевой четыреххвостки


(54)

Мы начали с рассмотрения статической диаграммы теории ϕ^4 . Цифры на линиях обозначают номера фейнмановских параметров u_i . Соответствующий этой диаграмме детерминант представляет собой сумму произведений всевозможных пар фейнмановских параметров, за исключением пары u_1, u_2 , запрещенной “законом сохранения” в левой вершине:

$$\det V = u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4. \quad (55)$$

Рассмотрим теперь один из вариантов динамического обобщения диаграммы (54):


(56)

Здесь цифрами обозначены фейнмановские параметры v_i , из которых v_2 и v_3 связаны со знаменателями E_k в пропагаторах $\langle\psi\psi\rangle$ из (33), а v_5 и v_6 – со знаменателями соответствующих сечений. Параметрам u_i сопоставляются линейные комбинации параметров v_j по следующим правилам. Параметр u_i , отвечающий в статической диаграмме (54) линии с некоторым импульсом k_i есть сумма параметров v_j линий $\langle\psi\psi\rangle$ динамической диаграммы с тем же импульсом, плюс параметры v_j сечений, в которые входит энергия с данным импульсом:

$$u_1 = v_5, \quad u_2 = v_2 + v_5 + v_6, \quad u_3 = v_3 + v_6, \quad u_4 = v_6. \quad (57)$$

Подстановка (57) в (55) дает:

$$\det V = v_2 v_3 + 2v_2 v_6 + 2v_3 v_5 + 2v_3 v_6 + 4v_5 v_6 + 3v_6^2. \quad (58)$$

Сформулируем общий рецепт построения детерминанта n -петлевой динамической диаграммы [18]. Рассматривается статическая диаграмма той же топологии, каждой линии сопоставляется фейнмановский параметр u_i . Детерминант, соответствующий такой диаграмме, представляет собой сумму произведений n различных фейнмановских параметров u_i , из это суммы исключены произведения параметров, импульсы линий которых входят в какой-либо закон сохранения. Чтобы найти детерминант какой-либо временной версии соответствующей динамической диаграммы, каждой линии $\psi\psi$ сопоставляется фейнмановский параметр v_i с тем же номером, что и в статической диаграмме, и каждому сечению сопоставляется свой параметр v_j . Определяется линейная связь параметров u_i и v_j : для линий $\psi\psi$ динамической диаграммы $u_i = v_i +$ сумма фейнмановских параметров сечений, в которые входит импульс линии u_i , для линий $\psi\psi'$ вклад v_i отсутствует. Искомый детерминант динамической диаграммы получается подстановкой в статический детерминант выражений для u_i через v_j .

2 Расчет динамического индекса в “теории без расходимостей”

2.1 Расчет аномальных размерностей без использования констант ренормировки

Теория ренормировок гарантирует, что РГ-функции (32) УФ-конечны: полюсы по ε в правых частях этих соотношений сокращаются. Однако сингулярный характер констант ренормировки весьма затрудняет их определение численными методами. В настоящей главе будет построено альтернативное представление для РГ-функций, в котором нахождение этих функций сводится к вычислению интегралов, не содержащих расходимостей. В качестве первого шага с этой целью выбирается подходящая схема ренормировки и используются уравнения ренормгруппы, с помощью которых РГ-функции выражаются через ренормированные 1-неприводимые функции. Дальнейшая задача заключается в том, чтобы вычитание контрчленов при ренормировке представить как модификацию подынтегральных выражений диаграмм. С этой целью процедура перенормировки записывается с помощью R -операции Боголюбова-Парасюка, в которой в используемой схеме ренормировки операцию вычитания расходящихся частей удастся представить в виде модификации подынтегральных выражений.

Как и в статье [23], выберем схему ренормировки, аналогичную схеме вычитаний на нулевых импульсах (и частотах), с дополнительным условием $\mu^2 = \tau$. Константы ренормировки определим из требований

$$\bar{\Gamma}_i^R|_{\mu^2=\tau} = 1, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (59)$$

Эти условия означают, что в точке нормировки контрчлены полностью сокращают диаграммные вклады в ренормированные аналоги функций $\bar{\Gamma}_i$.

Учет контрчленов в (14) можно заменить действием R -операции на диаграммы базовой теории (15) [22] и записать ренормированные функции $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ в виде

$$\Gamma_{(n_1, n_2)}^R = R\Gamma_{(n_1, n_2)} = (1 - K)R'\Gamma_{(n_1, n_2)},$$

где операция R' устраняет расходимости в существенных подграфах диаграммы, а $(1 - K)$ – остающуюся поверхностную расходимость. Конкретная схема

ренормировки определяется заданием операции K отбора расходящихся частей 1-неприводимых диаграмм.

Константам ренормировки Z_i , определяющимся условиями (59), соответствует операция K отбора расходящихся частей диаграмм:

$$K\Gamma_{(0,2)} = \Gamma_{(0,2)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}, \quad K\Gamma_{(3,1)} = \Gamma_{(3,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} K\Gamma_{(1,1)} = & \left[\Gamma_{(1,1)}|_{\tau=0} + \frac{\tau}{\mu^2} (\Gamma_{(1,1)}|_{\mu^2=\tau} - \Gamma_{(1,1)}|_{\tau=0}) \right]_{p=0, \omega=0} + \\ & + p^2 \partial_{p^2} \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau} + i\omega \partial_{i\omega} \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}. \end{aligned} \quad (61)$$

При $\mu^2 = \tau$ операция (61) упрощается,

$$\begin{aligned} K\Gamma_{(1,1)}|_{\mu^2=\tau} = & \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau} + \\ & + p^2 \partial_{p^2} \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau} + i\omega \partial_{i\omega} \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}, \end{aligned} \quad (62)$$

так что при $\mu^2 = \tau$ все три операции в (60) и (62) сводятся к вычитанию на нулевых импульсах и частотах при $\mu^2 = \tau$.

Полную R -операцию можно записать в виде [24]

$$R\Gamma = \prod_i (1 - K_i) \Gamma, \quad (63)$$

где произведение берется по всем существенным (имеющим поверхностную расходимость) подграфам диаграмм, входящих в Γ , и диаграммам в целом (если у них есть поверхностная расходимость).

Отсутствие полюсов в РГ-функциях (32) можно показать, используя уравнения (31): ренормированные функции $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ УФ-конечны по построению [22]. Выбрав достаточное число уравнений из (31), можно выразить через них РГ-функции, что и доказывает конечность последних. Мы используем этот прием для численного расчета РГ-функций через $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$, точнее, через ренормированные аналоги функций $\bar{\Gamma}_i$ из (16)–(20):

$$\bar{\Gamma}_i^R = R\bar{\Gamma}_i, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Уравнения для $\bar{\Gamma}_1^R$, $\bar{\Gamma}_4^R$, $\bar{\Gamma}_5^R$ непосредственно получаются из (31) подстановкой

их определений (16), (19), (20), а для $\bar{\Gamma}_3^R, \bar{\Gamma}_4^R$ – действием на соответствующие уравнения из (31) операциями $\partial_p^2(\cdot)|_{p=0, \omega=0}$ и $\partial_i \omega(\cdot)|_{p=0, \omega=0}$ с использованием коммутативности этих операций и R -операции. Учитывая вытекающие из (22) и (28) связи между РГ-функциями

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \gamma_\lambda + 2\gamma_{\psi'}, & \gamma_2 &= \gamma_\psi + \gamma_{\psi'}, & \gamma_3 &= \gamma_\lambda + \gamma_{\psi'} + \gamma_\psi, \\ \gamma_4 &= \gamma_\lambda + \gamma_\tau + \gamma_{\psi'} + \gamma_\psi, & \gamma_5 &= \gamma_\lambda + \gamma_g + \gamma_{\psi'} + 3\gamma_\psi,\end{aligned}\quad (64)$$

получаем

$$(\mu\partial_\mu + \beta\partial_g - \gamma_\tau\tau\partial_\tau - \gamma_i)\bar{\Gamma}_i^R = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (65)$$

Безразмерные величины $\bar{\Gamma}_i^R$ зависят только от безразмерного отношения $\tilde{\tau} = \tau/\mu^2$, т.е. $\bar{\Gamma}_i^R(\tau, \mu, \lambda) = \bar{\Gamma}_i^R(\tilde{\tau})$. С учетом этого факта уравнения (65) можно записать в виде

$$(\beta\partial_g - (2 + \gamma_\tau)\tilde{\tau}\partial_{\tilde{\tau}} - \gamma_i)\bar{\Gamma}_i^R = 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \tilde{\tau} \equiv \frac{\tau}{\mu^2}.$$

Переходя в этих уравнениях к точке нормировки $\tilde{\tau} = 1$ и учитывая условие (59), получаем

$$(2 + \gamma_\tau)F_i = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (66)$$

где

$$F_i \equiv \hat{\partial}_{\tilde{\tau}} \bar{\Gamma}_i^R, \quad \hat{\partial}_{\tilde{\tau}}(\cdot) \equiv -\partial_{\tilde{\tau}}(\cdot)|_{\tilde{\tau}=1}. \quad (67)$$

Подставляя в уравнения (66) вытекающее из (64) соотношение $\gamma_\tau = \gamma_4 - \gamma_3$, получим уравнения

$$(2 + \gamma_4 - \gamma_3)F_i = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Решая эти уравнения для случаев $i = 3, 4$ относительно γ_3 и γ_4 , а затем решая оставшиеся уравнения относительно γ_1, γ_2 и γ_5 , находим

$$\gamma_i = \frac{2F_i}{1 + F_3 - F_4}, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (68)$$

Эти равенства дают выражения для РГ-функции через ренормированные 1-неприводимые функции F_i . Однако, как и в статическом случае [23], [11], данные функции неудобны для вычислений, более удобными для расчета являются

функции

$$f_i = R \hat{\partial}_{\tilde{\tau}} \bar{\Gamma}_i, \quad (69)$$

в этих функциях R -операция действует на продифференцированные диаграммы, в которых уже положено $\mu^2 = \tau$ ($\tilde{\tau} = 1$), поэтому операция K имеет простой вид (62). В то же время для функций F_i из (66) необходимо сначала продифференцировать ренормированную диаграмму, в которой операция K дается выражением (61), и лишь затем перейти в точку нормировки $\mu^2 = \tau$. Мы покажем ниже, что величины F_i и f_i связаны простыми соотношениями

$$F_i = (1 - F_4) f_i, \quad i = 1, 2, 3, 5. \quad (70)$$

Записывая уравнения (68) в виде

$$\gamma_i = \frac{2F_i/(1 - F_4)}{1 + F_3/(1 - F_4)}$$

и подставляя в них $f_i = F_i/(1 - F_4)$ из (70), приходим к соотношениям

$$\gamma_i = \frac{2f_i}{1 + f_3}, \quad i = 1, 2, 3, 5, \quad (71)$$

с помощью которых и будут производиться дальнейшие расчеты РГ-функций.

Используя соотношения (71) и (64), получаем формулы для вычисления остальных РГ-функций:

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &= \frac{2(f_3 - f_2)}{1 + f_3}, & \gamma_\psi &= \frac{f_2 - f_1 + f_3}{1 + f_3}, \\ \gamma_{\psi'} &= \frac{f_1 - f_3 + f_2}{1 + f_3}, & \gamma_g &= \frac{2(f_5 - 2f_3 - f_2 + f_1)}{1 + f_3}. \end{aligned}$$

Соотношения (71) выражают искомые ренормгрупповые функции через УФ-конечные величины f_i , которые определяются непосредственно по диаграммам соответствующих 1-неприводимых функций согласно (69). Однако это не решает еще поставленную задачу, так как при численном нахождении величин f_i необходимо использовать такое представление R -операции в (69), в котором УФ-конечность ответа обеспечивалась бы за счет формирования достаточно быстро убывающих подынтегральных выражений, а не происходило за счет сокращения полюсов по ε после проведения вычислений. Такое представление

будет сформулировано в П.2.3.

2.2 Ренормировка величин f_i и их связь с F_i

Приведем полученное в работе [18] доказательство соотношения (70).

Рассмотрим подробнее процедуру ренормировки в соотношении (69). Операция $-\partial_\tau$, действуя на диаграммы базовой теории, сводится к сумме вставок во всевозможные линии составного оператора $\psi\psi' \equiv \Psi$. Вставка такого оператора улучшает УФ-сходимость диаграмм, она порождает также новый тип расходящихся подграфов. Обозначим через $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}$ 1-неприводимую функцию, получающуюся вставкой одного оператора Ψ в $\Gamma_{(n_1, n_2)}$, тогда

$$-\partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)} = \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}. \quad (72)$$

Среди величин $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}$ поверхностная расходимость (логарифмическая) остается только у $\Gamma_{(1, 1; 1)}$. Соответствующие подграфы принадлежат, таким образом, классу существенных, и их надо учитывать в R -операции (63), принимая во внимание, что

$$K\Gamma_{(1, 1; 1)} = \Gamma_{(1, 1; 1)} \Big|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}. \quad (73)$$

Как и для величин $\bar{\Gamma}_i$, вычитания с K , взятым из (73), приводят к тому, что в точке нормировки $p = 0$, $\omega = 0$, $\mu^2 = \tau$ все диаграммные вклады в $\Gamma_{(1, 1; 1)}^R$ в ренормированной функции сокращаются контрчленами, и остается только беспетлевой вклад. С учетом того что такой вклад в $\Gamma_{(1, 1)}$ равен $-p^2 - \tau$, соответствующий вклад в $\Gamma_{(1, 1; 1)} = -\partial_\tau \Gamma_{(1, 1)}$ равен единице. Поэтому

$$\Gamma_{(1, 1; 1)}^R \Big|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau} = 1. \quad (74)$$

Для неренормированных функций соотношение, аналогичное (72), имеет вид

$$-\partial_{\tau_0} \Gamma_{(n_1, n_2)}^{(0)}(e_0, p) = \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^{(0)}(e_0, p),$$

где $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^{(0)}$ – 1-неприводимая функция со вставкой одного оператора $\psi_0\psi'_0 \equiv \Psi_0$. Перейдем в (72) к ренормированным величинам. Ренормировка составного оператора Ψ определяется равенством $\Psi = Z_\Psi \Psi^R$, с учетом этого ренормировка

функции $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^{(0)}$ записывается в виде

$$\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^{(0)} = Z_\psi^{1-n_1} Z_{\psi'}^{1-n_2} Z_\Psi \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R. \quad (75)$$

Выразим операцию ∂_{τ_0} в левой части (72) в терминах ренормированных переменных. В силу соотношений (21) фиксация переменных g_0, μ, λ_0 означает также фиксацию g, μ, λ . Таким образом,

$$(\partial_{\tau_0})_{g_0, \mu, \lambda_0} = Z_\tau^{-1} (\partial_\tau)_{g, \mu, \lambda}.$$

Подставляя это равенство в (72) и используя формулы ренормировки (27), (75), получаем

$$-\partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)}^R(e, p) = Z_\psi Z_{\psi'} Z_\tau Z_\Psi \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R(e, p)$$

или, используя (22),

$$-\partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)}^R(e, p) = \frac{Z_4}{Z_\lambda} Z_\Psi \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R(e, p). \quad (76)$$

Учет констант ренормировки при построении функции $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R$ также можно заменить действием R -операции на диаграммы базовой теории [22]:

$$\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R = R \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}. \quad (77)$$

Подставляя соотношения (77), (72) в (76), находим

$$-\partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)}^R = -\frac{Z_4}{Z_\lambda} Z_\Psi R \partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)}.$$

Переписывая эти равенства для нормированных функций $\bar{\Gamma}_i$, заданных в (16)–(20), учитывая формулы (67), (69), (74) и полагая $\mu^2 = \tau$, получаем

$$1 - F_4 = \frac{Z_4}{Z_\lambda} Z_\Psi \quad (78)$$

и

$$F_i = \frac{Z_4}{Z_\lambda} Z_\Psi f_i, \quad i = 1, 2, 3, 5.$$

Подставляя в эти выражения величину $(Z_4/Z_\lambda) Z_\Psi$ из (78), приходим к искомому равенству (70).

2.3 Представление R-операции в схеме с точкой нормировки

Величины f_i вычисляются в точке нормировки $\mu^2 = \tau$, операция вычитания $1 - K$ в формуле (63) для них сводится к вычитанию начального отрезка ряда по импульсу и частоте. Для логарифмических подграфов имеем

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \Gamma(p^2, \omega) - \Gamma|_{p=0, \omega=0},$$

а для квадратичных –

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \Gamma(p^2, \omega) - \Gamma|_{p=0, \omega=0} - p^2 \partial_{p^2} \Gamma|_{p=0, \omega=0} - i\omega \partial_{i\omega} \Gamma|_{p=0, \omega=0}.$$

В обоих случаях операцию вычитания можно записать в виде остаточного члена ряда Тейлора в интегральной форме: для логарифмических подграфов

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \int_0^1 da \partial_a \Gamma(ap^2, a\omega), \quad (79)$$

для квадратичных –

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \int_0^1 da (1 - a) \partial_a^2 \Gamma(ap^2, a\omega). \quad (80)$$

Действие операции R на диаграмму χ с учетом соотношений (79), (80) можно записать в виде [24]

$$R\chi = \prod_i \int_0^1 da_i (1 - a_i)^{n_i} \partial_{a_i}^{n_i+1} \chi(\{a\}), \quad (81)$$

где произведение берется по всем существенным подграфам $\chi^{(i)}$ (включая диаграмму χ как целое), a_i – параметр растяжения внутри i -го подграфа импульсов и частот, втекающих в этот подграф, $n_i = 0$ для логарифмических подграфов и $n_i = 1$ для квадратичных. Преимущество такой записи ренормированных величин состоит в том, что ответ представляется в виде интегралов, конечных при $\varepsilon = 0$, причем в форме, в которой не происходит сокращения больших вкладов в подынтегральном выражении (“теория без расходимостей”).

2.4 R-операция после интегрирования по времени

Удобная форма вычитания контрчленов получена в (79)-(81) в частотном представлении. Используя технику интегрирования по временным версиям, перепишем эти соотношения сначала во временном представлении, а затем в фейнмановском.

В принятой схеме ренормировки вычитания из расходящихся подграфов проводятся на нулевой частоте, втекающей в подграф. В формулировке (81) это включает процедуру растяжения втекающей в подграф частоты: $\omega \rightarrow a\omega$. Чтобы интерпретировать такое растяжение в импульсно-временном представлении и выполнить интегрирование по временам с использованием временных версий, это растяжение можно заменить соответствующим изменением подынтегрального выражения подграфа. Рассмотрим в качестве примера четыреххвостый подграф, образованный линиями 3 и 4, во временной версии (39). Зависимость подграфа от втекающей частоты ω определяется интегралом

$$\int_0^\infty dt \exp[-t(i a \omega + \lambda E_{k_3} + \lambda E_{k_4})] = \frac{1}{a} \int_0^\infty dt \exp\left[-t(i \omega + \lambda \frac{E_{k_3}}{a} + \lambda \frac{E_{k_4}}{a})\right],$$

где a – параметр растяжения, $t = t_1 - t_2$ (см. (36)) и учтена зависимость от времени пропагаторов (33), (33). Правая часть равенства, полученная заменой $t a \rightarrow t$, показывает, что растяжение втекающей в подграф частоты эквивалентно замене $E_k \rightarrow E_k/a$ во всех экспоненциальных множителях пропагаторов линий (33), (33), входящих в подграф, а также деления на a всего подынтегрального выражения. После такого преобразования подынтегрального выражения для подграфа диаграмму можно вычислять в импульсно-временном представлении. Вклад правого сечения во временной версии (39) заменится на

$$\frac{1}{a} \frac{1}{\frac{E_{k_3}}{a} + \frac{E_{k_4}}{a} + E_{k_5}} = \frac{1}{E_{k_3} + E_{k_4} + a E_{k_5}}. \quad (82)$$

Действуя аналогичным образом для временной версии (40), находим, что меняются оба сомножителя в знаменателе, это дает

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{E_{k_3}}{a} + \frac{E_{k_4}}{a} + E_{k_1} + E_{k_2}\right)\left(\frac{E_{k_3}}{a} + \frac{E_{k_4}}{a} + E_{k_5}\right)} = \\ & = \frac{1}{(E_{k_3} + E_{k_4} + a E_{k_1} + a E_{k_2})(E_{k_3} + E_{k_4} + a E_{k_5})}. \end{aligned} \quad (83)$$

Учитывая, что рассматриваемый подграф является логарифмическим, действие операции (81) на (83) дает

$$\int_0^1 da \partial_a \left(\frac{a}{(E_{k_3} + E_{k_4} + a E_{k_1} + a E_{k_2})(E_{k_3} + E_{k_4} + a E_{k_5})} \right) = \frac{1}{(E_{k_3} + E_{k_4} + E_{k_1} + E_{k_2})(E_{k_3} + E_{k_4} + E_{k_5})}. \quad (84)$$

Это означает, что контрчлен к этой временной версии не нужен.

Рассмотренные примеры легко обобщаются на многопетлевые подграфы. Учет растяжения в a раз втекающей в подграф частоты в терминах интегрирования по временным версиям заменяется на введение множителя a перед всеми входящими в сечения энергиями E_{k_j} , не принадлежащими подграфу. Если число сечений, проходящих через подграф, превышает число сечений уединенного подграфа, то на каждое дополнительное сечение вводится дополнительный множитель a . Для логарифмических подграфов соответствующая временная версия не требует в этом случае введения растяжения. Для квадратично расходящихся подграфов одно дополнительное сечение делает данную временную версию логарифмической и понижает до $n_i = 0$ значение параметра в операции (81). В случае двух и более дополнительных сечений контрчлен к данной временной версии не нужен.

Для окончательного представления R' -операции в форме (81) в импульсном представлении после интегрирования по временным версиям необходимо также провести растяжения втекающих в расходящиеся подграфы импульсов. В фейнмановском представлении этому соответствует следующее правило расстановки множителей a в слагаемых статического детерминанта (53) [26]. Для n' -петлевого подграфа n -петлевой диаграммы, множитель $a^{N-n'}$ ставится перед слагаемыми детерминанта, содержащими $N > n'$ параметров u_i , принадлежащих рассматриваемому подграфу. Для диаграммы (39) это дает:

$$\det V_a = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + a u_1 u_3 u_4 + u_1 u_3 u_5 + u_1 u_4 u_5 + a u_2 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_5 + u_2 u_4 u_5. \quad (85)$$

Окончательный вид детерминанта с растяжением для временной версии (39) получим, выразив в (85) параметры u_i через v_j с помощью соотношения (48), в

которое введено растяжение a в соответствие с изменением сечения (82):

$$u_1 = v_1 + v_6, \quad u_2 = v_2 + v_6, \quad u_3 = v_3 + v_7, \quad u_4 = v_7, \quad u_5 = v_5 + v_6 + a v_7. \quad (86)$$

В итоге, в терминах параметров v_i , получаем:

$$\begin{aligned} \det V_a = & v_1 v_2 v_3 + 2v_1 v_2 v_7 + v_1 v_3 v_5 + 2v_1 v_3 v_6 + 2av_1 v_3 v_7 + 2v_1 v_5 v_7 + \\ & + 4v_1 v_6 v_7 + 3av_1 v_7^2 + v_2 v_3 v_5 + 2v_2 v_3 v_6 + 2av_2 v_3 v_7 + 2v_2 v_5 v_7 + \\ & + 4v_2 v_6 v_7 + 3av_2 v_7^2 + 2v_3 v_5 v_6 + 3v_3 v_6^2 + 4av_3 v_6 v_7 + 4v_5 v_6 v_7 + \\ & + 6v_6^2 v_7 + 6av_6 v_7^2. \end{aligned} \quad (87)$$

2.5 Вычисление диаграмм

Расчет по теории возмущений ренормгрупповых функций на основе соотношений (71) мы будем приводить в терминах заряда

$$u = \frac{S_d}{(2\pi)^d} g, \quad S_d \equiv \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad (88)$$

где S_d – площадь d -мерной сферы единичного радиуса. Тогда на каждую петлю диаграммы в импульсном представлении будет приходиться операция $\frac{g}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} = u \int \frac{d\mathbf{k}}{S_d}$. В сферической системе координат это может интерпретироваться как замена интегрирования по углам на усреднение по углам.

Полученные в этой главе результаты позволяют производить вычисления как в импульсном, так и в фейнмановском представлениях. Как показывает опыт, часть из этих диаграмм, содержащих однопетлевые вершинные подграфы (диаграммы 1 – 3 в Таблице 1, приведенной в П. 2.6), рациональнее рассчитывать в импульсном представлении, а остальные – в представлении Фейнмана с использованием техники Sector Decomposition. Детали этой техники обсуждаются в следующей главе, а здесь мы приведем основные соотношения, позволяющие значительно упростить вычисление в импульсном представлении диаграмм с однопетлевыми вершинными подграфами. Подробное вычисление этих диаграмм приведено в Приложении. Если в диаграмме имеются однопетлевые вершинные подграфы, то выгодно выбрать симметричную протечку через них суммарного внешнего импульса $\mathbf{k}$:

(89)

Здесь $\mathbf{q}$ – импульс интегрирования, циркулирующий в подграфе (его направление показано стрелками). При таком выборе в сумме “энергий” $E_{\mathbf{k}/2+\mathbf{q}} + E_{\mathbf{k}/2-\mathbf{q}} + \dots$ в любом временном сечении, проходящем через подграф, сокращаются скалярные произведения $(\mathbf{k}\mathbf{q}) = kq \cos \theta$. Зависимость от угла θ входит только через “статические” знаменатели $1/E$ пропагаторов $\langle \psi\psi \rangle$ (33). В d -мерном пространстве усреднение по углу θ имеет вид

$$\overline{f(\theta)} = \frac{\int_0^\pi d\theta \sin^{d-2} \theta \cdot f(\theta)}{\int_0^\pi d\theta \sin^{d-2} \theta} = \frac{\int_0^\pi d\theta \sin^{2-\varepsilon} \theta \cdot f(\theta)}{\int_0^\pi d\theta \sin^{2-\varepsilon} \theta}. \quad (90)$$

Нам понадобятся 2 члена ε -разложения этой величины:

$$\overline{f(\theta)} = \int_0^\pi \hat{d}\theta \sin^2 \theta \cdot f(\theta) [1 + \varepsilon(\ln 2 - 1)] - \varepsilon \int_0^\pi \hat{d}\theta \cdot \sin^2 \theta \cdot \ln \sin \theta \cdot f(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (91)$$

где введено обозначение

$$\int_0^\pi \hat{d}\theta \dots \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta \dots \quad (92)$$

Используя справочные формулы:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2(\theta)}{A \pm \cos(\theta)} = \frac{2}{A + \sqrt{A^2 - 1}},$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2(\theta)}{(A + \cos(\theta))(A - \cos(\theta))} = \frac{2}{A} \cdot \frac{1}{A + \sqrt{A^2 - 1}},$$

при $\varepsilon = 0$ для интегралов по углу для левого и правого подграфа (89) находим соответственно:

$$\int_0^\pi \hat{d}\theta \frac{\sin^2(\theta)}{q^2 + k^2/4 + \tau \pm kq \cos(\theta)} = \frac{2}{(q^2 + k^2/4 + \tau) + \sqrt{((q^2 + k^2/4 + \tau))^2 - k^2 q^2}}, \quad (93)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \hat{d}\theta \frac{\sin^2(\theta)}{(q^2 + k^2/4 + \tau + kq \cos(\theta))(q^2 + k^2/4 + \tau - kq \cos(\theta))} = \\
& \quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau)} \cdot \frac{2}{(q^2 + k^2/4 + \tau) + \sqrt{((q^2 + k^2/4 + \tau))^2 - k^2 q^2}}.
\end{aligned} \tag{94}$$

Полученный в (93), (94) относительно простой вид результата интегрирования по углу в расходящихся подграфах (89) позволяет упростить результат вычитания из них контрчленов без использования дополнительного интегрирования по параметру растяжения a (см. Приложение).

2.6 Динамический критический индекс z

Уравнения ренормгруппы позволяют обосновать динамический скейлинг и получить выражения для критических показателей. Сделаем это на примере уравнения для парного коррелятора с целью обосновать соотношение (6).

Уравнение для парного ренормированного коррелятора G^R имеет вид

$$(\mathcal{D}_\mu + \beta \partial_g - \gamma_\tau \mathcal{D}_\tau - \gamma_\lambda \mathcal{D}_\lambda) G^R = -2\gamma_\psi G^R. \tag{95}$$

Оно выводится аналогично уравнению РГ (31) на 1-неприводимые функции с учетом того, что условия ренормировки (27) заменяются на $G^{(0)}(e_0) = Z_\psi^2 G^R(e)$. Рассматривая функцию G^R в k, t представлении, из соображений размерности запишем

$$G^R(\mu, g, \tau, \lambda, k, t) = k^{-2} F(k/\mu, g, \tau/\mu^2, t\lambda\mu^2), \tag{96}$$

где F – безразмерная функция от безразмерных аргументов. При действии на эту функцию РГ оператора из левой части (95) можно исключить производные $\mathcal{D}_\mu$ и $\mathcal{D}_\lambda$ с помощью равенств

$$\mathcal{D}_\mu = -\mathcal{D}_k - 2\mathcal{D}_\tau + 2\mathcal{D}_t, \quad \mathcal{D}_\lambda = \mathcal{D}_t,$$

в результате получим

$$[-\mathcal{D}_k + \beta \partial_g - (2 + \gamma_\tau) \mathcal{D}_\tau + (2 - \gamma_\lambda) \mathcal{D}_t] F = -2\gamma_\psi F. \tag{97}$$

Как известно, асимптотику решения этого уравнения в частных производных в инфракрасной области можно найти, заменив все РГ-функции γ_i на их значения

$\gamma_i^* \equiv \gamma(g_*)$ в точке $g = g_*$ – корне уравнения $\beta(g_*) = 0$:

$$[-\mathcal{D}_k - (2 + \gamma_\tau^*)\mathcal{D}_\tau + (2 - \gamma_\lambda^*)\mathcal{D}_t] F = -2\gamma_\psi^* F. \quad (98)$$

Полученное уравнение критического скейлинга (98) имеет вид уравнения Эйлера для однородных функций, его общее решение можно записать в виде

$$F = k^{2\gamma_\psi^*} f(k \tau^{\frac{-1}{2+\gamma_\tau^*}}, t \tau^{\frac{(2-\gamma_\lambda^*)}{2+\gamma_\tau^*}}). \quad (99)$$

Соотношения (96), (99) эквивалентны соотношению (6) динамического скейлинга с критическими индексами

$$\eta = 2\gamma_\psi^*, \quad \nu = (2 + \gamma_\tau^*)^{-1}, \quad z = 2 - \gamma_\lambda^*. \quad (100)$$

Статические индексы ν и η вычислены в настоящий момент с шестипетлевой точностью, нашей задачей будет вычислить динамический индекс z в четырехпетлевом приближении. Определяющую его РГ-функцию будем находить, согласно (26), из соотношения $\gamma_\lambda = 2\gamma_\psi - \gamma_1$, что с учетом (100) дает

$$\gamma_\lambda^* = \eta - \gamma_1^*. \quad (101)$$

В свою очередь РГ-функцию γ_1 найдем из соотношения (71):

$$\gamma_1^* = \frac{2f_1^*}{1 + f_3^*}. \quad (102)$$

Входящая сюда величина f_3^* может быть выражена через индекс Фишера. Действительно, согласно (22), (24) имеем $Z_3 = Z_\psi^2$, откуда $\gamma_3^* = 2\gamma_\psi^* = \eta$. Используя для определения γ_3^* соотношение (71), получаем

$$\eta = \frac{2f_3^*}{1 + f_3^*}. \quad (103)$$

Выражая отсюда f_3^* через η , с учетом (101), (102), получаем окончательно

$$\gamma_\lambda^* = \eta - (2 - \eta)f_1^*. \quad (104)$$

В рассматриваемой схеме ренормировки значение заряда в неподвижной точке u_* рассчитано численно для n -компонентного поля ψ с пятипетлевой точ-

ностью в работе [11]. Необходимые для наших целей 3 члена ε -разложения величины u_* даются аналитическим выражением

$$u_* = \frac{2\varepsilon}{3k_1} + \frac{\varepsilon^2}{81k_1^3} (27k_1^2 - 2k_3 + 36k_4) + \frac{\varepsilon^3}{27k_1^5} \left[\frac{41}{48}k_1^2k_3 + \frac{4}{81}k_3^2 + 16k_4^2 - \right. \\ \left. - \frac{16}{9}k_3k_4 - \frac{5015}{1728}k_1^4 - 8\zeta(3)k_1k_4 + \frac{75}{32}k_1k_5 - \frac{181}{16}k_1k_6 - \left(\frac{25}{96} + \frac{3}{2}\zeta(3) \right) k_1^2k_4 \right], \quad (105)$$

где множители

$$k_1 = \frac{n+8}{9}, \quad k_2 = \frac{n^2+6n+20}{27}, \quad k_3 = \frac{n+2}{3}, \quad k_4 = \frac{5n+22}{27}, \\ k_5 = \frac{3n^2+22n+56}{81}, \quad k_6 = \frac{n^2+20n+60}{81} \quad (106)$$

соответствуют переходу от однокомпонентной к n -компонентной модели, все $k_i = 1$ при $n = 1$. Индекс Фишера в четвертом порядке ε -разложения определяется выражением

$$\eta = \frac{\varepsilon^2(n+2)}{2(n+8)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4(n+8)^2} (-n^2 + 56n + 272) + \frac{\varepsilon^2}{16(n+8)^4} (-5n^4 - \right. \\ \left. - 230n^3 + 1124n^2 + 17920n + 46144 - 384(n+8)(5n+22)\zeta(3)) \right). \quad (107)$$

Результаты расчета величины $f_1(u)$ в четвертом порядке теории возмущений представлены в Таблице (1):

$$2f_1(u) = (a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2)k_3u^2 - (a_4 + a_5\varepsilon)k_1k_3u^3 + \\ + (a_6k_2k_3 + a_7k_3^2 + a_8k_3k_4 + a_9k_3k_4)u^4. \quad (108)$$

		$f(n)$	результат
1		k_3	$a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2$
2		$k_1 k_3$	$a_4 + a_5\varepsilon$
3		$k_2 k_3$	a_6
4		k_3^2	a_7
5		$k_3 k_4$	a_8
6		$k_3 k_4$	a_9

a_i	результат
a_1	$\ln(4/3)/4$
a_2	-0.1284504997333(33)
a_3	0.1897615538667(33)
a_4	-0.049271254182(8)
a_5	0.22915811(5)
a_6	0.01749280(24)
a_7	-0.0108879(27)
a_8	0.062068(33)
a_9	0.12669(5)

Таблица 1

Двух- и трехпетлевое приближения представлены единственными диаграммами 1 и 2 соответственно. Каждой из четырехпетлевых диаграмм соответствует сумма вкладов со всевозможными перечеркиваниями одной из линий в каждой из внутренних вершин. Функции $f(n)$ определяют дополнительные множители при каждой из диаграмм, отличающие n -компонентный случай от однокомпонентного. Эти множители определяются только топологией диаграмм и совпадают с соответствующими множителями статической модели.

Использование формулы (81) для R -операции при вычислении величины f_1 по диаграммам 1–6 позволило получить их представление в виде интегралов, не содержащих расходимостей по ε , как в импульсном, так и фейнмановском представлении. Диаграммы 1–3, не содержащие вложенных подграфов, оказалось более выгодным вычислять в импульсном представлении и выполнить в них явно интегрирование по параметрам a . Используя симметричное протекание втекающего в однопетлевые подграфы импульса, удалось исключить скалярные произведения из выражений для сечений временных версий и выполнить аналитическое интегрирование по оставшимся углам при $\varepsilon = 0$ согласно (93), (94), после чего осталось численно рассчитать четырехкратный интеграл по модулям импульсов. В данном случае вычитание контрчленов в подынтегральном выражении носит простой характер и не препятствует численному расчету, при желании можно легко произвести явное сокращение в подынтегральном выражении плохо убывающих вкладов (см. Приложение).

В диаграммах 4–6 такое сокращение произвести затруднительно, и было произведено дифференцирование по параметрам a подынтегральных функций, что заведомо дает выражение, свободное от расходимостей. Вычисления

этих диаграмм производились в фейнмановском представлении техникой Sector Decomposition. В качестве стратегии использовались сектора Спир [25], которые для динамических диаграмм с полиномами Симанчика типа (87) могут быть легко получены из секторов статических диаграмм благодаря наличию замен (86), связывающих полиномы (85) и (87). Полученные “динамические” сектора должны быть дополнены последующими шагами декомпозиции из-за наличия в полиномах параметров растяжения a , построение данных шагов декомпозиции подробно рассмотрено в работе [26].

Результаты расчета динамического индекса представляют обычно в виде $z = 2 + R\eta$. Это удобно, так как величина R оказывается не зависящей от числа компонент поля n в двух и трехпетлевом приближении, а индекс Фишера η рассчитан с большой точностью. Учитывая соотношения (100), (104), для величины R получаем

$$R = 2f_1^*(1 - \eta/2)/\eta - 1. \quad (109)$$

Подставляя в это выражение формулы (108), (105), (107), находим 3 члена ε -разложения величины R [19]

$$R = (6 \ln(4/3) - 1) \left(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2(c_3 + c_4n)}{(n+8)^2} \right), \quad (110)$$

где коэффициенты $c_i \equiv C_i/[6 \ln(4/3) - 1]$ определяются соотношениями

$$C_1 = 30 a_1 + 24 a_2 - 16 a_4, \quad (111)$$

$$C_2 = \frac{8593}{648} a_1 + 30 a_2 + 24 a_3 - 28 a_4 - 16 a_5 + 32 a_6, \quad (112)$$

$$C_3 = - \left(\frac{4030}{3} + 264\zeta(3) \right) a_1 - 672 a_4 - 1408 a_6 + 576 a_7 + 704 a_8 + 704 a_9, \quad (113)$$

$$C_4 = - \left(\frac{830}{3} + 60\zeta(3) \right) a_1 - 144 a_4 - 320 a_6 + 288 a_7 + 160 a_8 + 160 a_9. \quad (114)$$

Первые два члена ε -разложения (110) не зависят от числа компонент поля n . Первый из них был вычислен в работе [13], второй – в работе [15].

В работе [13] величина R вычислена также в главном порядке $1/n$ -разложения

для произвольной размерности d :

$$R_\infty = \frac{4}{4-d} \left(\frac{d\Gamma^2(d/2-1)/\Gamma(d-2)}{8 \int_0^{1/2} dx [x(2-x)]^{d/2-2}} - 1 \right). \quad (115)$$

Первые члены разложения этой величины по $\varepsilon = 4-d$ имеют вид

$$R_\infty = (6 \ln(4/3) - 1) (1 - 0.188483417 \varepsilon - 0.099952926 \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) . \quad (116)$$

С учетом того, что первые два члена ε -разложения (110) не зависят от n , они совпадают с соответствующими вкладками в (116), что подтверждается результатами работ [13], [15]. Соотношение (116) определяет также коэффициент c_2 в квадратичном по ε вкладе из (110), таким образом,

$$c_1 = -0.188483417, \quad c_2 = -0.099952926. \quad (117)$$

Для проверки точности расчетов диаграмм мы рассчитали коэффициенты c_1 , и c_2 , используя соотношения (111), (112). Подставляя данные из Таблицы (1), находим $c_1 = -0.18848341720(21)$, $c_2 = -0.100096(11)$, что с хорошей точностью совпадает со значениями (117). Для коэффициентов c_3 , c_4 (113), (114) получаем

$$c_3 = 21.56(6), \quad c_4 = 4.788(13). \quad (118)$$

Впервые эти коэффициенты были рассчитаны в работе [16], вычисления в этой работе проводились в импульсном представлении в схеме MS , точность расчета составила 1-2% . В рамках погрешности полученные нами значения (118) согласуются с результатами работы [16], но имеют значительно меньшую погрешность.

Приведем для полноты картины полученное ε -разложение динамического индекса z для случая $n = 1$:

$$z = 2 + 0.013446156198(1)\varepsilon^2 + 0.0110362801761(28)\varepsilon^3 - 0.005576(12)\varepsilon^4. \quad (119)$$

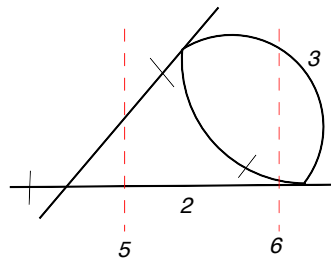
3 Расчет динамического индекса в схеме MS

Данная глава, основанная на работе [20], посвящена четырехпетлевому расчету динамического индекса z с помощью метода Sector Decomposition в “классическом варианте” (вычисление вычетов при полюсах в константах ренормировки), адаптированном для диаграмм динамической теории. Необходимая для этого база в виде представления Фейнмана динамических диаграмм получена в первой главе.

Метод Sector Decomposition основан на делении области интегрирования по фейнмановским параметрам на сектора, в каждом из которых искомые вычеты достаточно просто выделяются. Число таких секторов уже в статической задаче резко возрастает с ростом порядка теории возмущений и достигает порядка нескольких сотен в пятипетлевом приближении. В задачах динамики ситуация в этом отношении еще более усложняется. Как мы видели во второй главе, каждой статической диаграмме соответствует значительное число динамических диаграмм со всевозможными перечеркиваниями одной из линий в каждой вершине. Существенное увеличение вкладов происходит также после проведения интегрирования по времени (многочисленные временные версии). Поэтому, сформулировав кратко в следующем разделе сущность метода применительно к динамическим диаграммам, во втором разделе главы значительное внимание уделено процедуре “редукции” диаграмм, позволяющей значительно уменьшить число вкладов.

3.1 Метод Sector Decomposition в задачах динамики

Рассмотрим применение метода Sector Decomposition на примере двухпетлевой диаграммы



(120)

Данная диаграмма имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ “поверхностную” УФ-расходимость (по совокупности всех импульсов интегрирования) и расходимость по импульсу интегрирования в подграфе. Поэтому ее ряд Лорана по ε содержит два полюсных вклада $\sim \varepsilon^{-2}$ и $\sim \varepsilon^{-1}$. Задача состоит в том, чтобы выделить вычеты при этих

полюсах в виде, удобном для численного интегрирования. Рассмотрим как это делается в фейнмановском представлении методом Sector Decomposition.

Учитывая, что для рассматриваемой диаграммы число петель $n = 2$, а число фейнмановских параметров $\alpha = 4$, по аналогии с (52) и с учетом (58) получаем

$$J = \pi^{4-\varepsilon} \tau^{-\varepsilon} \Gamma(\varepsilon) j(\varepsilon), \quad \varepsilon = 4 - d, \quad (121)$$

где

$$j(\varepsilon) = \int_0^1 dv_2 \int_0^1 dv_3 \int_0^1 dv_5 \int_0^1 dv_6 \frac{(1 + v_5 + v_6)^{-\varepsilon} \delta(1 - v_2 - v_3 - v_5 - v_6)}{(\det V)^{2-\varepsilon/2}},$$

$$\det V = v_2 v_3 + 2v_2 v_6 + 2v_3 v_5 + v_3 v_6 + 4v_5 v_6 + v_6^2. \quad (122)$$

Полюс, соответствующий поверхностной расходимости, выделяется в фейнмановском представлении в явном виде, в рассматриваемом случае он содержится в множителе $\Gamma(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}$ в (121). Таким образом, интеграл (122) содержит полюс первого порядка, он обусловлен наличием нулей $\det V$ в знаменателе подынтегрального выражения. Сложность нахождения вычета при полюсе определяется тем, что нули $\det V$ соответствуют не отдельным точкам в области интегрирования, а некоторым областям. Метод Sector Decomposition дает рецепт замены переменных и разбиения области интегрирования на сектора таким образом, чтобы в каждой из них полюс был обусловлен расходимостью вида $\int dv v^{-1+\varepsilon} \sim \varepsilon^{-1}$ по единственной переменной.

Процедура декомпозиции состоит из последовательных шагов. На каждом шаге выбирается некоторое “пространство декомпозиции” – совокупность переменных интегрирования $\{v\}$, участвующих в декомпозиции, на первом шаге в него включают все переменные, в нашем случае это $\{v_2, v_3, v_5, v_6\}$. Область интегрирования по этим переменным представляет собой единичный четырехмерный куб. Ее можно разбить на сумму областей, в каждой из которых одна из переменных (“главная”) больше или равна остальным. Рассмотрим вклад j_2 в (122), в котором главной переменной является v_2 , он имеет вид

$$j_2 = \int_0^1 dv_2 \int_0^{v_2} dv_3 \int_0^{v_2} dv_5 \int_0^{v_2} dv_6 \frac{(1 + v_5 + v_6)^{-\varepsilon} \delta(1 - v_2 - v_3 - v_5 - v_6)}{(\det V)^{2-\varepsilon/2}},$$

$$\det V = v_2 v_3 + 2v_2 v_6 + 2v_3 v_5 + v_3 v_6 + 4v_5 v_6 + v_6^2. \quad (123)$$

Выполняя замены переменных $v_3 \rightarrow v_2 v_3$, $v_5 \rightarrow v_2 v_5$, $v_6 \rightarrow v_2 v_6$, находим

$$j_2 = \int_0^1 dv_2 \int_0^1 dv_3 \int_0^1 dv_5 \int_0^1 dv_6 \frac{v_2^3 (1 + v_2 v_5 + v_2 v_6)^{-\varepsilon} \delta(1 - v_2(1 + v_3 + v_5 + v_6))}{(\det_2 V)^{2-\varepsilon/2}},$$

$$\det V = v_2^2 \cdot \det_2 V, \quad \det_2 V \equiv v_3 + 2v_6 + 2v_3 v_5 + v_3 v_6 + 4v_5 v_6 + v_6^2. \quad (124)$$

Аргумент δ -функции в (124) обращается в ноль при значении $v_2^* = (1 + v_3 + v_5 + v_6)^{-1}$, которое гарантированно лежит в области интегрирования по v_2 , поэтому интегрирование по v_2 легко выполняется, и мы имеем

$$j_2 = \int_0^1 dv_3 \int_0^1 dv_5 \int_0^1 dv_6 \frac{(v_2^*)^\varepsilon (1 + v_2^* v_5 + v_2^* v_6)^{-\varepsilon}}{(\det_2 V)^{2-\varepsilon/2}}, \quad (125)$$

$$\det_2 V = v_3 + 2v_6 + 2v_3 v_5 + v_3 v_6 + 4v_5 v_6 + v_6^2.$$

Существенно, что после рассмотренного шага декомпозиции минимальная степень монома в “детерминанте” $\det_2 V$ понизилась на единицу. На втором шаге пространство декомпозиции выбирается так, чтобы аналогичный эффект повторился. Для этого достаточно включить в это пространство переменные $\{v_3, v_6\}$. Разбивая область интегрирования по этим переменным аналогично предыдущему случаю, получим сумму двух вкладов. Преобразуя вклад, в котором главной переменной является v_3 , имеем

$$j_{2,3} = \int_0^1 dv_3 \int_0^1 dv_5 \int_0^1 dv_6 \frac{(v_2^*)^\varepsilon (1 + v_2^* v_5 + v_2^* v_6)^{-\varepsilon}}{v_3^{1-\varepsilon/2} (\det_{2,3} V)^{2-\varepsilon/2}},$$

$$\det_{2,3} V \equiv 1 + 2v_6 + 2v_5 + v_3 v_6 + 4v_5 v_6 + v_3 v_6^2 \quad (126)$$

$$v_2^* \Rightarrow (1 + v_3 + v_5 + v_3 v_6)^{-1}.$$

Учитывая, что в $\det_{2,3} V$ все $v_i \geq 0$, заключаем, что $\det_{2,3} V \geq 1$. Таким образом, единственной причиной происхождения полюса по ε в (126) является сингулярность по переменной v_3 вида

$$j_{2,3} = \int_0^1 dv_3 \int_0^1 dv_5 \int_0^1 dv_6 \frac{f(v_3, v_5, v_6)}{v_3^{1-\varepsilon/2}}. \quad (127)$$

Добавляя и вычитая в числителе (128) величину $f(0, v_5, v_6)$, получаем

$$j_{2,3} = \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 dv_5 \int_0^1 dv_6 f(0, v_5, v_6) + \int_0^1 dv_3 \int_0^1 dv_5 \int_0^1 dv_6 \frac{f(v_3, v_5, v_6) - f(0, v_5, v_6)}{v_3^{1-\varepsilon/2}}. \quad (128)$$

Интегралы в (128) не содержат более сингулярностей, и их ε -разложения могут находиться разложением в ряд подынтегральных выражений.

Полный ответ для величины (122) складывается из суммы вкладов 8 секторов:

$$j = j_{2,3} + j_{2,6} + j_{3,2} + j_{3,5} + j_{3,6} + j_{5,3} + j_{5,6} + j_6.$$

Отметим, что в секторе j_6 оказывается достаточным один шаг декомпозиции, после которого “детерминант” становится положительно определенным.

Процедура выделения секторов не является однозначной, существует несколько “стратегий” декомпозиции. Мы использовали в качестве стратегии сектора Спир [25], которые для динамической задачи могут быть легко получены из секторов статических диаграмм благодаря наличию замен (57), связывающих полиномы (55) и (58). Выбор пространства декомпозиции на очередном шаге декомпозиции в указанной стратегии для статических диаграмм происходит согласно следующему правилу. Из полного набора фейнмановских параметров исключается совокупность параметров $\{u\}$, бывших “главными” на предыдущих шагах декомпозиции, а также параметры, которые совместно с $\{u\}$ отвечают набору импульсов, входящих в какой-либо закон сохранения.

Отметим преимущества и недостатки метода Sector Decomposition.

- Преимущество заключается в простоте автоматизации процедуры выделения полюсов. Это приводит к тому, что теперь вычисления ограничены только мощностью компьютерных ресурсов. Очень существенно также, что подынтегральное выражение в каждом из секторов является плавной знакопостоянной функцией фейнмановских параметров, что значительно повышает точность численного интегрирования. Последнее обстоятельство делает этот метод весьма полезным и в случае, когда вычисляемый интеграл не содержит полюсов по ε , что использовалось при вычислениях части диаграмм во второй главе.

- Основным недостатком является большое число секторов, которые получа-

ются в результате деления области интегрирования. Как следствие, увеличивается количество вычисляемых интегралов. Для n петлевой диаграммы число секторов равно $N \cdot n!$, где N – число слагаемых в детерминанте. Однако в связи с симметрией диаграммы, среди секторов имеются эквивалентные. Подынтегральные выражения для таких секторов совпадают с точностью до замены переменных. Таким образом, симметрия позволяет сократить число независимых секторов.

3.2 Редукция диаграмм

Осложняющим обстоятельством в задачах динамики по сравнению со статическим случаем является существенно большее число импульсных интегралов, возникающих в результате интегрирования по времени (и более сложный их вид). В ряде работ [27, 28, 29, 30] был использован тот факт, что, переходя к определенным суммам диаграмм, можно существенно упростить подынтегральные выражения. Мы предложим систематическую процедуру такой редукции диаграмм, позволяющую автоматизировать вычисления, что необходимо при расчетах в старших порядках теории возмущений.

Возможность такой редукции фактически видна из соотношения (23). Равенство (23) статических и динамических контрчленов является следствием более общего утверждения о совпадении 1-неприводимых статических функций $\langle \psi\psi \rangle_{1-irr|st}$, $\langle \psi\psi\psi\psi \rangle_{1-irr|st}$ и динамических функций $\langle \psi'\psi \rangle_{1-irr}$, $\langle \psi'\psi\psi\psi \rangle_{1-irr}$ на нулевой частоте:

$$\langle \psi'\psi \rangle_{1-irr|\omega=0} = \langle \psi\psi \rangle_{1-irr|st}, \quad \langle \psi'\psi\psi\psi \rangle_{1-irr|\omega=0} = \langle \psi\psi\psi\psi \rangle_{1-irr|st}. \quad (129)$$

На диаграммном языке равенства (129) означают, что для данных функций сумма динамических диаграмм сводится к более простому объекту – сумме статических диаграмм. Мы рассмотрим примеры технической реализации такой процедуры, а затем применим аналогичные приемы для упрощения интересующей нас функции $\langle \psi'\psi \rangle_{1-irr|\omega=0}$.

Докажем равенство:

$$\frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} |_{\omega=0} = \left[\frac{1}{6} \text{---} \bigcirc \text{---} \right]_{st}, \quad (130)$$

где $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{6}$ – симметричные коэффициенты диаграмм. Выполняя интегрирование по времени, раскроем левую часть

$$\frac{1}{2} \text{diag}_1 \big|_{\omega=0} = \frac{1}{2} \text{diag}_2 \sim \frac{1}{2} \frac{1}{E_2 E_3} \cdot \frac{1}{(E_1 + E_2 + E_3)}. \quad (131)$$

Здесь цифрами обозначены номера импульсов интегрирования, а в правой части формулы указано подынтегральное выражение. Симметризуя это выражение по импульсам интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{E_2 E_3} \cdot \frac{1}{(E_1 + E_2 + E_3)} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{6} \left(\frac{1}{E_2 E_3} + \frac{1}{E_1 E_2} + \frac{1}{E_1 E_3} \right) \cdot \frac{1}{(E_1 + E_2 + E_3)} = \frac{1}{6} \frac{1}{E_1 E_2 E_3}, \end{aligned} \quad (132)$$

что совпадает с подынтегральным выражением правой части (130).

На диаграммном языке процедуру симметризации можно записать в виде:

$$\frac{1}{2} \text{diag}_1 = \frac{1}{6} \left(\text{diag}_2 + \text{diag}_3 + \text{diag}_4 \right) \quad (133)$$

Аналогичная симметризация для произвольных диаграмм может быть записана в виде символического равенства:

$$\text{diag}_5 + \text{diag}_6 + \text{diag}_7 = \text{diag}_8 \quad (134)$$

Очевидно, имеют место и следующие два равенства:

$$\text{diag}_9 + \text{diag}_{10} = \text{diag}_{11} \quad (135)$$

$$\text{diag}_{12} + \text{diag}_{13} + \text{diag}_{14} + \text{diag}_{15} = \text{diag}_{16} \quad (136)$$

Используя эти равенства, рассмотрим более сложный пример суммы трех диаграмм

$$J = \text{diagram}_1|_{\omega=0} + \frac{1}{2} \text{diagram}_2|_{\omega=0} + \frac{1}{2} \text{diagram}_3|_{\omega=0} \quad (137)$$

Вычисляя эту сумму с помощью временных версий и проводя симметризацию, получаем:

$$J = \frac{1}{2} \left(\text{diagram}_1 + \text{diagram}_2 + \text{diagram}_3 \right)_1 + \frac{1}{2} \left(\text{diagram}_4 + \text{diagram}_5 \right)_2 \quad (138)$$

Первая диаграмма в (137) имеет одну временную версию и разбивается на полусумму первых двух диаграмм в (138), вторая диаграмма в (137) имеет две временных версии, соответствующие диаграммам 3 и 4 в (138), и последняя диаграмма имеет одну временную версию, соответствующую пятому вкладу (138). Воспользовавшись в (138) соотношениями (134)-(136), находим

$$J = \frac{1}{2} \text{diagram}_1 + \frac{1}{4} \text{diagram}_2 = \frac{1}{4} \text{diagram}_3 \quad (139)$$

Для упрощения первой скобки в (138) мы воспользовались равенством (134), для второй – (136) и для последнего перехода – (134). В результате сумма динамических диаграмм (137) свелась к единственной статической. Этот пример показывает, насколько редукция сокращает число диаграмм.

Для диаграмм интересующей нас один-неприводимой функции $\psi'\psi'$ полное сведение к статическим диаграммам не представляется возможным. Однако, использование соотношений (134)-(136) позволяет и в этом случае значительно сократить число вкладов и упростить их вид. Рассмотрим в качестве

примера сумму двух последних диаграмм в (38), которую перепишем в виде:

$$J_1 = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \quad (140)$$

С учетом того, что значения диаграмм не зависят от нумерации вершин, производя симметризацию и используя соотношение (136), получаем:

$$J_1 = \frac{1}{2} \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \right) = \frac{1}{2} \text{diagram 5} \quad (141)$$

Сформулируем общий рецепт редукции диаграмм, иллюстрируя его на примере суммы двух следующих диаграмм, содержащих в совокупности десять временных версий:

$$\text{diagram 6} + \text{diagram 7} \quad (142)$$

Результат редукции представляет собой сумму диаграмм, построенных по следующему рецепту.

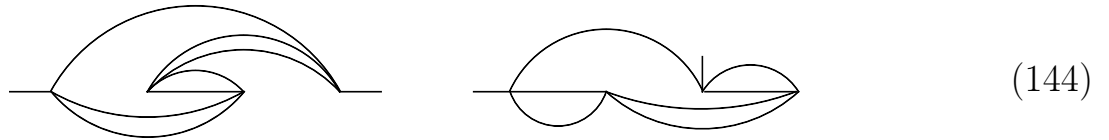
I шаг.

Рисуем диаграммы со всеми возможными расположениями внутренних вершин, при этом внешние вершины всегда должны быть крайними, а все ближайшие вершины должны быть соединены между собой хотя бы одной линией.

Возможный порядок вершин:

$$\text{diagram 8} \quad (143)$$

запрещенный порядок вершин:



II шаг.

Поочередно рисуем сечения слева направо, начиная от крайней левой вершины. Максимальное число сечений соответствует количеству вершин - 1.



III шаг.

Во все линии, приходящие слева к вершине, расположенной между двумя сечениями, поочередно расставляем штрихи. Если существует 2 эквивалентные линии, на которые можно расставить штрихи, то ставим только на одну, оставшийся вариант учитывается в симметричном коэффициенте.



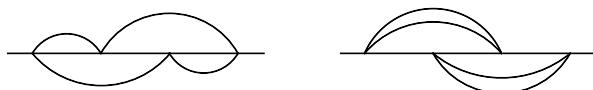
Таким образом, исходная сумма десяти временных версий свелась к сумме трех эффективных диаграмм (146).

В качестве второго примера редукции диаграмм рассмотрим сумму 28 временных версий диаграмм вида

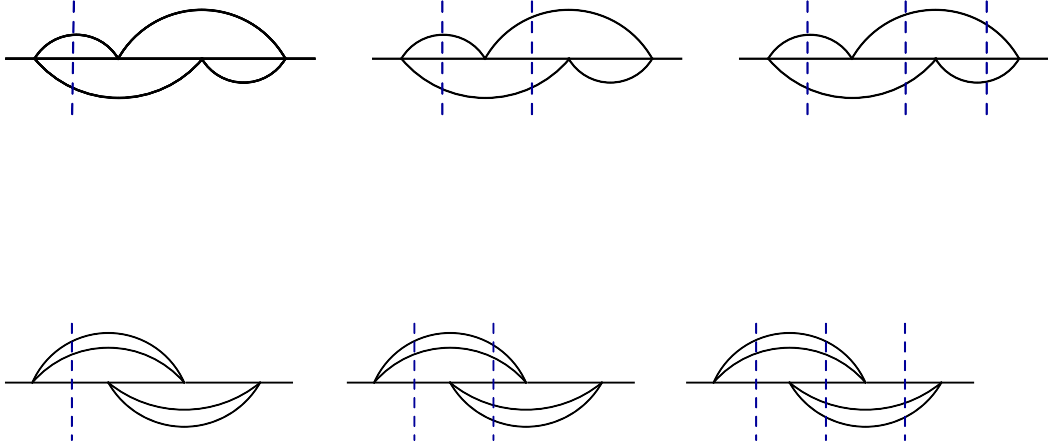


с 5 вариантами расстановки штрихов.

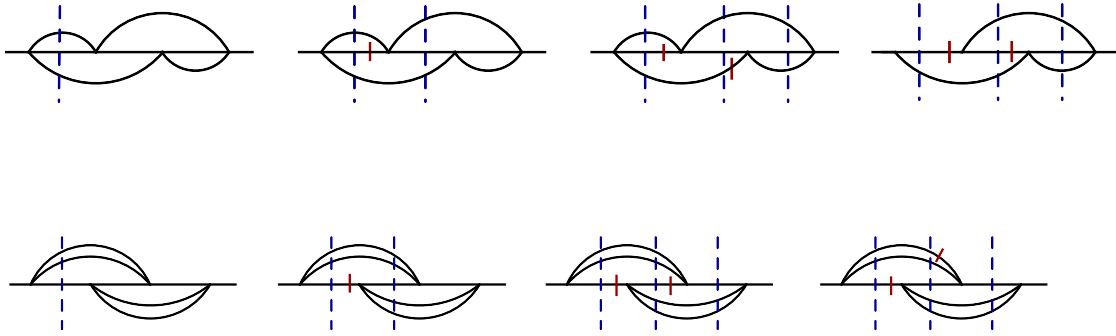
I шаг.



II шаг.



III шаг.



(148)

В результате 28 версий диаграмм (147) свелись к 8 диаграммам (148).

3.3 Расчет динамического индекса в схеме MS

При нахождении динамического индекса путем расчета констант ренормировки воспользуемся в данной главе при ренормировке схемой минимальных вычитаний ($\overline{MS}$ – при использовании заряда u), в которой контрчлены вычитают из диаграмм только полюсные по ε вклады. Динамический индекс определяется константой ренормировки

$$Z_\lambda = Z_1^{-1} Z_\psi^2 = Z_2^{-1} Z_\psi^2. \quad (149)$$

Для наших целей ее удобно вычислять через константу ренормировки Z_1 , которая определяется по диаграммам 1-неприводимой функции $\Gamma_{\psi'\psi'} = \langle \psi'\psi' \rangle_{1-irr}/(2\lambda)$ на нулевых внешней частоте ω и импульсе p . При разложении этой функции в ряд теории возмущений будем использовать заряд $u = \frac{S_d}{(2\pi)^d}g$, где $S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ – площадь d -мерной сферы единичного радиуса. Это разложение имеет вид

$$\Gamma_{\psi'\psi'}|_{\omega=0,p=0} = Z_1(1 + u^2 Z_g^2 (\mu^2/\tau)^\varepsilon Z_\tau^{-\varepsilon} A^{(2)} + u^3 Z_g^3 (\mu^2/\tau)^{3\varepsilon/2} Z_\tau^{-3\varepsilon/2} A^{(3)} + \dots) \quad (150)$$

Константы ренормировки Z_g и Z_τ в (150) известны из статики, искомая константа Z_1 в рассматриваемом 4-петлевом приближении имеет вид

$$Z_1 = 1 + \frac{z_{21}}{\varepsilon} u^2 + \left(\frac{z_{32}}{\varepsilon^2} + \frac{z_{31}}{\varepsilon} \right) u^3 + \left(\frac{z_{43}}{\varepsilon^3} + \frac{z_{42}}{\varepsilon^2} + \frac{z_{41}}{\varepsilon} \right) u^4 + \mathcal{O}(u^5), \quad (151)$$

коэффициенты z_{nk} находятся из условия отсутствия полюсов по ε в функции $\Gamma_{\psi'\psi'}|_{\omega=0,p=0}$. Задача состоит в вычислении коэффициентов $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ в (150) (в отличие от предыдущей главы мы не будем использовать при перенормировке R -операцию).

В результате редукции диаграмм вплоть до четырехпетлевого приближения был получен следующий набор диаграмм (рис. 1-2):

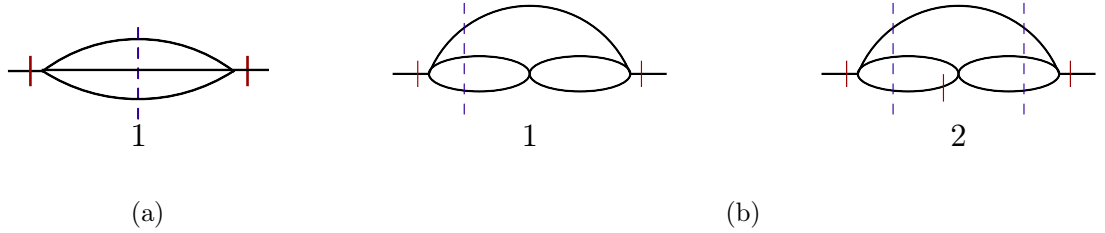


Рис. 1: Диаграммы $\Gamma_{\psi'\psi'}$ после редукции: (a) 2 петли и (b) 3 петли.

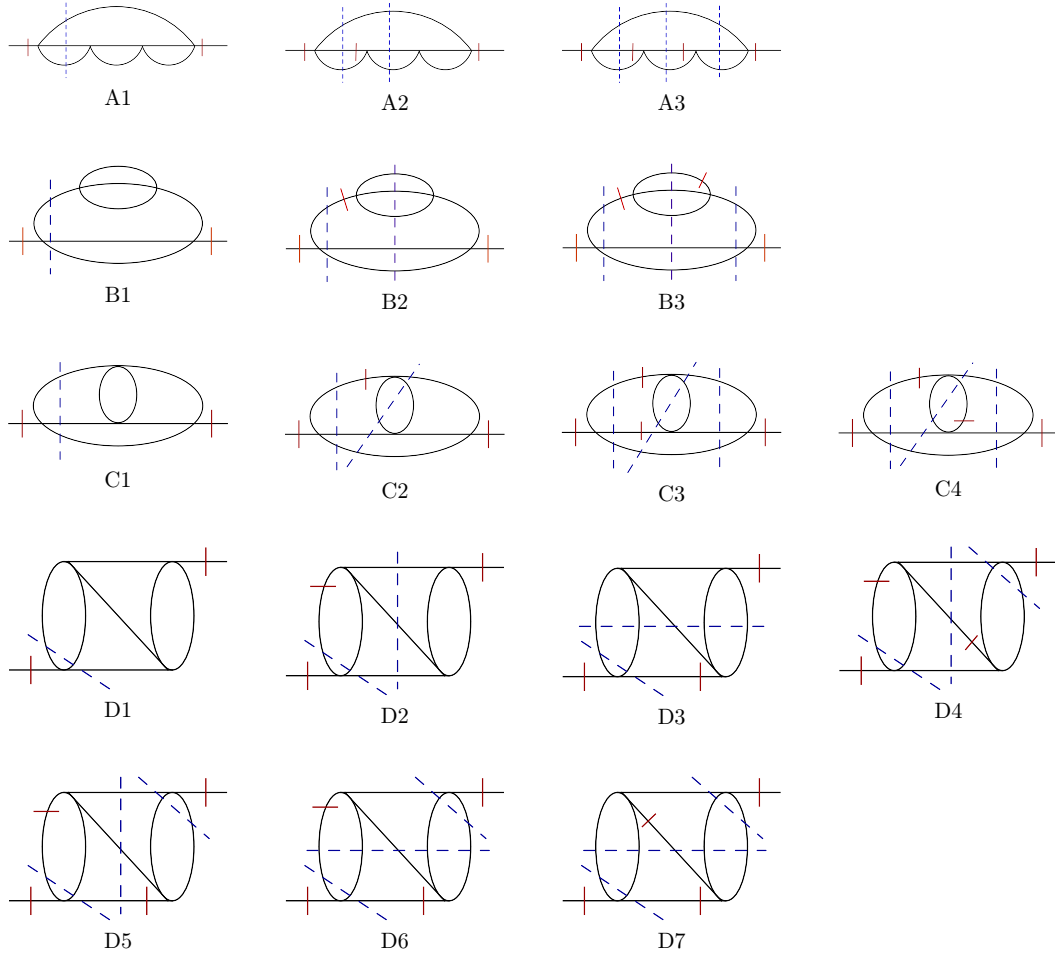


Рис. 2: Четырехпетлевые диаграммы $\Gamma_{\psi'\psi'}$ после редукции, сгруппированные по топологии.

Все диаграммы (1-2) вычислялись в представлении Фейнмана методом Sector Decomposition. Необходимое число слагаемых их ε -разложения приведены в Таблице (2), в которой указаны также соответствующие симметричные множители S и дополнительные весовые множители $f(n)$, позволяющие перейти от результатов для однокомпонентного поля с $n = 1$ к результатам для n -компонентной $O(n)$ -симметричной модели. Коэффициенты $A^{(m)}$ в разложении (150) определяются по данным таблицы соотношением

$$A^{(m)} = \sum_j S_j^{(m)} f_j^{(m)}(n) D_j^{(m)}(\varepsilon) \quad (152)$$

№	$S^{(m)}$	результат ($D^{(m)}$)	$f^{(m)}(n)$
2 петли, $m = 2$			
1	1/6	$0.2157615526(10)\varepsilon^{-1} - 0.3853514975(25) + 0.5692846610(35)\varepsilon$	k_3
3 петли, $m = 3$			
1	1/4	$0.143841039(8)\varepsilon^{-2} - 0.330633628(30)\varepsilon^{-1} + 0.61007974(9)$	$k_1 k_3$
2	1/2	$0.071920514(4)\varepsilon^{-2} - 0.196352188(16)\varepsilon^{-1} + 0.41485450(4)$	
4 петли, $m = 4$			
A1	1/8	$0.10788085(9)\varepsilon^{-3} - 0.3032746(4)\varepsilon^{-2} + 0.6479956(16)\varepsilon^{-1}$	$k_2 k_3$
A2	1/4	$0.05394036(5)\varepsilon^{-3} - 0.17491376(20)\varepsilon^{-2} + 0.4258852(8)\varepsilon^{-1}$	
A3	1/2	$0.026970186(22)\varepsilon^{-3} - 0.09909542(10)\varepsilon^{-2} + 0.2689090(4)\varepsilon^{-1}$	
B1	1/12	$-6(5)10^{-8}\varepsilon^{-3} - 0.1004829(4)\varepsilon^{-2} + 0.1431086(18)\varepsilon^{-1}$	k_3^2
B2	1/12	$0.023276508(28)\varepsilon^{-2} - 0.08913734(14)\varepsilon^{-1}$	
B3	1/4	$-0.01363165(4)\varepsilon^{-2} + 0.03119582(18)\varepsilon^{-1}$	
C1	1/4	$0.05394039(4)\varepsilon^{-3} - 0.12466740(20)\varepsilon^{-2} + 0.2359704(10)\varepsilon^{-1}$	$k_3 k_4$
C2	1/2	$0.04114906(8)\varepsilon^{-1}$	
C3	1/2	$0.011638248(13)\varepsilon^{-2} - 0.05352246(7)\varepsilon^{-1}$	
C4	1	$0.013485088(11)\varepsilon^{-3} - 0.04862411(5)\varepsilon^{-2} + 0.12779878(22)\varepsilon^{-1}$	$k_3 k_4$
D1	1/4	$0.053940377(5)\varepsilon^{-3} - 0.124667192(32)\varepsilon^{-2} + 0.28863410(18)\varepsilon^{-1}$	
D2	1/2	$0.05394044(5)\varepsilon^{-3} - 0.17491404(20)\varepsilon^{-2} + 0.4107878(8)\varepsilon^{-1}$	
D3	1/4	$0.03941088(8)\varepsilon^{-1}$	
D4	1/2	$0.013485098(11)\varepsilon^{-3} - 0.04862416(5)\varepsilon^{-2} + 0.14655896(22)\varepsilon^{-1}$	
D5	1/2	$0.0134850952(14)\varepsilon^{-3} - 0.048624182(8)\varepsilon^{-2} + 0.13962442(4)\varepsilon^{-1}$	
D6	1/2	$0.007758853(10)\varepsilon^{-2} - 0.03059186(5)\varepsilon^{-1}$	
D7	1/4	$0.0077588424(16)\varepsilon^{-2} - 0.027130478(10)\varepsilon^{-1}$	

Таблица 2

где коэффициенты k_i определены в (106).

Константа ренормировки Z_g в (150) известна из статики, с необходимой для нас точностью:

$$Z_g = 1 + u \frac{8+n}{6\varepsilon} + u^2 \left(\frac{(8+n)^2}{36\varepsilon^2} - \frac{14+3n}{24\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(u^3). \quad (153)$$

По поводу величины Z_τ в (150) необходимо сделать следующее замечание. Использование в (150) статических констант ренормировки Z_g и Z_τ подразумевает, что при вычислении функции $\Gamma_{\psi'\psi'}$ учитываются все диаграммы, в том числе содержащие подграфы-головастики. Известно, что такие диаграммы можно не учитывать (что мы и делали), если не учитывать головастики также и в контрчленах. За сокращение головастиков в (150) ответственна константа ренормировки Z_τ , следовательно, если не учитывать головастики при вычислении величин $\Gamma_{\psi'\psi'}$, надо удалить их вклад из Z_τ . Получающаяся константа ренормировки $\tilde{Z}_\tau$ с необходимой точностью дается выражением ¹

¹проблема головастиков отсутствует, если расчеты констант ренормировки проводятся в “безмассовой” теории с $\tau = 0$, в которой головастики доопределяются нулями. В такой теории вместо (150) вычисляется величина $\Gamma_{\psi'\psi'}|_{\omega=0, \tau=0}$, для которой множитель $(\mu^2/(\tau Z_\tau))^{\varepsilon/2}$ в правой части (150) заменяется на $(\mu/p)^\varepsilon$. Однако при таком подходе несколько усложняются подынтегральные выражения в фейнмановском представлении

$$\tilde{Z}_\tau = 1 - u^2 \left(\frac{2+n}{12\varepsilon^2} + \frac{5(2+n)}{144\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(u^3). \quad (154)$$

Подставляя в (150) выражения (153), (154), (151), и вычисленные согласно (152) значения величин Γ_i , находим коэффициенты z_{nm} из требования сокращения полюсных вкладов по ε . Согласно теории ренормировок, коэффициенты z_{nm} при старших полюсах по ε ($m > 1$) выражаются определенным образом через коэффициенты z_{n1} при первом полюсе, что гарантирует сокращение в (150) полюсных слагаемых со степенями $\log(\mu^2/\tau)$. Это служит проверкой корректности вычислений.

Константе ренормировки Z_1 сопоставляется РГ-функция

$$\gamma_1 = \beta(u) \partial_u \ln Z_1. \quad (155)$$

Выражение для β -функции в настоящее время известно с шестипетлевой точностью, ее явный вид нам не понадобится, так как упоминавшаяся связь между коэффициентами при старших полюсах с коэффициентом при первом полюсе позволяет представить γ_1 в более простом виде

$$\gamma_1 = -u \partial_u (z_{21} u^2 + z_{31} u^3 + z_{41} u^4 + \dots). \quad (156)$$

Динамический критический индекс z выражается через значение $\gamma_1^* \equiv \gamma_1(u_*)$ функции $\gamma_1(u)$ в неподвижной точке u_* и индекс Фишера η соотношением

$$z = 2 + \gamma_1^* - \eta \quad (157)$$

Подставляя в (156) найденные значения z_{n1} и нормируя ответ на величину двухпетлевого вклада, получим:

$$\gamma_1^* = k_3 h \frac{u_*^2}{24} \left[1 + b_1 k_1 u_* + (b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4) u_*^2 \right] + \mathcal{O}(u_*^5), \quad (158)$$

где

$$h = 6 \ln(4/3) \simeq 1.726092433 \quad (159)$$

$$b_1 = -0.4939306(5) \quad b_2 = -0.251043(19) \quad (160)$$

$$b_3 = -0.169990(9) \quad b_4 = 1.806593(30) \quad (161)$$

Величина u_* , определяемая условием $\beta(u_*) = 0$, с необходимой для нас точностью дается выражением

$$u_* = \frac{6}{n+8}\varepsilon + \frac{18(3n+14)}{(n+8)^3}\varepsilon^2 + \frac{3}{4(n+8)^5}(-33n^3 + 110n^2 + 1760n + 4544 - 96(n+8)(5n+22)\zeta(3))\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (162)$$

Как отмечалось в главе 2, определяемая через динамический индекс z равенством

$$z = 2 + R\eta \quad (163)$$

величина R не зависит в первых двух порядках теории возмущений от числа компонент поля n . В этом можно убедиться, записав индекс Фишера η в виде, аналогичном (156). С необходимой точностью

$$\eta = k_3 \frac{u_*^2}{24} [1 + a_1 k_1 u_* + (a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4) u_*^2] + \mathcal{O}(u_*^5), \quad (164)$$

где

$$a_1 = -\frac{3}{8}, \quad a_2 = -\frac{15}{64}, \quad a_3 = -\frac{5}{32}, \quad a_4 = \frac{45}{32}. \quad (165)$$

Из (163), (157) с учетом (156), (164), (162) находим

$$R = (6 \ln(4/3) - 1) \left(1 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2(c_3 + c_4 n)}{(n+8)^2} \right), \quad (166)$$

где коэффициенты c_i определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{2}{3} \frac{h}{h-1} (b_1 - a_1) \\
c_2 &= \frac{4h}{3(h-1)} \left(\frac{1}{3} a_1 (a_1 - b_1) + (b_2 - a_2) \right) \\
c_3 &= \frac{4h}{3(h-1)} (21(b_1 - a_1) - 44(b_2 - a_2) + 18(b_3 - a_3) + 22(b_4 - a_4)) \\
c_4 &= \frac{2h}{3(h-1)} (9(b_1 - a_1) - 20(b_2 - a_2) + 18(b_3 - a_3) + 10(b_4 - a_4))
\end{aligned} \tag{167}$$

В работе [15], в которой также, как в этой главе, использовалась схема минимальных вычитаний, для b_1 получено выражение

$$b_1 = \frac{\pi^2/8 - F(1/4)}{\ln(4/3)} - \frac{3}{4} + \frac{13}{8} \ln 4 - \frac{21}{8} \ln 3 \simeq -0.493930232, \tag{168}$$

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\ln t}{t-1} dt, \tag{169}$$

чему, согласно (167), (168) и (165), соответствует

$$c_1 \simeq -0.188483416. \tag{170}$$

Полученные в настоящей главе в схеме MS значения коэффициентов c_i в (166) равны

$$\begin{aligned}
c_1 &= -0.1884840(7), & c_2 &= -0.09995(6), \\
c_3 &= 21.5412(34), & c_4 &= 4.7847(8).
\end{aligned} \tag{171}$$

Коэффициенты c_i впервые были рассчитаны в работе [16], где для них были получены значения $c_1 = -0.1884(9)$, $c_2 = -0.100(4)$, $c_3 = 21.5(4)$, $c_4 = 4.78(6)$.

Приведем также полученное ε -разложение непосредственно для динамического индекса z при $n = 1$:

$$z = 2 + 0.0134461561\varepsilon^2 + 0.011036273(10)\varepsilon^3 - 0.0055791(5)\varepsilon^4 \tag{172}$$

Соберем в таблице (3) все результаты, полученные разными способами:

	c_1	c_2	c_3	c_4
ТБР [19]	-0.188483417(21)	-0.100096(11)	21.56(6)	4.788(13)
MS [20]	-0.1884840(7)	-0.09995(6)	21.5412(34)	4.7847(8)
Работа [16]	-0.1884(9)	-0.100(4)	21.5(4)	4.78(6)
Точные значения [13]	-0.188483416	-0.099952926		

Таблица 3

4 Пересуммирование ε -разложения индекса z методом конформ-Бореля

Асимптотический характер рядов, получаемых в рамках ε -разложения, требует для получения надежных теоретических предсказаний проведения борелевского пересуммирования. Существует несколько вариантов такого суммирования, в настоящей работе мы используем модифицированный метод конформ-Бореля [31]. Напомним его содержание. Пусть имеется функция $A(g)$, для которой известны первые N коэффициентов A_n в разложении

$$A(g) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n, \quad (173)$$

и асимптотика высоких порядков (АВП) коэффициентов A_n :

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c (-a)^n n! n^{b_0}. \quad (174)$$

Тогда конформ-борелевское представление функции $A(g)$ имеет вид

$$A(g) = \int_0^{\infty} dt \exp^{-t} t^b \left(\frac{gt}{w(gt)} \right)^{\nu} B(w(gt)), \quad (175)$$

где

$$w(x) = \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sqrt{1+ax} + 1}, \quad (176)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n w^n. \quad (177)$$

АВП коэффициентов разложения функции (175) в ряд по g имеет вид (174) с заданным значением параметра a , заданное значение параметра b_0 достигается выбором

$$b = b_0 + 3/2. \quad (178)$$

Приближенное выражение $A^{(N)}(g)$ для функции (175)

$$A^{(N)}(g) = \int_0^\infty dt \exp^{-t} t^b \left(\frac{gt}{w(gt)} \right)^\nu \sum_{n=0}^N B_n w^n \quad (179)$$

получается путем учета в (177) N первых членов суммы, коэффициенты B_n в которой выбираются из требования совпадения первых N членов разложения функции (175) с известными коэффициентами A_n в (173). Дополнительный параметр ν в (175), впервые введенный в работе [31], контролирует асимптотику “сильной связи”² :

$$A(g) \stackrel{g \rightarrow \infty}{\sim} g^\nu. \quad (180)$$

В обсуждаемой задаче параметр ν не известен и мы будем использовать его для улучшения сходимости процедуры суммирования при увеличении числа учитываемых слагаемых в (173).

Следуя работе [32], проиллюстрируем эффективность такого подхода на примере модельной функции

$$A(g) = \int_0^\infty dx \exp^{-x^2 - gx^4}. \quad (181)$$

Для этой функции известны все коэффициенты разложения (173), а АВП имеет вид (174) с $a = 4$, $b_0 = -1$. Параметр ν имеет значение $\nu = -1/4$. На рис. 3 показано сравнение точного значения $A(1) = 0.6842134279$ функции (181) при $g = 1$ с результатом расчета по формуле (175) с учетом различного числа слагаемых (горизонтальная ось) при различных значениях параметра ν .

²следуя работе [31], мы используем обозначение ν для этого параметра, который в данном контексте не встречается одновременно с критическим индексом ν

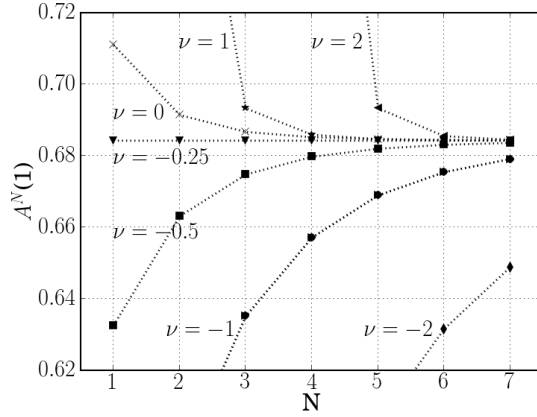


Рис. 3: Значение пересуммированного ряда $A^{(N)}(g)$ функции (181) при $g = 1$, для различных N и ν .

Из рисунка видно, что сходимость процедуры суммирования имеет место в некотором диапазоне значений параметра ν , и скорость сходимости заметно уменьшается по мере удаления этого параметра от “истинного” значения $\nu = -1/4$.

Мы применили процедуру суммирования (175)–(179) к полученному нами ϵ -разложению (172) динамического критического индекса z с $n = 1$ [21]. Параметры a и b_0 для $\eta(\epsilon)$ выбирались, согласно [33], равными $a = 1/3$, $b_0 = 3/2$. В работе [34] показано, что такие же значения имеют эти параметры для величины $z(\epsilon)$. На рис. 4-5 показаны полученные в результате суммирования значения динамического критического индекса z для трехмерного пространства $d = 3$ ($\epsilon = 1$) и двумерного пространства $d = 2$ ($\epsilon = 2$) при различном числе учтенных членов разложения $z(\epsilon)$ и значений параметра ν .

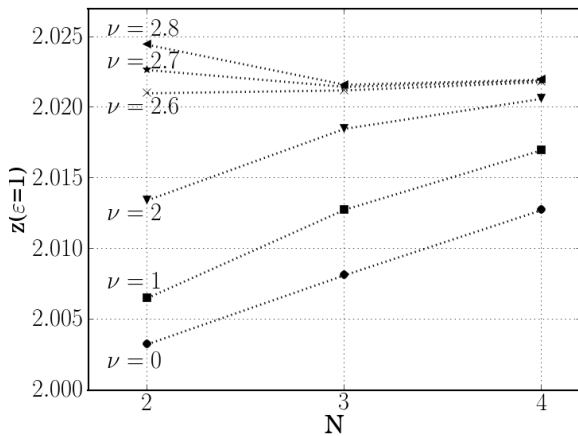


Рис. 4: Пересуммированный критический индекс z при $\epsilon = 1$ и различных N и ν

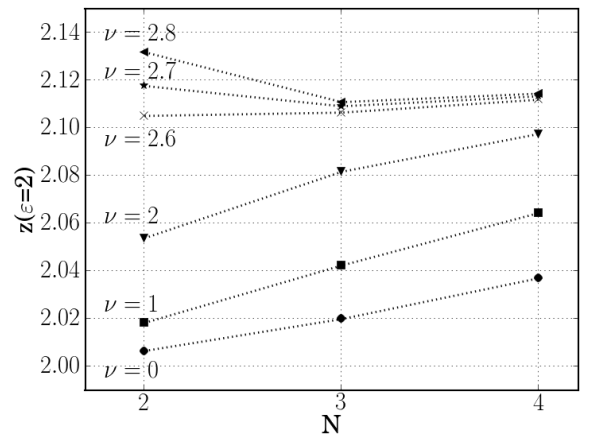


Рис. 5: Пересуммированный критический индекс z при $\epsilon = 2$ и различных N и ν

Из сравнения рис. 3 и рис.4-5 видно, что сходимость процедуры борелевского суммирования для $z(\varepsilon)$ вполне аналогична рассмотренной для модельной функции (181). Наибольшая скорость сходимости достигается при значении $\nu = 2.6$, что дает следующие оценки для динамического индекса z для трехмерного и двумерного случаев:

	2 петли	3 петли	4 петли
$\varepsilon = 1$	2.0210142	2.021218	2.0217974
$\varepsilon = 2$	2.1050275	2.10642878	2.1118359

Таблица 4

Из рисунков 4-5 следует, что учет параметра сильной связи ν необходим для корректного определения динамического критического индекса z методом конформ-борелевского суммирования, поскольку при значении $\nu = 0$, которое использовалось в работе [17], сходимость очень медленная, и требуется учет большого числа членов разложения $z(\epsilon)$.

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации, можно сформулировать в следующем виде:

1) В работе проведено обобщение результатов, полученных в работах [35] и [23] для моделей критической статистики, на динамические модели. В работе [35] соотношение вида (70) в модели ϕ^3 было угадано и проверено в четырехпетлевом приближении, в статье [23] это соотношение было доказано в произвольном порядке теории возмущений. Приведенное в настоящей работе доказательство соотношения (70) заметно короче, чем в [23]. Это связано с тем, что в нем используется информация о возможности обобщения процедуры ренормировки на случай расширенной теории с учетом составных операторов [36], а также ее формулировки в терминах R -операции [22].

2) С помощью техники вычисления ренормгрупповых функций путем представления диаграмм Фейнмана в виде несингулярных интегралов был выполнен четырехпетлевой расчет модели А критической динамики. Вычисления проводились как в импульсном представлении, так и с помощью техники Sector Decomposition, обобщенной на задачи критической динамики. С этой целью был получен рецепт записи диаграмм (с учетом контрчленов) в фейнмановском представлении непосредственно по виду диаграмм. Используемая техника позволила впервые произвести четырехпетлевой расчет в модели критической динамики с точностью порядка 0.3%.

3) Альтернативный четырехпетлевой численный расчет динамического индекса был выполнен с помощью вычисления констант ренормировок в схеме MS методом Sector Decomposition. Предложенный в настоящей работе метод редукции диаграмм модели А критической динамики позволил значительно сократить число диаграмм, необходимых для вычисления. В сочетании с использованием техники Sector Decomposition, примененной при численном интегрировании, это позволило на 2 порядка увеличить точность определения динамического индекса в четвертом порядке ε -разложения по сравнению с полученным ранее результатом [16].

4) Было показано, что учет параметра сильной связи ν необходим для корректного определения динамического критического индекса z методом конформ-борелевского суммирования, поскольку при значении $\nu = 0$, которое использовалось в работе [17], сходимость очень медленная, и требуется учет большого

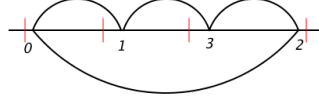
числа членов разложения $z(\epsilon)$. Разработанная техника редукции диаграмм позволяет рассчитывать на выполнение 5-петлевого расчета динамического индекса – число диаграмм сокращается с 1025 до 201, а использование техники Sector Decomposition при вычислении диаграмм обеспечит достаточную точность вычислений.

5) Выполненный двумя способами расчет в четырехпетлевом приближении динамического критического индекса показал, что более точные результаты достигнуты в схеме MS с использованием техники Sector Decomposition. Это связано с тем, что метод “теории без расходимостей” дает хорошие результаты расчета в импульсном представлении для диаграмм с простой структурой подрасходимостей, для диаграмм с вложенными подграфами точность расчетов в импульсном представлении заметно падает, и возникает потребность в использовании метода Sector Decomposition, в котором из-за наличия дополнительных параметров растяжения более эффективное выделение секторов требует доработки.

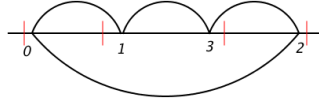
Приложение

В данном Приложении будет произведен расчет в импульсном представлении трехпетлевых и некоторых четырехпетлевых диаграмм.

Начнем с четырехпетлевых диаграмм. Здесь будет рассмотрена диаграмма A1,

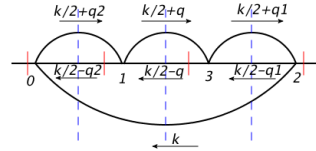


содержащая 4 временных версии (симметричный коэффициент 1) и диаграмма A2



с 6 временными версиями (симметричный коэффициент $1/2$).

1. Диаграмма A1, временная версия 0132.



В общем случае подынтегральные выражения четырехпетлевых диаграмм в импульсном представлении зависят от 10 переменных – четырех модулей импульсов и 6 углов. Для рассматриваемой диаграммы это выражение существенно упрощается по двум причинам – при указанной протечке импульсов в нем присутствуют лишь скалярные произведения $\mathbf{k}\mathbf{q} = kq \cos\theta$, $\mathbf{k}\mathbf{q}_1 = kq_1 \cos\theta_1$ и $\mathbf{k}\mathbf{q}_2 = kq_2 \cos\theta_2$, а благодаря симметричной протечке импульса $\mathbf{k}$ через подграфы в сумме “энергий” в каждом из сечений для временных версий (например, $E_k + E_{k/2+q} + E_{k/2-q} = \mathbf{k}^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau$) скалярные произведения сокращаются. Зависимость от углов остается, таким образом, лишь в “статических” знаменателях пропагаторов (33). Учитывая, что с необходимой точностью четырехпетлевые диаграммы в рассматриваемой схеме без расходимостей могут вычисляться при $\varepsilon = 0$ ($d = 4$), угловые интегралы легко вычисляются с помощью соотношений (93), (94). Таким образом, задача сводится к численному

интегрированию четырехкратных интегралов по модулям импульсов, которое с большой точностью выполняется стандартными программами интегрирования.

Интересующий нас вклад диаграмм Ai в величину f_1 определяется, согласно (69), величиной $I^{(i)} = R' \hat{\partial}_\tau Ai$, где $\hat{\partial}_\tau \dots = -\partial_\tau \dots |_{\tau=1}$. Вычисления будут производиться в следующем порядке: для каждой временной версии будет выписано подынтегральное выражение в сферической системе координат, произведено интегрирование по угловым переменным, затем производится последовательное дифференцирование $\hat{\partial}_\tau$ подынтегральных множителей и, в зависимости от структуры расходимостей получившегося выражения, осуществляется R' -операция, результат которой приводится к удобной для численного интегрирования форме. Продолжим рассмотрение временной версии 0132.

1) Интеграл в сферической системе координат. Всюду в дальнейшем подразумевается, что интегралы по модулям импульсов берутся в пределах $0 \dots \infty$, и используется обозначение $\int d\hat{\theta} \dots \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta \dots$.

$$\begin{aligned}
 A1_{0132} &= \frac{1}{S_4^4} \int dk d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_2)^2 + \tau + \mathbf{k}^2 + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau + \mathbf{k}^2 + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau + \mathbf{k}^2 + \tau)} = \\
 &= \int dk d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\hat{\theta} d\hat{\theta}_1 d\hat{\theta}_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \frac{1}{(k^2/4 + q_2^2 + kq_2 \cos \theta_2 + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + \tau)(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)(k^2/4 + q_1^2 - kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{(k^2 + \tau)(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} .
 \end{aligned}$$

2) Результат интегрирования по угловым переменным с использованием

соотношений (93), (94):

$$A1_{0132} = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)(k^2 + \tau)} \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)}.$$

3) Дифференцирование $\hat{\partial}_\tau$ и R' -операция.

Последовательно дифференцируя в этой формуле сомножители, получим сумму вкладов, в каждом из которых необходимо сделать вычитания на подграфы в соответствии с правилом применения R' -операции, сформулированном в Главе 2. Вычитания пишем в явном виде без использования дополнительных параметров a . Параметр τ в окончательном выражении входит в виде простого множителя $1/\tau$ (это видно после соответствующего растяжения переменных), и его писать не будем, положив $\tau = 1$ и используя символическую запись $\hat{\partial}_\tau \dots = \partial_\tau \dots |_{\tau=1}$. Рассмотрим вклады от последовательного дифференцирования сомножителей. Производная от первого сомножителя дает вклад (в рамках расчета каждой временной версии мы используем далее одинаковые обозначения, не указывая явно принадлежности вкладов к данной версии)

$$I_1 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \right) \cdot \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \cdot \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \cdot Q_1(q, k),$$

$$Q_1(q, k) \equiv \frac{1}{\left(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2} \right) (2q^2 + 3k^2/2 + 3)} - \frac{1}{(2q^2 + 2)^2}$$

Мы выделили отдельно множитель, в котором сделано вычитание, соответствующее описанной в Главе 2 R' -операции для диаграмм, проинтегрированных по

времени. Это вычитание делает УФ-конечным интеграл по переменной q , так как сокращает главный асимптотический при $q \rightarrow \infty$. Для облегчения численного интегрирования полезно это сокращение реализовать в явном виде

$$Q_1 = \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)(2q^2 + 2)^2} \left[\frac{(2q^2 + 2)^2}{\left(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2q^2}\right)} - \right. \\ \left. - (2q^2 + 2 + 1 + 3k^2/2) \right] = \frac{-(1 + 3k^2/2)}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)(2q^2 + 2)^2} + \\ + \frac{\left(q^2 + 1 - k^2/4 - \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2q^2}\right)}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)(2q^2 + 2) \left(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2q^2}\right)}$$

Поделив и умножив вторую дробь на

$$\left(q^2 + 1 - k^2/4 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2q^2}\right),$$

получаем окончательно

$$Q_1 = \frac{-(1 + 3k^2/2)}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)(2q^2 + 2)^2} - \frac{k^2}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)(2q^2 + 2)} \cdot \\ \cdot \frac{1}{\left(q^2 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2q^2}\right)^2 - k^4/4}$$

Проводя численное интегрирование в программе Mathematica, получаем

$$I_1 = -8 \cdot 0.001316192(2)$$

Производная от второго сомножителя дает вклад

$$I_2 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\ \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \\ \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\ \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)}$$

В силу симметрии диаграммы по импульсам q_2 и q

$$I_2 = I_1 = -8 \cdot 0.001316192(2)$$

Производная от третьего сомножителя дает вклад

$$I_3 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \right. \\ \left. \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_1(q, k) Q_1(q_2, k) = 8 \cdot 0.004536018(2)$$

Производная от четвертого сомножителя дает вклад

$$I_4 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\ \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + \tau)} \right) \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_1(q, k) Q_1(q_2, k) = \\ = 8 \cdot 0.001166702(3)$$

Производная от пятого сомножителя дает вклад

$$I_5 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\ \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2}) (q_1^2 + k^2/4 + 1)} Q_1(q, k) \\ \frac{1}{(k^2 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 8 \cdot (-0.000783452(1))$$

Производная от шестого сомножителя дает вклад

$$I_6 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\ \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \\ \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2}) (q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \\ \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)}$$

В силу симметрии диаграммы по импульсам q_2 и q

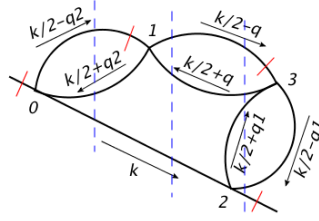
$$I_6 = I_5 = 8 \cdot (-0.000783452(1))$$

Производная от седьмого сомножителя дает вклад

$$\begin{aligned} I_7 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\ &\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} Q_1(q, k) Q_1(q_2, k) \frac{1}{(k^2 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) = \\ &= 8 \cdot 0.001048640(2) \end{aligned}$$

$$I_{0132}^{(1)} = \sum_{i=1}^7 I_i = 8 \cdot 0.002552072(7)$$

2. Диаграмма A1 временная версия 0123



1) Интеграл в сферической системе координат

$$\begin{aligned} A1_{0123} &= \frac{1}{S_4^4} \int dk dq dq_1 dq_2 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\ &\frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau + \mathbf{k}^2 + \tau)} \\ &\frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau + \mathbf{k}^2 + \tau)} \\ &\frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} = \\ &= \int dk dq dq_1 dq_2 \hat{d}\theta \hat{d}\theta_1 \hat{d}\theta_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \frac{1}{(k^2/4 + q_2^2 + k q_2 \cos \theta_2 + \tau)} \\ &\frac{1}{(k^2/4 + q^2 + k q \cos \theta + \tau)(k^2/4 + q_1^2 - k q_1 \cos \theta_1 + \tau)(k^2/4 + q_1^2 + k q_1 \cos \theta_1 + \tau)} \\ &\frac{1}{(k^2 + \tau)(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \end{aligned}$$

2) Результат интегрирования по угловым переменным

$$A1_{0123} = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)(k^2 + \tau)} \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}$$

3) Дифференцирование $\hat{\partial}_\tau$ и R' -операция

$$I_1 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \right) \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)(2q^2 + 3k^2/2 + 3)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} = 8 \cdot (-0.000993616(9))$$

$$I_2 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} Q_1(q_2, k) = 8 \cdot 0.001021823(3)$$

$$I_3 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} Q_1(q_2, k) = 8 \cdot 0.001836152(3)$$

$$I_4 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2}) (q_1^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + \tau)} \right) \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} Q_1(q_2, k) = 8 \cdot 0.000837512(2)$$

$$I_5 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2}) (q_1^2 + k^2/4 + 1) (k^2 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} =$$

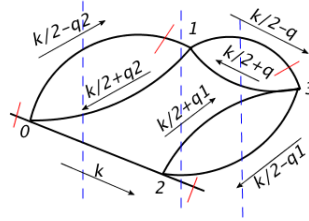
$$= \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2}) (q_1^2 + k^2/4 + 1) (k^2 + 1)} \frac{1}{-3} \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)^2} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3) (k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} = -8 \cdot 0.000736085(9)$$

$$I_6 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2}) (q_1^2 + k^2/4 + 1) (k^2 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} Q_1(q_2, k) = 8 \cdot 0.000486309(9)$$

$$I_7 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2}) (q_1^2 + k^2/4 + 1) (k^2 + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \right) Q_1(q_2, k) = 8 \cdot 0.000394880(9)$$

$$I_{0123}^{(1)} = \sum_{i=1}^7 I_i = 8 \cdot 0.002846975(20)$$

3. Диаграмма A1 временная версия 0213



1) Интеграл в сферической системе координат

$$A1_{0213} = \frac{1}{S_4^4} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)(k^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_2)^2 + \tau + k^2 + \tau)} \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} = \int dk dq dq_1 dq_2 \hat{\partial}_\theta \hat{\partial}_1 \hat{\partial}_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + \tau)(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)(k^2/4 + q_1^2 - kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \frac{1}{(k^2 + \tau)(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)}$$

2) Результат интегрирования по угловым переменным

$$A1_{0213} = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} (q_1^2 + k^2/4 + \tau)(k^2 + \tau) \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}$$

3) Дифференцирование $\hat{\partial}_\tau$ и R' -операция

$$I_1 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \right) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} Q_2(q_1, q, k) \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)}$$

$$Q_2(q_1, q, k) \equiv \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} - \frac{1}{(2q^2 + 2)^2}$$

$$Q_2 = \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)(2q^2 + 2)^2} \cdot \left(\frac{(2q^2 + 2)^2}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 \hat{\partial}_\tau q^2})} - (k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 2 + 2) \right) =$$

$$= \frac{-(2q_1^2 + k^2 + 2)}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)(2q^2 + 2)^2} +$$

$$+ \frac{q^2 - k^2/4 + 1 - \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2}}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)(2q^2 + 2)(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})}$$

Поделив и умножив вторую дробь на

$$\left(q^2 + 1 - k^2/4 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2} \right),$$

получаем окончательно

$$Q_2 = \frac{-(2q_1^2 + k^2 + 2)}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)(2q^2 + 2)^2} - \frac{k^2}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)(2q^2 + 2)} \cdot \frac{1}{\left(q^2 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2q^2}\right)^2 - k^4/4}$$

Проводя интегрирование, получаем

$$I_1 = 8 \cdot 0.001484250(3)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\ &\quad \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \\ &\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\ &\quad \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} = \\ &= 8 \cdot (-0.000531178(2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\ &\quad \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \\ &\quad Q_2(q, q_1, k) \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} = 8 \cdot 0.002180474(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\ &\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + \tau)} \right) \\ &\quad Q_2(q, q_1, k) \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} = 8 \cdot 0.001671063(1) \end{aligned}$$

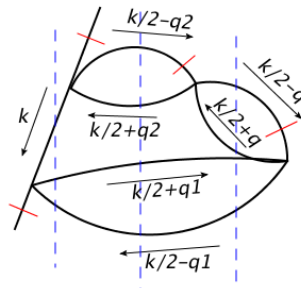
$$I_5 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} Q_2(q, q_1, k) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} = 8 \cdot 0.000808596(1)$$

$$I_6 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} Q_2(q, q_1, k) \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)} \right) = 8 \cdot 0.000532797(1)$$

$$I_7 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)} \right) = 8 \cdot (-0.000413832(4))$$

$$I_{0213}^{(1)} = \sum_{i=1}^7 I_i = 8 \cdot 0.005732170(6)$$

4. Диаграмма A1 временная версия 2013



1) Интеграл в сферической системе координат

$$\begin{aligned}
A1_{2013} &= \frac{1}{S_4^4} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} = \\
&= \int dk dq dq_1 dq_2 d\hat{\theta} d\hat{\theta}_1 d\hat{\theta}_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \frac{1}{(k^2/4 + q_2^2 + kq_2 \cos \theta_2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + \tau)(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)(k^2/4 + q_1^2 - kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(k^2 + \tau)(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}
\end{aligned}$$

2) Результат интегрирования по угловым переменным

$$\begin{aligned}
A1_{2013} &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + \tau)(k^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}
\end{aligned}$$

3) Дифференцирование $\hat{\partial}_\tau$ и R' -операция

$$\begin{aligned}
I_1 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \right) \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} Q_2(q_1, q, k) \\
&\quad \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} = 8 \cdot 0.001087022(2) \\
I_2 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\quad \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)}
\end{aligned}$$

В силу симметрии диаграммы по q и q_2

$$I_2 = I_1 = 8 \cdot 0.001087022(2)$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \right) \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \frac{1}{(k^2 + 1)} Q_2(q, q_1, k) Q_2(q_1, q_2, k) \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = \\
&= 8 \cdot (-0.005453970(7))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + \tau)} \right) Q_2(q, q_1, k) Q_2(q_1, q_2, k) \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = \\
&= 8 \cdot (-0.002820334(1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} Q_2(q, q_1, k) Q_2(q_1, q_2, k) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) = \\
&= 8 \cdot (-0.001516030(2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} Q_2(q, q_1, k) \\
&\frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)} \right) = 8 \cdot 0.000756377(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \right)
\end{aligned}$$

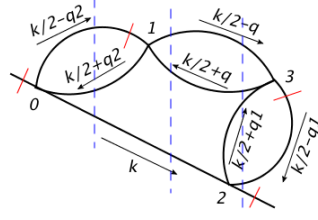
В силу симметрии диаграммы по q и q_2

$$I_7 = I_6 = 8 \cdot 0.000756377(3)$$

$$I_{2013}^{(1)} = \sum_{i=1}^7 I_i = 8 \cdot (-0.006103535(11))$$

$$I^{(1)} = I_{0123}^{(1)} + I_{0132}^{(1)} + I_{0213}^{(1)} + I_{2013}^{(1)} = 8 \cdot (-7.6462 \pm 0.0024) \cdot 10^{-5} = -0.0006117(2)$$

5. Диаграмма A2 временная версия 0123



1) Интеграл в сферической системе координат

$$\begin{aligned}
 A2_{0123} &= \frac{1}{S_4^4} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau + \mathbf{k}^2 + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau + \mathbf{k}^2 + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} = \\
 &= \int dk dq dq_1 dq_2 d\hat{\theta} d\hat{\theta}_1 d\hat{\theta}_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \\
 &\quad \frac{1}{(k^2/4 + q_2^2 + kq_2 \cos \theta_2 + \tau)} \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)(k^2/4 + q^2 - kq \cos \theta + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{(k^2 + \tau)(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}
 \end{aligned}$$

2) Результат интегрирования по угловым переменным

$$\begin{aligned}
 A2_{0123} &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \\
 &\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \\
 &\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + \tau)(k^2 + \tau)} \\
 &\quad \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}
 \end{aligned}$$

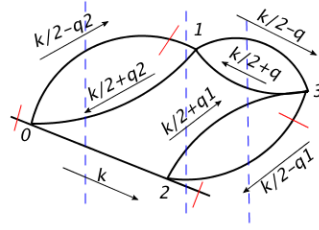
3) Дифференцирование $\hat{\partial}_\tau$ и R' -операция

$$\begin{aligned}
I_1 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \right) \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_2(q, q_1, k) = 8 \cdot 0.001885025(2) \\
I_2 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \right) \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} Q_1(q_2, k) = 8 \cdot 0.000879142(3) \\
I_3 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_2(q_1, q, k) Q_1(q_2, k) = \\
&= 8 \cdot (-0.004889921(3)) \\
I_4 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\
&\quad \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_2(q, q_1, k) = 8 \cdot 0.001226892(3) \\
I_5 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) Q_2(q_1, q, k) Q_1(q_2, k) = \\
&= 8 \cdot (-0.001221662(4)) \\
I_6 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \right) Q_1(q_2, k) = 8 \cdot 0.000601786(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \\
&\frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + \tau)} \right) \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_2(q_1, q, k) Q_1(q_2, k) = \\
&= 8 \cdot (-0.001638634(4))
\end{aligned}$$

$$I_{0123}^{(2)} = \sum_{i=1}^7 I_i = 8 \cdot (-0.003157372(9))$$

6. Диаграмма A2 временная версия 0213



1) Интеграл в сферической системе координат

$$\begin{aligned}
A2_{0213} &= \frac{1}{S_4^4} \int dk dq dq_1 dq_2 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
&\frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_2)^2 + \tau + \mathbf{k}^2 + \tau)} \\
&\frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
&\frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} = \\
&= \int dk dq dq_1 dq_2 \hat{d}\theta \hat{d}\theta_1 \hat{d}\theta_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq_2 \cos \theta_2 + \tau)} \\
&\frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + \tau)(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)(k^2/4 + q^2 - kq \cos \theta + \tau)} \\
&\frac{1}{(k^2 + \tau)(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}
\end{aligned}$$

2) Результат интегрирования по угловым переменным

$$A2_{0213} = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau)(k^2 + \tau)} \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}$$

3) Дифференцирование $\hat{\partial}_\tau$ и R' -операция

$$I_1 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \right) \frac{1}{(q_1^2 + k^2 \hat{\partial}_\tau 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} =$$

$$= 8 \cdot (-0.000778240(2))$$

$$I_2 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \right) \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} =$$

$$= 8 \cdot (-0.000573523(7))$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + \tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} = \\
&= 8 \cdot (-0.001558668(2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\quad \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} = \\
&= 8 \cdot (-0.000500991(6))
\end{aligned}$$

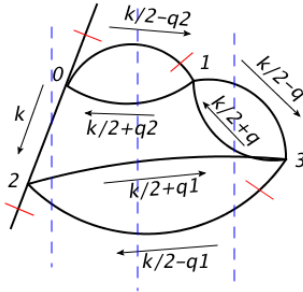
$$\begin{aligned}
I_5 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} = \\
&= 8 \cdot (-0.000278401(3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \right) = \\
&= 8 \cdot (-0.000305798(3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + \tau)} \right) \\
&\quad \frac{1}{(2q_2^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} = \\
&= 8 \cdot (-0.001164824(1))
\end{aligned}$$

$$I_{0213}^{(2)} = \sum_{i=1}^7 I_i = 8 \cdot (-0.005160445 \pm 0.000000011)$$

7. Диаграмма A2 временная версия 2013



1) Интеграл в сферической системе координат

$$\begin{aligned}
A_{2013} &= \frac{1}{S_4^4} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_2)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)} = \\
&= \int dk dq dq_1 dq_2 \hat{d}\theta \hat{d}\theta_1 \hat{d}\theta_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \frac{1}{(k^2/4 + q_2^2 + kq_2 \cos \theta_2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + \tau)(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)(k^2/4 + q_1^2 - kq \cos \theta + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(k^2 + \tau)(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}
\end{aligned}$$

2) Результат интегрирования по угловым переменным

$$\begin{aligned}
A_{2013} &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + \tau)(k^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}
\end{aligned}$$

3) Дифференцирование $\hat{\partial}_\tau$ и R' -операция

$$\begin{aligned}
I_1 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_2^2})} \right) \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4)(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} = \\
&= 8 \cdot (-0.000487162(2))
\end{aligned}$$

$$I_2 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \left(\frac{\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})}}{1} \right) \\ \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\ \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} Q_2(q_1, q_2, k) = 8 \cdot 0.001216547(3)$$

$$I_3 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \\ \left(\frac{\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)}}{1} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \\ \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} Q_2(q_1, q_2, k) = 8 \cdot 0.002875972(4)$$

$$I_4 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\ \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\ \left(\frac{\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)}}{1} \right) \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} Q_2(q_1, q_2, k) = 8 \cdot 0.000677845(1)$$

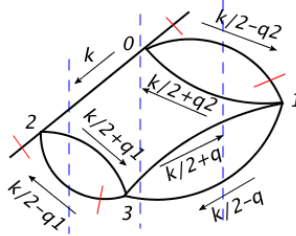
$$I_5 = 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_2^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_2^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_2^2})} \\ \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\ \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\ \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \left(\frac{\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 4\tau)}}{1} \right) \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} = \\ = 8 \cdot (-0.000371045(3))$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \right) Q_2(q_1, q_2, k) = \\
&= 8 \cdot 0.000550699(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= 8 \int dk dq dq_1 dq_2 (k^3 q^3 q_1^3 q_2^3) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})(q^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + \tau)} \right) \\
&\quad \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4)} Q_2(q_1, q_2, k) = 8 \cdot 0.001744823(4)
\end{aligned}$$

$$I_{2013}^{(2)} = \sum_{i=1}^7 I_i = 8 \cdot 0.006207679(9)$$

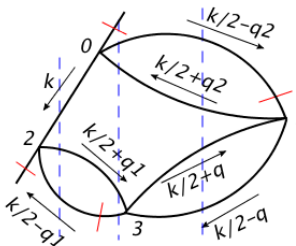
8. Диаграмма A2 временная версия 2301



В силу симметрии диаграммы по импульсам q_1 и q_2 идентична временной версии 0123

$$I_{2301}^{(2)} = I_{0123}^{(2)} = 8 \cdot (-0.003157372(9))$$

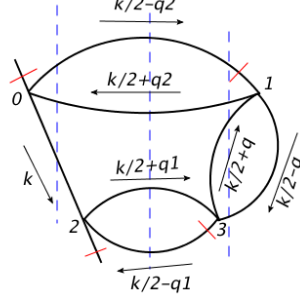
9. Диаграмма A2 временная версия 2031



В силу симметрии диаграммы по импульсам q_1 и q_2 идентична временной версии 0213

$$I_{2031}^{(2)} = I_{0213}^{(2)} = 8 \cdot (-0.005160445 \pm 0.000000011)$$

10. Диаграмма A2 временная версия 0231



В силу симметрии диаграммы по импульсам q_1 и q_2 идентична временной версии 2013

$$I_{0231}^{(2)} = I_{2013}^{(2)} = 8 \cdot 0.006207679(9)$$

$$I^{(2)} = 2 \cdot (I_{0123}^{(2)} + I_{0213}^{(2)} + I_{2013}^{(2)}) = 8 \cdot (-0.004220276 \pm 0.000000034) = -0.0337622(3)$$

С учетом симметричных коэффициентов получаем окончательно (множители $1/2$ в $\bar{\Gamma}_1$ из (16), и 2 в (71) при переходе от f_1 к γ_1 , сокращаются):

$$a_6 = I^{(1)} + \frac{1}{2}I^{(2)} = -0.01749280(24)$$

3 петли

В трехпетлевом приближении имеется единственная диаграмма, дающая вклад в f_1 . Ей соответствует 3 временные версии, симметричный коэффициент равен 1. В данном случае необходимо рассчитать значение диаграммы при $\varepsilon = 0$ и линейный по ε вклад. Соответствующие диаграмме интегралы имеют вид

$$B = \frac{1}{\int_0^\pi d\theta \sin^{2-\varepsilon} \theta \cdot \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{2-\varepsilon} \theta_1} \cdot \int dk dq dq_1 \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\theta_1 \cdot (k q q_1)^{3-\varepsilon} (\sin \theta \sin \theta_1)^{2-\varepsilon} \cdot F(k, q, q_1, \theta, \theta_1)$$

два члена ε -разложения этой величины с учетом (91) можно записать в виде

$$B = B_0[1 + \varepsilon(\ln 2 - 1/2)] - \varepsilon(B_{corr} + B_{corr1} + B_{corr2}),$$

где

$$B_0 = \int dk dq dq_1 \int \hat{d}\theta \int \hat{d}\theta_1 \cdot (kqq_1)^3 (\sin \theta \sin \theta_1)^2 \cdot F(k, q, q_1, \theta, \theta_1),$$

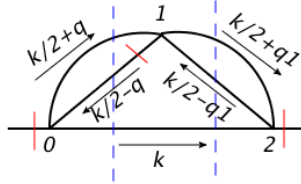
$$B_{corr} = \int dk dq dq_1 \int \hat{d}\theta \int \hat{d}\theta_1 \cdot (kqq_1)^3 (\sin \theta \sin \theta_1)^2 \cdot \ln(kqq_1) \cdot F(k, q, q_1, \theta, \theta_1)$$

$$B_{corr1} = \int dk dq dq_1 \int \hat{d}\theta \int \hat{d}\theta_1 \cdot (kqq_1)^3 (\sin \theta \sin \theta_1)^2 \cdot \ln(\sin \theta) \cdot F(k, q, q_1, \theta, \theta_1)$$

$$B_{corr2} = \int dk dq dq_1 \int \hat{d}\theta \int \hat{d}\theta_1 \cdot (kqq_1)^3 (\sin \theta \sin \theta_1)^2 \cdot \ln(\sin \theta_1) \cdot F(k, q, q_1, \theta, \theta_1)$$

В величинах B_0 и B_{corr} оба угловых интегрирования выполняются с помощью соотношений (93-94), остающийся трехкратный интеграл определяется численно. В величинах B_{corr1} и B_{corr2} аналитически выполняется интегрирование лишь по углам θ_1 и θ соответственно, и численно берутся остающиеся четырехкратные интегралы.

1) Диаграмма A1 временная версия 012



$$\begin{aligned}
K012 &= \int dk d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau)} \\
&= S_d S_{d-1}^2 \int dk dq dq_1 \hat{d}\theta \hat{d}\theta_1 (k^{3-\varepsilon} q^{3-\varepsilon} q_1^{3-\varepsilon} \sin^{2-\varepsilon} \theta \sin^{2-\varepsilon} \theta_1) \\
&= \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + \tau)(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \frac{1}{(k^2/4 + q_1^2 - kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \\
&= \frac{1}{(k^2 + \tau)(3k^2/2 + q^2 + q^2 + 3\tau)(3k^2/2 + q_1^2 + q_1^2 + 3\tau)} = \\
&= 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \\
&= \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + \tau)} \\
&= \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)}
\end{aligned}$$

Последовательно дифференцируем по τ отдельные сомножители и применяем R' -операцию

$$\begin{aligned}
K_1 &= 4 \int dk dq dq_1 \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right) \cdot Q_1(q, k) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.013243949(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1corr} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(kqq_1) \frac{Q_1(q, k)}{(k^2 + 1)(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right) = \\
&= 4 \cdot 0.0566628(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1corr1} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \cdot \\
&\left(\frac{\partial}{\partial \hat{\tau}} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right) \cdot \\
&\cdot \left(\frac{1}{(q^2 + k^2/4 + kq \cos \theta + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} - \frac{1}{2(q^2 + 1)^2} \right) \\
&\frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.006366472(1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1corr2} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \right. \\
&\left. \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 - kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \\
&\left(\frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} - \frac{1}{2(q^2 + 1)^2} \right) = \\
&= 4 \cdot (-0.023230216(1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \\
&\left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.005545176(4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{2corr} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(kqq_1) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.021743552(4))
\end{aligned}$$

$$K_{2corr1} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + kq \cos \theta + \tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.007455939(1)$$

$$K_{2corr2} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 - kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.004257399(1)$$

$$K_3 = 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} =$$

$$= \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-3}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.004186933(4))$$

$$K_{3corr} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(kqq_1) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-3}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.014666261(4))$$

$$\begin{aligned}
K_{3corr1} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-3}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)^2} \\
&\frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.003011895(1) \\
K_{3corr2} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \\
&\frac{1}{(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{1}{(k^2/4 + q_1^2 - kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\frac{-3}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.003075893(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4 &= 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \\
&\frac{1}{(k^2 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) Q_1(q, k) = 4 \cdot 0.003818815(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{4corr} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(kqq_1) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-3}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)^2} Q_1(q, k) = 4 \cdot 0.014002862(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{4corr1} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-3}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)^2} Q_1(q, k) = 4 \cdot (-0.001821878(1)) \\
K_{4corr2} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 - kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-3}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)^2} Q_1(q, k) = \\
&= 4 \cdot (-0.003245059(1))
\end{aligned}$$

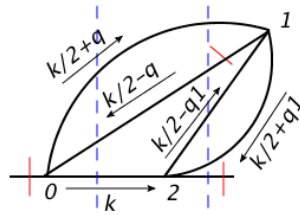
$$\begin{aligned}
K_5 &= 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \\
&\quad \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + \tau)} \right) \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_1(q, k) = 4 \cdot 0.004647385(4) \\
K_{5corr} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(kq q_1) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{-1}{(k^2 + 1)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_1(q, k) = 4 \cdot 0.017577716(4) \\
K_{5corr1} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{-1}{(k^2 + 1)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_1(q, k) = 4 \cdot (-0.002220673(1)) \\
K_{5corr2} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + k q_1 \cos \theta_1 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 - k q_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{-1}{(k^2 + 1)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_1(q, k) = \\
&= 4 \cdot (-0.003611839(1))
\end{aligned}$$

$$K_0^{012} = \sum_{i=1}^5 K_i = 0.04791216(4)$$

$$K_{corr}^{012} = \sum_{i=1}^5 K_{i corr} = 0.207334548(9)$$

$$K_{corr1}^{012} + K_{corr2}^{012} = \sum_{i=1}^5 K_{i corr1} + \sum_{i=1}^5 K_{i corr2} = -0.09078005(1)$$

2) Диаграмма A1 временная версия 021



$$\begin{aligned}
M_{021} &= \int dk d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + \mathbf{k}^2 + 3\tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + 4\tau)} = \\
&= S_d S_{d-1}^2 \int dk d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 \hat{d}\theta \hat{d}\theta_1 (k^{3-\varepsilon} q^{3-\varepsilon} q_1^{3-\varepsilon} \sin^{2-\varepsilon} \theta \sin^{2-\varepsilon} \theta_1) \\
&\quad \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + \tau)(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \frac{1}{(k^2/4 + q_1^2 - kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(k^2 + \tau)} \frac{1}{(3k^2/2 + q^2 + q^2 + 3\tau)(k^2 + 2q^2 + 2q_1^2 + 4\tau)} = \\
&= 4 \int dk d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}
\end{aligned}$$

Дифференцируем $\hat{\partial}_\tau$

$$\begin{aligned}
M &= 4 \int dk d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 \hat{\partial}_\tau \left(\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right. \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + \tau)} \\
&\quad \left. \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \right) = 4 \cdot (-0.021092052(4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{corr} &= 4 \int dk d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 \ln(kq q_1) \hat{\partial}_\tau \left(\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \right. \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + \tau)} \\
&\quad \left. \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \right) = 4 \cdot (-0.080386085(1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{corr1} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \cdot \hat{\partial}_\tau \left(\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right. \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + kq \cos \theta + \tau)} \frac{1}{(k^2 + \tau)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \\
&\quad \left. \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \right) = 4 \cdot 0.018577336(1)
\end{aligned}$$

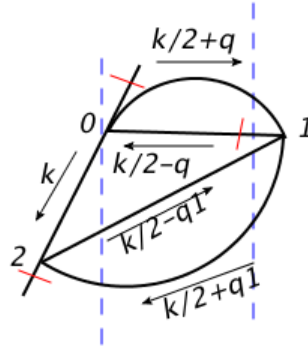
$$\begin{aligned}
M_{corr2} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \cdot \hat{\partial}_\tau \left(\frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \right. \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 - kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \frac{1}{(k^2 + \tau)} \frac{1}{(2q^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)} \left. \right) = \\
&= 4 \cdot 0.019728366(1)
\end{aligned}$$

$$M_0^{021} = M = -0.084368210(16)$$

$$M_{corr}^{021} = M_{corr} = -0.321544342(4)$$

$$M_{corr1}^{021} + M_{corr2}^{021} = M_{corr1} + M_{corr2} = 0.153222808(5)$$

3) Диаграмма A1 временная версия 201



$$\begin{aligned}
N_{201} &= \int dk dq d\mathbf{q}_1 \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + \tau)((\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \tau)(\mathbf{k}^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + \mathbf{k}^2 + 3\tau)} \\
&\quad \frac{1}{((\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}_1)^2 + (\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}_1)^2 + 4\tau)} = \\
&= S_d S_{d-1}^2 \int dk dq dq_1 \hat{d}\theta \hat{d}\theta_1 (k^{3-\varepsilon} q^{3-\varepsilon} q_1^{3-\varepsilon} \sin^{2-\varepsilon} \theta \sin^{2-\varepsilon} \theta_1) \\
&\quad \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + \tau)(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \frac{1}{(k^2/4 + q_1^2 - kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(k^2 + \tau)(3k^2/2 + q_1^2 + q_1^2 + 3\tau)(k^2 + 2q^2 + 2q_1^2 + 4\tau)} = \\
&= 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + \tau)} \\
&\quad \frac{1}{(3k^2/2 + 2q_1^2 + 3\tau)} \frac{1}{(k^2 + 2q_1^2 + 2q^2 + 4\tau)}
\end{aligned}$$

Дифференцируем $\hat{\partial}_\tau$ отдельные сомножители и применяем R' -операцию

$$\begin{aligned}
N_1 &= 4 \int dk dq dq_1 \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right) Q_2(q, q_1, k) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.015329277(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{1corr} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(kq q_1) \frac{Q_2(q, q_1, k)}{(k^2 + 1)(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right) = \\
&= 4 \cdot 0.0639918(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{1corr1} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \cdot \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + \tau)} \right) \\
&\quad \left(\frac{1}{(q^2 + k^2/4 + kq \cos \theta + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4)} - \frac{1}{2(q^2 + 1)^2} \right) \\
&\quad \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.007808922(1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{1corr2} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 - kq_1 \cos \theta_1 + \tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_2(q, q_1, k) = \\
&= 4 \cdot (-0.02505203(3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 &= 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \\
&\quad \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.003594083(4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{2corr} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(kqq_1) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\quad \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\quad \frac{1}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.013708224(4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{2corr1} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + kq \cos \theta + \tau)} \right) \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4)} \\
&\frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.004792691(1) \\
N_{2corr2} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 - kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \right) \\
&\frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{1}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4)} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.002925154(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3 &= 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \\
&\frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4\tau)} \right) \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = \\
&= \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \\
&\frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\frac{-4}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.002993170(4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{3corr} &= 4 \int dk dq dq_1 \ln(kqq_1) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\
&\frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2 + 1)} \\
&\frac{-4}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot (-0.010534810(4))
\end{aligned}$$

$$N_{3corr1} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2/4 + q^2 + kq \cos \theta + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-4}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.002129989(1)$$

$$N_{3corr2} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \frac{1}{(q^2 + k^2/4 + \tau + \sqrt{(q^2 + k^2/4 + \tau)^2 - k^2 q^2})} \frac{1}{(k^2/4 + q_1^2 + kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{1}{(k^2/4 + q_1^2 - kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-4}{(2q^2 + 2q_1^2 + k^2 + 4)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} = 4 \cdot 0.002351222(1)$$

$$N_4 = 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3\tau)} \right) Q_2(q, q_1, k) = 4 \cdot 0.004894831(4)$$

$$N_{4corr} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(kqq_1) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-3}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)^2} Q_2(q, q_1, k) = 4 \cdot 0.017727362(4)$$

$$N_{4corr1} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-3}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)^2} Q_2(q, q_1, k) = 4 \cdot (-0.002559019(1))$$

$$N_{4corr2} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 - kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{1}{(k^2 + 1)} \frac{-3}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)^2} Q_2(q, q_1, k) =$$

$$= 4 \cdot (-0.003993621(1))$$

$$N_5 = 4 \int dk dq dq_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \\ \left(\hat{\partial}_\tau \frac{1}{(k^2 + \tau)} \right) \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_2(q, q_1, k) = 4 \cdot 0.007794993(4)$$

$$N_{5corr} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(kqq_1) \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\ \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{-1}{(k^2 + 1)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_2(q, q_1, k) = 4 \cdot 0.030479540(4)$$

$$N_{5corr1} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta) \sin^2 \theta \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1 + \sqrt{(q_1^2 + k^2/4 + 1)^2 - k^2 q_1^2})} \\ \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + 1)} \frac{-1}{(k^2 + 1)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_2(q, q_1, k) = 4 \cdot (-0.004322339(1))$$

$$N_{5corr2} = 4 \int dk dq dq_1 \ln(\sin \theta_1) \sin^2 \theta_1 \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 + kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \\ \frac{1}{(q_1^2 + k^2/4 - kq_1 \cos \theta_1 + 1)} \frac{-1}{(k^2 + 1)^2} \frac{1}{(2q_1^2 + 3k^2/2 + 3)} Q_2(q, q_1, k) = \\ = 4 \cdot (-0.005662860(1))$$

$$N_0^{201} = \sum_{i=1}^5 N_i = 0.08572739(4)$$

$$N_{corr}^{201} = \sum_{i=1}^5 N_{i\,corr} = 0.351822698(9)$$

$$N_{corr1}^{201} + N_{corr2}^{201} = \sum_{i=1}^5 N_{i\,corr1} + \sum_{i=1}^5 N_{i\,corr2} = -0.14879896 \pm 0.00000014$$

Расчет коэффициентов a_4 и a_5 :

$$\begin{aligned}
 a_4 + a_5 \cdot \varepsilon &= (K^{012} + M^{021} + N^{201}) = \left(0.04791216(4) \left[1 + \varepsilon \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \right] - \right. \\
 &- \varepsilon(0.207334548(9) - 0.09078005(1)) - 0.084368210(16) \left[1 + \varepsilon \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \right] - \\
 &- \varepsilon(-0.321544342(4) + 0.153222808(5)) + \\
 &+ 0.08572739(4) \left[1 + \varepsilon \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \right] - \varepsilon(0.351822698(9) - 0.14879896(14)) \left. \right) = \\
 &= 0.049271254182(8) - 0.22915811(5)\varepsilon
 \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, *Theory of dynamic critical phenomena*, Rev. Mod. Phys., **49** (1977), 435.
- [2] R. Folk and G. Moser, *Critical dynamics: a field-theoretical approach*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **39**:24.
- [3] M. Marinelli, F. Mercuri, D.P. Belanger, *Specific heat, thermal diffusivity, and thermal conductivity of FeF_2 at the Néel temperature*, Phys. Rev. B, **51** (1995), 8897.
- [4] D. Niermann, C.P. Grams, P. Becker, L. Bohatý, H. Schenck, J. Hemberger, *Critical slowing down near the multiferroic phase transition in $MnWO_4$* , Phys. Rev. Lett., **114** (2015), 037204.
- [5] F. Livet, M. Fèvre, G. Beutier, M. Sutton, *Ordering fluctuation dynamics in $AuAgZn_2$* , Phys. Rev. B, **92** (2015), 094102.
- [6] D. V. Batkovich, M. V. Kompaniets, K. G. Chetyrkin, *Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $O(n)$ -symmetric ϕ^4 model*. Nuclear Physics B **906** (Mar., 2016) pp. 147–167, arXiv:1601.01960 [hep-th].
- [7] M. V. Kompaniets and E. Panzer, *Renormalization group functions of ϕ^4 theory in the MS -scheme to six loops*, PoS(LL2016)038, arXiv:1606.09210 [hep-th], in Loops and Legs in Quantum Field Theory Leipzig, Germany, April 24–29, Proceedings of Science, 2016.
- [8] M. V. Kompaniets and E. Panzer, *Minimally subtracted six loop renormalization of $O(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and critical exponents*, Phys. Rev. D, **96** (2017), 036016 arXiv:1705.06483 [hep-th].
- [9] O. Schnetz, *Numbers and Functions in Quantum Field Theory*, arXiv:1606.08598 [hep-th].
- [10] T. Binoth and G. Heinrich, *An automatized algorithm to compute infrared divergent multi-loop integrals*, Nuclear Physics B, **585** (2000), 741–759.

- [11] L.Ts. Adzhemyan, M.V. Kompaniets, *Five-loop numerical evaluation of critical exponents of the φ^4 theory*, J.Phys.: Conf.Ser. **523** (2014), 012049.
- [12] L. Ts. Adzhemyan, M. Danco, M. Hnatic, E. V. Ivanova, M. V. Kompaniets, *Multi-Loop Calculations of Anomalous Exponents in the Models of Critical Dynamics*, EPJ Web of Conferences, **108** (2016), 02004,
- [13] B.I. Halperin, P.C. Hohenberg, S. Ma, *Calculation of dynamic critical properties using Wilson's expansion methods*, Phys.Rev.Lett, **29** (1972), 1548-1551.
- [14] C. De Dominicis, E. Brezin, J. Zinn-Justin, *Field-theoretic techniques and critical dynamics. I. Ginzburg-Landau stochastic models without energy conservation*, Phys.Rev. B, **12** (1975), 4945.
- [15] Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, *Критическая динамика как теория поля*, ТМФ, **60** (1984), 59-71.
- [16] Л.Ц. Аджемян, С.В. Новиков, Л. Сладкофф, *Расчет динамического индекса модели А критической динамики в порядке ε^4* , Вестник СПбГУ. **4**:4 (2008), 110-114.
- [17] М.Ю. Налимов, В.А. Сергеев, Л. Сладкофф, *Борелевское пересуммирование ϵ -разложения динамического индекса z модели А $\phi^4(O(n))$ -теории*, ТМФ, **159**:1 (2009), 96-108.
- [18] Л. Ц. Аджемян, С. Е. Воробьева, М. В. Компаниец, *Представление несингулярными интегралами β -функции и аномальных размерностей в моделях критической динамики*, ТМФ, **185**:1 (2015), 3–11.
- [19] Л. Ц. Аджемян, С. Е. Воробьева, М. В. Компаниец, Э. В. Иванова, *Представление ренормгрупповых функций несингулярными интегралами в модели критической динамики ферромагнетиков: четвертый порядок ε -разложения*, ТМФ, **195**:1 (2018), 103-114.
- [20] L. Adzhemyan, E. Ivanova, M. Kompaniets, S. Vorobyeva, *Diagram Reduction in Problem of Critical Dynamics of Ferromagnets: 4-Loop Approximation*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **51** (2018), 155003. arXiv:1712.05917 [cond-mat.stat-mech].

- [21] С. Е. Воробьева, Э.В. Иванова, В.Д. Серов, *Борелевское пересуммирование динамического индекса z в модели А критической динамики с учетом асимптотики сильной связи*, Вестник СПбГУ. Физика и химия, Т. 5 (63). Вып. 1, (2018), 13-19.
- [22] А.Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Издательство ПИЯФ, С.-Петербург, 1998.
- [23] Л.Ц. Аджемян, М.В. Компаниец, С.В. Новиков, В.К. Сазонов, *Представление β -функции и аномальных размерностей несингулярными интегралами: доказательство основного соотношения*, ТМФ, **175**:3 (2013), 325–336.
- [24] О.И. Завьялов *Перенормированные диаграммы Фейнмана*. М., Наука, 1979.
- [25] E. R. Speer, Annales de l'institut Henri Poincaré (A) Physique théorique, **26**:1 (1977), 87-105.
- [26] L. Ts. Adzhemyan, Yu. V. Kirienko, M. V. Kompaniets, *Critical exponent η in 2D $O(N)$ -symmetric ϕ^4 -model up to 6 loops*, arXiv:cond-mat/ 1602.02324.
- [27] E. D. Siggia, B. I. Halperin, and P. C. Hohenberg, *Renormalization-group treatment of the critical dynamics of the binary-fluid and gas-liquid transitions*, Phys. Rev. B, **13** (1976), 2110.
- [28] C. De Dominicis and L. Peliti, *Field-theory renormalization and critical dynamics above T_c : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems*, Phys. Rev. B **18** (1978), 353.
- [29] Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. С. Кабриц, М. В. Компаниец, *H-модель критической динамики: двухпетлевой расчет РГ-функций и критических индексов*, ТМФ **119**:1 (1999), 73–92.
- [30] R. Folk, G. Moser, *Dynamic Critical Behavior Near the Superfluid Transition in $^3\text{He} - ^4\text{He}$ Mixtures in Two Loop Order*, Phys.Rev.Lett. **89**:12 (2002), 125301.
- [31] Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, *Аналитическое продолжение результатов теории возмущений модели $g\varphi^4$ в область $g \geq 1$* , ТМФ, **38**:1 (1979), 15–25.

- [32] M.V. Kompaniets *Prediction of the higher-order terms based on Borel resummation with conformal mapping*, J. Phys.: Conf. Ser., **762** (2016), 012075.
- [33] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, Freie Universität Berlin, (2001), 489.
- [34] J. Andreanov, J. Honkonen, M. Komarova and M. Nalimov, *Large-order asymptotes for dynamic models*, J. Phys. A: Math. Gen., **39** (2006), 1–10.
- [35] Л.Ц. Аджемян, М.В. Компаниец, *Ренормгруппа и ε -разложение: представление β -функции и аномальных размерностей несингулярными интегралами*, ТМФ, **169** (2011), 100-111.
- [36] J. Zinn-Justin. *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford University Press, Oxford, 2002.