САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ и
УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ИНСТИТУТ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ РАН

На правах рукописи

КРЕМНЕВ Илья Сергеевич

Асимптотика высоких порядков квантово-полевых разложений в модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор Налимов М.Ю.

Санкт-Петербург
2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Турбулентность

Типичный пример турбулентности – течение жидкости по трубе с заданным перепадом давления Δp на ее концах: при малом Δp течение плавное («ламинарное»), с ростом же Δp при переходе через некоторое пороговое значение $\Delta p_{\text{пор}}$ плавное течение теряет устойчивость и в жидкости появляются хаотические завихрения, интенсивность которых возрастает с ростом Δp. Одновременно усложняется структура потока жидкости: характерным размером впервые появляющихся вблизи порога вихрей является некоторый «внешний масштаб» системы L_{max} (в приводимом примере - диметр трубы), с ростом Δp эти первичные крупномасштабные вихри дробятся на все более мелкие. Режиму развитой турбулентности соответствует $\Delta p >> \Delta p_{\text{пор}}$. Тогда в системе одновременно присутствуют турбулентные вихри всевозможных размеров от внешнего масштаба L_{max} до «диссипационной длины» L_{min}, для которой становится существенным затухание вихрей из-за вязкого трения. В стационарном режиме вся энергия, поступающая в систему от создающего градиент давления внешнего источника, в конечном счете, превращается в тепло из-за диссипации энергии для мелкомасштабных вихрей.

В общем случае роль $\Delta p/\Delta p_{\text{пор}}$ играет безразмерный параметр – число Рейнольдса $Re = vL_{max}/\nu$, где v – характерная средняя скорость течения, L_{max} – внешний масштаб, ν – кинематическая вязкость среды.

При наличии турбулентности полное поле скорости $V(t,\mathbf{x})$ представляется в виде суммы $V(t,\mathbf{x}) = v(t,\mathbf{x}) + \widehat{\varphi}(t,\mathbf{x})$, где t – время, $\mathbf{x} \in \Re^d$ – координата в d-мерном пространстве, $v(t,\mathbf{x})$ – плавная ламинарная составляющая скорости, $\widehat{\varphi}(t,\mathbf{x})$ – сравнительно малая стохастическая (пульсационная) составляющая. Предметом исследования теории турбулентности являются статистические характеристики случайного поля $\widehat{\varphi}(t,\mathbf{x})$, т.е. его корреляционные функции и различные функции отклика. Вблизи порога, когда число Рейнольдса Re немного превышает пороговое значение $Re_{\text{пор}}$, структура впервые появляющихся турбулентных вихрей с характерным размером L_{max} определяется всей геометрией задачи (см. [1]), т.е. в этой ситуации турбулентность помнит детали глобального устройства системы. Задачи такого типа решаются индивидуально для каждой конкретной системы.

Существенно упростить задачу можно в случае развитой турбулентности, когда $Re >> Re_{\text{пор}}$ и $L_{max} >> L_{min}$. Тогда существует чётко выраженный инерционный интервал расстояний $L_{max} >> L >> L_{min}$, и можно говорить о корреляционных функциях поля $\widehat{\varphi}(t,\mathbf{x})$ на таких масштабах. Поскольку характерным масштабом ламинарной составляющей скорости потока является L_{max}, то на расстояниях $L << L_{max}$ мы полагаем $v(t,\mathbf{x}) = const$. Таким образом, при изучении структуры турбулентного потока на таких масштабах можно игнорировать нетривиальное глобальное устройство изучаемой системы, постоянную же скорость $v(t,\mathbf{x})$ можно устранить переходом в соответствующую систему координат. Это приведет к задаче об однородной изотропной турбулентности, в которой все поле скорости $V(t,x)$ отождествляется с его стохастической составляющей $\widehat{\varphi}(t,\mathbf{x})$, а источником поступления энергии считаются первичные крупномасштабные вихри.

Развитая турбулентность экспериментально наблюдается как для жидкостей, так и для газов и подчиняется единым закономерностям. Поскольку характерная скорость турбулентных пульсаций в реальных условиях гораздо меньше скорости звука, при описании турбулентности можно пренебречь сжимаемостью среды и считать векторное поле скорости поперечным.

Обычно [2] в качестве микромодели однородной изотропной развитой (т.е. большие числа Рейнольдса) турбулентности несжимаемой жидкости (газа) используют стохастическое уравнение Навье-Стокса

$$\nabla_t \varphi_i(\mathbf{x},t) = \nu\Delta\varphi_i(\mathbf{x},t) - \partial_i p(\mathbf{x},t) + \xi_i(\mathbf{x},t), \qquad \nabla_t \equiv \partial_t + (\varphi\partial), \tag{1}$$

где φ – поперечное (следствие несжимаемости) векторное поле скорости ($\partial\varphi \equiv \partial_k\varphi_k = 0$), ν – кинематический коэффициент вязкости, $p(\mathbf{x},t)$ и $\xi(\mathbf{x},t)$ – давление и поперечная внешняя случайная сила в расчете на единицу массы, ∇_t – галилеево-ковариантная производная. Для ξ предполагается гауссово распределение с нулевым средним и заданным коррелятором $<\widehat{\xi}_i(\mathbf{x},t)\widehat{\xi}_s(\mathbf{x}',t')>\equiv D_{is}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')$ следующего вида

$$D_{is}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') = \delta(t-t')(2\pi)^{-d}\int d\mathbf{q}P_{is}(\mathbf{q})N(\mathbf{q})e^{ik(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \tag{2}$$

где $P_{is}(\mathbf{q}) = \delta_{is} - q_i q_s/q^2$ – поперечный проектор, d – размерность пространства $\mathbf{x}$ (и $\mathbf{q}$), $N(\mathbf{q})$ – некоторая «функция накачки», зависящая от $|\mathbf{q}|$ и от параметров модели.

Случайная сила ξ в уравнении (1) феноменологически моделирует стохастичность (которая в реальных условиях должна возникать спонтанно как следствие неустойчивости ламинарного течения) и одновременно накачку энергии в систему от взаимодействия с крупномасштабными вихрями. Средняя мощность накачки энергии (количество энергии, поступающее за единицу времени на единицу массы) связана с функцией $N(\mathbf{q})$ в (2) соотношением

$$W = [(d-1)/2(2\pi)^d]\int d\mathbf{q}N(\mathbf{q}). \tag{3}$$

В критической динамике вид коррелятора случайной силы в уравнениях Ланжевена выбирается требованием взаимной согласованности динамики и статики. Стохастическое уравнение Навье-Стокса не относится к этому классу, поэтому здесь нет однозначного правила выбора этого коррелятора.

В РГ-теории турбулентности его выбирают, руководствуясь, с одной стороны, физическими соображениями, с другой, – чисто техническими. Физические соображения состоят в том, что реалистическая для данной задачи накачка должна быть инфракрасной, т.е. основной вклад в интеграл (3) должен порождаться областью малых импульсов $q \sim m \equiv 1/L_{max}$ (накачка энергии крупномасштабными вихрями). С другой стороны, для использования стандартной квантовополевой техники РГ важно, чтобы функция $N(q)$ в (2) имела степенную асимптотику при больших k. Последнему условию удовлетворяет в частности функция

$$N(q) = D_0 q^{4-d}(q^2 + m^2)^{-\varepsilon}, \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ – независимый параметр модели.

В РГ теории критического поведения критические индексы представляются в виде рядов по параметру $\varepsilon = 4 - d$ – отклонению размерности пространства d от верхней критической размерности $d = 4$, выше которой критическое поведение тривиализуется. Важным отличием турбулентности (а точнее говоря, стохастического уравнения Навье-Стокса) является отсутствие верхней критической размерности, и параметр разложения ε в теоретико-полевом РГ-подходе имеет совершенно иной физический смысл – этот параметр никак не связан с размерностью пространства, а характеризует «степень отклонения от логарифмичности». Модель становится логарифмической при $\varepsilon = 0$, а реалистической при $\varepsilon > 2$.

В большинстве работ по РГ-теории турбулентности используется более простая чисто степенная функция накачки

$$N(q) = D_0 q^{4-d-2\varepsilon}, \tag{5}$$

соответствующая $m = 0$ в (4). Такой выбор допустим, если интересоваться лишь проблемой обоснования ИК-скейлинга и соответствующими критическими размерностями (которые при любой накачке не должны зависеть от m), а прочие объекты типа скейлинговых функций вычислять по диаграммам только в форме ε - разложений. Тогда переход к задаче $m = 0$ непротиворечив, так как коэффициенты ε-разложений диаграмм имеют пределы при $m \to 0$.

Физическое значение $\varepsilon = 2$ отвечает накачке вихрями бесконечно большого размера. При этом размерность пространства d остается свободным параметром и может изменяться независимо от ε. Общей чертой с моделями критического поведения является то, что предел $\varepsilon \to 0$ соответствует логарифмической (точно ренормируемой) теоретико-полевой модели, а ультрафиолетовые (УФ) расходимости проявляются как полюса по ε в диаграммах теории возмущений. По этой причине, мы используем тот же символ ε и для стохастического уравнения Навье-Стокса; в литературе он иногда обозначается как $\varepsilon = y/2$ [3].

Результаты РГ-подхода к модели (5) внутренне непротиворечивы и надежны при асимптотически малых ε, тогда как возможность их экстраполяции к физическому (не малому) значению $\varepsilon = 2$ далеко не очевидна. Разумеется, физическое значение $\varepsilon = 4 - d = 1$ в теории критических явлений также отнюдь не мало. Но там нет конкретных оснований ожидать появления каких-либо качественных изменений в поведении системы при увеличении ε из области малых значений $\varepsilon << 1$ к реальным конечным $\varepsilon \sim 1$, так что возможность такой экстраполяции обычно не подвергается сомнению.

Для стохастического уравнения Навье-Стокса с накачкой (5) ситуация заведомо более сложная. Новые качественные эффекты возникают с ростом ε, и они легко могут быть потеряны, если ε-разложение используется некритично или неосторожно. Один из них, возникающий при $\varepsilon > 3/2$, связан с известным явлением переноса турбулентных вихрей как целого вихрями существенно больших размеров. Это приводит к сильной зависимости корреляционных функций скорости от внешнего (интегрального) масштаба турбулентности L_{max}, исчезающей лишь в галилеево-инвариантных величинах (например, в одновременных структурных функциях). Другой ожидаемый эффект – переход (кроссовер) при некотором (пока неизвестном) значении ε от колмогоровского скейлинга (теории «K41») к так называемому аномальному скейлингу (мультискейлингу) – сингулярной зависимости галилеево-инвариантных корреляционных функций от масштаба L_{max}, характеризующейся бесконечным набором независимых показателей [4].

Подобные эффекты в РГ-подходе могут быть связаны с возникновением в соответствующих операторных разложениях так называемых опасных составных полей («составных операторов» в квантово-полевой терминологии), имеющих отрицательные критические размерности [5]. В модели (5) таковыми оказываются все операторы вида φ^N, степени поля скорости φ, при $\varepsilon \geq 3/2$. Суммирование их вкладов в операторных разложениях, выполненное в [5], позволяет выйти за рамки простого ε-разложения и дать адекватное описание вышеупомянутых эффектов переноса и связанных с ними сингулярностей при $L_{max} \to \infty$. Что касается аномального скейлинга в структурных функциях, то он, по-видимому, должен быть связан с существованием в модели (5) галилеево-инвариантных опасных операторов. Эта идея была успешно реализована в популярной модели Крейчнана, описывающей турбулентное перемешивание пассивного скалярного поля (температуры, концентрации примеси и т.п.) «синтетическим» гауссовым полем скорости с заданным коррелятором вида $\delta(t-t')/q^{d+\varepsilon}$. Первоначально аномальные индексы в ней были вычислены в порядках $O(1/d)$ [6] и $O(\varepsilon)$ [7] в рамках так называемого метода нулевых мод (который можно рассматривать как некоторую разновидность метода уравнений самосогласования). В РГ-подходе к модели Крейчнана, развитом в работе

[8], аномальные показатели были отождествлены с размерностями опасных галилеево-инвариантных операторов, а именно, степеней локальной скорости диссипации скалярных флуктуаций. Это позволило построить для них систематическое разложение по показателю ε и выполнить практические вычисления в порядках ε^2 [8] и ε^3 [9].

Однако, реализовать подобную программу для стохастической модели с накачкой (5) пока оказалось невозможным. Дело в том, что в отличие от модели Крейчнана, критические размерности всех галилеево-инвариантных составных операторов при малых ε в ней строго положительны. Если некоторые из них и становятся отрицательными при некоторых конечных значениях $\varepsilon \sim 1$, этот факт нельзя надежно установить в рамках ε-разложения, так как известны лишь один-два члена ряда по ε и лишь для немногих операторов (несколько размерностей известно точно, но все они при $\varepsilon \leq 2$ остаются положительными [10]).

Гораздо более многообещающей представляется идея построения теории возмущений по обратной размерности пространства $1/d$, высказанная в различном контексте и в разной форме в ряде работ [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Ожидается [12], что в пределе $d \to \infty$ задача упростится и, возможно, окажется точно решаемой (например, аномальный скейлинг исчезнет и теория «K41» станет справедливой), так что ее можно будет использовать как нулевое приближение систематической теории возмущений с малым параметром $1/d$ (добавим, что для реальной трехмерной турбулентности он действительно мал: $1/d = 1/3$).

Аргументы в пользу исчезновения аномального скейлинга при $d = \infty$, основанные на некотором замыкании уравнений для корреляционных функций, были приведены в работе [13]. Ранее это было обнаружено для упоминавшейся выше модели Крейчнана [11], причем в ней удается найти и аномальные показатели в порядке $O(1/d)$ [6] (хотя построить систематическое разложение по $1/d$ или хотя бы выполнить вычисление аномальных показателей в порядке $O(1/d^2)$ пока не удалось).

Физическая картина однородной изотропной развитой турбулентности состоит в следующем: энергия внешнего источника поступает в систему от крупномасштабных вихрей с характерным размером L_{max}. Затем она переносится по спектру (дробление вихрей) из-за нелинейности в уравнении (1) и в итоге начинает диссипировать на масштабах L_{min}, на которых становится существенной роль вязкости. Из соображений размерности получим

$$Re = \Big(\frac{L_{max}}{L_{min}}\Big)^{4/3}. \tag{6}$$

Область диссипации (размеры вихрей порядка L_{min}) была описана Колмогоровым [2].

Развитая турбулентность характеризуется большими числами Рейнольдса ($\sim 10^4 - 10^6$), а, следовательно (6), и наличием широкого инерционного интервала, определяемого неравенствами $L_{min} << L << L_{max}$.

Существование инерционного интервала было предсказано Колмогоровым в работе [17] в 1941 году (уточнения по поводу выдвинутых Колмогоровым гипотез см. [18]). Развитая турбулентность в инерционном интервале изучалась множеством авторов (см., например, ссылки в [18, 19]).

Теоретическое описание развитой турбулентности пока остается в значительной степени нерешенной задачей. Проводятся исследования упрощенных моделей. Одними из наиболее характерных проблем являются обоснование в рамках микроскопической модели классической феноменологической теории Колмогорова-Обухова и исследование отклонений от нее, если таковые имеются (см. [2, 4]).

Известны как экспериментальные, так и теоретические свидетельства в пользу некоторых отклонений от предсказаний теории Колмогорова-Обухова. Они проявляются в сингулярной зависимости корреляционных функций от внешнего масштаба L_{max} с некоторыми нетривиальными степенными показателями (аномальный скейлинг, аномальные показатели). В рамках многочисленных моделей эти показатели связываются со статистическими свойствами локальной диссипации или с фрактальной размерностью структур, образуемых мелкомасштабными турбулентными вихрями. Как правило, такие модели носят полуфеноменологический характер, слабо связаны с исходными уравнениями гидродинамики и включают произвольные подгоночные параметры, так что остаются серьезные сомнения в универсальности показателей, да и в самом существовании отклонений от колмогоровского скейлинга.

Как численные, так и натурные эксперименты подсказывают, что отклонения от предсказаний классической теории Колмогорова-Обухова для переносимой турбулентным потоком скалярной величины (температуры турбулентной среды, концентрации примеси в турбулентной атмосфере) проявляются еще сильнее, чем для самого поля скорости. В то же время эта задача оказывается более доступной теоретическому анализу: даже сравнительно простые модели, описывающие перемешивание «пассивной» (не оказывающей воздействия на поведение турбулентной жидкости) скалярной величины полем скорости с заданной статистикой, обнаруживают некоторые аномальные черты, свойственные реальному турбулентному переносу.

Тем самым проблема перемешивания пассивной скалярной величины, важная сама по себе (например, распространение загрязнений в турбулентной атмосфере или океане), может рассматриваться и как отправная точка при описании аномального скейлинга для развитой турбулентности в целом.

0.2. Метод ренормализационной группы

В настоящее время теория критических явлений достигла значительных успехов благодаря использованию идей ренормализационной группы (РГ). РГ-подход не только подтвердил феноменологические гипотезы подобия и универсальности [20], но и предоставил возможность вычисления различных величин, характеризующих поведение систем в критической области. Основополагающими для применения РГ в задачах статистической физики явились работы Вильсона [21, 22], хотя в квантовой теории поля аналогичная техника была известна существенно раньше: впервые существование группы ренормировок в квантовой теории поля было отмечено в работе [23], затем в [24] были использованы функциональные уравнения типа РГ для анализа ультрафиолетовых (УФ) асимптотик в квантовой электродинамике. В работах [25, 26, 27, 28] была установлена связь между результатами [23] и [24], впервые получены полные дифференциальные уравнения РГ и указан рецепт их практического использования в комбинации с расчетом РГ-функций (коэффициентов уравнения РГ) по теории возмущений. Впоследствии, в [29] и независимо в [30, 31] был предложен еще один вариант уравнений РГ, сформулированных в виде одного уравнения в частных производных для функции многих переменных. Дифференциальные уравнения [25] играют роль характеристической системы для уравнения [29, 30, 31]. Эти уравнения являются основой стандартной квантово-полевой техники РГ, в настоящее время, вслед за [32, 33], они используется и в статистической физике в большинстве работ, относящихся к критической теории.

Позднее был развит РГ подход к описанию критических динамических явлений: сперва в духе идеологии вильсоновских рекурсионных соотношений [34], а затем и в полевом MSR (MSR = Martin-Siggia-Rose) формализме удвоенного числа полей [35, 36, 37] было описано скейлинговое поведение в стохастических уравнениях Ланжевена. Эти методы позволили исследовать также другие многочисленные стохастические процессы, такие как разнообразные модели случайных блужданий (смотри, например, [38, 39]), стохастическую теорию развитой турбулентности [40, 41, 18](модели которой мы исследуем) и т.д..

Другим важным достижением Вильсона является предложенное им $4-\epsilon$–разложение [42, 43, 44], позволившее теоретико-возмущенческое вычисление РГ-функций. В основу данного разложения легла развитая также в квантовой теории поля идея размерной регуляризации [45, 46]. Кратко напомним схему построения $4-\epsilon$ разложения. Для теории с параметром порядка, описываемым полем ϕ в стандартном гамильтониане Гинзбурга-Ландау, - разложенном в ряд по степеням ϕ и градиентам поля эффективном гамильтониане H, ограничимся инфракрасно (ИК) существенными для критического поведения членами [47] и получим теорию:

$$S = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\tau\phi^2 + g\phi^4 \tag{7}$$

(интегрирование по координате полей $\mathbf{x}$ и суммирования по повторяющимся индексам подразумеваются) в трехмерном пространстве. Использование квантово-полевой РГ естественно сопровождается применением языка квантовой теории поля: S – действие теории, оно же, как принято в статистической физике – гамильтониан типа Гинзбурга-Ландау (с точностью до $1/(kT)$: $S = H/(kT)$), или действие MSR - типа (для стохастических уравнений, см. п. 0.4.), в функциональных интегралах усреднение производится с весом $\exp(-S)$. Удобным оказывается использование терминов «функция Грина» вместо «корреляционная функция», τ – масса или массивный параметр, g – константа взаимодействия или «заряд», «импульс»– вместо «волновое число».

Неучтенные в (7) члены гамильтониана Гинзбурга-Ландау могут быть рассмотрены в качестве составных операторов, которые в соответствие со своей канонической размерностью являются ИК несущественными в $4-\epsilon$-разложении при малых ϵ , определяя лишь поправки к ИК поведению теории (7) [32, 33, 48]. Реальным параметром разложения в теории возмущений при вычислении РГ-функций выступает значение заряда g в окрестности фиксированной точки уравнения РГ, малость параметра разложения однозначно связана с логарифмичностью теории, т.е. с безразмерностью константы взаимодействия. Для того чтобы обезразмерить константу g, имеющую в реальном трехмерном пространстве размерность импульса, вводится «расширенная» теория, описываемая тем же действием (7), но уже при произвольной размерности пространства $d \equiv 2\mu$. Каноническая размерность поля ϕ определяется кинетическим членом действия и равна: $d_\phi = \mu - 1$ (размерность импульса считаем равной единице, координаты - минус единице). Поэтому размерность заряда $d_g = 4-2\mu$, теория логарифмична при $2\mu = 4$. В четырехмерном пространстве теория (7) ренормируема, для построения $4-\epsilon$ -разложения рассматриваем (7) в пространстве размерности $\mu = 2-\epsilon$ с малым положительным ϵ. Ренормировав эту теорию так, чтобы зависящие от ϵ функции Грина допускали предел $\epsilon \to 0$, получим интересующие нас РГ-функции в виде рядов по ϵ.

Помимо $4-\epsilon$ разложения теории (7) известны другие варианты ϵ - разложений: $6-\epsilon$ - разложение для теории ϕ^3, $2+\epsilon$ - для нелинейной σ-модели [33] и ее обобщений. Еще одним регулярным методом расчета РГ-функций является $1/n$ разложение по обратному числу компонент параметра порядка (смотри, например, [49, 50, 51, 52, 53]), для которого применяется другой способ построения логарифмической теории (в нелинейной σ-модели) при любой размерности пространства $2 < d < 4$.

Первоначально исследуемые РГ методом теории, как статические так и динамические, отличались локальностью соответствующих действий, что является обычным для квантовой теории поля. Для таких теорий и была сперва сформулирована теорема Боголюбова-Парасюка об УФ ренормируемости [54], служащая основой для применения РГ - метода. Однако кроме размерной регуляризации в квантовой теории поля была разработана очень похожая аналитическая регуляризация (смотри, например, [55]). Ее использование позволило существенно упростить применение РГ метода для расчетов РГ-функций в $1/n$- разложении [56, 57, 58]. При этом пришлось исследовать ренормировку действия с нелокальными (неаналитическими по импульсам) членами. Однако введение в действие таких членов позволяет существенно расширить возможности применения РГ-подхода. Вслед за успехом $4-\epsilon$-разложения это привело к другим вариантам построения «расширенных» теорий: [59, 60], а также к рассмотрению теорий, присутствие нелокальных членов в которых обусловлено физическими причинами.

В настоящее время широко используются различные РГ - схемы для все более точного вычисления критических индексов. При этом, вычисляя как можно больше порядков ε или любого другого разложения и используя вычисленную Липатовым асимптотику для β и γ функций [61] для боррелевского пересуммирования, получают значения критических индексов при больших (порядка единицы) параметрах разложений, с большой степенью точности совпадающие с экспериментальными.

Теория ренормализационной группы в турбулентности развивалась более длительное время и, возможно, по этой причине менее успешно. Колмогоровский скейлинг в теории турбулентности был открыт в начале 40х годов 20 века, а первые серьезные исследования с использованием метода РГ появились только в конце 70х, когда «золотой век» РГ теории критического поведения, в сущности, закончился.

0.3. Теория возмущений

Развитие мощного аппарата квантовой теории поля первоначально было обусловлено потребностями физики элементарных частиц. Вскоре было замечено, что сходные подходы могут с успехом применяться и при описании других физических систем, обычно с большим или бесконечным числом степеней свободы. Таковые, в частности, относятся к области исследования статистической физики. Например, квантово-полевые методы оказались наиболее адекватными для описания критического поведения (фазовых переходов второго рода), развитой турбулентности, разнообразных моделей случайных блужданий и скейлинговых явлений в полимерах.

Квантово-полевые методы в большинстве своем основаны на теории возмущений по различным параметрам, например, по постоянной тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$ в квантовой электродинамике. Вычисленные к настоящему времени первые 3–4 порядка теории возмущений по α определяют физические наблюдаемые со все улучшающейся точностью. Однако вопрос о сходимости получаемых рядов представляется, по крайней мере, интересным с теоретической точки зрения. Установлено, что в большинстве случаев ряды квантово-полевой теории возмущений носят асимптотический характер. Асимптотические ряды — вообще нередкое явление в теоретической физике, отсутствие сходимости ряда не мешает его практическому использованию при малом параметре разложения, с чем мы и сталкиваемся в квантовой электродинамике. Однако в статистической физике реальный параметр разложения часто оказывается порядка единицы (в качестве примера здесь можно вспомнить метод ренормализационной группы и ε-разложение [62, 63]). В этой ситуации последующие члены разложений оказываются порядка или даже больше предыдущих, и необходима общая информация о поведении рассматриваемых рядов: сходятся они или расходятся, каков радиус сходимости.

Такая информация может быть получена путем исследования *асимптотики высоких порядков* (АВП). Пусть некоторая величина $f(g)$ задана степенным рядом $f(g) = \sum_N f^{(N)} g^N$, асимптотика коэффициентов $f^{(N)}$ при $N \to \infty$ и называется асимптотикой высоких порядков для функции f. Например, рассмотрим АВП сходящегося ряда с конечным радиусом сходимости для функции $f_\alpha(g) = 1/(g - g_0)^\alpha$. Разложением в ряд Тейлора нетрудно найти

$$f_\alpha(g) = \sum_N f_\alpha^{(N)} g^N, \qquad f_\alpha^{(N)} = \frac{(-1)^\alpha}{(g_0)^{N+\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha + N)}{\Gamma(\alpha) N!}. \tag{8}$$

АВП функции f_α определяется пределом

$$\lim_{N \to \infty} f_\alpha^{(N)} \sim \frac{N^{\alpha-1}}{g_0^N}. \tag{9}$$

Данный пример иллюстрирует, что АВП может дать информацию о положении и характере особенности исследуемых функций: и радиус сходимости (определяется g_0) и тип особенности (определяется числом α) однозначно задаются ее параметрами.

Для сходящихся степенных рядов знание АВП существенно дополняет информацию, которую мы можем получить из обычной теории возмущений. Пусть, например, для некоторой функции $f(g)$ нам известен некоторый отрезок ряда теории возмущений $\sum_{i=0}^K f^{(i)} g^i$, а также положение и характер особенности на границе круга сходимости (например, $1/(g-g_0)^\alpha$). Тогда можно утверждать, что представление функции в виде

$$f(g) = \frac{1}{(g - g_0)^\alpha} \sum_i \bar{f}^{(i)} g^i,$$

где коэффициенты $\bar{f}^{(i)}$ легко определяются по известным $f^{(i)}$, приводят к большему радиусу сходимости нового ряда $\sum_i \bar{f}^{(i)} g^i$ и позволяют точнее восстановить величину $f(g)$. Оказывается, и в случае рядов асимптотических АВП может дать рецепт получения хорошего численного ответа.

Для определения АВП квантово-полевых разложений используется *инстантонный анализ* (см. [61, 63]), который сводится к исследованию асимптотики функционального интеграла методом перевала. Для асимптотических рядов развиты разнообразные схемы пересуммирования, в большинстве своем основанные на преобразовании Бореля.

0.4. MSR формализм

Одним из возможных способов представления стохастической задачи в квантовополевой формулировке является введение MSR-переменных (далее, MSR-формализм, MSR = Martin-Siggia-Rose). Кратко опишем этот переход. В общем виде стандартная задача стохастической динамики формулируется следующим образом [62]

$$\partial_t \varphi(x) = U(x;\varphi) + \eta(x), \qquad \langle \widehat{\eta}(x)\widehat{\eta}(x')\rangle = D(x,x'), \tag{10}$$

где $\varphi(x)$ – искомое поле, $U(x;\varphi)$ – заданный t-локальный функционал, не содержащий производных φ по времени, $\widehat{\eta}(x)$ – случайная внешняя сила, $\eta(x)$ в уравнении на φ – любая ее реализация, для $\widehat{\eta}(x)$ предполагается гауссово распределение с нулевым средним $\langle \widehat{\eta}(x)\rangle = 0$ и коррелятором D, $x = t, \mathbf{x}$.

В общем случае функционал U в правой части (10) содержит вклад неслучайной силы f, линейную по φ «свободную часть» $L\varphi$ с некоторой операцией L и вклад нелинейностей $n(\varphi)$:

$$U(\varphi) = L\varphi + n(\varphi) + f. \tag{11}$$

Решение задачи (10) может быть записано в интегральной форме

$$\varphi = \Delta_{12}[f + \eta + n(\varphi)], \quad \Delta_{12} \equiv (\partial_t - L)^{-1}, \tag{12}$$

где $\Delta_{12} \equiv \Delta_{12}(x, x')$ - запаздывающая функция Грина линейной операции $(\partial_t - L)$.

Пусть $\bar{\varphi} \equiv \bar{\varphi}(x, \eta)$ – решение уравнения (10). Производящий функционал корреляционных функций поля $\widehat{\varphi}$ обозначим $G(a)$, где a - источник. При фиксированном η $G(a; \eta) = \exp(a\widehat{\varphi})$. После усреднения по η получим

$$G(a) = \frac{\int D\eta \exp[-\frac{1}{2}\eta D^{-1}\eta + a\bar{\varphi}]}{\int D\eta \exp[-\frac{1}{2}\eta D^{-1}\eta]} \tag{13}$$

Необходимые интегрирования по аргументам полей подразумеваются.

Рассмотрим следующее равенство

$$\exp(a\bar{\varphi}) = \int D\varphi \delta(\varphi - \bar{\varphi}) \exp(a\varphi) \tag{14}$$

с функциональной δ-функцией $\delta(\varphi - \bar{\varphi}) \equiv \Pi_x[\delta(\varphi(x) - \bar{\varphi}(x))]$. Из эквивалентности равенств

$$\varphi = \bar{\varphi} \Leftrightarrow Q(\varphi, \eta) \equiv -\partial_t\varphi + U(\varphi) + \eta = 0$$

следует

$$\delta(\varphi - \bar{\varphi}) = \det M \cdot \delta[Q(\varphi, \eta)], \quad M = M(x, x') \equiv \delta Q(x)/\delta\varphi(x'). \tag{15}$$

$\det M$ понимается как определитель линейной интегральной операции с ядром $M(x, x')$. Представим δ-функцию в правой части (15) функциональным интегралом по вспомогательному полю φ'

$$\delta(Q(\varphi, \eta)) \propto \int D\varphi' \exp[\varphi' Q(\varphi, \eta)], \tag{16}$$

нормировочные множители считаются включенными в $D\varphi'$. Воспользовавшись в (13) соотношениями (14, 15, 16), получим с точностью до номировки

$$G(a) = \int D\eta D\varphi D\varphi' \det M \exp[-\frac{1}{2}\eta D^{-1}\eta + a\varphi + \varphi'(-\partial_t\varphi + U(\varphi) + \eta)]$$

и, взяв гауссов интеграл по η,

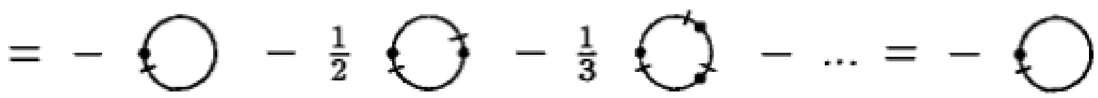
$$G(a) = \int\int D\varphi D\varphi' \det M \exp[\frac{1}{2}\varphi' D\varphi' + \varphi'(-\partial_t\varphi + U(\varphi) + a\varphi)]. \qquad (17)$$

Рассмотрим $\det M = \det[\delta Q/\delta\varphi]$. Из (11) и Δ_{12} в (12) имеем

$$M = M_0 + M_1, \quad M_0 \equiv -\partial_t + L = -\Delta_{12}^{-1}, \quad M_1 \equiv \delta n(\varphi)/\delta\varphi. \qquad (18)$$

Отсюда $\det M = \det M_0 \det[1 - \Delta_{12}M_1]$. Первый множитель - не зависящая от полей константа и поэтому несущественен. Для второго получим

$$\ln\det[1 - \Delta_{12}M_1] = -tr[\Delta_{12}M_1 + \Delta_{12}M_1\Delta_{12}M_1/2 + \ldots] = \qquad (19)$$



поскольку все многократные замкнутые циклы с запаздывающей линией Δ_{12} (пропорциональной $\theta(t-t')$) дают нулевые вклады. Однократному циклу в (19) соответствует выражение $\int\int dx dx' \Delta_{12}(x,x')M_1(x',x)$ с ядром $M_1(x',x) = \delta(t'-t)\tilde{M}_1(x',x)$; $\delta(t'-t)$ появляется ввиду t-локальности функционала U. Отсюда следует, что в однократный цикл входит функционал $\Delta_{12}(x,x')$ с совпадающими временами $t = t'$. Это неопределенная величина, поскольку Δ_{12} содержит разрывную функцию $\theta(t-t')$. Принимается следующее соглашение [62, 40]

$$\theta(t-t')|_{t=t'} = 0.$$

Тогда определитель $\det M$ в интеграле (17) становится несущественной константой, которую можно отбросить.

Таким образом, любая стохастическая задача (10) полностью эквивалентна квантовополевой модели с удвоенным числом полей φ, φ' и функционалом действия

$$S(\varphi,\varphi') = \frac{1}{2}\varphi' D\varphi' + \varphi'[-\partial_t\varphi + U(\varphi)], \qquad (20)$$

необходимые интегрирования по x и суммирования по индексам подразумеваются.

0.5. Инстантонный анализ

Базовой теорией, с которой связан несомненный успех квантово-полевых методов в теории критического поведения, является модель φ^4, корреляционные функции которой выражаются через *функциональные интегралы* вида

$$\int D\varphi\; \varphi(\mathbf{x_1})...\varphi(\mathbf{x_k})e^{-S(\varphi)},$$
$$S(\varphi) \equiv \int d\mathbf{x}\left[\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}_i}\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}_i} + \frac{\tau}{2}\varphi^2(\mathbf{x}) + \frac{g}{4!}(\varphi^2(\mathbf{x}))^2\right]. \quad (21)$$

Данная теория описывает разнообразные фазовые переходы второго рода: критическую точку в системе жидкость-пар, точку Кюри в магнетиках, точку расслаивания и т.д.

Функциональный интеграл по полю $\varphi(\mathbf{x})$ (21) вычисляется в форме *диаграммных разложений*. При этом член, пропорциональный g в действии S, рассматривается как малое возмущение, по которому строится ряд. Все образовавшиеся интегралы фактически сводятся к гауссовым (т.к. S при $g = 0$ — квадратичный функционал поля φ) и могут быть вычислены, однако упомянутые вычисления весьма трудоемки; их сложность лавинообразно растет с ростом порядка теории возмущений, так что к настоящему моменту, несмотря на то, что развит мощный вычислительный формализм и используются современные компьютеры, найдено лишь 5–6 первых членов обсуждаемых разложений в теории φ^4. Для получения достаточно точных числовых результатов в данном случае оказывается необходимой информация о АВП рядов теории возмущений, получаемая методом инстантонного анализа.

Для выделения N-того члена ряда квантово-полевой теории возмущений в работе [61] было предложено пользоваться формулой Коши

$$G(u) = \sum_{N=0}^{\infty} G^{[N]} u^N, \qquad G^{[N]} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G(u)}{u^{N+1}} du, \tag{22}$$

Интегрирование ведется по замкнутому контуру в комплексной плоскости, охватывающему ноль.

Вычисление интегралов в $G^{[N]}$ осуществляется методом стационарной фазы. Основной вклад в $G^{[N]}$ при $N \to \infty$ дает область интегрирования в окрестности инстантона – значений переменных интегрирования, реализующих экстремум функционала действия, т.е. решений уравнений стационарности.

0.6. Описание модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости

Хотя теоретическое описание турбулентности, основанное на стохастическом уравнении Навье-Стокса (1) остается открытым вопросом, значительный прогресс был достигнут при изучении упрощенных моделей, которые дают важную информацию о реальных системах. Важную роль в этих исследованиях сыграли модели, описывающие перемешивание пассивного скалярного поля [64]. Одним из примеров таких моделей является модель переноса пассивной скалярной величины случайным гауссово-распределенным полем скорости, так называемая модель Крейчнана [65]. Аномальный скейлинг для этой модели впервые был показан на основе микроскопической модели [66], а соответствующие аномальные индексы были рассчитаны в [67, 68, 69].

Большой интерес также представляет изучение простых моделей пассивного переноса не только скалярных, но и векторных (например, слабых магнитных полей), поскольку такие модели описывают множество особенностей аномального поведения реального турбулентного переноса некоторых величин, наблюдаемых в эксперименте.

При рассмотрении турбулентного перемешивания пассивной скалярной примеси рассматривается пара полей φ и θ, где φ – обычное поперечное векторное поле скорости, удовлетворяющее уравнению (1), а θ – добавочное скалярное поле пассивной примеси, удовлетворяющее уравнению

$$\nabla_t \theta = \nu' \partial^2 \theta, \qquad \nu' = u\nu,$$

где ∇_t – ковариантная производная из (1). В простейшем случае собственный шум в уравнение для θ не вводится. Примесь называют «пассивной», поскольку введение добавочного поля θ никак не влияет на стохастическую задачу (1) для поля скорости φ.

Поле θ может иметь различный физический смысл. Например, это может быть концентрация примесных частиц в турбулентной атмосфере, или поле температуры в задачах теплопереноса и т.п.. В первом случае параметр ν' – молекулярный коэффициент диффузии, во втором – коэффициент температуропроводности.

В работах [64, 70, 65, 66] было показано, что физика уравнения переноса скалярной примеси также является интересной, если поле скорости из уравнения Навье-Стокса (1) заменить стохастическим полем со степенным коррелятором по пространственной (импульсной) переменной и δ-образной по временной. В настоящее время таким образом поставленная задача широко изучается (например, [71, 72]).

Итак, распространение пассивной скалярной примеси в d - мерной вязкой сжимаемой жидкости происходит посредством диффузии и турбулентного перемешивания случайным полем скорости. Описание задачи в рамках модели Обухова-Крейчнана (см. [64, 65]) основывается на стохастическом уравнении

$$\partial_t \varphi(\mathbf{x},t) + g\nabla(\mathbf{V}(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)) - \nu\Delta\varphi(\mathbf{x},t) = \xi(\mathbf{x},t), \tag{23}$$

здесь $\varphi(\mathbf{x},t)$ – скалярное поле, описывающее примесь (например, поле плотности примеси), $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$ – случайное векторное поле скорости, $\xi(\mathbf{x},t)$ – искусственно вводимая гауссово-распределенная с нулевым средним и произвольным коррелятором D_ξ случайная сила (шум, например, если φ – соответствует флуктуациям температуры, то ξ представляет мощность нагревателей), ν – коэффициент диффузии, g – константа связи. Стандартная теория возмущений приводит к рядам по константе взаимодействия g, свойствами которых мы и интересуемся.

В обычной модели Обухова-Крейчнана коррелятор скорости выбирается следующим образом [65]

$$\langle \mathbf{V}_i(\mathbf{x},t)\mathbf{V}_j(\mathbf{x}',t')\rangle = 2\delta(t-t')D_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Были проведены исследования о влиянии случайного «замороженного» поля примеси на классические процессы переноса. Эти исследования проводились с помощью модели случайных блужданий в стационарном случайном поле скорости. Эта модель является обобщением обычной диффузии на случай системы со случайной «замороженной» примесью и может описывать широкий круг явлений, таких как классическая электропроводность в присутствии распределенной случайным образом заряженной примеси [73], диффузия в жидкости со стационарным случайным полем скорости [74, 75], критическая динамика в системе с «замороженными» флуктуациями [76].

Асимптотические свойства диффузии в среде с корреляциями случайного поля на коротких расстояниях были изучены с помощью метода РГ как в случае изотропного поля скорости [77, 78], так и в случае анизотропного беспорядка (т.е. с независимыми безвихревой и бездивергентной частями случайного поля скорости) [74, 75, 76, 79]. Для того чтобы различать описанные модели с их «дальнодействующими» аналогами, описанными ниже, мы назовём их близкодействующими, несмотря на то, что в действительности ограничения, наложенные на поле скорости, приводят к дальнодействующим пространственным корреляциям. Было показано, что выше верхней критической размерности $d > d_c = 2$ в пределе больших времен имеет место нормальная диффузия, а при $d \leq 2$ появляются следующие признаки появления аномальной диффузии: чисто бездивергентная составляющая поля скорости приводит к супердиффузному поведению; в случае, когда обе компоненты поля скорости ненулевые, диффузия остается нормальной при $d = 2$, а при $d < 2$ появляется субдиффузная аномалия, которая не зависит от относительной величины компонент; исчезновение РГ β-функции [79, 80, 81, 82] в случае чисто безвихревого потока приводит к неуниверсальному субдиффузному поведению при $d = 2$, а при $d < 2$ к режиму сильного беспорядка, который не может быть исследован с помощью теории возмущений ренормгруппового подхода.

Обобщение этой модели на случай со степенным коррелятором скорости (модель с дальнодействием) в случае изотропного потока было произведено в однопетлевом приближении, как специальный случай истинных случайных блужданий без самопересечений с дальнодействием [83] и в общем виде с точными результатами в виде некоторой теории возмущений [80, 81, 84]. Эти исследования раскрыли следующие свойства диффузного поведения в модели с дальнодействием. Диффузия остается нормальной при $d > d_c = 2 + 2\alpha$, где α - степень, характеризующая спад корреляций в импульсном представлении – $1/q^{2\alpha}$. При $d \leq d_c$ могут проявляться различные признаки аномальной диффузии. Во-первых, в случае чисто поперечного поля скорости аномальная размерность времени связана с β-

функцией таким образом, что уравнение на фиксированную точку определяет эту аномальную размерность точно во всех порядках теории возмущений [84]. Следует отметить, что эти результаты верны и для случая с короткодействием. Эта аномальная размерность соответствует супердиффузному поведению. Во-вторых, в общем случае (т.е. в присутствии как продольной, так и поперечной составляющих поля скорости) асимптотическое поведение этой модели контролируется фиксированной линией, а не фиксированной точкой уравнения РГ. Таким образом, аномальность диффузии неуниверсальна и зависит от относительной величины поперечной и продольной составляющих поля скорости: продольная стремится усилить диффузию, а поперечная ослабить. В-третьих, в чисто безвихревом потоке ситуация совпадает со случаем короткодействия: β-функция исчезает, это приводит к неуниверсальному субдиффузному поведению при $d = 2 + 2\alpha$ и непертурбативному режиму при $d < 2 + 2\alpha$.

В данной работе мы рассматриваем случай анизотропного случайного поля скорости с дальнодействием с корреляциями, спадающими по степенному закону в импульсном пространстве $1/q^{2\alpha}$. Формально случай $\alpha = 0$ соответствует ситуации с короткодействием.

В модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости скорость выбирается гауссово-распределенной с нулевым средним и коррелятором, не зависящим от времени и имеющим вид:

$$\langle \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)\mathbf{V}_j(\mathbf{x}', t')\rangle = D_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

В настоящей диссертации при записи поля скорости мы будем опускать время: $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \to \mathbf{V}(\mathbf{x})$.

Данная модель описывает диффузию в случайных средах [85, 39, 84], и имеет непосредственное отношение к проблеме развитой турбулентности (например, [86]). Также, эта модель описывает проблему случайных блужданий в случайных средах [87, 88, 89, 90, 91, 92].

В импульсном представлении коррелятор имеет степенной вид ([39, 84])

$$D_{ij}(\mathbf{q}) = \lambda_T \Big(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \Big) \frac{1}{q^{2\alpha}} + \lambda_L \frac{q_i q_j}{q^2} \frac{1}{q^{2\alpha}}, \tag{24}$$

а в координатном, соответственно,

$$D_{ij}(\mathbf{z}) \equiv a_1 \frac{\delta_{ij}}{\mathbf{z}^{2\beta}} + a_2 \frac{\mathbf{z}_i \mathbf{z}_j}{\mathbf{z}^{2\beta+2}}, \qquad \beta = d/2 - \alpha = 1 - \varepsilon/2, \tag{25}$$

где (см. Приложение 1)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Gamma(\beta)}{2^{2\alpha+1}\pi^{d/2}\Gamma(\alpha+1)} (\lambda_T(2\alpha - 1) + \lambda_L), \\ a_2 &= (\lambda_T - \lambda_L) \frac{\Gamma(\beta+1)}{2^{2\alpha}\pi^{d/2}\Gamma(\alpha+1)}, \end{aligned} \tag{26}$$

λ_T и λ_L – поперечная и продольная константа связи импульсного представления. Параметр λ_L определяет сжимаемость жидкости.

0.7. Структура диссертации

Целью данной работы является исследование асимптотик высоких порядков модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости.

В первой главе диссертации на основе простой динамической модели проведен анализ, позволяющий выбрать переменные наиболее удобные для расчетов методом инстантонного анализа в задачах динамики. Была исследована асимптотика высоких порядков «нульмерной» стохастической динамической модели. Основная часть главы посвящена вычислениям асимптотики высоких порядков функции отклика данной модели в переменных MSR-формализма. В последнем параграфе главы для сравнения на основе статьи [93] подобный анализ проведен в переменных Лагранжа. Данные расчеты показали, что при возможности введения в динамических задачах расчеты целесообразно выполнять в лагранжевом формализме.

В последующих главах проводится исследование асимптотик высоких порядков модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости в переменных Лагранжа.

Вычисление асимптотики высоких порядков квантово-полевых рядов впервые предложено в [61] и основывается на методе стационарной фазы в функциональном интеграле. При этом должен быть найден инстантон – решение уравнений стационарности. Однако, в настоящее время широко распространено утверждение, что для грубой оценки асимптотики высоких порядков достаточно знать лишь количество диаграмм в данном порядке теории возмущений (см.например, [85]).

В динамических полевых моделях, описывающих турбулентные явления, выяснение типа сходимости ряда сопряжено со значительными сложностями. Эти задачи не имеют статического предела, для которых проблема была решена [94],[95]. Как показано в [96],[72] в случае, когда удается ввести переменные Лагранжа, ситуация несколько упрощается. К таким случаям относится модель турбулентной диффузии Крейчнана. Асимптотика высоких порядков разложений здесь была вычислена [72], и оказалось, что ряды имеют конечный радиус сходимости. Спецификой теории возмущений этой модели является то, что из-за дельтаобразного по времени коррелятора скорости многие диаграммы теории возмущений вымирают, так что количество диаграмм растет степенным образом и действительно определяет в каком-то смысле скорость сходимости ряда.

Во второй главе мы исследуем асимптотику высоких порядков для модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости, описывающей диффузию жидкости в стационарном случайном поле [39, 84, 85]. Коррелятор поля скорости здесь, в отличие от стандартной модели Крейчнана, не зависит от времени (а по координате ведет себя степенным образом), так что число диаграмм теории возмущений растет факториально.

Условие стационарности в данной модели – нелинейная система интегро-дифференциальных уравнений. Мы покажем, как строить семейство ее решений – семейство инстантонов, и предъявим в аналитическом виде один из них. Проведенный с помощью этого решения анализ указывает, что тип сходимости рядов теории возмущений определяется разнообразными факторами: исследуемым объектом, выбранным представлением (координатным или импульсным), видом коррелятора скорости, а вовсе не одним числом диаграмм. Мы обнаружили случаи, когда исследуемые ряды имеют конечный и даже бесконечный радиус сходимости.

Вообще говоря, для исследуемых уравнений стационарности априори неизвестной является не только единственность, но и сам факт существования решения. Нам удалось найти семейство решений данных уравнений с наиболее естественной для данной задачи симметрией, причем каждому представителю семейства соответствуют свои граничные условия. На самом деле, мы не можем ничего утверждать о возможности существования инстантонов с иной симметрией и об их вкладах в асимптотики высоких порядков. К сожалению, это замечание относится и к инстантонному анализу асимптотик высоких порядков разложений и для всех прочих моделей, включая «классическую» модель φ^4.

Случай, когда коррелятор поля скорости не зависит не только от времени, но и от координаты, оказывается частным, точно решаемым случаем рассматриваемой задачи. Мы будем использовать его, чтобы проконтролировать правильность расчетов.

В третьей главе мы продолжаем исследование асимптотик высоких порядков модели Обухова-Крейчнана и переходим к вычислению асимптотик констант ренормировки этой модели. На основе найденного во второй главе инстантона, мы исследуем свойства рядов теории возмущений для констант ренормировки данной модели и показываем, что, несмотря на факториальный рост числа диаграмм, с ростом порядка ряда теории возмущений, их асимптотика высоких порядков растет существенно медленнее, а ряды оказываются сходящимися. Мы также приводим радиус сходимости упомянутых рядов.

В заключительной главе диссертации мы исследуем асимптотику сильной связи модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости. Интересным случаем данной модели является ситуация, когда коррелятор поля скорости выбран продольным (т.е. поле скорости потенциально). Как известно из [97], при этом β - функция уравнения РГ, оказывается, имеет тривиальный вид, и соответствующая ей инфракрасно (ИК) устойчивая фиксированная точка метода РГ отсутствует. В ИК асимптотике инвариантный заряд стремится к бесконечности, что требует рассмотрения предела сильной связи. На основе найденного инстантона нам удалось провести соответствующий анализ.

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [98, 99, 100, 101].

ГЛАВА 1
ВЫБОР ПОЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как показано в п. 0.3., в настоящее время в задачах статистической физики, решение которых требует применения квантово-полевых методов, результаты обычно представлены в виде некоторой теории возмущений (например, вычисление критических индексов в теории критического поведения в форме рядов по ε). Обнаружено, что для получения надежных численных результатов вычисляемых начальных отрезков рядов недостаточно и для обработки разложений необходимо знание поведения старших членов ряда. В канонической статической теории φ^4 задача была решена в [61] на основе инстантонного анализа, что дало информацию об асимптотике старших порядков разложений статических критических индексов этой теории. Соответствующие результаты, касающиеся динамического индекса даже в канонической теории φ^4 в настоящее время неизвестны.

Другой областью применения полевых методов являются динамические задачи, основанные на стохастических уравнениях [62]. Кроме динамики критических флуктуаций к ним относятся разнообразные схемы случайных блужданий и теории полимерных цепей, модели перемешивания пассивной примеси, теория развитой турбулентности.

Важным вопросом является выбор полевых переменных, в которых проводится исследование моделей. В 1973 году в статье [35] был предложен метод представления стохастической задачи в квантово-полевой формулировке кратко описанный в п.0.4..

В статьях [102, 96, 71] было показано, что для модели Крейчнана в MSR-переменных инстантон не существует и предложено рассматривать модель в лагранжевых переменных.

В работах [94, 95] был разработан инстантонный анализ в MSR-переменных для моделей A и B-H [62] соответственно. Спецификой этих динамических моделей является существование гибсоновского статического предела, что позволило решить задачу, по крайней мере, формально, поскольку инстантон, полученный в статической задаче, совпадает с динамическим. Последнее значительно упрощает расчёты.

В [98] мы привели пример простой стохастической динамической модели без статического предела. Было показано, что в ней также не существует инстантон в MSR-переменных. Вследствие отсутствия статического предела модели, мы были вынуждены исследовать асимптотики высоких порядков в измененном классе функций (подробно в п. 1.1.). В лагранжевых переменных эта задача рассмотрена в [93, 103].

Для выявления переменных, наиболее подходящих для вычисления асимптотик высоких порядков квантово-полевых разложений, в этой главе будет рассмотрена «нульмерная» стохастическая динамическая модель. Асимптотики высоких порядков этой модели будут исследованы в двух различных формализмах – MSR-переменные и переменные Лагранжа.

Итак, исследуем асимптотику высоких порядков «нульмерной» стохастической динамической модели. Описание модели приводится в разделе 1.1., на ее примере в 1.1.1. дается точное выражение для функции отклика и доказывается факт отсутствия интегрируемого инстантонного решения в стандартных MSR переменных. Далее приведен инстантонный анализ в классе кусочно-непрерывных функций, получены главные вклады в асимптотику высоких порядков теории возмущений. В заключительной части раздела рассмотрен флуктуационный интеграл данной модели и обсуждена применимость предлагаемого подхода для более сложных стохастических динамических моделей.

В разделе 1.2. «нульмерная» стохастическая динамическая модель исследуется в переменных Лагранжа.

1.1. Инстантонный анализ в простой динамической модели: ломаные экстремали

В настоящем разделе мы рассмотрим простую стохастическую динамическую модель, используя MSR-переменные. В подобных моделях обычно отсутствует решение уравнений стационарности метода стационарной фазы, по крайней мере, в естественном функциональном классе (см. [104], где был использован метод, предложенный в [105]).

Отсутствие решения уравнений стационарности заставляет нас искать другие функциональные переменные (например, лагранжевы, использованные, например, для модели Крейчнана в [96, 103, 72]), или новый функциональный класс - как было сделано для описания динамики равновесных флуктуаций [104, 94, 95]. Для последнего семейства динамических моделей асимптотики высоких порядков определяются экстремалями — гладкими функциями, не убывающими при больших временах, но стремящимися к конечному пределу — статическому инстантону. Важно отметить, что в [94] требование стремления к статике при $t \to +\infty$ является ключевым. Таким образом, предложенная методика не является универсальной и ограничивается классом нелинейных динамических моделей с предельным ненулевым статическим пределом.

Возникает вопрос: как определить асимптотики высоких порядков разложений в моделях, не имеющих статического предела, и в которых введение лагранжевых переменных затруднено существенной нелинейностью исходных стохастических уравнений? Для ответа на этот вопрос мы рассмотрим в исходных MSR переменных [35] простейшую («нульмерную») стохастическую динамическую модель [93], заданную уравнением

$$\partial_t \varphi(t) + gV(t)\varphi(t) + \nu\varphi(t) = \xi(t), \tag{1.1}$$

где $\varphi(t)$ — основное поле, $\xi(t)$ — случайная сила, $V(t)$ — случайное поле

— аналог поля скорости, g — константа связи, ν — аналог вязкости. В отличие от более реалистичных моделей, поля $\varphi(t)$, $\xi(t)$, $V(t)$ в модели (1.1) не зависят от координат. Для случайных полей ξ и V подразумеваются гауссовы распределения с δ-образными по времени корреляторами D_ξ, D_V соответственно, уравнение (1.1) дополнено заданным нулевым начальным условием, $\varphi|_{-\infty} = 0$. Мы покажем, что в модели (1.1) инстантонный анализ приводит к ломаным экстремалям. Точки изломов зависят от исследуемых функций Грина модели.

Известно, что инстантонный анализ достаточно сложен с технической точки зрения. Он требует поиска решений нелинейных дифференциальных уравнений, для которых отсутствует даже теорема существования и единственности глобального решения. Применимость метода стацфазы — т.е. результаты инстантонного анализа — всегда проблематичны: возможно существование других экстремалей или неаналитичностей исследуемых функций, дающих более существенный вклад в асимптотики высоких порядков разложений. Поэтому обычно инстантонный анализ сложных полевых моделей дополняется демонстрацией метода на примере обычных числовых интегралов (см. [61, 63]). В работе [93] для апробации различных методов исследования асимптотик высоких порядков в динамике и была предложена модель (1.1). Данная модель является точно-решаемой, что позволяет проверять предлагаемые методы инстантонного анализа.

В качестве исследуемого объекта для модели (1.1) выбрана функция отклика $G(t_1 - t_2)$. Было найдено инстантонное решение в исходных MSR переменных. Определено функциональное пространство метода и класс функций (кусочно-непрерывные функции с разрывами производной в точках $t_1,\ t_2$). Для контроля полученного результата использовалось точное выражение для коэффициентов разложения по константе связи g функции отклика [93].

1.1.1. Точное решение, MSR переменные. Точным решением уравнения (1.1), является функция

$$\varphi(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} d\tau \xi(\tau) \exp[g \int_{t_1}^{\tau} dt' V(t') + \nu(\tau - t_1)]. \quad (1.2)$$

Функция отклика в произвольном внешнем поле V задана выражением

$$G_V(t_1, t_2) = \Theta(T) \exp[-g \int_{t_1}^{t} dt' V(t') - \nu T], \quad T \equiv t_1 - t_2. \quad (1.3)$$

Несложно, проинтегрировав (1.3) по полю V, вычислить функцию отклика модели (1.1) [93]

$$G(t_1 - t_2) = \Theta(T) \exp(-\nu T + D_V g^2 T/2).$$

N-й порядок ее разложения по g при больших N определяется выражением

$$G(t_1 - t_2)^{[N]} = \frac{\theta(T)}{\sqrt{\pi}} (D_V T)^{N/2} N^{-\frac{N+1}{2}} e^{N/2} e^{-\nu T}. \quad (1.4)$$

С другой стороны стандартный MSR формализм [35] приводит к выражению для производящего функционала функции Грина $\langle \varphi \varphi' \rangle$ модели (1.1) в виде континуального интеграла по полям (V, φ, φ')

$$G(t_1, t_2) = \langle \varphi(t_1) \varphi'(t_2) \rangle_V = \aleph^{-1} \int DV \int D\varphi D\varphi' \ \varphi(t_1) \varphi'(t_2) e^S \quad (1.5)$$

с действием

$$S = -\frac{1}{2} V D_V^{-1} V + \varphi'(\partial_t \varphi + gV\varphi + \nu\varphi) + \frac{1}{2} \varphi' D_\xi \varphi'. \quad (1.6)$$

Нормировочный множитель здесь определяется выражением

$$\aleph = \int DV D\varphi D\varphi' e^{S_0},$$

где S_0 – действие свободной теории, т.е. $S_0 = S(g = 0)$ (см (1.6)).

Как было описано в разделе 0.5., для вычисления асимптотики высоких порядков (больших N) разложения функции отклика $\langle\varphi\varphi'\rangle$ можно воспользоваться формулой Коши (22) и асимптотики полученных интегралов исследовать методом перевала (стационарной фазы). Используя этот метод, получаем для N-го члена разложения функции отклика следующее выражение

$$G^{[N]}(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi i \aleph}\oint\frac{dg}{g}\int DV\int D\varphi D\varphi'\ \varphi(t_1)\varphi'(t_2)e^{S-N\ln g}. \tag{1.7}$$

Система уравнений стационарности (равенство нулю первой вариации действия по полям φ', φ, V и константе связи g) имеет следующий вид

$$\begin{cases} \frac{\delta(S-N\ln g)}{\delta\varphi(t)}=0 \quad\Rightarrow\quad \partial_t\varphi'(t)-g(V\varphi')(t)-\nu\varphi'(t)=0 \\ \frac{\delta(S-N\ln g)}{\delta\varphi'(t)}=0 \quad\Rightarrow\quad \partial_t\varphi(t)+g(V\varphi)(t)+\nu\varphi(t)+D_\xi\varphi'(t)=0 \\ \frac{\delta(S-N\ln g)}{\delta V(t)}=0 \quad\Rightarrow\quad D_V^{-1}V(t)-g(\varphi\varphi')(t)=0 \\ \frac{\delta(S-N\ln g)}{\delta g}=0 \quad\Rightarrow\quad \int\varphi(t)V(t)\varphi'(t)dt=\frac{N}{g} \\ \frac{\delta S}{\delta\varphi}|_{t=+\infty}=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi'(+\infty)=0 \\ \varphi(-\infty)=0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Предпоследнее уравнение отражает свободные условия на поле φ при $t\to\infty$, накладывая тем самым граничное условие на поле φ', последнее — начальное условие на поле φ.

Из второго и третьего уравнения получаем выражения для φ' и V

$$V=gD_V\varphi'\varphi,\quad \varphi'=-\frac{\partial_t\varphi+\nu\varphi}{D_\xi+g^2D_V\varphi^2}. \tag{1.9}$$

Подставляя их в первое уравнение системы (1.8) и выражая φ, получаем

$$p\frac{\partial p}{\partial\varphi}=\frac{D_\xi\nu^2\varphi+g^2D_V\varphi p^2}{D_\xi+g^2D_V\varphi^2},\quad p(\varphi)\equiv\partial_t\varphi,$$

откуда находим стационарное решение φ_{st}. В результате имеем

$$\begin{cases} \varphi_{st}=\sqrt{\frac{D_\xi}{g^2D_V}}\frac{C^2-1}{C}sh(C\nu(t-t_0)) \\ \varphi'_{st}=-\frac{\nu}{\sqrt{D_\xi g^2D_V}}(C^2-1)C\frac{Cch(C\nu(t-t_0))+sh(C\nu(t-t_0))}{C^2+(C^2-1)sh^2(C\nu(t-t_0))}, \end{cases}$$

где C, t_0 - независимые константы, фиксируемые начальным и граничным условиями.

Начальное условие на поле φ требует использования предела $t_0 \to -\infty$. При этом расходится интеграл в левой части четвертого уравнения системы (1.8), если только $C \neq 0$. $C = 0$ приводит к нулевым полям φ_{st}, φ'_{st}, а при этом зануляется предэкспонента в исследуемом выражении (1.5). При анализе обычных числовых интегралов в таких случаях принято включать предэкспоненциальный фактор в уравнения стационарности. Так мы и поступим в рассматриваемой модели.

1.1.2. Инстантонный анализ. Исследуемая функция отклика не зависит от D_ξ, поэтому можно положить $D_\xi = 0$ в действии (1.6). При этом в теории появилась дополнительная симметрия относительно преобразования $\varphi \to \varphi C$, $\varphi' \to \varphi'/C$ с произвольной константой C. Чтобы устранить соответствующие бесконечные вклады в функциональные интегралы в числителе и знаменателе (1.7) достаточно, например, зафиксировать значение любого из полей в произвольной точке [106]. Выражение (1.7) может быть преобразовано к виду

$$G^{[N]}(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi i \aleph} \oint \frac{dg}{g} \int DV \int D\varphi D\varphi' e^{\tilde{S} - N \ln g}, \qquad (1.10)$$

где

$$\tilde{S} = S + \ln \varphi(t_1) + \ln \varphi'(t_2) \qquad (1.11)$$

Система уравнений стационарности для действия $\tilde{S} + N \ln g$ имеет следующий вид

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi'(t) + g(V\varphi')(t) + \nu\varphi'(t) + \frac{\delta(t_1 - t)}{\varphi(t_1)} = 0 \\ \partial_t \varphi(t) + g(V\varphi)(t) + \nu\varphi(t) + \frac{\delta(t_2 - t)}{\varphi'(t_2)} = 0 \\ D_V^{-1} V(t) = g(\varphi'\varphi)(t) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dt (\varphi' V \varphi)(t) = \frac{N}{g} \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\varphi'(+\infty) = 0,\ \varphi(-\infty) = 0.$$

Решая систему, получаем

$$\varphi_{st}(t) = -\frac{\theta(t-t_2)}{\varphi'_{st}(t_2)} e^{-\int\limits_{t_2}^{t}(gV+\nu)dt}, \quad \varphi'_{st}(t) = -\frac{\theta(t_1-t)}{\varphi_{st}(t_1)} e^{-\int\limits_{t}^{t_1}(gV+\nu)dt}. \qquad (1.12)$$

Отметим, что отсюда следует

$$\varphi(t)\varphi'(t) = -\Theta[t_2 < t < t_1], \qquad (1.13)$$

где $\Theta[t_2 < t < t_1] \equiv \Theta(t-t_2)\Theta(t_1-t)$ и предполагается $t_1 \geq t_2$.

Используя (1.13) и третье уравнение системы, получим

$$V(t) = gD_V\varphi(t)\varphi'(t) = -gD_V\Theta[t_2 < t < t_1]. \qquad (1.14)$$

Далее, из четвертого уравнения системы вычислим стационарное значение константы связи g

$$g_{st} = \sqrt{\frac{N}{D_V T}}, \qquad (1.15)$$

комбинирование которого с (1.14) даст

$$V_{st}(t) = -\sqrt{\frac{ND_V}{T}}\theta[t_2 < t < t_1] \qquad (1.16)$$

Из (1.15), (1.16) следует

$$gV = -\frac{N}{T}\Theta[t_2 < t < t_1],$$

что позволяет переписать стационарные значения полей φ, φ'

$$\varphi'_{st}(t) = -\frac{\theta(t_1-t)}{\varphi_{st}(t_1)} \exp(\frac{N}{T}(T - f(t)) + \nu(t-t_1)),$$

$$\varphi_{st}(t) = -\frac{\theta(t-t_2)}{\varphi'_{st}(t_2)} \exp(\frac{N}{T}f(t) - \nu(t-t_2)),$$

где $f(t) \equiv (t-t_2)\Theta[t_2 < t < t_1] + T\Theta(t-t_1)\Theta(t-t_2)$.

Из выражений для φ_{st}, φ'_{st} следует $\varphi'_{st}(t_2)\varphi_{st}(t_1) = -\exp(N-\nu T)$, поэтому допустима нормировка полученных решений $-1/\varphi'_{st}(t_2) \equiv C_\varphi$, $1/\varphi(t_1) \equiv C_\varphi^{-1}\exp(-N+\nu T)$, где C_φ — отражает вышеупомянутую дополнительную симметрию. Для простоты положим $C_\varphi = 1$. Окончательно для полей φ'_{st}, φ_{st} можно написать

$$\varphi'_{st}(t) = -\theta(t_1 - t)\exp(-\frac{N}{T}f(t) + \nu(t-t_2)), \tag{1.17}$$
$$\varphi_{st}(t) = \theta(t-t_2)\exp(\frac{N}{T}f(t) - \nu(t-t_2)).$$

Заметим, что $\varphi'_{st}(t)\varphi_{st}(t) = -\Theta[t_2 < t < t_1]$. Подставляя эти выражения в экспоненту и предэкспоненциальный фактор в (1.10), имеем

$$G^{[N]}(t_1-t_2) \sim \frac{1}{2\pi i}\frac{e^{-\tilde{S}_c}}{g_c} = \frac{i}{2\pi}e^{-1}\theta(T)(D_V T)^{\frac{N+1}{2}}N^{-\frac{N+1}{2}}e^{N/2}e^{-\nu T}, \tag{1.18}$$

что с точностью до константы по N при больших N совпадает с точным ответом (1.4).

1.1.3. Флуктуационный интеграл. Таким образом, нам осталось рассмотреть зависимость от параметра N флуктуационного интеграла, т.е. интеграла по отклонениям переменных φ', φ, V, g от их стационарных значений:

$$\frac{\int D(\delta V)D(\delta\varphi)D(\delta\varphi')d(\delta g)e^{\Delta\tilde{S}}}{\int DVD\varphi D\varphi' e^{S(g=0)}}, \tag{1.19}$$

где $\Delta\tilde{S} = \tilde{S}(\varphi_{st}+\delta\varphi, \varphi'_{st}+\delta\varphi', V_{st}+\delta V) - \tilde{S}(\varphi_{st}, \varphi'_{st}, V_{st}) - N[\ln(g_{st}+\delta g) - \ln(g_{st})]$, стационарные значения приведены в (1.15, 1.17). Упростив полученное выражение, получим

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{S} = {} & \delta\varphi'[\partial_t + g_{st}V_{st} + \nu]\delta\varphi + \\
& + V_{st}\varphi'_{st}\delta g\delta\varphi + g_{st}\varphi'_{st}\delta\varphi\delta V + V_{st}\varphi_{st}\delta\varphi'\delta g + g_{st}\varphi_{st}\delta\varphi'\delta V + \varphi_{st}\varphi'_{st}\delta g\delta V - \\
& - \frac{1}{2}\delta V D_V^{-1}\delta V + \\
& + g_{st}\delta\varphi'\delta\varphi\delta V + V_{st}\delta g\delta\varphi\delta\varphi' + \varphi'_{st}\delta\varphi\delta V\delta g + \varphi_{st}\delta\varphi'\delta V\delta g + \delta\varphi\delta\varphi'\delta V\delta g - \\
& - \delta V[D_V^{-1}V_{st} - g_{st}\varphi'_{st}\varphi_{st}] + \delta g V_{st}\varphi_{st}\varphi'_{st} + \\
& \delta\varphi[-\partial_t + g_{st}V_{st} + \nu]\varphi'_{st} + \delta\varphi'[\partial_t + g_{st}V_{st} + \nu]\varphi + \\
& + \frac{\delta\varphi(t_1)}{\varphi_{st}(t_1)} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\delta\varphi(t_1)}{\varphi_{st}(t_1)}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{\delta\varphi(t_1)}{\varphi_{st}(t_1)}\Big)^3 + \cdots + \\
& + \frac{\delta\varphi'(t_2)}{\varphi'_{st}(t_2)} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\delta\varphi'(t_2)}{\varphi'_{st}(t_2)}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{\delta\varphi'(t_2)}{\varphi'_{st}(t_2)}\Big)^3 + \cdots - \\
& - N[\frac{\delta g}{g_{st}} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\delta g}{g_{st}}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{\delta g}{g_{st}}\Big)^3 + \cdots]
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

Рассмотрим это выражение. Из уравнений стационарности следуют соотношения

$$D_V^{-1}V_{st} - g_{st}\varphi'_{st}\varphi_{st} = 0,$$

$$V_{st}\varphi_{st}\varphi'_{st} = \frac{N}{g_{st}},$$

$$\delta\varphi[-\partial_t + g_{st}V_{st} + \nu]\varphi'_{st} = -\frac{\delta\varphi(t_1)}{\varphi_{st}(t_1)},$$

$$\delta\varphi'[\partial_t + g_{st}V_{st} + \nu]\varphi = -\frac{\delta\varphi'(t_2)}{\varphi'_{st}(t_2)}.$$

Отсюда можно переписать выражение $\Delta\tilde{S}$ (1.20) в виде

$$\Delta\tilde{S} = \delta\varphi'[\partial_t + g_{st}V_{st} + \nu]\delta\varphi +$$
$$+ V_{st}\varphi'_{st}\delta g\delta\varphi + g_{st}\varphi'_{st}\delta\varphi\delta V + V_{st}\varphi_{st}\delta\varphi'\delta g + g_{st}\varphi_{st}\delta\varphi'\delta V + \varphi_{st}\varphi'_{st}\delta g\delta V -$$
$$- \frac{1}{2}\delta V D_V^{-1}\delta V +$$
$$+ g_{st}\delta\varphi'\delta\varphi\delta V + V_{st}\delta g\delta\varphi\delta\varphi' + \varphi'_{st}\delta\varphi\delta V\delta g + \varphi_{st}\delta\varphi'\delta V\delta g + \delta\varphi\delta\varphi'\delta V\delta g -$$
$$- \frac{1}{2}\Big(\frac{\delta\varphi(t_1)}{\varphi_{st}(t_1)}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{\delta\varphi(t_1)}{\varphi_{st}(t_1)}\Big)^3 + \cdots - \frac{1}{2}\Big(\frac{\delta\varphi'(t_2)}{\varphi'_{st}(t_2)}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{\delta\varphi'(t_2)}{\varphi'_{st}(t_2)}\Big)^3 + \cdots +$$
$$+ \frac{N}{2}\Big(\frac{\delta g}{g_{st}}\Big)^2 - \frac{N}{3}\Big(\frac{\delta g}{g_{st}}\Big)^3 + \cdots \quad (1.21)$$

Кроме явной зависимости, $\Delta\tilde{S}$ зависит от N посредством стационарных значений полей и константы g. Наша задача — определить зависимость от N выражения (1.19). Для этого сперва избавимся от экспоненциально зависящих от N посредством φ_{st}, φ'_{st} множителей в действии (1.21) с помощью замены функциональных переменных

$$\delta\varphi \to \varphi_{st}\delta\varphi, \quad t \le t_1; \quad \delta\varphi' \to \varphi'_{st}\delta\varphi', \quad t \ge t_2. \qquad (1.22)$$

Для сокращения функционального детерминанта необходимо аналогичным образом растянуть переменные φ, φ' в нормировочном множителе $\aleph$.

Замена переменных (1.22) выводит нас из класса гладких функций, поэтому удобнее ее совершать, разбив функциональный интеграл на произведение интегралов по функциям с носителями, сосредоточенными на интервалах $t < t_2$, $t_2 \le t \le t_1$, $t > t_1$. Соответственно, интеграл по отклонениям $\int D(\delta\varphi)$ (аналогично и по $\delta\varphi'$), можно понимать как

$$\int D(\delta\varphi) = \int D(\delta\varphi_1)\int D(\delta\varphi_2)\int D(\delta\varphi_3), \qquad (1.23)$$

где $D(\delta\varphi) = \prod_t d(\delta\varphi)$, $D(\delta\varphi_1) = \prod_{t<t_2} d(\delta\varphi)$, $D(\delta\varphi_2) = \prod_{t_2\le t\le t_1} d(\delta\varphi)$, $D(\delta\varphi_3) = \prod_{t>t_1} d(\delta\varphi)$. Интегрирование в нормировочном интеграле $\aleph$ также понимается с точки зрения представления (1.23).

После замены (1.22) $\Delta\tilde{S}$ на существенном интервале $t_2 < t < t_1$ представления, (1.23) приобретает вид

$$\Delta\tilde{S} = -\delta\varphi'\partial_t\delta\varphi + \delta g\delta\varphi\sqrt{\frac{ND_V}{T}} - \delta\varphi\delta V\sqrt{\frac{N}{D_VT}} +$$
$$+ \delta g\delta\varphi'\sqrt{\frac{ND_V}{T}} - \delta\varphi'\delta V\sqrt{\frac{N}{D_VT}} - \delta g\delta V - \frac{1}{2}(D_V)^{-1}(\delta V)^2 -$$
$$- \sqrt{\frac{N}{D_VT}}\delta\varphi'\delta V\delta\varphi + \sqrt{\frac{ND_V}{T}}\delta g\delta\varphi'\delta\varphi -$$
$$- \delta g\delta V\delta\varphi - \delta g\delta V\delta\varphi' - \delta g\delta\varphi'\delta V\delta\varphi -$$
$$- \frac{1}{2}(\delta\varphi(t_1))^2 + \frac{1}{3}(\delta\varphi(t_1))^3 + \ldots - \frac{1}{2}(\delta\varphi'(t_2))^2 + \frac{1}{3}(\delta\varphi'(t_2))^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{N}{2}D_VT\frac{(\delta g)^2}{N} - \frac{N}{3}(D_VT)^{3/2}\frac{(\delta g)^3}{N^{3/2}} - \ldots, \quad (1.24)$$

а в нормировочном множителе $\aleph$ свободное действие S на этом же временном интервале (с учетом упомянутых выше замен полевых переменных) заменяется на

$$S_0' = \varphi'(\partial_t + \frac{N}{T})\varphi - \frac{1}{2}(D_V)^{-1}(V)^2. \quad (1.25)$$

В выражениях (1.24, 1.25) сохранилась зависимость от N. Однако, следует отметить, что и на нетривиальном интервале времен $t_2 < t < t_1$ нормировочный множитель может быть упрощен путем замены (1.25) на

$$S_0' = \varphi'(\partial_t + \nu(1 - \Theta(t_1 - t)))\varphi - \frac{1}{2}(D_V)^{-1}(V)^2. \quad (1.26)$$

Дело в том, что детерминант

$$\frac{\int D\varphi' D\varphi e^{\varphi'(\partial_t + \frac{N}{T})\varphi}}{\int D\varphi' D\varphi e^{\varphi'\partial_t\varphi}} = 1,$$

учитывая запаздывающий характер пропагатора $< \varphi\varphi' >$ и традиционное доопределение $\Theta(0) = 0$ в теории возмущений в стохастических моделях (подробнее см. в [62]).

Чтобы упростить зависимость от N действия (1.24), введем новую временную переменную $\tilde{T} \equiv t/N$. Заметим, что безразмерными переменными рассматриваемой задачи являются νT, $D_V T$, поэтому введение новых переменных

$$\tilde{T} = T/N, \quad \tilde{\nu} = \nu N, \quad \tilde{D}_V = D_V N, \tag{1.27}$$

не изменяет результирующих выражений. При этом зависимость от N приобрели границы интервалов $t_1 \to N\tilde{t}_1$, $t_2 \to N\tilde{t}_2$. Полагая без ограничения общности $\tilde{t}_2 < 0$, $\tilde{t}_1 > 0$, тогда при больших N $N\tilde{t}_1 \to \infty$, $N\tilde{t}_2 \to -\infty$, можно ограничиться интервалом $t_2 < t < t_1$ при вычислении флуктуационного интеграла.

Чтобы устранить зависимость от N, в члене $N(\tilde{D}_V)^{-1}(\delta V)^2/2$ в квадратичной части действия, сделаем замену функциональных переменных

$$\delta V \to \delta V/\sqrt{N}.$$

Отбрасывая теперь члены, содержащие малость по $1/N$, получим действие флуктуационного интеграла (1.24) для интервала $t_2 < t < t_1$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{S} = -\delta\varphi'\partial_t\delta\varphi - \delta\varphi\delta V\sqrt{\frac{1}{\tilde{D}_V\tilde{T}}} - \delta\varphi'\delta V\sqrt{\frac{1}{\tilde{D}_V\tilde{T}}} - \frac{1}{2}(\tilde{D}_V)^{-1}(\delta V)^2 - \\ - \sqrt{\frac{1}{\tilde{D}_V\tilde{T}}}\delta\varphi'\delta V\delta\varphi - \frac{1}{2}(\delta\varphi(N\tilde{t}_1))^2 + \frac{1}{3}(\delta\varphi(N\tilde{t}_1))^3 - \ldots \\ - \frac{1}{2}(\delta\varphi'(N\tilde{t}_2))^2 + \frac{1}{3}(\delta\varphi'(N\tilde{t}_2))^3 + \ldots + \frac{1}{2}\tilde{D}_V\tilde{T}(\delta g)^2, \end{aligned} \tag{1.28}$$

зависимость от N сохранилась лишь в положении границ области.

Отметим, что в (1.28) сохранился нелинейный член $\sim \delta\varphi'\delta V\delta\varphi$, и что члены действия (1.11) $\ln\varphi(t_1)$, $\ln\varphi'(t_2)$ также дают конечные вклады в вариации произвольных порядков. Тем самым мы столкнулись с необычной с точки зрения методов асимптотического анализа ситуацией, когда старшие вариации действия не содержат малости по $1/N$, и должны быть учтены в флуктуационном интеграле. Однако, флуктуационный интеграл с действием (1.28) несложно вычислить точно[1], он оказывается константой по времени и, тем самым, определяет лишь независящую от N амплитуду асимптотики высоких порядков разложений. Тем самым мы показали, что окончательное выражение для асимптотики N-ого порядка разложения функции отклика модели (1.1), полученное путем инстантонного вычисления (1.10), дается выражением

$$G^{[N]}(t_1-t_2) \sim \theta(T)(D_V T)^{\frac{N}{2}} N^{-\frac{N+1}{2}} e^{N/2} e^{-\nu T} \left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \qquad (1.29)$$

которое согласуется с результатом, полученным путем разложения точного решения (1.4).

Точное вычисление нетривиального флуктуационного интеграла в рассматриваемой модели, возможно, определяется ее простотой (наличием точного решения). Обсудим, что может иметь место на данном этапе исследований более сложных физических моделей. Перенеся зависимость от N на времена рассматриваемой функции отклика, мы стали перед необходимостью исследовать поведение флуктуационного интеграла на больших временах. Известно, что заключение об асимптотиках больших времен стохастических теорий может быть получено меодами ренормализационной группы что мы и предполагаем использовать, применяя данный подход в иных динамических моделях. Отметим, что ренормгрупповой подход обычно дает степенные инфракрасные асимптотики в динамических моделях статистической физики, что позволяет надеяться на получение предложенным методом главных порядков асимптотик высоких порядков разложений без точных вычислений флуктуационных интегралов.

[1]для этого проще всего представить все вклады от разложения $\ln\varphi(t_1)$, $\ln\varphi'(t_2)$ в виде $\ln(1+\delta\varphi(N\tilde{t}_1)) - \delta\varphi(N\tilde{t}_1) + \ln(1+\delta\varphi'(N\tilde{t}_2)) - \delta\varphi'(N\tilde{t}_2)$, затем (аналогично точному решению задачи (1.1)) вычислить функциональный интеграл по полям $\delta\varphi'$, $\delta\varphi$, и затем вычислить интеграл по δV

1.2. Переменные Лагранжа

Кратко приведем вычисление асимптотики высоких порядков простой динамической модели в лагранжевых переменных [93]. Рассмотрим выражение для функции отклика (1.3) задачи (1.1)

$$G_V(t_1,t_2) = \Theta(T)\exp[-g\int_{t_1}^{t} dt' V(t') - \nu T], \quad T \equiv t_1 - t_2.$$

$\int_{t_1}^{t} dt' V(t')$ играет роль лагранжевой переменной в данном случае.

Функция отклика имеет вид

$$G(t_1,t_2) \equiv < \varphi(t_1), \varphi'(t_2) >= C\int D_V e^{-\frac{VD_VV}{2}} G_V(t_1,t_2)$$

Для вычисления N-го порядка разложения функции отклика воспользуемся формулой Коши

$$G^{[N]}(t_1,t_2) = \Theta(T)\frac{C}{2\pi i}e^{-\nu T}\oint\frac{dg}{g}\int DVe^{S},$$

где

$$S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} -\frac{V(\tau)D_VV(\tau)}{2}d\tau - g\int\limits_{t_2}^{t_1} V(\tau)d\tau - N\ln g.$$

Точка стационарной фазы по переменным V, g определяется системой уравнений

$$V(\tau)D_V + g\Theta(T) = 0$$

$$\int\limits_{t_2}^{t_1} V(\tau)d\tau + \frac{N}{g} = 0$$

Решением системы являются две точки стационарности

$$g_c = \pm\sqrt{\frac{ND_V}{T}},$$

$$V_c(\tau) = \mp\sqrt{\frac{N}{D_VT}}\Theta(T).$$

Полученное выражение V_c играет роль инстантона в рассматриваемом случае. Действие в точке стационарности

$$S_c = N/2 - N\ln[\pm\sqrt{\frac{ND_V}{T}}].$$

Вклад от обеих точек стационарности сокращается при нечетных N и удваивается при четных, следовательно, реальным параметром разложения является g^2. Интеграл по отклонениям $\delta V, \delta g$ от положения точки стационарности вычисляется тривиально (определитель сокращается нормировочным множителем C). Таким образом, имеем асимптотику

$$G^{[N]}(t_1,t_2) = \Theta(T)\frac{N^{-\frac{N}{2}}e^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\pi N}}(D_V T)^{\frac{N}{2}}e^{-\nu T}\Big(1+O(\frac{1}{N})\Big),$$

которая совпадает с (1.29).

На примере этой простой модели стало очевидным, что вычисление асимптотик высоких порядков проще производить в переменных Лагранжа, чем в MSR-переменных. Кроме того, воспользоваться предложенным методом в MSR-переменных удается в довольно ограниченном круге задач. В последующих главах осуществляется переход от MSR-переменных к переменным Лагранжа, что в значительной степени расширяет область применения инстантонного анализа и заметно упрощает математические выкладки.

ГЛАВА 2
СЕМЕЙСТВО ИНСТАНТОНОВ МОДЕЛИ ОБУХОВА-КРЕЙЧНАНА С «ЗАМОРОЖЕННЫМ» ПОЛЕМ СЛУЧАЙНОЙ СКОРОСТИ

В этой главе мы исследуем асимптотику высоких порядков функции отклика описанной в п. 0.6. модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости. Эта модель описывает диффузию жидкости в стационарном случайном поле [39, 84, 85]. Коррелятор поля скорости здесь, в отличие от стандартной модели Крейчнана, не зависит от времени (25), а по координате ведет себя степенным образом, так что число диаграмм теории возмущений растет факториально. Условие стационарности в данной модели – нелинейная система интегро-дифференциальных уравнений. Мы покажем, как строить семейство ее решений – семейство инстантонов, и предъявим в аналитическом виде один из них. Проведенный с помощью этого решения анализ указывает, что тип сходимости рядов теории возмущений определяется разнообразными факторами: исследуемым объектом, выбранным представлением (координатным или импульсным), видом коррелятора скорости, а вовсе не одним числом диаграмм. Мы обнаружили случаи, когда исследуемые ряды имеют конечный и даже бесконечный радиус сходимости.

Случай, когда коррелятор поля скорости не зависит не только от времени, но и от координаты, оказывается частным точно решаемым случаем рассматриваемой задачи. Мы будем использовать его, чтобы проконтролировать правильность расчетов.

2.1. Модель Обухова-Крейчнана с постоянным полем скорости: точно решаемый частный случай

Пространство функций, по которому ведется функциональное интегрирование, определяется типом решаемой задачи. Подробно вопрос о правильном выборе пространства функционального интегрирования для построения теории возмущений рассмотрен в главе 1. Обычно в статических задачах интегрирование ведется в пространстве достаточно быстро (экспоненциально) убывающих функций, однако, в динамике существуют задачи с другими функциональными пространствами [94].

В частном случае модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем случайной скорости, когда поле скорости рассматриваемой модели принадлежит классу постоянных функций, т.е. не зависит от координаты $\mathbf{x}$ и времени t [99], задача оказывается точно решаемой. Действительно, функция Грина линейного уравнения диффузии (23) при $g = 0$ хорошо известна,

$$\frac{\Theta(t-t')}{\sqrt{4\pi\nu(t-t')}^{\,d}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2}{4\nu(t-t')}\right),$$

Θ – функция Хевисайда, функция Грина для произвольных g получается заменой $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + g\mathbf{V}t$. Поэтому решение (23) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}'dt' \frac{\Theta(t-t')}{\sqrt{4\pi\nu(t-t')}^{\,d}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'+g\mathbf{V}(t-t'))^2}{4\nu(t-t')}} \xi(\mathbf{x}',t').$$

Отсюда, после усреднения по всевозможным скоростям с учетом нормировки, для функции отклика получим

$$G(\mathbf{x},T) = \left\langle \frac{\delta\varphi(\xi(\mathbf{x}_2,t_2))}{\delta\xi(\mathbf{x}_1,t_1)} \right\rangle = \frac{\Theta(T)(2\nu T)^{d/2}}{\sqrt{2\nu T + Dg^2T^2}^{\,d}} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{4\nu T + 2Dg^2T^2}}, \qquad (2.1)$$

где мы ввели трансляционно-инвариантные $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ и $T \equiv t_2 - t_1$.

N-ый порядок разложения этой функции по $u \equiv g^2$

$$G^{[N]}(\mathbf{x},T) = \frac{(-1)^N \Theta(T)\Gamma(d/2+N)}{\Gamma(d/2)N!} \cdot {}_1F_1(d/2+N, d/2, -\mathbf{x}^2/(4\nu T))$$

выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1(N + d/2, d/2, -\mathbf{x}^2/(4\nu T))$. Последующее вычисление асимптотического предела $N \to \infty$ основано на связи ${}_1F_1$ с функцией Уиттекера, для которой соответствующая асимптотика хорошо известна [107]. Окончательно, точный ответ имеет вид

$$G^{[N]}(\mathbf{x}, T) = \frac{\Theta(t-t')}{\sqrt{\pi}} \exp(1 - d/2) \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{8\nu T}\right) \left(\frac{\mathbf{x}^2}{4\nu T}\right)^{(1-d)/4} \times \\ \times N^{(d-3)/4}\left(-\frac{DT}{2\nu}\right)^N \cos\left(\sqrt{\frac{N\mathbf{x}^2}{\nu T}} + \pi\frac{1-d}{4}\right), \quad (2.2)$$

откуда видно, что члены ряда при больших N сильно осциллируют на фоне степенного роста $N^{(d-3)/4}$, при этом ряды теории возмущений являются сходящимися с конечным радиусом сходимости, равном $2\nu/DT$. Число же диаграмм обычной теории возмущений, дающих вклад в $G^{[N]}$, возрастает по N факториально. Таким образом, распространенное утверждение, что тип сходимости ряда определяется числом диаграмм (см. например, [85]), неверно.

Интересно, что если мы рассмотрим наш точно решаемый пример в импульсно-частотном представлении, тип сходимости рядов теории возмущений станет принципиально иным. Проще всего убедиться в этом, воспользовавшись MSR-формализмом (2.4,2.6). Разложим выражение для функции отклика в ряд по константе связи

$$G^{[N]}(x_2 - x_1) = \frac{1}{N!} \int \mathcal{D}\mathbf{V} \mathbf{V}^N e^{-\mathbf{V}_i D^{-1}_{ij} \mathbf{V}_j/2} \times \\ \times \int \mathcal{D}\varphi' \mathcal{D}\varphi \; \varphi(x_1)\varphi'(x_2)(g\varphi'\nabla\varphi)^N e^{-\varphi' D_\xi \varphi'/2 - \varphi'(\partial_t - \nu\Delta)\varphi}, \quad (2.3)$$

для краткости мы опустили нормировку. Интеграл по $\mathbf{V}$ факторизуется и сразу вычисляется; с учетом нормировки он равен $(-D)^{N/2}(N-1)!!$. Оставшиеся интегралы по φ, φ' выражаются через парную функцию отклика в импульсно-частотном представлении при $g = 0$. Итак,

$$G^{[N]}(\mathbf{q}, \omega) \sim (-1)^{N/2}(N-1)!!\frac{(\mathbf{q}^2)^{N/2}}{(i\omega + \nu\mathbf{q}^2)^{N+1}},$$

т. е. теперь ряд теории возмущений функции отклика расходится факториально. Легко понять, что зависимость асимптотики от представления объясняется наличием ∇ во взаимодействии.

Итак, тип сходимости ряда не определяется лишь скоростью роста числа диаграмм теории возмущений и существенно зависит от выбранного представления.

По сути, описанный в этом разделе частный случай уже сам по себе опровергает подход, в котором тип сходимости ряда оценивается числом диаграмм теории возмущений. Там не менее, нам не известны физическое приложения, соответствующие такой редуцированной модели, и в дальнейшем мы займемся исследованием более реалистичной модели (23, 24). Однако, несмотря на свою простоту, данный частный случай хорошо отражает некоторые свойства сходимости и рядов физически интересной модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости, в которой, как будет показано ниже, также наблюдается конечный радиус сходимости рядов теории возмущений на фоне факториального роста числа диаграмм.

В разделе 2.6. приведен пример расчета асимптотики высоких порядков функции отклика модели Обухова-Крейчнана с постоянным полем скорости методами инстантонного анализа в лагранжевых переменных.

2.2. MSR-формализм

Стохастическое уравнение (23) с помощью MSR - формализма стандартным образом преобразуется к квантово-полевой модели со следующими действием и функцией отклика:

$$S^{msr} = \frac{\varphi' D_\xi \varphi'}{2} + \varphi'\Big[\partial_t\varphi + gZ_g\nabla(V\varphi) - \nu Z_\nu \Delta\varphi\Big], \tag{2.4}$$

$$G_V = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\varphi' \ \varphi(\mathbf{x}_1,t_1)\varphi'(\mathbf{x}_2,t_2)\exp(S^{msr})}{\int \mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\varphi' \exp(S^{msr}|_{g=0})}. \qquad (2.5)$$

Мы ренормируем модель посредством введения двух ренормировочных констант Z_g и Z_ν аналогично [39]. Объектом исследования теперь становятся корреляционные функции. В частности, после стандартных необходимых доопределений (см. [62]) и интегрирования по $\mathbf{V}$, ренормированная функция отклика принимает вид

$$G_R \equiv < \varphi(\mathbf{x}_1,t_1)\varphi'(\mathbf{x}_2,t_2) >_R = \frac{\int \mathcal{D}\mathbf{V} G_V e^{-\mathbf{V}_i(\mathbf{x})D^{-1}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{V}_j(\mathbf{x}')/2}}{\int \mathcal{D}\mathbf{V} e^{-\mathbf{V}_i(\mathbf{x})D^{-1}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{V}_j(\mathbf{x}')/2}}. \qquad (2.6)$$

2.3. Формализм Лагранжа

В работах [96, 72, 102, 98] обсуждалось, что в рамках MSR - формализма инстантон в модели Обухова-Крейчнана не существует (по крайней мере, на классе гладких убывающих функций). Поэтому, как и в [96, 72], используем альтернативный способ введения переменных, а именно, введем лагранжевы переменные, т.е. от скалярных полей φ, φ' перейдем к векторным полям $\mathbf{c}(\tau)$, $\mathbf{c}'(\tau)$, которые играют роль координат и импульсов жидких частиц и зависят только от времени.

Кратко опишем переход к переменным Лагранжа. Функция Грина $G_V(\mathbf{x}_2,t_2;\mathbf{x}_1,t_1)$ задачи (23), очевидно, удовлетворяет уравнению

$$(\partial_{t_2} - \nu\Delta_{\mathbf{x}_2})G_V(\mathbf{x}_2,t_2;\mathbf{x}_1,t_1) + g\nabla(\mathbf{V}(\mathbf{x})G_V(\mathbf{x}_2,t_2;\mathbf{x}_1,t_1)) = \delta^d(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\delta(t_2-t_1)$$

Представим функцию Грина в следующем виде

$$G_V(\mathbf{x}_2,t_2;\mathbf{x}_1,t_1) = \theta(t_2-t_1)P(\mathbf{x}_2,t_2;\mathbf{x}_1,t_1), \qquad (2.7)$$

что приведет к следующим уравнениям на P

$$\begin{cases} (\partial_{t_2} - \nu\Delta_{\mathbf{x}_2})P(\mathbf{x}_2,t_2;\mathbf{x}_1,t_1) + g\nabla(\mathbf{V}(\mathbf{x})P(\mathbf{x}_2,t_2;\mathbf{x}_1,t_1)) = 0 \\ P(\mathbf{x}_2,t_2=t_1;\mathbf{x}_1,t_1) \equiv \delta^d(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1) \end{cases}$$

Последнее уравнение можно понимать как уравнение Фокера-Планка [108] для некоторой модели с одновременной функцией распределения $P(\mathbf{x}, s)$. Для этой системы можно записать решение

$$P(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle \delta^d(\mathbf{x}_2 - \mathbf{X}(t_2)) \rangle_\zeta \tag{2.8}$$

$$\partial_{t_2} \mathbf{X}(t_2) = -g\mathbf{V}(\mathbf{X}(t_2)) + \zeta(t_2) \tag{2.9}$$

$$\mathbf{X}|_{t_2=t_1} = \mathbf{x}_1, \quad D_\zeta = 2\nu.$$

$\langle \ldots \rangle_\zeta$ обозначает усреднение по вспомогательному случайному гауссово-распределенному с нулевым средним полю ζ с коррелятором D_ζ. Уравнения (2.8), (2.9) описывают движение частицы в случайном поле ζ. Отсюда видно, что задача может быть сведена к изучению взаимодействующих частиц в случайной среде. Полученные уравнения описывают неоднородную среду, поскольку уравнение (2.9) содержит член с полем скорости, зависящим от координаты частицы. Без этого члена уравнение (2.9) было бы обычным уравнением движения броуновской частицы.

Добавим в уравнение (2.8) дополнительное функциональное интегрирование по вспомогательному полю $\mathbf{c}(s)$ следующим образом

$$P(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle \int D\mathbf{c} \delta^F(\mathbf{c}(t_2) - \mathbf{X}(t_2)) \delta^d(\mathbf{c}(t_2) - \mathbf{x}_2) \rangle_\zeta, \tag{2.10}$$

где δ^F - функциональная дельта-функция Дирака. Произведем следующую замену переменных

$$\delta^F(\mathbf{c}(t_2) - \mathbf{X}(t_2)) = det\Big(\partial_{t_2} + g\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta \mathbf{c}}\Big) \delta^F(\partial_{t_2}\mathbf{c} + g\mathbf{V}(\mathbf{c}) - \zeta).$$

Далее, d-мерная δ^d-функция в уравнении (2.10) может быть перенесена на граничные условия на $\mathbf{c}(s)$

$$P(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle \int\limits_{\mathbf{c}(t_1)=\mathbf{x}_1}^{\mathbf{c}(t_2)=\mathbf{x}_2} D\mathbf{c} det\Big(\partial_{t_2} + g\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta \mathbf{c}}\Big) \delta^F(\partial_{t_2}\mathbf{c} + g\mathbf{V}(\mathbf{c}) - \zeta) \rangle_\zeta.$$

Также, с помощью преобразования Фурье запишем δ^F-функцию в интегральной форме:

$$P(\mathbf{x}_2,t_2;\mathbf{x}_1,t_1) =$$
$$= M\int\limits_{\mathbf{c}(t_1)=\mathbf{x}_1}^{\mathbf{c}(t_2)=\mathbf{x}_2} D\mathbf{c}D\mathbf{c}'\exp(-\nu\mathbf{c}'^2+i\mathbf{c}'\partial_\tau\mathbf{c}+ig\mathbf{c}'\mathbf{V}(\mathbf{c}))det\Big(\partial_{t_2}+g\frac{\delta\mathbf{V}}{\delta\mathbf{c}}\Big), \quad (2.11)$$

скалярные произведения векторных полей и интегрирования по полевым аргументам подразумеваются. M - нормировочный множитель, возникающий вследствие преобразования δ^F. M определяется из свободной науки ($g=0$). Полученная теория поля совпадает со стандартной [72].

Итак, функция отклика модели Обухова-Крейчнана в лагранжевых переменных для постоянного $\mathbf{V}$ имеет вид

$$G_V = \frac{\Theta(t_2-t_1)}{(4\pi\nu)^{d/2}(t_2-t_1)^{d/2}}\frac{\int\limits_{\mathbf{c}(t_1)=\mathbf{x}_1}^{\mathbf{c}(t_2)=\mathbf{x}_2}\mathcal{D}\mathbf{c}\mathcal{D}\mathbf{c}'\ \exp(S^{Lgr})}{\int\mathcal{D}\mathbf{c}\mathcal{D}\mathbf{c}'\ \exp(S^{Lgr}|_{g=0})},$$
$$S^{Lgr} = \int\limits_{t_1}^{t_2}d\tau\Bigg(-\nu Z_\nu\mathbf{c}'^2(\tau)+i\mathbf{c}'(\tau)\partial_\tau\mathbf{c}(\tau)+igZ_g\mathbf{c}'(\tau)\mathbf{V}(\mathbf{c}(\tau))\Bigg). \quad (2.12)$$

Интегрирование по полю $\mathbf{c}'$ в числителе ведется со свободными граничными условиями. Нормировочный функциональный интеграл соответствует свободной модели с $g=0$ и может быть рассчитан с нулевыми граничными условиями на $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$.

2.4. Инстантонный анализ

Гауссово усреднив по $\mathbf{V}$ выражение (2.12), получаем функцию отклика модели (23) в лагранжевых переменных

$$G(\mathbf{x},T) = \frac{\Theta(T)\int\limits_{\mathbf{c}(t_1)=\mathbf{x}_1}^{\mathbf{c}(t_2)=\mathbf{x}_2}\mathcal{D}\mathbf{c}\mathcal{D}\mathbf{c}'\mathcal{D}\mathbf{V}e^{S^{Lgr}-\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\mathbf{V}_i(\mathbf{x})D^{-1}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{V}_j(\mathbf{x}')}}{(4\pi\nu T)^{d/2}\int\mathcal{D}\mathbf{c}\mathcal{D}\mathbf{c}'\mathcal{D}\mathbf{V}e^{S^{Lgr}|_{g=0}-\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\mathbf{V}_i(\mathbf{x})D^{-1}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{V}_j(\mathbf{x}')}}, \quad (2.13)$$

где $T \equiv t_2 - t_1$, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Опущенные аргументы полей здесь и далее в этой главе предполагаются равными τ, скалярные произведения перемножаемых векторов подразумеваются, граничные условия на поле $\mathbf{c}'$ при $\tau = t_1$ и $\tau = t_2$ свободные.

Чтобы выделить явно зависимость от переменной $\mathbf{x}$, входящей в граничные условия на $\mathbf{c}$, сделаем сдвиг поля

$$\mathbf{c}(\tau) = \bar{\mathbf{c}}(\tau) + \mathbf{x}\frac{\tau}{T}.$$

Тогда интегрирование по $\bar{\mathbf{c}}$ будет производиться по линейному функциональному пространству с нулевыми граничными условиями при $\tau = t_1$, $\tau = t_2$. Тем не менее, для упрощения записи мы там, где это возможно, будем выражать ответы через несдвинутое поле $\mathbf{c}(\tau)$. После гауссового интегрирования по полю $\mathbf{V}$, действие преобразуется следующим образом:

$$\overline{S}^{Lgr}(g) = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \Big(- \nu \mathbf{c}'^2 + i\mathbf{c}'\partial_\tau \mathbf{c} - \frac{g^2}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau' \mathbf{c}'_i(\tau) D_{ij}(\mathbf{c}(\tau) - \mathbf{c}(\tau'))\mathbf{c}'_j(\tau')\Big),$$

Выделившийся естественным образом параметр $g^2 \equiv u$ указывает на то, что разложение ведется по четным степеням g.

Отметим, что рассматриваемая модель имеет две константы связи λ_T, λ_L, но дело в том, что они могут быть сведены к одной – g. Это возможно благодаря пропорциональности $\lambda_T \sim \lambda_L \sim g^2$ и вида исходного уравнения (23). Действительно, в фиксированной точке все константы связи пропорциональны малому параметру разложения $\varepsilon = 2 + 2\alpha - d$, [39], [84]. Подобная ситуация возникала в динамических моделях С-Н, основанных на статическом пределе ϕ^4 [95].

Как было показано в разделе 0.5. для выделения N-того члена ряда квантово-полевой теории возмущений можно воспользоваться формулой Коши. Вычисление интегралов по $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}$ и u в $G^{[N]}$ будем осуществлять методом стационарной фазы. Произведем растяжения

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\mathbf{c}}, \mathbf{c}'\} &\to \{N^{1/2}\bar{\mathbf{c}}, N^{1/2}\mathbf{c}'\}, \\
\mathbf{x} &\to \sqrt{N}\mathbf{x}, \\
u &\to N^{\beta} u.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Вследствие однородности коррелятора скорости по аргументу ($D(\mathbf{z}) \sim |\mathbf{z}|^{-2\beta}$, см. (25)) можно вынести перед действием параметр N, что упрощает анализ вклада старших вариаций. Такие же растяжения полей $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ выполняем и в нормировочном множителе, который для краткости обозначим $\aleph$. Получаем:

$$
G^{[N]}(\sqrt{N}\mathbf{x}, T) = \frac{N^{-N\beta}}{\aleph} \frac{\Theta(T)}{2\pi i} \oint \frac{du}{u} \int\limits_{\bar{\mathbf{c}}(t_1)=0}^{\bar{\mathbf{c}}(t_2)=0} \mathcal{D}\mathbf{c}\mathcal{D}\mathbf{c}' e^{NS},
\tag{2.15}
$$

$$
S = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \Big(-\nu \mathbf{c}'^2 + i\mathbf{c}'\partial_\tau \mathbf{c} - \frac{u}{2}\mathbf{c}'_i(\tau)[D_{ij}c'_j](\tau) \Big) - \ln u,
\tag{2.16}
$$

где введено
$$
[D_{ij}c'_j](\tau) \equiv \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau' D_{ij}(\mathbf{c}(\tau) - \mathbf{c}(\tau'))\mathbf{c}'_j(\tau').
\tag{2.17}
$$

Основной вклад в (2.15) при $N \to \infty$ дает область интегрирования в окрестности *инстантона* – значений $\bar{\mathbf{c}}_{st}$, $\mathbf{c}'_{st}$, u_{st}, реализующих экстремум функционала действия, т.е. решений уравнений стационарности. Естественно искать эти решения, предполагая коллинеарность векторов $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$, $\mathbf{x}$, ведь исходно симметрия задачи нарушена именно вектором $\mathbf{x}$. Данное предположение существенно упрощает структуру действия (2.16) по векторным значкам, а коррелятор скорости при этом можно положить равным скалярной функции

$$
D(\mathbf{x}) = \frac{D_0}{|\mathbf{x}|^{2\beta}},
\tag{2.18}
$$

где

$$D_0 \equiv a_1 + a_2 = \frac{\Gamma(1-\frac{\varepsilon}{2})}{2^{d+\varepsilon-1}\pi^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2}+\frac{\varepsilon}{2})}\Big[\lambda_T(d-1)+\lambda_L(\varepsilon-1)\Big] \tag{2.19}$$

и

$$[D_{ij}c'_j](\tau) \to [Dc'](\tau) \equiv \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau' D(\mathbf{c}(\tau)-\mathbf{c}(\tau'))c'(\tau').$$

Для проекций уравнений стационарности на выделенное направление векторов $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ имеем тогда

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{c}'(\tau)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -2\nu c'(\tau) + i\partial_\tau c(\tau) = u[Dc'](\tau) \tag{2.20}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{c}(\tau)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -i\partial_\tau c'(\tau) = uc'(\tau)\frac{\partial[Dc'](\tau)}{\partial c} \tag{2.21}$$

$$\frac{\delta S}{\delta u} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = -\frac{2}{\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau c'(\tau)[Dc'](\tau)}. \tag{2.22}$$

Если данная система интегро-дифференциальных уравнений имеет решение – инстантон c_{st}, c'_{st}, u_{st}, – причем поля c_{st}, c'_{st} принадлежат к такому функциональному пространству, что функционал действия на них не обращается в бесконечность, интересующий нас ответ для асимптотики корреляционной функции может сразу быть записан в виде

$$G^{[N]}(\sqrt{N}\mathbf{x}, T) \sim N^{-N\beta}\exp(NS(c_{st}, c'_{st}, u_{st}))\Phi(\Delta), \tag{2.23}$$

где $\Phi(\Delta)$ – результат функционального интегрирования по флуктуациям в окрестности инстантона

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_{st} + \delta\mathbf{c}, \qquad \mathbf{c}' = \mathbf{c}'_{st} + \delta\mathbf{c}', \qquad u = u_{st} + \delta u$$

с учетом нормировочного множителя $\aleph$. В результате обычного для инстантонного анализа растяжения флуктуаций δc, $\delta c'$, δu в $N^{-1/2}$ раз, расчет главного порядка по N для Φ сводится к вычислению гауссова интеграла.

Вдобавок, эти растяжения позволяют явно выделить зависимость этого объекта от N: она сводится к конечной степени N^w, где параметр w можно определить, вычислив так называемые 'нулевые моды' оператора второй вариации действия на инстантоне.

Отметим, что погрешность выражения, полученного в результате инстантонного подхода определяется лишь отброшенными старшими вариациями действия на инстантоне (негауссовостью флуктуаций). Ввиду упомянутого растяжения флуктуаций каждая последующая вариация содержит дополнительный множитель $1/\sqrt{N}$ по сравнению с предыдущей, то есть соответствующие вклады могут быть отброшены при $N \to \infty$.

Выражение (2.23) демонстрирует при $\beta > 0$ сходимость рядов, однако, принципиальным остается вопрос – а существуют ли вообще решения интегро-дифференциальной системы (2.20, 2.21, 2.22) на нужном классе функций? В следующем разделе мы предъявим такое решение.

2.5. Существование и явный вид инстантона.

Покажем, что для системы (2.20, 2.21, 2.22) удается сконструировать первый интеграл движения.

Воспользовавшись очевидным соотношением

$$\partial_\tau [Dc'](\tau) = \frac{\partial [Dc']}{\partial c} \partial_\tau c,$$

из первых двух уравнений найдем связь c и c': продифференцируем (2.20) по τ, а равенство (2.21) домножим на $\partial_\tau c$. Исключив $\partial_\tau [Dc'](\tau)$ из этих двух уравнений, получим дифференциальное уравнение

$$-2\nu \partial_\tau c'(\tau) + i\partial_\tau^2 c(\tau) + i\frac{\partial_\tau c'(\tau)\partial_\tau c(\tau)}{c'(\tau)} = 0.$$

Решение этого линейного по $\partial_\tau c(\tau)$ уравнения имеет вид

$$-\nu c'^2 + ic'\partial_\tau c = iF, \qquad \text{где } F \text{ – интеграл движения.} \qquad (2.24)$$

Тем самым вместо системы интегро-дифференциальных уравнений (2.20, 2.21, 2.22) можно рассматривать лишь одно интегро-дифференциальное уравнение, дополненное алгебраическим соотношением (2.24) и числовым уравнением на u (2.22).

Из (2.24) и (2.22) очевидно, что первые три слагаемых действия (2.16) в точке стационарности равны $iFT + 1$. К сожалению, вычисление u_{st} и соответствующего вклада последнего слагаемого (2.16) при произвольном F возможно лишь численно. Хотя принципиальных сложностей при этом не возникает, мы хотели бы ограничиться лишь аналитическими результатами.

Разным значениям F в (2.24) соответствуют различные граничные условия на поле $\mathbf{c}$ (различные $\mathbf{x}$). Оказывается возможным решить обратную задачу: зафиксируем интеграл движения $F = 0$, и построим частное решение, соответствующее ему. Исследуем, к какому классу функций оно принадлежит и каким граничным условиям соответствует.

Для рассматриваемого частного решения из (2.24) следует соотношение

$$\mathbf{c}'(\tau) = \frac{i\partial_\tau \mathbf{c}(\tau)}{\nu}. \tag{2.25}$$

Его подстановка в (2.20) дает

$$-\frac{i\partial c(\tau)}{\partial \tau} = u \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau' D(c(\tau) - c(\tau')) \frac{i}{\nu} \frac{\partial c(\tau')}{\partial \tau'} = \frac{iu}{\nu} \int\limits_{x_1}^{x_2} dy D(c - y). \tag{2.26}$$

Это позволяет написать ответ для c_{st} в квадратурах:

$$\int\limits_{x_1}^{c} \frac{dy}{\int_{x_1}^{x_2} dz D(z - y)} = -\frac{u_{st}(\tau - t_1)}{\nu}, \qquad c \equiv c_{st}(\tau). \tag{2.27}$$

Оставшуюся величину u_{st} проще всего найти, подставив (2.25) в (2.22) с учетом явного вида для $[Dc']$ и D. Снова переходя от интегрирования по

$\tau \in [t_1, t_2]$ к интегралам по $c \in [x_1, x_2]$ вычисляем

$$u_{st} = -\frac{2\nu^2(1-\beta)(2\beta-1)}{D_0|\mathbf{x}|^{2-2\beta}}. \tag{2.28}$$

Проблемы регуляризации и ренормировки теории рассмотрены в главе 3. Построенное нами решение (2.27) записано в квадратурах для произвольного коррелятора скорости и справедливо при любой регуляризации. В данной работе рассматривается степенное поведение коррелятора D, что подразумевает аналитическую регуляризацию выражения (2.27) (напомним, что регуляризация в данной модели как раз и определяется выбором явного вида коррелятора (24)).

Вместо того чтобы по переменной $\mathbf{x}$ определять величину F, мы поступили наоборот – положили $F = 0$. Посмотрим теперь, каким значениям $\mathbf{x}$ соответствует найденное нами частное решение; обозначим это значение $\mathbf{x}_0$. Положим в равенстве (2.27) $\tau = T$, $\mathbf{c}(T) = \mathbf{x}_0$, и учтя явный вид коррелятора D, вычислим образовавшиеся интегралы (см. Приложение 2). Получим

$$\mathbf{x}_0^{2\beta} = \frac{u_{st} T D_0}{\nu(2\beta-1)R}, \qquad \text{где} \qquad R = \int_0^1 dv f(v). \tag{2.29}$$

С учетом (2.28) это можно записать в виде

$$\mathbf{x}_0^2 = \frac{2(\beta-1)}{R}\nu T, \qquad u_{st} = \left(\frac{2(\beta-1)}{R}\nu T\right)^{\beta} \frac{\nu(2\beta-1)R}{TD_0}. \tag{2.30}$$

Итак, на построенном инстантоне действие может быть легко сосчитано и в соответствии с (2.23) асимптотика больших N величины $G^{[N]}(\sqrt{N}\mathbf{x}_0)$ определяется соотношением

$$G^{[N]}(\sqrt{N}\mathbf{x}_0, T) \sim N^{-N\beta} N^{w} \frac{\exp(N)}{u_{st}^N}. \tag{2.31}$$

Как уже было отмечено, явное определение численного значения u_{st} нам удалось провести лишь для некоторого специального значения $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, то есть лишь на гиперповерхности, на которой выполняется первое из соотношений (2.30) и где обращается в ноль найденный интеграл движения. Другим значениям $\mathbf{x}$ соответствуют другие значения F, и, следовательно, иные значения радиуса сходимости u_{st}, для которых мы не можем представить явного выражения и которые могут считаться лишь численно. Тем не менее, до тех пор, пока остается справедливым (2.14) (то есть пока переменная x порядка $\sqrt{N}$) выражение типа (2.31) (разумеется, с другими u_{st} и показателем экспоненты) описывает поведение при больших N коэффициентов разложения функции отклика, а именно наличие конечного радиуса сходимости соответствующих рядов.

Например, при малых, но отличных от нуля значениях F можно строить теорию возмущения по F, тем самым получая с необходимой точностью инстантон для значений $\mathbf{x}$, лежащих в окрестности $\mathbf{x}_0$. Действительно, первая итерация (2.24) по F дает

$$c' = \frac{i\partial_\tau c}{\nu} - \frac{F}{\partial_\tau c},$$

причем во втором слагаемом справа в качестве $\partial_\tau c$ достаточно использовать найденное ранее решение при $F = 0$. Подстановка первой итерации в (2.20) дает

$$-i\partial_\tau c - \frac{2\nu F}{\partial_\tau c^{(0)}} = \frac{iu}{\nu}\int\limits_0^x dy D(c-y) - Fu^{(0)}\int\limits_0^{x^{(0)}} \frac{D(c^{(0)}-y)dy}{(\partial_\tau c^{(0)})^2},$$

здесь нулем отмечены переменные, для которых следует подставлять значение в предыдущей (нулевой) итерации. Как и (2.26) это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, его решение в квадратурах отличается от выражения (2.27) наличием в правой части множителя вида $(1 + kF)$, где коэффициент k выражается лишь через переменные нулевой итерации. Это позволяет вычислять $\mathbf{x}$ в виде ряда по F, а также определять с необходимой точностью величину u_{st} – радиус сходимости корреляционной функции (2.31), который будет отличаться от (2.28) наличием дополнительного множителя – степенного ряда по F.

В инстантонном анализе обычной является ситуация, когда асимптотика высоких порядков корреляционной функции существенно неравномерна по аргументу [109]. Аналогичная ситуация наблюдается и в нашем случае: функция отклика $G(\mathbf{x}, t)$ имеет существенно неравномерную асимптотику разложений рядов, поскольку из-за проведенного в (2.14) растяжения переменной $\mathbf{x}$, мы определили лишь асимптотику больших N величины $G^{[N]}(\sqrt{N}\mathbf{x})$ (2.31). Иными словами, (2.31) означает, что величина $G^{[N]}(\mathbf{y}_0 \equiv \sqrt{N}\mathbf{x}_0, t)$ является функцией от $\mathbf{y}_0/\sqrt{N}$, t и N. Поэтому полученная асимптотика может оказаться неприменимой в области очень больших или очень малых $\mathbf{y}_0$, где, вообще говоря, требуются специальные исследования.

Поэтому обсуждать сходимость рядов теории возмущений удобнее для числовых объектов или интегральных характеристик, в которых не проявляется указанная выше неравномерность. Примером такого объекта является функция

$$\mathcal{G}(T, \gamma) = \int d\mathbf{x} G(\mathbf{x}, T) \exp(-\gamma \mathbf{x}^2).$$

Это производящий функционал четных моментов функции отклика. Наличие в $\mathcal{G}$ дополнительного интеграла по $\mathbf{x}$ и упомянутое растяжение переменной $\mathbf{x}$ в $\sqrt{N}$ раз позволяют включить в стацфазное рассмотрение величину $\mathbf{x}$. При этом уже не требуется растягивать переменную γ для выделения общего N в действии, это достигается растяжением $\mathbf{x}$, однако, в дополнение к системе (2.20, 2.21, 2.22) следует рассматривать уравнение стационарности

$$\frac{\delta(S-\gamma\mathbf{x}^2)}{\delta|\mathbf{x}|}=0 \quad\Rightarrow\quad \int\limits_0^T d\tau\left(\frac{ic'(\tau)}{T}-\frac{uc'(\tau)}{2}\frac{\partial[Dc'](\tau)}{\partial|\mathbf{x}|}\right)=2\gamma|\mathbf{x}|. \quad (2.32)$$

Подстановка сюда нашего частного решения (2.25), учет явного вида $[Dc']$ (2.17) и четности коррелятора D позволяют преобразовать (2.32) к виду

$$-\frac{uD_0}{\nu^2(2\beta-1)|\mathbf{x}|^{2\beta-1}}=2\gamma|\mathbf{x}|. \quad (2.33)$$

Из равенств (2.29) и (2.33) очевидно, что подходящим выбором

$$\gamma=\gamma_0\equiv-\frac{R}{2\nu T}$$

можно удовлетворить обоим этим уравнениям. Тем самым мы показали, что построенное нами частное решение при $F=0$ является инстантоном, позволяющим определить тип сходимости рядов теории возмущений для функции $\mathcal{G}(T,\gamma)$ в точке $\gamma=\gamma_0$.

Подставляя $\mathbf{x}_0$ из (2.29) в (2.28), получаем окончательно

$$\mathcal{G}^{[N]}(T,\gamma_0(T))\sim\frac{\Theta(T)}{\aleph(T)}\left[-\frac{2\nu^2\gamma_0(2\beta-1)}{D_0}\right]^{N+1}\left[\frac{1-\beta}{\gamma_0}\right]^{(N+1)\beta} \quad (2.34)$$

В последней формуле мы опустили множитель N^w, определив лишь величину радиуса сходимости рассматриваемого ряда. Параметр w определяет тип особенности ряда на границе круга сходимости и может быть найден из гауссового интегрирования по флуктуациям в окрестности инстантона.

2.6. Иллюстрация метода в точно решаемом случае

Точно решаемый случай $D=D_0=\mathrm{Const}$ соответствует ситуации, когда $\beta=0$ (см. (25)). При этом результат (2.34) дает для производящего функционала $\mathcal{G}$ тот же радиус сходимости ряда $2\nu/(DT)$, что и точный ответ (2.2) для функции отклика.

Однако в предыдущем разделе мы ограничились явным вычислением лишь одного решения из семейства инстантонов (соответствующее лишь фиксированному значению $\mathbf{x}_0^2$) и строили свою схему на основании него. В точно решаемом случае мы предъявим все семейство явно, убедимся, что проведенные растяжения полей в (2.14) полностью отражают поведение всего семейства по параметру N. Также мы легко учтем вклад гауссова интегрирования по флуктуациям в окрестности инстантона, при этом удастся вычислить не только радиус сходимости, но и тип особенности на границе круга сходимости. Ответ, который мы получим в данном разделе, будет совпадать как с точным ответом (2.2), так и с радиусом сходимости, полученным в предыдущем разделе для случая $\beta = 0$. Тем самым мы еще раз убедимся, что инстантонный анализ для рядов функции $\mathcal{G}$ не отличается принципиально от анализа рядов функции отклика.

Будем выписывать зависимости переменных от N явно, не предполагая растяжений (2.14). Проекция вариационного уравнения по полю $\mathbf{c}$ на выделенное направление при этом имеет тот же вид, что и (2.21), при $D = D_0$ (когда $[Dc'] = \mathrm{Const}$) оно сразу приводит к независящему от времени полю $\mathbf{c}'$. Вариации по $\mathbf{c}'$ снова дадут (2.20), из которого теперь следует, что поле $\mathbf{c}$ также не зависит от времени и

$$\bar{\mathbf{c}} \equiv 0, \qquad \mathbf{c}' = \frac{i\mathbf{x}}{2\nu T + uD_0T^2}. \tag{2.35}$$

Вариационное уравнение по u (ср. с (2.22)) теперь приняло вид

$$\frac{\delta S}{\delta u} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = -\frac{2N}{D_0 c'^2 T^2}. \tag{2.36}$$

Совместное решение (2.35) и (2.36) дает

$$c'_{st} = \pm\sqrt{\frac{N}{\nu T}} + \frac{i|\mathbf{x}|}{4\nu T} + O(N^{-1/2}) \tag{2.37}$$

$$u_{st} = -\frac{2\nu}{DT} \pm \frac{i|\mathbf{x}|\sqrt{\nu T}}{DT^2}\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{|\mathbf{x}|^2}{4DT^2}\frac{1}{N} + O(N^{-3/2}), \tag{2.38}$$

то есть две точки стационарности. Подставляя полученные значения в действие (2.16) (правда, без растяжений переменных по N), получаем, что в точке стационарности в главном порядке по N оно имеет вид

$$S_0^{(\pm)} = -N\ln\Big[-\frac{2\nu}{DT}\Big] \pm i\mathbf{x}\sqrt{\frac{N}{\nu T}}.$$

Инстантонный анализ для функции отклика дает, таким образом,

$$G^{[N]} \sim \Theta(T)\int d\delta u\int \mathcal{D}\delta\mathbf{c}\mathcal{D}\delta\mathbf{c}'\Bigg(\exp\Big[S_0^{(+)} + S_2^{(+)}\Big] + \exp\Big[S_0^{(-)} + S_2^{(-)}\Big]\Bigg),$$

где $\delta\mathbf{c}, \delta\mathbf{c}', \delta g$ – флуктуации полей в окрестности инстантона, $S_2^{(\pm)}$ – вторая вариация действия S в соответствующих точках стационарности

$$S_2 = \int\limits_0^T d\tau\Bigg(-\nu\delta\mathbf{c}'^2(\tau) + i\delta\mathbf{c}'_i(\tau)\partial_\tau\delta\mathbf{c}_i(\tau) - \delta u\delta\mathbf{c}'_i(\tau)c'_i\Big|_{\mathbf{c}'=\mathbf{c}'_{st}}D_0T\Bigg) +$$

$$+\frac{N}{u_{st}^2}\delta u^2 - u_{st}D_0\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T d\tau d\tau'\delta\mathbf{c}'_i(\tau)\delta\mathbf{c}'_i(\tau').$$

Заметим, что во все слагаемые кроме третьего дают вклад как продольные по отношению к вектору $\mathbf{x}$ вариации полей, так и поперечные. В третьем же слагаемом имеется лишь продольный вклад, поскольку поле $\delta\mathbf{c}'$ свернуто по значкам с полем $\mathbf{c}'_{st} \parallel \mathbf{x}$.

Таким образом, после растяжения δu в $\sqrt{N}$ раз и взятия гауссова интеграла по δu (при этом зарабатываем множитель $N^{-1/2}$) вклады продольных и поперечных компонент поля оказываются разными. Поэтому при вычислении гауссова интеграла от $d-1$ поперечных компонент получим с учетом нормировки (очевидные интегрирования опущены для краткости) вклад

$$\int \mathcal{D}\delta\mathbf{c}\mathcal{D}\delta\mathbf{c}' \exp\Bigg(-\nu\delta\mathbf{c}'^2 + i\delta\mathbf{c}'\partial_\tau\delta\mathbf{c} - u_{st}D_0\delta\mathbf{c}'\delta\mathbf{c}'/2\Bigg) \sim$$
$$\sim \left[\frac{1}{4\pi T(\nu + u_{st}D_0T/2)}\right]^{(d-1)/2} \sim (e^{\mp i\pi}N)^{(d-1)/4},$$

зависимость от N появляется из-за того, что в соответствии с (2.38) величина $(\nu + u_{st}D_0T/2)$ мала. Аналогичный же вклад для продольных вариаций оказывается порядка $O(1)$.

Окончательно, инстантонный анализ для $G^{[N]}$ дает

$$G^{[N]} \sim \Theta(T)\Big(-\frac{DT}{2\nu}\Big)^N N^{\frac{d-3}{4}} \cos\Big(\sqrt{\frac{N\mathbf{x}^2}{\nu T}} + \pi\frac{1-d}{4}\Big),$$

что в ведущем порядке по N ведет себя по N, так же, как (2.2).

Таким образом, нам удалось построить семейство инстантонов модели Крейчнана с «замороженным» полем скорости и явно предъявить один из них. Мы убедились, что соответствующие ряды теории возмущений имеют конечный радиус сходимости, который в отдельных случаях становится бесконечным.

Свойства сходимости рядов данной модели могут быть использованы при их пересуммировании для улучшения численных значений, получаемых с помощью теории возмущений.

Попутно мы опровергли широко распространенное утверждение о том, что ряды оказываются асимптотическими, если число диаграмм в высоких порядках теории возмущений растет факториально и показали, что тип сходимости зависит от выбранного представления и поведения коррелятора.

Точно решаемый частный случай (см. 1, 2.6.) иллюстрирует наши расчеты и подтверждает наши результаты.

Как уже упоминалось, в данной главе мы не обсуждали регуляризацию и ренормировку теории. Асимптотики высоких порядков констант ренормировки рассматриваемой модели обсуждаются в главе 3.

ГЛАВА 3
МОДЕЛЬ ОБУХОВА-КРЕЙЧНАНА С «ЗАМОРОЖЕННЫМ» ПОЛЕМ СЛУЧАЙНОЙ СКОРОСТИ: ИНСТАНТОННЫЙ АНАЛИЗ КОНСТАНТ РЕНОРМИРОВКИ

В этой главе мы продолжаем исследовать модель Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости и на основе результатов предыдущей главы вычислим асимптотики высоких порядков констант ренормировки этой модели. Мы также приводим радиус сходимости упомянутых рядов.

3.1. Асимптотика высоких порядков констант ренормировки

В работе [39] произведен расчет констант ренормировки в модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости в двухпетлевом приближении. Приведем полученные результаты в обозначениях, принятых в статье ($u \sim \frac{\lambda_L}{\nu^2}\mu^{-d_{\lambda_L}}$, $v \sim \frac{\lambda_T}{\nu^2}\mu^{-d_{\lambda_T}}$, $d_{\lambda_L} = d_{\lambda_T} = 2 + 2\alpha - d = \varepsilon$, μ - ренормировочная масса)

$$Z_\nu = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{u-(1+2\alpha)v}{2(1+\alpha)} + \frac{[u-(1+2\alpha)v]^2}{16(1+\alpha)^3} + \\ + \frac{[-u^2+2(2+\alpha^2)uv+(1+2\alpha)v^2]}{16(1+\alpha)^3}\Big)$$

$$Z_g = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{u}{2(1+\alpha)} - \frac{u[(1-2\alpha^2)u+\alpha(1+\alpha)(1+2\alpha)v]}{16\alpha(1+\alpha)^3} + \\ + \frac{u[u+(1+2\alpha)v]}{16\alpha(1+\alpha)^2} - \frac{u[(1+2\alpha)u-v]}{16(1+\alpha)^3} - \frac{u[(1+2\alpha)u-v]}{16(1+\alpha)^3} + \\ + \frac{(1+2\alpha)uv}{16(1+\alpha)^3} + \frac{(1+2\alpha)u^2}{16(1+\alpha)^3}\Big)$$

Чтобы определить ренормировочные константы Z_ν, Z_g, продифференцируем (2.6) по ν и g соответственно [100, 101]. Вся зависимость от этих переменных содержится в G_V.

Сначала рассмотрим производную по ν (чтобы не загромождать текст, здесь опускаем нормировочный множитель):

$$\frac{\partial G_R}{\partial \nu} =$$
$$= -Z_\nu \int D\varphi D\varphi' \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\varphi'(\mathbf{x}_2, t_2) \int d\mathbf{x}_0 dt_0 \varphi'(\mathbf{x}_0, t_0)\Delta_{\mathbf{x}_0}\varphi(\mathbf{x}_0, t_0) e^{S^{msr}} =$$
$$= -Z_\nu \int d\mathbf{x}_0 dt_0 \int D\varphi D\varphi' \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\nabla\varphi'(\mathbf{x}_0, t_0)\nabla\varphi(\mathbf{x}_0, t_0)\varphi'(\mathbf{x}_2, t_2) e^{S^{msr}} =$$
$$= -Z_\nu \int d\mathbf{x}_0 dt_0 G_\nu,$$

где

$$G_\nu = \nabla_{\mathbf{x}_0}\langle\varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\varphi'(\mathbf{x}_0, t_0)\rangle\nabla_{\mathbf{x}_0}\langle\varphi(\mathbf{x}_0, t_0)\varphi'(\mathbf{x}_2, t_2)\rangle$$

Аналогично вычисляется производная по g:

$$\frac{\partial G_R}{\partial g} =$$
$$= Z_g \int D\varphi D\varphi' \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\varphi'(\mathbf{x}_2, t_2) \int d\mathbf{x}_0 dt_0 \varphi'(\mathbf{x}_0, t_0)\nabla_{\mathbf{x}_0}(V(\mathbf{x}_0)\varphi(\mathbf{x}_0, t_0)) e^{S^{msr}} =$$
$$= Z_g \int d\mathbf{x}_0 dt_0 \int D\varphi D\varphi' \Big(\varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\varphi'(\mathbf{x}_2, t_2)\nabla_{\mathbf{x}_0}\mathbf{V}(\mathbf{x}_0)\varphi(\mathbf{x}_0, t_0)\varphi'(\mathbf{x}_0, t_0) +$$
$$+ \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\varphi'(\mathbf{x}_2, t_2)\varphi'(\mathbf{x}_0, t_0)\nabla_{\mathbf{x}_0}\varphi(\mathbf{x}_0, t_0)\mathbf{V}(\mathbf{x}_0)\Big) e^{S^{msr}} =$$
$$= Z_g \int d\mathbf{x}_0 dt_0 G_g,$$

где

$$G_g = \nabla_{\mathbf{x}_0}\mathbf{V}(\mathbf{x}_0)\langle\varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\varphi'(\mathbf{x}_0, t_0)\rangle\langle\varphi(\mathbf{x}_0, t_0)\varphi'(\mathbf{x}_2, t_2)\rangle +$$
$$+ \mathbf{V}(\mathbf{x}_0)\langle\varphi(\mathbf{x}_1, t_1)\varphi'(\mathbf{x}_0, t_0)\rangle\langle\nabla_{\mathbf{x}_0}\varphi(\mathbf{x}_0, t_0)\varphi'(\mathbf{x}_2, t_2)\rangle$$

Очевидно, что после таких дифференцирований, получатся выражения, отличающиеся только предэкспоненциальными множителями. Переписав полученные выражения в лагранжевых переменных, проинтегрировав по $\mathbf{V}$ (см. Приложение 3) и совершив преобразование Фурье по $\mathbf{x}$, получаем следующие выражения для производных

$$\frac{\partial G_R}{\partial \nu} = Z_\nu \int d\mathbf{x}_0 dt_0 \int_{\mathbf{c}_1(t_0)=\mathbf{x}_0}^{\mathbf{c}_1(t_1)=\mathbf{x}_1} D\mathbf{c}_1 \int_{\mathbf{c}_2(t_0)=\mathbf{x}_0}^{\mathbf{c}_2(t_2)=\mathbf{x}_2} D\mathbf{c}_2 \int D\mathbf{c}_1' D\mathbf{c}_2' I_\nu e^S \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial G_R}{\partial g} = Z_g \int d\mathbf{x}_0 dt_0 \int_{\mathbf{c}_1(t_0)=\mathbf{x}_0}^{\mathbf{c}_1(t_1)=\mathbf{x}_1} D\mathbf{c}_1 \int_{\mathbf{c}_2(t_0)=\mathbf{x}_0}^{\mathbf{c}_2(t_2)=\mathbf{x}_2} D\mathbf{c}_2 \int D\mathbf{c}_1' D\mathbf{c}_2' I_g e^S, \qquad (3.2)$$

нормировка при $g = 0$ подразумевается, действие S имеет вид

$$S = -i\mathbf{q}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - \nu Z_\nu(\mathbf{c}_1'^2 + \mathbf{c}_2'^2) + i\mathbf{c}_1'\partial\mathbf{c}_1 + i\mathbf{c}_2'\partial\mathbf{c}_2 + Z_u S_u, \qquad (3.3)$$

нелинейная часть действия собрана в слагаемое

$$S_u = -\frac{u}{2}\Bigg(c_{1i}'(\tau_1) D_{ij}(\mathbf{c}_1(\tau_1) - \mathbf{c}_1(\tau_1'))c_{1j}'(\tau_1') + c_{2i}'(\tau_2) D_{ij}(\mathbf{c}_2(\tau_2) - \mathbf{c}_2(\tau_2'))c_{2j}'(\tau_2') + \\ + 2c_{1i}' D_{ij}(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) c_{2j}' \Bigg), \qquad u \equiv g^2.$$

Необходимые интегрирования по полевым аргументам подразумеваются здесь и в аналогичных формулах в дальнейшем. Кроме того подразумевается, что поля c_l, c_l' зависят от времени τ_l. Пределы интегрирования по времени здесь и далее

$$t_1 \le \tau_1, \tau_1' \le t_0 \le \tau_2, \tau_2' \le t_2.$$

Через I_ν обозначен результат применения к e^S операции $\partial_{c_1(t_0)}\partial_{c_2(t_0)}$, I_g соответствует операция $\mathbf{V}(c_2(t_0))\partial_{c_2(t_0)} + \partial\mathbf{V}(c_2(t_0))$.

Рассмотрим, например, расчет I_ν. Введем следующие обозначения

$$\mathbf{x}_{0_1} \equiv \mathbf{c}_1(t_0), \quad \mathbf{x}_{0_2} \equiv \mathbf{c}_2(t_0).$$

В окончательных формулах $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0_1} = \mathbf{x}_{0_2}$. Кроме того, для выделения явной зависимости действия S от x_0 произведем следующий сдвиг полей

$$\mathbf{c}_1(\tau_1) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}^{(1)}\frac{\tau_1 - t_1}{T_1} + \bar{\mathbf{c}}_1(\tau_1),$$

$$\mathbf{c}_2(\tau_2) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}^{(2)}\frac{\tau_2 - t_0}{T_2} + \bar{\mathbf{c}}_2(\tau_2).$$

Здесь для удобства введены величины

$$T_1 \equiv t_0 - t_1, \quad T_2 \equiv t_2 - t_0, \tag{3.4}$$
$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}^{(2)} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0,$$
$$x = |\mathbf{x}|, \quad x^{(1)} = |x^{(1)}|, \quad x^{(2)} = |x^{(2)}|.$$

Тогда действие S

$$S = -i\mathbf{q}\mathbf{x} - \nu Z_\nu(\mathbf{c}_1'^2 + \mathbf{c}_2'^2) + i\frac{x^{(1)}}{T_1}\int\limits_{t_1}^{t_0}\mathbf{c}_1'(\tau_1)d\tau_1 + i\frac{x^{(2)}}{T_2}\int\limits_{t_0}^{t_2}\mathbf{c}_2'(\tau_2)d\tau_2 + Z_u S_u.$$

Вычисляя необходимые производные, получим

$$\frac{\partial^2 e^S}{\partial x_{0_1}\partial x_{0_2}} = e^S\Big[Z_u\frac{\partial^2 S_u}{\partial x_{0_1}\partial x_{0_2}} + \Big\{\frac{i}{T_1}\int\limits_{t_1}^{t_0}\mathbf{c}_1'(\tau_1)d\tau_1 + Z_u\frac{\partial S_u}{\partial \mathbf{x}_{0_1}}\Big\} +$$
$$+ \Big\{-\frac{i}{T_2}\int\limits_{t_0}^{t_2}\mathbf{c}_2'(\tau_2)d\tau_2 + Z_u\frac{\partial S_u}{\partial \mathbf{x}_{0_2}}\Big\}\Big]. \tag{3.5}$$

В п. 3.3. при выводе уравнений стационарности будет показано, что $\partial S/\partial \mathbf{x}_0 \equiv 0$. Воспользуемся этим тождеством для вычисления производных S_u:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}_0} \equiv 0 = \frac{i}{T_1}\int\limits_{t_1}^{t_0}\mathbf{c}_1'(\tau_1)d\tau_1 - \frac{i}{T_2}\int\limits_{t_0}^{t_2}\mathbf{c}_2'(\tau_2)d\tau_2 + Z_u\frac{\partial S_u}{\partial \mathbf{x}_0}.$$

Выразив отсюда $Z_u\partial S_u/\partial \mathbf{x}_0$ и подставив полученное выражение в (3.5), имеем

$$I_\nu = \frac{\int dt c_1' \int dt c_2'}{T_1 T_2} + Z_u\frac{\delta^2 S_u}{\delta x_1 \delta x_2}. \tag{3.6}$$

Аналогично получим второй предэкспоненциальный множитель I_g

$$I_g = \frac{g}{\nu}\Big[\int dc_1 D'(\mathbf{c}_1 - \mathbf{x}_0) + \int dc_2 D'(\mathbf{c}_2 - \mathbf{x}_0) - \tag{3.7}$$
$$-i\int dt\frac{c_2'}{T_2}\Big(\int dc_1 D(\mathbf{c}_1 - \mathbf{x}_0) + \int dc_2 D(\mathbf{c}_2 - \mathbf{x}_0)\Big)\Big].$$

На этапе поиска инстантона предэкспоненциальные факторы несущественны, поэтому последующая часть анализа одинакова для обеих констант ренормировки. Обозначим поэтому для удобства

$$I \equiv I_g, I_\nu; \qquad Z \equiv Z_g, Z_\nu. \tag{3.8}$$

Константа ренормировки содержит полюса по ε при $\varepsilon \to 0$, которые должны устранять расходимости модели. Ренормированная функция отклика (2.6) конечна при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, выражения (3.1,3.2) также конечны; после их логарифмирования получим

$$\operatorname*{res}_{\varepsilon\to 0} \ln Z = -\operatorname*{res}_{\varepsilon\to 0} \ln \int dx_0 dt_0 G, \tag{3.9}$$

где G – составной оператор, соответствующий выражениям (3.1,3.2)

$$G = \frac{1}{\aleph(4\pi\nu\sqrt{(t_2-t_0)(t_0-t_1)})^d} \int\limits_{\mathbf{c}_1(t_0)=\mathbf{c}_2(t_0)=\mathbf{x}_0}^{\mathbf{c}_1(t_1)=\mathbf{x}_1,\ \mathbf{c}_2(t_2)=\mathbf{x}_2,} \mathcal{D}\mathbf{c}_1\mathcal{D}\mathbf{c}_2\mathcal{D}\mathbf{c}_1'\mathcal{D}\mathbf{c}_2'\ Ie^S. \tag{3.10}$$

Интегрирование по полям $\mathbf{c}_l'$ ведется со свободными граничными условиями, нормировочный множитель $\aleph$ соответствует «свободной науке» с $u=0$, а интегрирование в нем может проводиться с нулевыми граничными условиями на $\mathbf{c}_l$

$$\aleph = \int\limits_{\mathbf{c}_1(t_0)=\mathbf{c}_2(t_0)=0}^{\mathbf{c}_1(t_1)=\mathbf{c}_2(t_2)=0} \mathcal{D}\mathbf{c}_1\mathcal{D}\mathbf{c}_2\mathcal{D}\mathbf{c}_1'\mathcal{D}\mathbf{c}_2'\ \exp\left(S|_{g=0}\right). \tag{3.11}$$

Отсюда видно, что корреляционная функция с составным оператором G содержит всю информацию о полюсах константы ренормировки Z.

Ампутация внешних пропагаторов будет подразумеваться.

3.2. Инстантонный анализ

Как и в главе 1 воспользуемся описанной в п. 0.5. процедурой выделения N-того члена ряда квантово-полевой теории возмущений и используем формулу Коши (22).

Следуя методу перевала, вынесем большой параметр N в действии S с помощью следующих замен переменных интегрирования

$$\{\mathbf{c}_l, \mathbf{c}'_l\} \to \{N^{1/2}\mathbf{c}_l, N^{1/2}\mathbf{c}'_l\}, \qquad \mathbf{x} \to \sqrt{N}\mathbf{x}, \qquad u \to N^{\beta}u, \tag{3.12}$$

растяжение переменной $\mathbf{x}$ необходимо в связи со связью между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{c}_l$ в граничных условиях интегралов в (3.1, 3.2). Аналогичные замены в нормировочном множителе $\aleph$ сокращают детерминант, возникающий при такой замене.

Вычисление интегралов по $\mathbf{c}'_l$, $\mathbf{c}_l$ и u в $G^{[N]}$ будем осуществлять методом стационарной фазы. Основной вклад в $G^{[N]}$ при $N \to \infty$ дает область интегрирования в окрестности инстантона – значений $\bar{\mathbf{c}}_{st}$, $\mathbf{c}'_{st}$, u_{st}, реализующих экстремум функционала действия, т.е. решений уравнений стационарности.

Аналогично п. 2.4. симметрия модели нарушается только вектором $\mathbf{x}$, таким образом, естественно положить вектора $\mathbf{c}_l$ и $\mathbf{c}'_l$ коллинеарными $\mathbf{x}$ и искать их модули c_l и c'_l. Такое предположение было успешно использовано в инстантонном анализе обычной модели Обухова-Крейчнана [72]. При таком подходе уравнения стационарности проецируются на вектор $\mathbf{x}$, а коррелятор скорости принимает следующий вид

$$D(\mathbf{x}) = \frac{D_0}{|\mathbf{x}|^{2\beta}},$$

D_0 определено в (2.19).

Рассматриваемое действие теории сингулярно по ε вследствие присутствия констант Z_ν, Z_g в действии, а также степенного поведения коррелятора D. В [109] было показано, что соответствующие сингулярности могут корректно рассматриваться лишь в рамках теории возмущений и должны быть вынесены в предэкспоненту перед вычислением инстантонного вклада. Такое извлечение сингулярностей необходимо из-за присутствия двух больших параметров: $1/\varepsilon$, связанного с регуляризацией, и параметра метода перевала (порядка теории возмущений) N, а в рамках метода ренормализационной группы произведение $N\varepsilon$ должно рассматриваться как малое при использовании инстантонного анализа [109]. Таким образом, экспоненциальный член в (3.10) должен быть представлен в форме

$$\exp(S) = \exp(S_{reg} + S_{sing}) = \exp(S_{reg}) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(S_{sing})^p, \qquad (3.13)$$

где

$$S_{reg} = S\Big|_{\substack{Z_u=1 \\ Z_\nu=1}}, \qquad S_{sing} = -\nu(Z_\nu - 1)(\mathbf{c}'^2_1 + \mathbf{c}'^2_2) + (Z_u - 1)S_u.$$

Теперь только S_{reg} определяет инстантон. В обычной модели Крейчнана в [72] этот подход оправдывался сравнением рассчитанного радиуса сходимости с точно известными результатами.

Следует отметить, что левая и правая части равенства (3.13) под знаком интеграла $\oint du/u^{N+1}$ ведут себя существенно различно и дают разные результаты при применении метода перевала.

Ренормировочные константы Z_ν, Z_u в схеме минимальных вычитаний (minimal subtraction, MS) имеют следующий вид

$$Z = 1 + \frac{\Box u + \Box u^2 + ... + \Box u^N + ...}{\varepsilon} + \frac{\Box u^2 + \Box u^3 + ...}{\varepsilon^2} + ... \qquad (3.14)$$

Здесь $\Box$ – некоторые числовые коэффициенты. Таким образом, члены $(Z - 1)$ являются чисто сингулярными при $\varepsilon \to 0$.

Запишем уравнения стационарности на c_1 и c'_1 спроецированные на вектор $\mathbf{x}$

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{c}_1(\zeta)} = 0 \quad \Rightarrow \quad uc'_1(\zeta)\partial_\zeta\left([D_{11}c'_1](\zeta) + [D_{12}c'_2](\zeta)\right) = -i\partial_\zeta c'_1 \partial_\zeta c_1, \qquad (3.15)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{c}'_1(\zeta)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\nu c'_1(\zeta) + i\partial_\zeta c_1(\zeta) - u([D_{11}c'_1](\zeta) + [D_{12}c'_2](\zeta)) = 0, \qquad (3.16)$$

где

$$[D_{lk}c'_k](\zeta) \equiv \int d\tau_k D(\mathbf{c}_l(\zeta) - \mathbf{c}_k)c'_k, \quad l,k = 1,2.$$

Вклад интегральных операторов в (3.15) может быть исключен с помощью уравнения (3.16) следующим образом: продифференцируем (3.16) по времени ζ

$$\partial_\zeta \frac{\delta S}{\delta \mathbf{c}'_1(\zeta)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\nu\partial_\zeta c'_1 + i\partial^2_\zeta c_1 - u\partial_\zeta\left([D_{11}c'_1] + [D_{12}c'_2]\right) = 0,$$

выразим $u\partial_\zeta([D_{11}c'_1] + [D_{12}c'_2])$ и подставим в (3.15)

$$i\partial^2_\zeta c_1 - 2\nu\partial_\zeta c'_1 + i\frac{\partial_\zeta c'_1 \partial_\zeta c_1}{c'_1(\zeta)} = 0. \tag{3.17}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение второго порядка, которое может быть решено относительно $\partial_\zeta c_1(\zeta)$. Аналогичные вычисления можно провести и для поля c_2.

Решение уравнение (3.17), дает первый интеграл движения

$$\partial_\zeta c_l(\zeta) = \frac{F}{c'_l(\zeta)} - i\nu c'_l(\zeta), \qquad l = 1,2$$

в котором содержится произвольный параметр F, каждому значению которого соответствует частное решение со своими граничными условиями. Дальнейшие вычисления не могут быть проведены аналитически для произвольных F. Не смотря на это, в простейшем случае $F = 0$ удается найти инстантон, который, к счастью, определяет асимптотическое поведение исследуемых констант ренормировки.

3.3. Частное решение

Рассмотрим частное решение уравнений (3.17) при $F = 0$ и найдем для него граничные условия. Подставим решения

$$c'_l(\zeta) = \frac{i\partial_\zeta c_l}{\nu}, \qquad l = 1,2 \tag{3.18}$$

в вариационные уравнения по $\mathbf{c}'_l$ (3.15, 3.16).

$$\partial_\zeta c_1(\zeta) = -\frac{u}{\nu}\Big(\int\limits_{t_1}^{t_0} d\zeta' D(\mathbf{c}_1(\zeta) - \mathbf{c}_1(\zeta'))\partial_{\zeta'} c_1(\zeta') + \int\limits_{t_0}^{t_2} d\zeta' D(\mathbf{c}_1(\zeta) - \mathbf{c}_2(\zeta'))\partial_{\zeta'} c_2(\zeta')\Big).$$

Используем тождество $d\tau_l \partial c_l = dc_l$

$$\partial_\zeta c_1(\zeta) = -\frac{u}{\nu}\Big(\int\limits_{x_1}^{x_0} dz D(\mathbf{c}_1(\zeta) - z) + \int\limits_{x_0}^{x_2} dz D(\mathbf{c}_1(\zeta) - z)\Big)$$

и перепишем результат в следующем виде

$$-\partial_\zeta c_l = \frac{u}{\nu}\int\limits_{x_1}^{x_2} D(\mathbf{c}_l(\zeta) - z)dz, \qquad l = 1, 2.$$

Последнее дифференциальное уравнение может быть с легкостью проинтегрировано, что приводит к решению на поля $c_l(\zeta)$ в квадратурах

$$\int\limits_{x_1}^{c_1(\zeta)} \frac{dc}{\int_{x_1}^{x_2} D(\mathbf{c} - \mathbf{z})dz} = -\frac{u(\zeta - t_1)}{\nu},$$
$$\int\limits_{x_0}^{c_2(\zeta)} \frac{dc}{\int_{x_1}^{x_2} D(\mathbf{c} - \mathbf{z})dz} = -\frac{u(\zeta - t_0)}{\nu}. \qquad (3.19)$$

Отметим, что интегралы в последних формулах понимаются в смысле аналитической регуляризации и, таким образом, сингулярность в $\mathbf{z} = \mathbf{c}$ устраняется.

Подставим явное выражение коррелятора скорости $D(\mathbf{c}) = D_0/|\mathbf{c}|^{2\beta}$ (2.18) в (3.19) и получим искомые граничные условия (см. Приложение 2)

$$\frac{1}{T_1}\int\limits_0^{x^{(1)}/x} f(v)dv = \frac{uD_0}{x^{2-\varepsilon}(1-\varepsilon)\nu} = \frac{1}{T_2}\int\limits_0^{x^{(2)}/x} f(v)dv, \qquad (3.20)$$

где введена следующая функция $f(v)$

$$f(v) = \frac{v^{1-\varepsilon}(1-v)^{1-\varepsilon}}{v^{1-\varepsilon} + (1-v)^{1-\varepsilon}}.$$

Отсюда видно, что случай $F = 0$ дает решение для полей $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ в квадратурах (3.19).

Исходная задача состоит в расчете F по граничным условиям, определяемыми переменной $\mathbf{x}(T)$ и последующем построении инстантона. Уравнение (3.20) дает ответ в частном случае с конкретным значением $|\mathbf{x}|$.

Наша основная идея заключается в использовании независимости рассматриваемых констант ренормировки от импульса $\mathbf{q}$. Включим переменные $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$, t_0 в метод перевала, выберем импульс $\mathbf{q}$ таким образом, чтобы решение уравнения стационарности на $\mathbf{x}$ в точности совпадало с результатом, полученным посредством граничного условия (3.20), соответствующего случаю $F = 0$. Тогда мы сможем использовать полученное аналитически частное решение и решить задачу без использования численных расчетов.

Рассмотрим уравнения стационарности на $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$, t_0. Для этого вычислим действие на стационарных значениях полевых переменных (3.18). Тогда $S_{st} = -i\mathbf{q}\mathbf{x} + S_{u_{st}}$, где

$$
\begin{aligned}
S_{u_{st}} = -\frac{u}{2}\Big[\int\limits_{t_1}^{t_0} d\tau_1 d\tau_1' c_1'(\tau_1) D(\mathbf{c}_1(\tau_1) - \mathbf{c}_1(\tau_1'))c_1'(\tau_1') + \\
+ \int\limits_{t_0}^{t_2} d\tau_2 d\tau_2' c_2'(\tau_2) D(\mathbf{c}_2(\tau_2) - \mathbf{c}_2(\tau_2'))c_2'(\tau_2') + \\
+ 2\int\limits_{t_1}^{t_0} d\tau_1 \int\limits_{t_0}^{t_2} d\tau_2 c_1'(\tau_1) D(\mathbf{c}_1(\tau_1) - \mathbf{c}_2(\tau_2))c_2'(\tau_2)\Big] = (\text{учитывая } 3.18) \\
= \frac{u}{2\nu^2}\Big[\int\limits_{x_1}^{x_0} dx dy D(x-y) + \int\limits_{x_0}^{x_2} dx dy D(x-y) + 2\int\limits_{x_1}^{x_0} dx \int\limits_{x_0}^{x_2} dy D(x-y)\Big] = \\
= \frac{u}{2\nu^2}\int\limits_{x_1}^{x_2} dx dy D(x-y).
\end{aligned}
$$

Итого, для действия S_{st} имеем

$$S_{st} = -i\mathbf{qx} + \frac{u}{2\nu^2}\int\limits_{x_1}^{x_2} dxdyD(x-y).$$

Вычисляя интеграл аналогично Приложению 2, окончательно получим

$$S_{st} = -i\mathbf{qx} - \frac{uD_0}{\nu^2\varepsilon(1-\varepsilon)}x^{\varepsilon}. \tag{3.21}$$

Для действия (3.21) в случае $F = 0$ легко написать уравнения стационарности по $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$, t_0

$$\frac{\delta S}{\delta t_0} \equiv 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{x}_0} \equiv 0 \tag{3.23}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{iq\nu^2}{u} = \int\limits_0^x D(z)dz. \tag{3.24}$$

Кроме того необходимо учесть граничные условия (3.20), вытекающие из выбора частного решения при $F = 0$. Отметим, что нетривиальное уравнение стационарности на $\mathbf{x}_0$ оказывается нулевым при $F = 0$.

Решив уравнение (3.24), получим стационарное значение q для случая $F = 0$

$$q = q_0 = \frac{iD_0u}{(1-\varepsilon)x^{1-\varepsilon}\nu^2}, \qquad x^{2-\varepsilon} = x_{st}^{2-\varepsilon} = \frac{uD_0T/2}{(1-\varepsilon)\nu\int\limits_0^{1/2} f(v)dv}. \tag{3.25}$$

Действие S (3.3) в точке стационарности при $Z_\nu = 1$, $Z_u = 1$

$$S_{st} = -iq_0x_{st} - \frac{uD_0x_{st}^{\varepsilon}}{\nu^2\varepsilon(1-\varepsilon)} = -\frac{uD_0x_{st}^{\varepsilon}}{\nu^2\varepsilon}. \tag{3.26}$$

Что касается предэкспоненциальных факторов (3.1), (3.2) в точке стационарности, то для дальнейшего анализа нам будет достаточно указать, что

$$I_\nu \sim 1/x^{2-2\varepsilon}, \qquad I_g \sim 1/x^{2-\varepsilon}.$$

В данной задаче удобно перейти в импульсно-частотное представление. Это добавляет дополнительное интегрирование по переменной T. Численное значение частоты не играет роли при вычислении констант ренормировки, так что положим частоту равной нулю.

3.4. Выделение простых полюсов по ε

Из равенства (3.9) очевидно, что простые полюса по ε в G содержат всю необходимую информацию о полюсах ренормировочных констант Z, скейлинговые размерности, в свою очередь, определяются вычетами в простых полюсах по ε констант ренормировки.

Из $D_0(\varepsilon) = a_1 + a_2$ (2.18) и (26) следует, что функцию $D_0(\varepsilon)$ можно представить в форме

$$D_0(\varepsilon) \equiv A + \varepsilon B(\varepsilon), \quad B(\varepsilon) = B_0 + B_1\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{3.27}$$

Тогда можно переписать действие (3.26)

$$S_{st} = -\frac{uA}{\nu^2\varepsilon} - \frac{uA(x_{st}^{\varepsilon} - 1)}{\nu^2\varepsilon} - \frac{uB(\varepsilon)x_{st}^{\varepsilon}}{\nu^2}. \tag{3.28}$$

Поскольку первый член этого выражения сингулярен при $\varepsilon \to 0$, то, как было показано в разделе 3.2. его необходимо вынести предэкспоненциальным множителем аналогично (3.13). Второй член также сингулярен при малых ε вследствие его логарифмического поведения по x_{st} (доказательство этого факта приведено в конце этого раздела). В результате, единственным регулярным вкладом в действие S_{st} (3.28) остается только третий член. Перепишем (3.13) с учетом следующих переобозначений $S_{reg} \to \bar{S}_{reg}$, $S_{sing} \to \bar{S}_{sing}$

$$\bar{S}_{sing} = S_{sing} - \frac{uA}{\nu^2 \varepsilon} - \frac{uA(x_{st}^{\varepsilon} - 1)}{\nu^2 \varepsilon}.$$

Подставляя x_{st} (3.25) в регулярную часть действия (3.28), получим

$$\bar{S}_{reg} = (uT^{\varepsilon/2})^{2/(2-\varepsilon)} P(\varepsilon),$$

$$P(\varepsilon) \equiv -\frac{B(\varepsilon)}{\nu^2} \left(\frac{D_0}{(1-\varepsilon)\nu 2 \int_0^{1/2} f(v) dv} \right)^{\varepsilon/(2-\varepsilon)}. \quad (3.29)$$

Тогда исследуемый составной оператор принимает следующий вид

$$G^{[N]} = N^{-N(1-\varepsilon)} \oint \frac{du}{u^{N+1}} \int dT \mathcal{Z}(T, u, \varepsilon) \exp(N \bar{S}_{reg}(\varepsilon, T)) \times$$
$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\bar{S}_{sing})^p (1 + O(N^{-1})). \quad (3.30)$$

Здесь множитель $\mathcal{Z}$ включает I (3.8) в точке стационарности и вклад от флуктуационного интеграла с нормировочным множителем $\aleph$. $O(N^{-1})$ показывает точность вычислений при $N \to \infty$.

Рассматриваемая ампутированная функция Грина составного оператора должна быть безразмерной. Для того чтобы учесть этот факт выделим необходимый множитель T^{-1} из $\mathcal{Z}$. Тогда интеграл по T расходится логарифмически, вследствие чего он не может быть исследован с помощью метода стационарной фазы. Аналогичная ситуация возникает в хорошо изученной методами инстантонного анализа статической модели ϕ^4, в которой роль расходящегося параметра интегрирования T играет масштабный параметр в координатном пространстве. [61, 109]

Введем новую безразмерную переменную

$$\bar{u} \equiv uT^{\varepsilon/2}$$

Тогда выражение

$$G^{[N]}=N^{-N(1-\varepsilon)}\int\frac{dT}{T^{1-N\varepsilon/2}}\oint\frac{d\bar{u}}{\bar{u}}\mathcal{Z}(\bar{u},\varepsilon)\times$$
$$\times\exp\Big(N\Big[P(\varepsilon)\bar{u}^{\frac{2}{2-\varepsilon}}-\ln\bar{u}\Big]\Big)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(\bar{S}_{sing})^{p}(1+O(N^{-1}))\quad(3.31)$$

может быть проинтегрировано по T в УФ области (малые T), что даст простой полюс $2/(N\varepsilon)$. Сходимость интеграла при больших значениях T обеспечивается предполагаемой ИК регуляризацией. Отметим, что множитель $\mathcal{Z}$ не дает вклада в уравнения стационарности, поскольку не зависит от N. Также, этот множитель не изменяет простой полюс $N\varepsilon$, по крайней мере, в главном порядке по $1/N$.

Кроме того, отметим, что различие на ε размерностей I_g и I_ν здесь становится несущественным по сравнению с $\bar{u}^N\sim T^{N\varepsilon/2}$ множителем, поэтому разложение констант ренормировки Z_g и Z_ν имеют однотипные асимптотики высоких порядков.

Исследуем интеграл по $\bar{u}$ методом перевала. Уравнения стационарности имеют следующий вид

$$\frac{\partial\Big[P(\varepsilon)\bar{u}^{\frac{2}{2-\varepsilon}}-\ln\bar{u}\Big]}{\partial\bar{u}}=0,\qquad\text{откуда}\qquad\bar{u}_{st}^{\frac{2}{2-\varepsilon}}=\frac{1-\varepsilon/2}{P(\varepsilon)}.$$

Таким образом, в главном порядке по N

$$G^{[N]}=C(\varepsilon)N^{-N(1-\varepsilon)+\rho}\frac{2}{N\varepsilon}e^{(\varepsilon/2-1)}\Big(\frac{P(\varepsilon)e}{1-\varepsilon/2}\Big)^{(N+1)(1-\varepsilon/2)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(\bar{S}_{sing})^{p}.$$

Множитель $C(\varepsilon)N^\rho$ появляется из вклада $\mathcal{Z}(\bar{u}_{st},\varepsilon)$ и флуктуационного интеграла по $\bar{u}$, ρ – константа.

Обсудим расходимости по ε. Простые полюса по ε могут появиться при умножении высших полюсов предэкспоненциального множителя $\bar{S}_{sing}$ на регулярные по $N\varepsilon$ вклады экспоненциального члена $\exp(S_{reg}(\varepsilon))$. Таким образом, в выбранной схеме минимальных вычитаний все члены суммы за исключением $p = 0$ дают такой же вклад в результат, как и все коэффициенты в (3.14). Мы избавимся от этих членов с помощью конечной ренормировки. Растянем параметр разложения

$$uD_0(\varepsilon) \to \varkappa(\varepsilon) u D_0(\varepsilon).$$

Эта ренормировка эквивалентна растяжению коррелятора скорости и, следовательно, не влияет на скейлинговые размерности. Выберем $\varkappa(\varepsilon)$ таким образом, чтобы регулярная часть действия потеряла зависимость от $N\varepsilon$

$$\left(\frac{P(\varepsilon)e}{1-\varepsilon/2}\right)^{(1-\varepsilon/2)} \to \left(\frac{P(\varepsilon)e}{1-\varepsilon/2}\right)^{(1-\varepsilon/2)}\Bigg|_{\varepsilon=0} \equiv K_0.$$

Отсюда очевидно, что

$$K_0 = -\frac{B_0 e}{\nu^2} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

После замены переменных получим следующее уравнение на $\varkappa$

$$\frac{\varkappa D - A}{\varepsilon}\varkappa^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} = L(\varepsilon), \tag{3.32}$$

где

$$L(\varepsilon) \equiv -\frac{2-\varepsilon}{2}\frac{\nu^2}{e}K_0^{\frac{2}{2-\varepsilon}}\left(\frac{D_0}{2\nu(1-\varepsilon)\int_0^{1/2} f(v)dv}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \tag{3.33}$$

Вычислим $\varkappa$ в виде ряда по ε

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1\varepsilon + \varkappa_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{3.34}$$

Раскладывая левую и правую части уравнения (3.32) по ε, получим с точностью до $O(\varepsilon^3)$

$$A(\varkappa_0-1)+\varepsilon\Big[A\varkappa_1+B_0\varkappa_0+A(\varkappa_0-1)\frac{\ln\varkappa_0}{2}\Big]+$$
$$+\varepsilon^2\Big[A(\varkappa_0-1)\frac{\varkappa_1}{2\varkappa_0}+B_1\varkappa_0+B_0\varkappa_1+A\varkappa_2+(B_0\varkappa_0+A\varkappa_1)\frac{\ln\varkappa_0}{2}+$$
$$+\frac{A(\varkappa_0-1)}{4}(\ln\varkappa_0+\frac{\ln^2\varkappa_0}{2})\Big]=$$
$$=B_0\varepsilon-\frac{B_0}{2}\ln\frac{6A\nu}{-B_0}\varepsilon^2.$$

Отсюда получаем систему на коэффициенты (3.34)

$$\begin{cases} A(\varkappa_0-1)=0\\ A\varkappa_1+B_0\varkappa_0+A(\varkappa_0-1)\frac{\ln\varkappa_0}{2}=B_0\\ A(\varkappa_0-1)\frac{\varkappa_1}{2\varkappa_0}+B_1\varkappa_0+B_0\varkappa_1+A\varkappa_2+(B_0\varkappa_0+A\varkappa_1)\frac{\ln\varkappa_0}{2}+\\ +\frac{A(\varkappa_0-1)}{4}(\ln\varkappa_0+\frac{\ln^2\varkappa_0}{2})=-\frac{B_0}{2}\ln\frac{6A\nu}{-B_0}, \end{cases} \tag{3.35}$$

из которой имеем

$$\varkappa(\varepsilon)=1+\Big(\frac{B_0}{2A}\ln\frac{-B_0}{6A\nu}-\frac{B_1}{A}\Big)\varepsilon^2+O(\varepsilon^3),$$

где A, B_0, B_1 определены в (3.27). После этого масштабирования все полюса по ε из суммы по p перестают давать вклады в простой полюс. В результате обсуждаемая расходимость дает следующее асимптотическое поведение

$$\operatorname*{res}_{\varepsilon\to 0} G^{[N]}=\mathrm{Const}N^{Const}K_0^N/N!,\qquad N\to\infty,$$

соответствующее конечному радиусу сходимости ряда теории возмущений функции G.

В завершение раздела покажем, что второй член (3.28) не изменяет полученного ответа. Действительно, его поведение по x является логарифмическим. Тогда, наличие дополнительного множителя $\ln x\sim\ln T$ (3.25) в (3.31) эквивалентно действию операции $d/d(N\varepsilon)$ на $T^{N\varepsilon/2}$ в (3.31), которая не может породить простой полюс по ε, поскольку рассматриваемое выражение не содержит логарифмических по ε вкладов. Детально этот вопрос был рассмотрен для сходной задачи в [109].

Следующим шагом при изучении асимптотик констант ренормировки будет расчет $\ln G(u)$, выделение расходимости N-го порядка теории возмущений при $\varepsilon = 0$ и рассмотрение формулы (3.9).

3.5. Метод реплик

Одним из простейших способов представить логарифм произвольного интегрального выражения в интегральной форме является метод реплик [62, 110, 111], основанный на следующей формуле

$$\ln \int dT f(T) = \lim_{r\to 0} \frac{\partial}{\partial r} \prod_{\alpha=0}^{r-1} \int dT_\alpha f(T_\alpha). \tag{3.36}$$

В результате, переменная T становится r-мерным вектором в репличном пространстве [62]. Воспользовавшись этой формулой по отношению к функции G, получим выражение сходное с (3.30), в котором интегралы должны быть переписаны в виде

$$\oint \frac{du}{u^{N+1}} \int (\prod_{\alpha=0}^{r-1} dT_\alpha) \exp(N\bar{S}_{reg}) \mathcal{Z}(\{T_\alpha\}_{\alpha=0}^{r-1}), \tag{3.37}$$

$$\bar{S}_{reg} = \sum_{\alpha=0}^{r-1} (uT_\alpha^{\varepsilon/2})^{2/(2-\varepsilon)} P(\varepsilon),$$

здесь множитель $\mathcal{Z}$ зависит от репличных переменных $\{T_\alpha\}$. Тем не менее, известно, что выражение, исследуемое с помощью метода реплик также безразмерно из-за наличия вклада $\mathcal{Z}$. Кроме того, выражение при малых r должно быть пропорционально r. В этом случае операция $\lim\limits_{r\to 0} \partial/\partial r$ в (3.36) даст нетривиальный конечный результат.

Очевидно, что метод перевала не может быть применен во всех интегралах (3.37): по крайней мере, один из исследуемых интегралов имеет не стацфазную структуру. Мы наблюдали аналогичную ситуацию в предыдущем разделе в случае интеграла по T.

Допустим, мы исключили из рассмотрения методом перевала интеграл по T_0. Набор оставшихся переменных $\{T_\alpha\}_{\alpha=1}^{r-1}$ имеет нулевое решение в точке стационарности, и, таким образом, стационарное решение для u_{st} зависит только от T_0. Поскольку T_0 было выбрано произвольным образом, то фактически мы построили r идентичных инстантонов в репличном пространстве, что приводит к появлению множителя r, который позволяет корректно провести операцию $\lim\limits_{r\to 0}\partial/\partial r$.

Интегрирование по T_0 должно быть рассмотрено аналогично интегрированию по T в предыдущем разделе, что приведет к тому же результату

$$\operatorname*{res}_{\varepsilon\to 0}\ln Z = Const N^{Const} K_0^N/N!, \qquad N\to\infty. \tag{3.38}$$

Вычисление $Const$ в этой формуле не может быть произведено без явного вычисления функционального интеграла, но эта задача выходит за рамки диссертации.

Таким образом, асимптотическая форма (3.38) доказывает, что исследуемые ряды имеют конечный радиус сходимости.

В принципе, функция $\ln Z$ может содержать сингулярности, которые лежат внутри найденного нами радиуса сходимости, однако соответствующие вклады принципиально находятся вне рамок метода перевала в функциональном интеграле.

ГЛАВА 4
МОДЕЛЬ ОБУХОВА-КРЕЙЧНАНА С «ЗАМОРОЖЕННЫМ» ПРОДОЛЬНЫМ ПОЛЕМ СЛУЧАЙНОЙ СКОРОСТИ: ИНСТАНТОННЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДЕЛА СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

4.1. Асимптотика сильной связи в модели с продольным коррелятором скорости

В настоящей главе мы исследуем асимптотику сильной связи модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем случайной скорости.

Асимптотика сильной связи – сложная и интересная проблема, исследуемая в различных областях физики. Эта проблема характерна для задач с сильным взаимодействием, то есть для задач, в которых константа (константы) взаимодействия больше 1, вследствие чего исследование подобных моделей не может производиться методами теории возмущений. Приведем несколько примеров теорий, в которых важную роль играет изучение предела сильной связи.

В первую очередь стоит отметить квантовую хромодинамику, описывающую сильные взаимодействия элементарных частиц.

Также стоит вспомнить о модели φ^4, описывающей фазовый переход второго рода, в которой предел сильной связи интересен сам по себе [112, 113], кроме того, проводилось множество различных исследований. Об актуальности данной проблемы говорит, например, ряд работ опубликованных в последнее время (см. [114, 115, 116, 117] и ссылки в них), в которых ведется активная дискуссия по изучению асимптотики функции Гелл-Манна-Лоу (ФГЛ) $\beta(g)$ при $g \to \infty$. ФГЛ определяет поведение инвариантного заряда на малых расстояниях. Работы посвящены восстановлению ФГЛ по ее асимптотическому ряду, первые члены которого вычислены по теории возмущений и выявлению интервала значений константы g для получения корректного значения ФГЛ.

Еще одной областью изучения предела сильной связи является эффект Кондо [118]. Кондо эффект – аномальная температурная зависимость электросопротивления сплавов немагнитных металлов (Cu, Al, Ag, La, Lu и др.) с небольшим количеством магнитных примесей - атомов переходных (Fe, Cr, Co, V) или редкоземельных (Ce, Yb, Tm) элементов. Аномалия состоит в том, что при понижении температуры электросопротивление таких сплавов сначала убывает по закону, типичному для немагнитных металлов, а затем при некоторой характерной температуре (температура Кондо) проходит через минимум и далее остаётся конечным при приближении к абсолютному нулю. Эффект Кондо имеет квантовый характер и обусловлен антиферромагнитным обменным взаимодействием электронов проводимости немагнитного металла с магнитными примесями - атомами с незаполненными d- или f-электронными оболочками, ионы которых в металле обладают магнитными моментами. Аномальные явления объясняются тем, что амплитуда обменного рассеяния электронов проводимости на примеси, приводящего к изменению проекции магнитного момента примеси на направление спина электронов, эффективно растёт с понижением температуры. В результате роста эффективного взаимодействия электроны проводимости создают повышенную спиновую плотность вокруг атома примеси и полностью компенсируют её магнитный момент. Вследствие этого при понижении температуры атом примеси теряет магнитный момент и примесный вклад в электросопротивление возрастает. Явление роста интенсивности взаимодействия приводит к проблеме сильной связи.

Асимптотика сильной связи в квантовой теории поля – сложная и интересная проблема (см., например, [119], где методом пересуммирования ищется такая для теории ϕ^4). В данном случае проблема сильной связи может быть решена методом инстантонного анализа.

Выше представленное исследование было ориентировано на стандартный РГ подход к исследованию ИК асимптотик корреляционных функций в рамках регулярного ε разложения [100].

Выведем уравнение ренормализационной группы для задачи (23) с коррелятором скорости (24). Будем рассматривать функцию отклика $G \equiv G_\nu$ (см. п. 3.1.). В рассматриваемом случае ренормированная функция отклика имеет зависимость от следующих переменных

$$G_R = G_R(u, \nu).$$

Тогда при действии оператора

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu = \mathcal{D}_\mu + \sum_e (\tilde{\mathcal{D}}_\mu e)\partial_e, \qquad \mathcal{D}_\mu \equiv \mu\partial_\mu,$$

$e = \{u \equiv g^2, \nu\}$, μ - ренормировочная масса, получаем

$$[\mathcal{D}_\mu + \tilde{\mathcal{D}}_\mu \nu \partial_\nu + \tilde{\mathcal{D}}_\mu u \partial_u] G_R = 0.$$

Вводя по определению

$$\beta_u(u) \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu u$$

и

$$\gamma_\nu = \frac{\tilde{\mathcal{D}}_\mu \nu}{\nu} \tag{4.1}$$

имеем

$$[\mathcal{D}_\mu + \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu + \beta_u \partial_u] G_R = 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{D}_\nu \equiv \nu\partial_\nu. \tag{4.2}$$

Запишем масштабное уравнение по импульсу и времени. В действие (2.4) входит оператор $\partial_t - \nu\Delta$. Тогда, стандартно принимая канонические размерности

$$d_q = -d_x = 1, \qquad d_\omega = -d_t = 1$$

получим $d_t \nu = -d_t = 1$, $d_q \nu = -2d_q = -2$ и масштабные уравнения по q и t, соответственно

$$[\mathcal{D}_\mu + \mathcal{D}_q - 2\mathcal{D}_\nu] G_R = 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{D}_q \equiv \mathbf{q}\partial_{\mathbf{q}}$$

$$[-\mathcal{D}_t + \mathcal{D}_\nu]G_R = 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{D}_t \equiv t\partial_t.$$

Исключая из этих уравнений $\mathcal{D}_\nu$, получим

$$[\mathcal{D}_\mu + \mathcal{D}_q - 2\mathcal{D}_t]G_R = 0$$

и, учитывая (4.2), имеем уравнение РГ

$$\Big[(2+\gamma_\nu)\mathcal{D}_t - \mathcal{D}_q + \beta_u\partial_u\Big]G_R = 0.$$

Рассмотрим ренормировку коэффициента диффузии

$$\nu_0 = \nu Z_\nu,$$

где ν_0 - затравочный (неренормированный) коэффициент диффузии, ν - ренормированный коэффициент диффузии, Z_ν - константа ренормировки. Подействуем на это выражение оператором $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$. Левая часть равенства даст 0

$$0 = Z_\nu \tilde{\mathcal{D}}_\mu \nu + \nu \tilde{\mathcal{D}}_\mu Z_\nu. \tag{4.3}$$

Из уравнения (4.3) очевидно

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \nu = -\frac{\nu \tilde{\mathcal{D}}_\mu Z_\nu(g)}{Z_\nu} = -\frac{\nu \beta_u \partial_u Z_\nu(g)}{Z_\nu} = -\nu\beta_u\partial_u \ln Z_\nu,$$

откуда, учитывая (4.1) имеем

$$\gamma_\nu = -\beta_u \partial_u \ln Z_\nu. \tag{4.4}$$

Таким образом, логарифмы констант ренормировки определяют γ - функции – коэффициенты уравнения РГ, а их значения в ИК-устойчивой фиксированной точке $u_* \sim \varepsilon$ позволяет получить скейлинговые размерности параметров теории. Однако для рассматриваемой модели (23) с продольным коррелятором скорости известно [97], что независимо от порядка теории возмущений для β–функции справедливо $\beta = -\varepsilon u$ (откуда

$\gamma_\nu = \varepsilon u \partial_u \ln Z_\nu$). Следовательно, в модели отсутствует ИК устойчивая фиксированная точка, инвариантный заряд в ИК асимптотике стремится к бесконечности. Часто в таких случаях принято говорить, что в системе имеет место фазовый переход первого рода, и РГ подход неприменим.

Действительно, в рассматриваемом случае уравнение РГ определяет инвариантный коэффициент диффузии $\bar{\nu}$ как

$$\bar{\nu} = \nu \exp\left(\int_0^t \gamma_\nu(\bar{u}(\tau))d\tau\right),$$

где $\bar{u}$ – инвариантный заряд, $s \equiv q/\mu$, $t \equiv \ln s$, $t \to -\infty$ в ИК области.

Учитывая определение инвариантного заряда $\partial_t \bar{u} = \beta(\bar{u})$ и начальное условие $\bar{u}|_{t=0} = u$, данное выражение с помощью замен

$$\bar{u}(\tau) = f \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{d\tau}d\tau = df \Rightarrow d\tau = \frac{df}{\beta(\bar{u})} = \frac{df}{-\varepsilon f},$$

$$[0;t] \to [u, \bar{u}]$$

может быть приведено к виду

$$\bar{\nu} = \nu \exp\left(-\int_u^{\bar{u}} \frac{\gamma_\nu(f)df}{\varepsilon f}\right). \tag{4.5}$$

В области, где импульсы q порядка величины μ (т.е. при малых $|t|$) инвариантный коэффициент диффузии совпадает с обычным. Нас будет интересовать область малых импульсов, когда $\bar{u} \to \infty$.

Вследствие $\gamma_\nu(u) \sim u$ при малых u, подынтегральное выражение (4.5) не расходится, поведение $\bar{\nu}$ определяется асимптотикой γ_ν при больших u, т.е. так называемой асимптотикой сильной связи.

Чтобы определить асимптотику константы Z_ν при больших значениях константы связи u, используем (3.9)

$$\operatorname*{res}_{\varepsilon\to 0} \ln Z = -\operatorname*{res}_{\varepsilon\to 0} \ln \int dx_0 dt_0 G$$

с G, определенным из (3.1)

$$\frac{\partial G_R}{\partial \nu} = Z_\nu \int d\mathbf{x}_0 dt_0 \int_{\mathbf{c}_1(t_0)=\mathbf{x}_0}^{\mathbf{c}_1(t_1)=\mathbf{x}_1} D\mathbf{c}_1 \int_{\mathbf{c}_2(t_0)=\mathbf{x}_0}^{\mathbf{c}_2(t_2)=\mathbf{x}_2} D\mathbf{c}_2 \int D\mathbf{c}'_1 D\mathbf{c}'_2 I_\nu e^S$$

и вынесем большой параметр из действия. Для этого достаточно в действии S (3.3)

$$S = -i\mathbf{q}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - \nu Z_\nu(\mathbf{c}_1'^2 + \mathbf{c}_2'^2) + i\mathbf{c}'_1\partial\mathbf{c}_1 + i\mathbf{c}'_2\partial\mathbf{c}_2 + Z_u S_u,$$

$$S_u = -\frac{u}{2}\Bigg(c'_{1i}(\tau_1)D_{ij}(\mathbf{c}_1(\tau_1) - \mathbf{c}_1(\tau'_1))c'_{1j}(\tau'_1) + c'_{2i}(\tau_2)D_{ij}(\mathbf{c}_2(\tau_2) - \mathbf{c}_2(\tau'_2))c'_{2j}(\tau'_2) + \\ + 2c'_{1i}D_{ij}(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2)c'_{2j}\Bigg), \qquad u \equiv g^2$$

сделать следующие замены переменных:

$$\mathbf{c}_l, \mathbf{c}'_l \to u^{1/(2-\varepsilon)}\mathbf{c}_l, \mathbf{c}'_l, \quad \mathbf{x} \to u^{2/(2-\varepsilon)}\mathbf{x}.$$

После этих преобразований действие принимает вид $u^{2/(2-\varepsilon)}S|_{u=1}$. Легко увидеть, что уравнения стационарности и их решения будут теми же, как и в разделе 3.2. за исключением того, что теперь нужно положить $u = 1$, и величина u не является переменной интегрирования.

Вследствие (3.25, 3.26), действие в точке стационарности имеет вид

$$S_{st} = -\frac{D_0 x_{st}^\varepsilon}{\nu^2\varepsilon} = -\frac{D_0}{\nu^2\varepsilon}\Big[\frac{D_0 T}{(1-\varepsilon)2\nu\int_0^{1/2} f(v)dv}\Big]^{\varepsilon/(2-\varepsilon)}. \tag{4.6}$$

Формула (3.28) примет вид

$$S_{st} = -\frac{A}{\nu^2\varepsilon} - \frac{A(x_{st}^\varepsilon - 1)}{\nu^2\varepsilon} - \frac{B(\varepsilon)x_{st}^\varepsilon}{\nu^2}. \tag{4.7}$$

По тем же соображениям разобьем действие на регулярный и сингулярный вклады, $S_{reg} \to \bar{S}_{reg}$, $S_{sing} \to \bar{S}_{sing}$

$$\bar{S}_{sing} = S_{sing} - \frac{A}{\nu^2\varepsilon} - \frac{A(x_{st}^\varepsilon - 1)}{\nu^2\varepsilon},$$

$$\bar{S}_{reg} = T^{\varepsilon/(2-\varepsilon)} P(\varepsilon), \qquad P(\varepsilon) \equiv -\frac{B(\varepsilon)}{\nu^2} \left(\frac{D_0}{(1-\varepsilon)\nu 2 \int_0^{1/2} f(v)dv} \right)^{\varepsilon/(2-\varepsilon)}.$$

Тогда исследуемый составной оператор принимает следующий вид

$$G^{[N]} = u^{2/(2-\varepsilon)} \int_0^\infty dT \mathcal{Z}(T,u,\varepsilon) \exp(u^{\frac{2}{2-\varepsilon}} \bar{S}_{reg}(\varepsilon,T)) \times \\ \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\bar{S}_{sing})^p (1 + O(N^{-1})). \quad (4.8)$$

Так же как и в (3.30) множитель $\mathcal{Z}$ включает I (3.8) в точке стационарности и вклад от флуктуационного интеграла с нормировочным множителем $\aleph$. $O(N^{-1})$ показывает точность вычислений при $N \to \infty$.

Для обезразмеривания ампутированной функции Грина проведем размерный анализ $\mathcal{Z}$, а точнее содержащегося в нем предэкспоненциального множителя I_ν (3.6)

$$I_\nu = \frac{\int dtc_1' \int dtc_2'}{T_1 T_2} + Z_u \frac{\delta^2 S_u}{\delta x_1 \delta x_2}.$$

Достаточно рассмотреть размерность только первого правой части равенства. Итак, учитывая связь времени и координаты $x^{2-\varepsilon} \sim T$ (3.25),

$$\frac{\int dtc_1' \int dtc_2'}{T_1 T_2}\bigg|_{st} = -\frac{1}{\nu^2} \frac{(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{T_1 T_2} \sim \frac{T^{2/(2-\varepsilon)}}{T^2} = \frac{1}{T^{(2-2\varepsilon)/(2-\varepsilon)}}.$$

В результате, аналогом (3.30) в данном случае является выражение для вычета в простом полюсе Z_ν по ε

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname*{res}_{\varepsilon \to 0} Z_\nu \sim u^{2/(2-\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{dT}{T^{(2-2\varepsilon)/(2-\varepsilon)}} \exp\left(-u^{2/(2-\varepsilon)} T^{\varepsilon/(2-\varepsilon)} |P(\varepsilon)| \right). \quad (4.9)$$

Замена $\tau = T^{\varepsilon/(2-\varepsilon)}$ в правой части (4.9) приводит к

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname*{res}_{\varepsilon \to 0} Z_\nu \sim u^{2/(2-\varepsilon)} \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty d\tau \exp\left(-u^{2/(2-\varepsilon)} \tau |P(\varepsilon)| \right). \quad (4.10)$$

Отсюда видно, что интеграл в правой части (4.10) действительно содержит простой полюс по ε, а исследуемый вычет $\mathrm{res} Z_\nu$ ведет себя как константа при $u \to \infty$. Следовательно $\gamma_\nu(u)$ стремится к нулю в исследуемой асимптотике.

Таким образом, в ИК пределе выражение (4.5) демонстрирует следующее поведение

$$\bar{\nu} \to \mathrm{Const} = \nu \exp\left(\int_0^\infty \gamma_\nu(\bar{u}(\tau))d\tau\right).$$

Итак, наблюдается конечный скачок коэффициента диффузии на величину $\Delta\bar{\nu} = \nu - \bar{\nu}|_{q=0}$ при стремлении импульса $q \to 0$. Отметим здесь некоторое сходство с фазовым переходом первого рода, в котором величина ν в некотором смысле играет роль параметра порядка, а точке фазового перехода соответствует ИК предел.

4.2. Выводы

Исследование асимптотик высоких порядков квантово-полевых разложений констант ренормировки в модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости было проведено с использованием инстантонного анализа. Результаты свидетельствуют, что разложения констант ренормировки и РГ-функций – коэффициентов уравнения ренормализационной группы, – имеют конечный радиус сходимости, несмотря на факториальный рост числа диаграмм в высоких порядках разложения.

В данной модели инстантонный анализ позволил также определить асимптотику сильной связи константы ренормировки Z_ν, что позволило использовать уравнение ренормализационной группы для исследования ИК асимптотик корреляционных функций модели, в которой нет ИК устойчивой фиксированной точки.

ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

1. На примере простой динамической модели произведен анализ, позволяющий выбрать наиболее удобный тип полевых переменных для вычисления асимптотик высоких порядков динамических моделей.
2. Построено семейство инстантонов модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» полем скорости и явно предъявлен один из них.
3. Опровергнуто широко распространенное утверждение о том, что тип сходимости ряда определяется числом диаграмм в высоких порядках теории возмущений. Показано, что тип сходимости зависит от выбранного представления и поведения коррелятора.
4. Вычислены асимптотики высоких порядков разложений констант ренормировки модели Обухова-Крейчнана.
5. Определена асимптотика сильной связи модели Обухова-Крейчнана с «замороженным» продольным полем скорости и вычислен «инвариантный» коэффициент диффузии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ A_1 И A_2 КОРРЕЛЯТОРА СКОРОСТИ В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

С помощью преобразования Фурье

$$\frac{1}{\mathbf{q}^{2\alpha}} \to \bar{C}(\alpha)\frac{1}{\mathbf{x}^{2(d/2-\alpha)}}, \tag{4.11}$$

где

$$\bar{C}(\alpha) = \frac{\pi^{d/2}2^{2(d/2-\alpha)}\Gamma(d/2-\alpha)}{(2\pi)^d\Gamma(\alpha)},$$

легко проверить следующее выражение

$$\frac{q_j q_k}{\mathbf{q}^{2(\alpha+1)}} \to -\frac{2(\alpha-d/2+1)\bar{C}(\alpha+1)}{\mathbf{x}^{2(d/2-\alpha)}}\Big[\delta_{jk} + 2(\alpha-d/2)\frac{x_j x_k}{\mathbf{x}^2}\Big] \tag{4.12}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\int\limits_{x_1}^{c(\tau)} \frac{dy}{\int_{x_1}^{x_2} dz D(z-y)} = -\frac{u_{st}(\tau - t_1)}{\nu}, \qquad c \equiv c_{st}(\tau). \tag{4.13}$$

Сначала вычислим интеграл в знаменателе в левой части уравнения (4.13) с учетом явного вида коррелятора скорости (2.18) $D(\mathbf{x}) = \frac{D_0}{|\mathbf{x}|^{2-\varepsilon}}$

$$\int_{x_1}^{x_2} dz D(z-y) = D_0 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dz}{|z-y|^{2-\varepsilon}} = D_0 \Big[\int\limits_{x_1}^{y} \frac{dz}{(y-z)^{2-\varepsilon}} + \int\limits_{y}^{x_2} \frac{dz}{(z-y)^{2-\varepsilon}} \Big] =$$
$$= \frac{D_0}{\varepsilon - 1} \frac{(x_2-y)^{1-\varepsilon} + (y-x_1)^{1-\varepsilon}}{(y-x_1)^{1-\varepsilon}(x_2-y)^{1-\varepsilon}}$$

Тогда левая часть уравнения (4.13) принимает вид

$$\frac{\varepsilon - 1}{D_0} \int\limits_{x_1}^{c(\tau)} dy \frac{(y-x_1)^{1-\varepsilon}(x_2-y)^{1-\varepsilon}}{(x_2-y)^{1-\varepsilon} + (y-x_1)^{1-\varepsilon}}.$$

Следующие две замены переменных

$$y \to y + x_1,$$

$$y \to vx,$$

где $x = x_2 - x_1$, сводят уравнение (4.13) к виду

$$\frac{u_{st} D_0}{x^{2-\varepsilon}(1-\varepsilon)\nu} = \frac{1}{\tau - t_1} \int\limits_{0}^{\frac{c-x_1}{x}} dv f(v),$$

где

$$f(v) = \frac{v^{1-\varepsilon}(1-v)^{1-\varepsilon}}{(1-v)^{1-\varepsilon} + v^{1-\varepsilon}}.$$

Если $c(t_2) = x_2$, то при $\tau = t_2$ уравнение приобретает вид

$$\frac{u_{st} D_0}{x^{2-\varepsilon}(1-\varepsilon)\nu} = \frac{1}{T} \int\limits_0^1 dv f(v),$$

где $T = t_2 - t_1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГАУССОВОГО ИНТЕГРАЛА ПО СКОРОСТИ V

Рассмотрим интеграл

$$I_v = \int D\mathbf{V} \exp\Big(-\frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 V_i(\mathbf{x}_2) D_{ij}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) V_j(\mathbf{x}_1) +$$

$$+ ig \int d\mathbf{x} V_i(\mathbf{x}) M_i(\mathbf{x}) \Big)$$

где

$$M_i(\mathbf{x}) = \int d\tau_1 c'_{1i}(\tau_1) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{c}_1) + \int d\tau_2 c'_{2i}(\tau_2) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{c}_2).$$

По определению функционального интеграла [62]

$$I_v = det \Big(\frac{D}{2\pi} \Big)^{-1/2} \exp\Big(-\frac{1}{2} g^2 \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 M_i(\mathbf{x}_2) D_{ij}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) M_j(\mathbf{x}_1) \Big),$$

или, в обозначениях, введенных в главе 3.2.

$$I_v = det \Big(\frac{D}{2\pi} \Big)^{-1/2} e^{S_u},$$

где

$$S_u = -\frac{u}{2} \Bigg(c'_{1i}(\tau_1) D_{ij}(\mathbf{c}_1(\tau_1) - \mathbf{c}_1(\tau'_1)) c'_{1j}(\tau'_1) + c'_{2i}(\tau_2) D_{ij}(\mathbf{c}_2(\tau_2) - \mathbf{c}_2(\tau'_2)) c'_{2j}(\tau'_2) +$$

$$+ 2 c'_{1i} D_{ij}(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) c'_{2j} \Bigg),$$

здесь необходимые интегрирования по временам и суммирования по повторяющимся индексам подразумеваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Гидродинамика. — Москва: Наука, 1986.

2. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, ч.2. — Москва: Наука, 1967, 1996.

3. *DeDominicis C., Martin P. C.* Energy spectra of certain randomly-stirred fluids // *Phys. Rev. A.* — 1979. — Jan. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 419–422.

4. *Frisch U.* Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov. — Cambridge: University Press, 1995.

5. *Аджемян Л., Антонов Н., Васильев А.* Проблема инфракрасных расходимостей и ренормгруппа в теории развитой турбулентности // *Журн. эксп. и теор. физ.* — 1989. — Т. 95. — С. 1272—-1288.

6. Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar / M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev // *Phys. Rev. E.* — 1995. — Nov. — Vol. 52, no. 5. — Pp. 4924–4941.

7. *Bernard D., Gawedzki K., Kupiainen A.* Anomalous scaling in the n-point functions of a passive scalar // *Phys. Rev. E.* — 1996. — Sep. — Vol. 54, no. 3. — Pp. 2564–2572.

8. *Adzhemyan L. T., Antonov N. V., Vasil'ev A. N.* Renormalization group, operator product expansion, and anomalous scaling in a model of advected passive scalar // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Aug. — Vol. 58, no. 2. — Pp. 1823–1835.

9. Calculation of the anomalous exponents in the rapid-change model of passive scalar advection to order ε^3 / L. T. Adzhemyan, N. V. Antonov,

V. A. Barinov et al. // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Oct. — Vol. 64, no. 5. — P. 056306.

10. *Антонов Н., Борисенок С., Гирина В.* Ренормализационная группа в теории развитой турбулентности. составные операторы канонической размерности восемь. // *ТМФ.* — 1996. — Т. 106. — С. 92—-101.

11. *Kraichnan R.* Convection of a passive scalar by a quasi-uniform random straining field // *J. Fluid. Mech.* — 1974. — Vol. 64. — Pp. 737–762.

12. *Fournier J.-D., Frisch U., Rose H.* Infinite-dimensional turbulence // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1978. — Vol. 11. — Pp. 187–198.

13. *Yakhot V.* Strong turbulence in d-dimensions // *E-print LANL chao-dyn/9805027.* — 1998. — P. 10 p.

14. *Frisch H., Schultz M.* Turbulence effects in high dimensionality limit // *Physica A: Stat. Theor. Phys.* — 1994. — Vol. 211. — Pp. 37–42.

15. *Runov A.* On the field theoretical approach to the anomalous scaling in turbulence // *E-print LANL chao-dyn/9906026.* — 1996. — Vol. 211. — P. 4 p.

16. *Adzhemyan L. T., Antonov N. V., Runov A. V.* Anomalous scaling, non-locality, and anisotropy in a model of the passively advected vector field // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Sep. — Vol. 64, no. 4. — P. 046310.

17. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах рейнольдса // *ДАН СССР.* — 1941. — Т. 30, № 4. — С. 299–303.

18. *Аджемян Л. Ц., Антонов Н. В., Васильев А. Н.* Квантовополевая ренормализационная группа в теории развитой турбулентности // *Успехи физических наук.* — 1996. — Т. 166, № 12. — С. 1257–1284.

19. *Falkovich G., Gawedzki K., Vergassola M.* Particles and fields in fluid turbulence // *Rev. Mod. Phys.* — 2001. — Nov. — Vol. 73, no. 4. — Pp. 913–975.

20. *Паташинский А. З., Покровский В. Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. — Москва, Главная редакция физико-математической литературы: Наука, 1982.

21. *Wilson K. G.* Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization group and the kadanoff scaling picture // *Phys. Rev. B.* — 1971. — Nov. — Vol. 4, no. 9. — Pp. 3174–3183.

22. *Wilson K. G.* Feynman-graph expansion for critical exponents // *Phys. Rev. Lett.* — 1972. — Feb. — Vol. 28, no. 9. — Pp. 548–551.

23. *Stueckelberg E., Petermann A.* La normalization des constantes dans la theorie des quanta // *Helvetica Physica Acta.* — 1953. — Vol. 26, no. 5. — P. 499.

24. *Gell-Mann M., Low F. E.* Quantum electrodynamics at small distances // *Phys. Rev.* — 1954. — Sep. — Vol. 95, no. 5. — Pp. 1300–1312.

25. *Боголюбов Н., Ширков Д.* // *Докл. АН СССР.* — 1955. — Т. 29, № 2. — С. 203.

26. *Боголюбов Н., Ширков Д.* // *Докл. АН СССР.* — 1955. — Т. 29, № 3. — С. 391.

27. *Боголюбов Н., Ширков Д.* // *Журн. экспер. и теор. физ.* — 1956. — Т. 30, № 1. — С. 77.

28. *Bogoljubov N., Sirkov D.* // *Nuovo Cim.* — 1956. — Vol. 3. — P. 845.

29. *Овсянников Л.* // *Докл. АН СССР.* — 1956. — Т. 109, № 6. — С. 1112.

30. *Callan C. G.* Broken scale invariance in scalar field theory // *Phys. Rev. D.* — 1970. — Oct. — Vol. 2, no. 8. — Pp. 1541–1547.

31. *Symanzik K.* Small distance behaviour in field theory and power counting // *Communications in Mathematical Physics.* — 1970. — Vol. 18. — Pp. 227–246. — 10.1007/BF01649434. http://dx.doi.org/10.1007/BF01649434.

32. *Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* Approach to scaling in renormalized perturbation theory // *Phys. Rev. D.* — 1973. — Oct. — Vol. 8, no. 8. — Pp. 2418–2430.

33. *Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* ? // *Phase Transitions and Critical Phenomena.* — 1976. — Vol. 6. — P. 114.

34. *Hohenberg P. C., Halperin B. I.* Theory of dynamic critical phenomena // *Rev. Mod. Phys.* — 1977. — Jul. — Vol. 49, no. 3. — Pp. 435–479.

35. *Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A.* Statistical dynamics of classical systems // *Phys. Rev. A.* — 1973. — Jul. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 423–437.

36. *Janssen H.* On a lagrangean for classical field dynamics and renormalization group calculations of dynamical critical properties // *Zeitschrift fur Physik B Condensed Matter.* — 1976. — Vol. 23, no. 4. — Pp. 377–380.

37. *Baush R., Janssen H., Wagner H.* Renormalized field theory of critical dynamics // *Zeitschrift fur Physik B Condensed Matter.* — 1976. — Vol. 24, no. 1. — Pp. 113–127.

38. *Gevorkian Z., Lozovik Y.* Classical diffusion in random fields with long-range correlationss // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1987. — Vol. 20. — Pp. L659–L664.

39. *Honkonen J., Karjalainen E.* Diffusion in a random medium with long-range correlations // *J.Phys. A: Math. Gen.* — 1988. — Vol. 21, no. 22. — Pp. 4217–4234.

40. *Аджемян Л. Ц., Васильев А. Н., М. П. Ю.* Ренормгрупповой подход в теории турбулентности: размерности составных операторов // *ТМФ.* — 1983. — Т. 57, № 2. — С. 268—-281.

41. *Панасюк Г., Смирнов А., Сторонкин Б.* // *Вестн. ЛГУ.* — 1984. — Т. 4, № 4. — С. 108.

42. *Wilson K. G.* Quantum field - theory models in less than 4 dimensions // *Phys. Rev. D.* — 1973. — May. — Vol. 7, no. 10. — Pp. 2911–2926.

43. *Wilson K. G., Fisher M. E.* Critical exponents in 3.99 dimensions // *Phys. Rev. Lett.* — 1972. — Jan. — Vol. 28, no. 4. — Pp. 240–243.

44. *Wilson K., Kogut J.* The renormalization group and the ε expansion // *Physics Reports.* — 1974. — Vol. 12, no. 2. — Pp. 75–199.

45. *t'Hooft G.* Dimensional regularization and the renormalization group // *Nucl. Phys. B.* — 1973. — Vol. 61. — Pp. 455–468.

46. *t'Hooft G., Veltman M.* Regularization and renormalization of gauge fields // *Nucl. Phys. B.* — 1972. — Vol. 44. — Pp. 189–213.

47. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. — Москва: Мир, 1980.

48. *Wegner F. J.* Critical exponents in isotropic spin systems // *Phys. Rev. B.* — 1972. — Sep. — Vol. 6, no. 5. — Pp. 1891–1893.

49. *Stanley H. E.* Spherical model as the limit of infinite spin dimensionality // *Phys. Rev.* — 1968. — Dec. — Vol. 176, no. 2. — Pp. 718–722.

50. *Abe R.* Expansion of a critical exponent in inverse powers of spin dimensionality // *Progress of Theoretical Physics.* — 1973. — Vol. 49, no. 1. — Pp. 113–128.

51. *Abe R., Hikami S.* Critical exponents and scaling relations in 1/n expansion // *Progress of Theoretical Physics.* — 1973. — Vol. 49, no. 2. — Pp. 442–452.

52. *Brézin E., Wallace D. J.* Critical behavior of a classical heisenberg ferromagnet with many degrees of freedom // *Phys. Rev. B.* — 1973. — Mar. — Vol. 7, no. 5. — Pp. 1967–1974.

53. *Ma S.-k.* Scaling variables and dimensions // *Phys. Rev. A.* — 1974. — Nov. — Vol. 10, no. 5. — Pp. 1818–1836.

54. *Боголюбов Н., Ширков Д.* Введение в теорию квантованных полей. — Москва: Наука, 1976.

55. *Speer E.* Generalized feynman amplitudes // *Ann. of Math. Stud.* — 1969. — Vol. 62.

56. *Васильев А., Налимов М.* Аналог размерной регуляризации для расчета ренормгрупповых функций в $1/n$-разложении при произвольной размерности пространства // *Теор. и мат. физ.* — 1983. — Т. 55, № 2. — С. 163—-175.

57. *Васильев А., Налимов М.* cp^{N-1}-модель: расчет аномальных размерностей и матриц смешивания в порядке $1/n$ // *Теор. и мат. физ.* — 1983. — Т. 56, № 1. — С. 15—-30.

58. *Васильев А., Налимов М., Хонконен Ю.* $1/n$-разложение: расчет аномальных размерностей и матриц смешивания в порядке $1/n$ для $n\times p$-

матричной калибровочно-инвариантной σ-модели // *Теор. и мат. физ.* — 1984. — Т. 58, № 2. — С. 169—183.

59. *Налимов М.* Регулярное разложение для расчета ренормгрупповых функций в теории с размерными константами взаимодействия // *Теор. и мат. физ.* — 1986. — Т. 68, № 2. — С. 210—-224.

60. *Dorogovtsev S. N.* The critical behaviour of systems with correlated defects // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1984. — Aug. — Vol. 17, no. 12. — Pp. L677–L679.

61. *Липатов Л. Н.* Расходимость ряда теории возмущений и квазиклассика // *Журн. экспер. и теор. физики.* — 1977. — Т. 72, № 2. — С. 411–427.

62. *Васильев А. Н.* Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. — Санкт-Петербург: ПИЯФ, 1998.

63. *Zinn-Justin J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1989.

64. *Obukhov A. M. -* // *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr. Geofiz.* — 1949. — Vol. 13. — P. 58.

65. *Kraichnan R. H.* Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence // *Phys. Fluids.* — 1968. — Vol. 11, no. 5. — Pp. 945–953.

66. *Kraichnan R. H.* Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Feb. — Vol. 72, no. 7. — Pp. 1016–1019.

67. *Gawedzki K., Kupiainen A.* Anomalous scaling of the passive scalar // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Nov. — Vol. 75, no. 21. — Pp. 3834–3837.

68. *Plumir A.* Determination of the three-point correlation function of a passive scalar in the presence of a mean gradient // *Europhys. Lett.* — 1997. — Mar. — Vol. 37, no. 8. — Pp. 529–534.

69. *Pumir A.* Structure of the three-point correlation function of a passive scalar in the presence of a mean gradient // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Mar. — Vol. 57, no. 3. — Pp. 2914–2929.

70. *Kraichnan R. H.* Lagrangian-history closure approximation for turbulence // *Physics of Fluids.* — 1965. — Vol. 8, no. 4. — Pp. 575–598. http://link.aip.org/link/?PFL/8/575/1.

71. *Balkovsky E., Lebedev V.* Lagrangian instanton for the kraichnan model // *Pis'ma v ZhETF.* — 1998. — Oct. — Vol. 68, no. 7. — Pp. 588–593.

72. *Andreanov A. Yu., Komarova M. V., Nalimov M. Yu.* Large-order asymptotes of the quantum-field expansion for the kraichnan model of passive scalar advection // *J.Phys. A: Math. Gen.* — 2006. — Vol. 39, no. 25. — Pp. 7801–7813.

73. *Derrida B., Luck J. M.* Diffusion on a random lattice: Weak-disorder expansion in arbitrary dimension // *Phys. Rev. B.* — 1983. — Dec. — Vol. 28, no. 12. — Pp. 7183–7190.

74. *Aronovitz J. A., Nelson D. R.* Anomalous diffusion in steady fluid flow through a porous medium // *Phys. Rev. A.* — 1984. — Oct. — Vol. 30, no. 4. — Pp. 1948–1954.

75. *Kravtsov V. E., Lerner I. V., I. Y. V.* Random walks in media with constrained disorder // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1985. — Aug. — Vol. 18, no. 12. — Pp. L703–L708.

76. Random walks in two-dimensional random environments with constrained drift forces / D. S. Fisher, D. Friedan, Z. Qiu et al. // *Phys. Rev. A.* — 1985. — Jun. — Vol. 31, no. 6. — Pp. 3841–3845.

77. *Luck J. M.* Diffusion in a random medium: A renormalization group approach // *Nuclear Physics B.* — 1983. — Vol. 225, no. 2. — Pp. 169 – 184. http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVC-4718JPS-F0/2/b49fba8fe0a4b0157308d0cf7b4b2cf7.

78. *Fisher D. S.* Random walks in random environments // *Phys. Rev. A.* — 1984. — Aug. — Vol. 30, no. 2. — Pp. 960–964.

79. *Kravtsov V. E., Lerner I. V., Yudson V. I.* The einstein relation and exact gell-mann-low function for random walks in media with random drifts // *Physics Letters A.* — 1986. — Vol. 119, no. 5. — Pp. 203 – 206. http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVM-46T4VSJ-3H1/2/a01921708c7b532dc6efa99f3de0a185.

80. Anomalous diffusion in random media of any dimensionality / Bouchaud, J.P., Comtet, A., Georges, A., Le Doussal, P. // *J. Phys. France.* — 1987. — Vol. 48, no. 9. — Pp. 1445–1450. http://dx.doi.org/10.1051/jphys:019870048090144500.

81. *Bouchaud, J.P., Comtet, A., Georges, A.* Erratum - anomalous diffusion in random media of any dimensionality // *J. Phys. France.* — 1988. — Vol. 49, no. 2. — P. 369.

82. *Honkonen J., Pis'mak Y. M., Vasil'ev A. N.* Zero beta function for a model of diffusion in potential random field // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 1988. — Vol. 21, no. 17. — P. L835. http://stacks.iop.org/0305-4470/21/i=17/a=004.

83. *Peliti L., Yi-Cheng Z.* Renormalisation of the long-range 'true' self-avoiding walk // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 1985. — Vol. 18, no. 12. — P. L709. http://stacks.iop.org/0305-4470/18/i=12/a=004.

84. *Honkonen J., Karjalainen E.* Random walk in random environment with constrained long-range correlated drift forces // *Physics Letters A.* — 1988. — Vol. 129, no. 5-6. — Pp. 333–338.

85. *Steven A. O., Victor Y.* Analysis of the ϵ-expansion in turbulence theory: Approximate renormalization group for diffusion of a passive scalar in a random velocity field // *Journal of Scientific Computing.* — 1999. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 147–178.

86. *Bouchaud J. P., Georges A.* Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications // *Phys. Rep.* — 1990. — Vol. 195, no. 4-5. — P. 127.

87. Random walk in a random environment and $1f$ noise / E. Marinari, G. Parisi, D. Ruelle, P. Windey // *Phys. Rev. Lett.* — 1983. — Apr. — Vol. 50, no. 17. — Pp. 1223–1225.

88. On the interpretation of 1/f noise / E. Marinari, G. Parisi, D. Ruelle, P. Windey // *Commun. Math. Phys.* — 1983. — Vol. 89, no. 1. — Pp. 1–12.

89. *Fisher D. S.* Random walks in random environments // *Phys. Rev. A.* — 1984. — Aug. — Vol. 30, no. 2. — Pp. 960–964.

90. Random walks in two-dimensional random environments with constrained drift forces / D. S. Fisher, D. Friedan, Z. Qiu et al. // *Phys. Rev. A.* — 1985. — Jun. — Vol. 31, no. 6. — Pp. 3841–3845.

91. *Kravtsov V. E., Lerner I. V., Yudson V. I.* Random walks in media with constrained disorder // *J.Phys. A: Math. Gen.* — 1985. — Vol. 18, no. 12. — P. L703.

92. *Kravtsov V. E., Lerner I. V., Yudson V. I.* Classical diffusion in media with weak disorder // *Sov. Phys. - JETP.* — 1986. — Vol. 64, no. 2. — P. 336.

93. *Долганов Р. А., Налимов М. Ю.* Простая стохастическая модель как пример применимости инстантонного подхода к исследованию асимптотик высоких порядков разложений в динамике // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4: Физика, химия.* — 2001. — Т. 3, № 20. — С. 17–22.

94. *Honkonen J., Komarova M. V., Nalimov M. Yu.* Large-order asymptotes for dynamical models near equilibrium // *Nucl.Phys. B.* — 2005. — Vol. 707, no. 3. — Pp. 493–508.

95. *Honkonen J., Komarova M. V., Nalimov M. Yu.* Instantons for dynamic models from b to h // *Nucl. Phys. B.* — 2005. — Vol. 714, no. 3. — Pp. 292–306.

96. *Chertkov M.* Instanton for random advection // *Phys. Rev. E.* — 1997. — Mar. — Vol. 55, no. 3. — Pp. 2722–2735.

97. *Honkonen J., Pis'mak Yu. M., Vasil'ev A. N.* Zero beta function for a model of diffusion in potential random field // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1988. — Vol. 21, no. 17. — Pp. L835–L841.

98. *Кремнев И. С., Налимов М. Ю., Сергеев В. А.* Инстантонный анализ в простой динамической модели: ломаные экстремали // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4: Физика, химия.* — 2007. — Т. 4. — С. 30–37.

99. *Комарова М. В., Кремнев И. С., Налимов М. Ю.* Семейство инстантонов модели крейчнана с замороженным полем скорости // *ТМФ.* — 2009. — Т. 158, № 2. — С. 200–213.

100. *Комарова М. В., Кремнев И. С., Налимов М. Ю.* Модель крейчнана с «замороженным» полем скорости: инстантонный анализ констант ренормировки и предела сильной связи // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4: Физика, химия.* — 2009. — Т. 4. — С. 362–372.

101. *Komarova M., Kremnev I., Nalimov M.* Convergence of perturbation series for renormalization constants in kraichnan model with «frozen» velocity field // *ArXiv e-prints.* — 2009. — nov.

102. *Balkovsky E., Lebedev V.* Instanton for the kraichnan passive scalar problem // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Nov. — Vol. 58, no. 5. — Pp. 5776–5795.

103. *Долганов Р. А., Логинов Н. А., Налимов М. Ю.* Применимость инстантонного подхода для исследования асимптотик выскоких порядков разложений в модели крейчнана // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4: Физика, химия.* — 2001. — Т. 3, № 20. — С. 97–102.

104. *Honkonen J., Komarova M. V., Nalimov M. Yu.* Large-order asymptotes for dynamic models // *J.Phys. A: Math. Gen.* — 2006. — Vol. 39, no. 25. — Pp. 7815–7824.

105. *Makhankov V. G.* On the existence of non-one-dimensional soliton-like solutions for some field theories // *Phys. Lett. A.* — 1977. — Vol. 61, no. 7. — Pp. 431–432.

106. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — Москва, Главная редакция физико-математической литературы: Наука, 1988.

107. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.

108. *Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М.* Об уравнениях Фоккера-Планка, которые выводятся в теории возмущений методом, основанным на спектральных свойствах возмущённого гамильтониана. — Записки кафедры математической физики Института нелинейной механики АН УССР, 1939.

109. *Комарова М. В., Налимов М. Ю.* Асимптотика старших порядков теории возмущений: константы ренормировки $o(n)$-симметричной теории ϕ^4 в $(4-\epsilon)$-разложении // *ТМФ.* — 2001. — Т. 126, № 3. — С. 409—-426.

110. *Emery V. J.* Exactly solvable model for tricritical phenomena // *Phys. Rev. B.* — 1975. — May. — Vol. 11, no. 9. — Pp. 3397–3405.

111. *Edwards S. F., Anderson P. W.* Theory of spin glasses // *J. Phys. F: Met. Phys.* — 1975. — Vol. 5. — Pp. 965–974.

112. *Ward B.* Strongly coupled fields: I. green's functions // *Preprint SLAC-PUB-1584.* — 1975. — 41 pp.

113. *Арефьева И.* Предел сильной связи для $o(n)$ φ^4-взаимодействия // *ТМФ.* — 1976. — Nov. — Vol. 29, no. 2. — Pp. 147–153.

114. *Казаков Д., Попов В.* О суммировании расходящихся рядов теории возмущений в квантовой механике и теории поля // *ЖЭТФ.* — 2002. — Vol. 122, no. 4. — Pp. 675–695.

115. *Суслов И.* Комментарии к статье д.и. казакова и в.с. попова // *ЖЭТФ.* — 2002. — Vol. 122, no. 4. — Pp. 696–699.

116. *Казаков Д., Попов В.* Об асимптотике функции гелл-манна-лоу в квантовой теории поля // *ЖЭТФ.* — 2003. — Vol. 77, no. 9. — Pp. 547–551.

117. *Суслов И.* Расходящиеся ряды теории возмущений // *ЖЭТФ.* — 2005. — Vol. 127, no. 6. — Pp. 1350–1402.

118. *Kondo J.* Resistance minimum in dilute magnetic alloys // *Progress of Theoretical Physics.* — 1964. — Vol. 32, no. 1. — Pp. 37–49. http://ptp.ipap.jp/link?PTP/32/37/.

119. *Kazakov D. I., Shirkov O. V.* Asymptotic series of quantum field theory and their summation // *Fortschritte der Physik.* — 1980. — Vol. 28, no. 8-9. — Pp. 465–499.