

Санкт - Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

КОМАРОВА МАРИНА ВЛАДИМИРОВНА

**МОДЕЛЬ ϕ^4 ТЕОРИИ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ:
АСИМПТОТИКИ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ В СХЕМЕ
МИНИМАЛЬНЫХ ВЫЧИТАНИЙ**

Специальность: 01.04.02 - теоретическая физика

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико - математических наук,
профессор Налимов М. Ю.

Санкт-Петербург,

2004 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
1 АСИМПТОТИКА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ: КОНСТАНТЫ РЕНОРМИРОВКИ И КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ $O(n)$ - СИММЕТРИЧНОЙ ϕ^4 МОДЕЛИ В $4 - \epsilon$ РАЗЛОЖЕНИИ.	21
1.1 Основные положения липатовского подхода.	22
1.2 Схема вычисления асимптотик разложений констант ренормировки.	30
1.3 Асимптотики констант ренормировки	37
1.4 Обсуждение полученных в данной главе результатов	45
2 АСИМПТОТИКА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ В СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ МОДЕЛИ ϕ^4 В $4 - \epsilon$ РАЗЛОЖЕНИИ	47
2.1 Метод построения сходящегося ряда для критических индексов	49
2.2 Асимптотика высоких порядков сходящихся разложений	52
2.3 Характер особенности в сходящемся разложении для критических индексов	55

3 АСИМПТОТИКА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ: СКЕЙЛИНГОВЫЕ ФУНКЦИИ $O(n)$ - СИММЕТРИЧНОЙ ϕ^4 МОДЕЛИ В $4 - \epsilon$ РАЗЛОЖЕНИИ.	61
3.1 Основные положения липатовского подхода при $\tau \neq 0$	63
3.2 Инстантон в массивной модели ϕ^4	66
3.3 Скейлинговая функция парного коррелятора	68
3.4 Асимптотика $p^2 \ll \tau$; скейлинговая функция $\bar{G}^{[N]}(\bar{p})$	71
3.5 Асимптотика $\tau \ll p^2$; скейлинговая функция $\tilde{G}^{[N]}(\tau)$	75
3.6 Каноническая нормировка результатов	78
4 ПЕРВАЯ ПОПРАВКА К АСИМПТОТИКЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ КОНСТАНТ РЕНОРМИРОВКИ $O(n)$ - СИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ϕ^4 В $(4 - \epsilon)$ - РАЗЛОЖЕНИИ	82
4.1 Поправки по $1/N$ и ϵ в липатовском подходе.	83
4.2 Особенности формализма в ϵ - разложении.	85
4.3 Об интеграле по флуктуациям в пространстве размерности $4 - \epsilon$	87
4.4 Вычисление поправки по ϵ к флуктуационному интегралу в гауссовском приближении	90
4.5 Асимптотика $G_4^{(N)}$ при больших N	95
§ 4.5.1 Вклад гауссовской части интеграла по флуктуациям	95
§ 4.5.2 Поправка к гауссовскому приближению в интеграле по флуктуациям	97
4.6 Константы ренормировки и критические индексы	100
4.7 Обсуждение полученных в данной главе результатов	103

5	Заключение	105
	Приложение 1	108
	Приложение 2	110
	Приложение 3	111

Введение

Диссертация посвящена разработке инстантонного формализма при исследовании высоких порядков полевых разложений констант ренормировки, критических индексов (аномальных размерностей) и скейлинговых функций на примере O_n - симметричной модели ϕ^4 в размерной регуляризации и схеме минимальных вычитаний. Опишем кратко историю задачи и ситуацию, сложившуюся сейчас в данной области.

К настоящему времени теория критического поведения является хорошо развитой и формализованной ветвью теоретической физики. Существенный прогресс в этой области был достигнут в результате внедрения идей универсальности и критического скейлинга, а также применения технического аппарата ренормализационной группы.

Универсальность критических явлений заключается в том, что поведение системы оказывается не зависящим от деталей взаимодействия и определяется лишь общими свойствами рассматриваемой модели - типом полей, числом их компонент, симметрией взаимодействия, размерностью пространства и т.п. Например, для изотропного ферромагнетика Гайзенберга критическое поведение зависит только от числа компонент вектора спина и размерности пространства, но не зависит от типа решетки и деталей обменного взаимодействия спинов.

Вторая идея - гипотеза подобия (критического скейлинга) Вайдома - Каданова - Паташинского - Покровского [65]. Согласно этой гипотезе в окрестности критической точки всем физическим величинам (точнее, их отклонениям от критических значений) можно сопоставить определенные "критические размерности". Математически это выражается в свойстве обобщенной однородности: если величина F с размерностью d зависит от набора переменных x_i с размерностями d_i соответственно и некоторого масштабного параметра Λ , то

$$F(\Lambda^{d_1}x_1, \Lambda^{d_2}x_2, \dots, \Lambda^{d_n}x_n) = \Lambda^d F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Строго говоря, этим свойством обладают не сами термодинамические функции, а ведущие члены асимптотик при $\Lambda \rightarrow 0$ их "сингулярных частей", получаемых отбрасыванием регулярных членов тейлоровского разложения в критической точке (при $x_i = 0$).

Гипотеза подобия позволила согласовать множество различных данных по критическому поведению. Из экспериментов и численных расчетов известно, что при подходе к критической точке различные термодинамические величины ведут себя как степенные функции параметра отклонения; показатели степеней получили название "критических индексов". Таких индексов очень много, так как есть много различных термодинамических величин (восприимчивость, намагниченность, теплоемкость и т. д.) и различные способы подхода к критической точке (например, температура T стремится к своему критическому значению T_c при нулевом внешнем поле h или, наоборот, $h \rightarrow 0$ при $T = T_c$). Согласно гипотезе подобия, все эти индексы должны выражаться через размерности тех параметров, от которых зависит термодинамический потенциал. Для магнетика та-

ких параметров всего два - h и $\tau = (T - T_c)/T_c$. Размерность самого термодинамического потенциала не является независимым параметром - ее можно считать фиксированной. Действительно, потенциал (точнее, его удельное значение на единицу объема для пространственно - однородной системы) выражается через удельное значение логарифма статсуммы. Статсумма и ее логарифм безразмерны (имеется ввиду не тривиальная безразмерность в обычном смысле, а равенство нулю критической размерности d в выражении (1)), поэтому потенциал имеет размерность обратного объема. Замена $\Lambda \rightarrow \Lambda^a$ в (1) приводит к умножению всех размерностей на a , что позволяет фиксировать одну из размерностей произвольно. Обычно за единицу принимают размерность импульса, этот выбор будет принят и в данной работе.

Таким образом, согласно гипотезе подобия все критические индексы выражаются через размерности независимых переменных термодинамического потенциала. Вытекающие отсюда связи между критическими индексами подтверждаются экспериментально и в настоящее время справедливость гипотезы подобия считается твердо установленной. Однако сама по себе эта гипотеза не содержит рецептов вычисления размерностей независимых переменных.

Такой рецепт был дан в 1971 году Вильсоном [40] (и разработан им позже в [44]), который предложил использовать для расчета размерностей технику ренормализационной группы (РГ). В квантовой теории поля эта техника давно известна: впервые существование группы ренормировок в квантовой теории поля было отмечено в работе Штюкельберга и Петермана [35], через год Гелл-Манн и Лоу [15] использовали функциональные уравнения типа РГ для анализа

ультрафиолетовой асимптотики в квантовой электродинамике, еще через год в работах Боголюбова и Ширкова [54, 55, 56, 5] была установлена связь между результатами [35] и [15], впервые получены полные дифференциальные уравнения РГ и указан рецепт их практического использования в комбинации с расчетом РГ - функций по теории возмущений. Впоследствии Овсянников [64], а затем, независимо, Каллан и Симанзик [11, 36] предложили еще один вариант уравнений РГ, сформулировав их в виде одного уравнения в частных производных для функции многих переменных. Дифференциальные уравнения [54] играют роль характеристической системы для уравнения в частных производных [64, 11, 36]. Дифференциальные уравнения в форме [54] или [64, 11, 36] являются основой стандартной квантово-полевой техники РГ.

Предложенная Вильсоном в [40] процедура "рекурсионных соотношений" основана на идее РГ, но технически отличается от квантово-полевой формулировки. В более поздних работах (например, [7, 8]) используется уже стандартная квантово-полевая техника РГ совместно с идеей размерной регуляризации, также заимствованной из квантовой теории поля [37, 38]. В настоящее время в большинстве работ, относящихся к критической теории, используется стандартная полевая техника РГ. Отметим также, что упомянутая техника также используется для описания моделей развитой турбулентности [45, 46, 47, 48, 29, 33, 34].

Метод РГ естественно объясняет критический скейлинг и универсальность: в инфракрасно - устойчивой фиксированной точке РГ уравнение Каллана - Симанзика принимает вид дифференциального уравнения обобщенного подобия, общим решением которого являют-

ся функции со свойством (1), а универсальность объясняется эквивалентностью критического поведения всех систем, гамильтонианы которых различаются лишь инфракрасно - несущественными операторами. В соответствии со своей канонической размерностью все составные операторы делятся на инфракрасно (ИК) - существенные, ИК - несущественные и логарифмические: у первых каноническая размерность меньше размерности пространства D , в котором рассматривается модель, у вторых - больше, а у последних равна D . Несущественные операторы не влияют на критическое поведение, определяя лишь поправки к скейлингу [7, 8, 39]. Поэтому, если действия двух моделей различаются лишь несущественными членами, эти модели оказываются эквивалентными в асимптотической области, что и объясняет гипотезу универсальности.

Критическая размерность d произвольной величины (поля, параметра, составного оператора) есть сумма канонической и аномальной размерностей, последняя появляется в результате ренормировки. Как уже упоминалось, для фиксированной модели и данной физической величины ее размерность d зависит лишь от глобальных характеристик типа размерности пространства D и не зависит от значений конкретных параметров модели - масс, констант связи и т.п. Например в $O(n)$ - симметричной модели ϕ^4 с n - компонентным полем ϕ критические размерности зависят лишь от D и n . Методов вычисления точных размерностей не существует, практически их находят лишь в форме различных асимптотических рядов. Исторически первым, наиболее универсальным, является предложенное Вильсоном [41, 42, 43] $4 - \epsilon$ - разложение по параметру $\epsilon = 4 - D$ - отклонению размерности пространства от критической размерности

(которая в случае ϕ^4 модели равна четырем). В задачах статистической физики $D = 3$, т. е. параметр $\epsilon = 1$ реально не является малым. Тем не менее результаты, получаемые в виде начальных отрезков асимптотических рядов $4 - \epsilon$ - разложения используют для вычисления критических индексов различными методами пересуммирования [59, 3, 23], чтобы сравнить их затем с результатами, полученными из высокотемпературных разложений (см. обзоры [62, 65, 8]).

Существует по крайней мере два подхода к РГ - вычислению критических индексов: $4 - \epsilon$ - разложение и РГ непосредственно в реальной размерности пространства (см. [50, 57]). Технически они существенно различаются, мы ограничимся рассмотрением первого из них.

В настоящее время $4 - \epsilon$ разложение является важным методом расчета аномальных размерностей, причем не только в статике, но и в критической динамике [57, 18]. Усилиями различных авторов для основных моделей вычислено довольно много первых членов $4 - \epsilon$ разложений. Максимальным на данный момент достижением является расчет β - функции статической ϕ^4 модели в шестипетлевом приближении (до порядка ϵ^5 в критических размерностях), выполненный в работе [21, 22].

Столь значительные успехи в конкретных расчетах по $4 - \epsilon$ разложению оказались возможными благодаря разработке удобной вычислительной схемы, а именно:

- I) РГ - функции вычисляются через константы ренормировки Z
- II) Для вычисления констант ренормировки используется размерная регуляризация и схема минимальных вычитаний [37, 38] (MS - схема; от англ. "minimal subtraction"), в которой константы ренор-

мировки зависят только от констант связи и параметра регуляризации.

III) Независимость констант ренормировки от массивных параметров (τ для ϕ^4 модели) позволяет вычислять их непосредственно в безмассовой теории (при $\tau = 0$), что существенно упрощает расчет диаграмм.

Возможность перехода к безмассовой теории является решающей для упрощения вычислений. Аномальные размерности параметров типа масс вычисляются в безмассовой теории через константы ренормировки подходящих составных операторов. Отметим, что ϵ -разложения в MS схеме оказываются удобными и при описании моделей развитой турбулентности [51, 52, 59, 63].

Как мы уже упоминали, получаемые методом РГ ряды для критических размерностей (индексов) оказываются расходящимися. В связи с этим оказывается необходимым некоторым образом переразложить (пересуммировать) полученный по теории возмущений отрезок ряда. Для получения численных значений индексов в реальных размерностях пространства используются разнообразные схемы пересуммирования, такие как методы Бореля-Лероя, Паде-аппроксимант и конформных отображений [50]. Данная тематика вызывала значительный интерес и в последнее время [2, 49, 32, 20].

Процедура пересуммирования существенно зависит не только от значений начальных коэффициентов ряда, вычисленных по теории возмущений, но и от асимптотики высоких порядков исследуемых рядов. Таким образом, исследование высоких порядков теории возмущений является важной задачей при рассмотрении полевых моделей.

В основе такого исследования лежит подход, разработанный в классической работе [61] и называемый *инстантонным*, состоящий в обобщении для функционального интеграла метода перевала. Результаты [61] были применены в [9] для исследования разложений критических индексов, получаемых методом ренормализационной группы.

Как утверждается в [24], известная асимптотика высоких порядков дает информацию, позволяющую выбирать параметры, фиксирующие произвол схемы пересуммирования. Поэтому важен вопрос о том, насколько вычисленные к настоящему моменту коэффициенты разложений близки к асимптотическим значениям.

Согласно [61] N -й коэффициент стандартного теоретико-полевого разложения по константе взаимодействия g произвольной величины F (выражаемой через функции Грина) при больших N имеет вид

$$F^{(N)} \approx e^{N \ln N - N} a^N N^{b_F} c_F. \quad (2)$$

Здесь и далее $X^{(N)}$ обозначает коэффициент при g^N разложения величины X в ряд по g . Константы a и b_F вычислялись для произвольных функций Грина [50]; в [61, 9] приведены также амплитуды c_F для β -функций теорий ϕ^{2m} ($m = 2, 3, \dots$) в логарифмических размерностях пространства. Соответствующие результаты для теории ϕ^4 в $D = 2, 3$ -мерных пространствах основываются на численных решениях уравнений стационарности массивной модели [10]. В работе [24], посвященной обсуждению различных схем пересуммирования рядов для критических индексов, (как и в [50]) амплитуда асимптотики c_F для $4 - \epsilon$ разложений не приведена вовсе, в [25] утверждается, что она вычислена в [31], а в следующей работе тех же авторов [27] объявлено (со ссылкой на [50]), что не только c_F но

и b_F для $4 - \epsilon$ разложения неизвестна.

Попробуем прояснить эту необычную ситуацию. В [61, 9] для старших порядков разложения, например, вершинной функции $\phi^4(O_n)$ теории в четырехмерном пространстве получено

$$\Gamma_4^{(N)} \approx \text{Const} \int_0^\infty \frac{dy}{y} e^{(n+8) \ln y/3} \left(\prod_{k=1}^4 [|p_k| y K_1(|p_k| y)] \right), \quad (3)$$

где вычисленная Const содержит зависимость от N , K_1 - функция Макдональда. Здесь приведена частично ренормированная функция, в которой осуществлены вычитания расходимостей однопетлевых подграфов (следующие порядки разложения констант ренормировки признаны несущественными вследствие малости по $1/N$). В теориях ϕ^{2m} ($m > 2$) для асимптотики вершинной функции написано выражение, аналогичное (3), но без члена $\exp\{(n+8) \ln y/3\}$. Ультрафиолетовые (УФ) расходимости в этих формулах проявляются в интегралах по y при $y \rightarrow 0$ (y - масштабный параметр). Несложно убедиться, что в (3) отсутствуют УФ расходимости: множитель $\exp\{(n+8) \ln y/3\}$ регуляризует интеграл в области малых y . Более того, аналогичным свойством обладают и, вычисленный в [60], поправочный по $1/N$ член рассматриваемой асимптотики: в нем УФ расходимости пропадают при учете двухпетлевых вкладов в константы ренормировки.

Напомним известный способ вычисления констант ренормировки [57]: вклад в Z данной диаграммы определяется расходимостью, оставшейся после применения к ней R' операции, вычитающей все расходимости подграфов. Иначе говоря, для определения вклада в константы ренормировки совокупности диаграмм некоторого порядка следует рассмотреть частично ренормированную теорию, в которой все константы ренормировки учтены с точностью на один по-

рядок меньше. Результаты [61, 9, 60] дают лишь конечные вклады в константы ренормировки (нулевые в схеме минимальных вычитаний (MS)). Вследствие общего утверждения о ренормализационной инвариантности теории, тем самым показано, что они вовсе не дают вклада в критические индексы.

Для исправления этой ситуации (отсутствия полюсов по ϵ) в работе [31] была предложена принципиально новая непertурбативная ренормировочная схема, в которой обнаружена непertурбативная фиксированная точка уравнения РГ, координаты которой не являются аналитической функцией ϵ . К сожалению непertурбативный характер схемы не позволяет сравнивать ее результаты с таковыми обычного $4 - \epsilon$ - разложения. Кроме того, сами авторы признают, что не могут оправдать свои построения. Видимо этим объясняется, что в работе [27] результаты [31] были признаны несостоятельными.

В свою очередь мы утверждаем, что отсутствие вкладов в асимптотику старших порядков разложения констант ренормировки в цитированных выше работах является следствием некорректного использования метода стационарной фазы при рассмотрении однопетлевых контрчленов в теории ϕ^4 (в теориях ϕ^{2m} ($m > 2$) сложностей не возникает). Проблема связана с тем, что метод вычисления асимптотики больших N не вполне согласуется с теорией ренормировки. Действительно, константы ренормировки естественно вычисляются в форме разложения по числу петель (имеется в виду структура R - операции). Статфазное вычисление асимптотики больших N тоже определяется петлевым разложением [57], но, строго говоря, $1/N$ не является параметром этого разложения. Нулевой порядок разложения по петлям (т.н. "древесные" диаграммы) пропорци-

ональны не нулевой степени $1/N$, а большому параметру N , поэтому первый порядок (однопетлевые диаграммы) - порядка единицы и не содержит малости по $1/N$. При вычислении методом [61, 9, 60] асимптотики старших порядков теории ϕ^4 в результате вычитания расходимостей однопетлевых вершинных подграфов в выражении (3) появляется множитель $\exp((n+8)\ln y/3)$. Он есть сумма логарифмических по y вкладов порядка единицы по $1/N$, поэтому он оставлен в виде экспоненты, и устраняет поверхностную УФ расходимость в произвольном порядке $1/N$ асимптотики.

В рамках $4 - \epsilon$ разложения наибольшее количество порядков для критических индексов было получено с использованием размерной регуляризации и MS схемы в безмассовой теории [21, 22]. В этой схеме РГ - функции (коэффициенты уравнения РГ) связаны известным образом [58, 50, 57] с вычетами первого порядка по ϵ констант ренормировки теории:

$$\gamma_i(g) = -g\partial_g\{Z_i\}, \quad \beta(g) = -g(\epsilon + \gamma_g), \quad (4)$$

здесь и далее $\{X\}$ - вычет в полюсе первого порядка по ϵ величины X , $i = \tau, \phi, g$, в безмассовой теории критическая размерность τ определяется ренормировкой составного оператора ϕ^2 .

Константы ренормировки в $4 - \epsilon$ (MS) схеме имеют вид

$$Z_i(u, \epsilon) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{a_i^{(N)} u^N}{\epsilon} + O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right), \quad u \equiv \frac{g}{16\pi^2} \quad (5)$$

причем вследствие соотношения (4) вся необходимая информация о критических индексах содержится в вычете первого порядка в нуле функций $Z(\epsilon)$.

Константы ренормировки имеют смысл лишь в рамках определенной теории возмущений и не могут рассматриваться вне ее. На-

ше предложение состоит в том, чтобы вернуться к исходной форме разложения для учета вкладов расходимостей однопетлевых подграфов. Технически это заключается в использовании вместо (3) асимптотически эквивалентного при больших N выражения, дающего, впрочем, принципиально иное УФ поведение. А именно, вклад N -го порядка теории возмущений по g теперь содержит необходимые полюса по ϵ , коэффициенты при которых вычисляются в форме $1/N$ - разложения. В MS схеме оказалось несложным проконтролировать то, что поправочные члены стадфазного вычисления функциональных интегралов дают поправочные же по $1/N$ вклады в РГ - функции. Изменение результата при использовании асимптотически эквивалентного выражения не означает возможность получить произвольный ответ, существенно здесь лишь то, конечное или бесконечное количество членов разложения множителя типа $\exp((n + 8) \ln y/3)$ в виде

$$\sum_j \frac{1}{j!} \left[\frac{(n + 8) \ln y}{3} \right]^j$$

принимается в (3) во внимание.

Развитие метода перевала [68, 69] позволило аналитически вычислять липатовские асимптотики разложения различных величин не только в четырехмерном пространстве, как в [61, 9], но и в размерности $4 - \epsilon$. Впрочем в [68, 69] используется та же форма (3), поэтому касающиеся РГ результаты этих работ нельзя признать безупречными.

В данной диссертации мы вычисляем асимптотики членов разложения констант ренормировки и критических индексов теории ϕ^4 в размерной регуляризации и MS схеме, а затем проводим их сравнение с современными результатами непосредственного расчета. От-

клонения оказываются существенными, что ослабляет теоретическую обоснованность детерминированности коэффициентов схемы Бореля - Лероя пересуммирования рядов ϵ - разложения критических индексов [24].

Столкнувшись этой проблемой, мы попытались экстраполировать значения неизвестных членов разложения констант ренормировки (шестой порядок и далее) с помощью поправочного по $1/N$ члена в правой части формулы (2), множитель при котором определялся по разнице точно вычисленного пятого порядка и соответствующего асимптотического значения (2) при $N = 5$. Упомянутый способ вычисления асимптотик констант ренормировки и анализ результатов, к которым он приводит, представлен в главе 1 настоящей диссертации.

Кроме уже упомянутого использования наших результатов в различных процедурах пересуммирования, следует указать еще одну область их применения. В [70] был предложен модифицированный метод исследования ϕ^4 модели, приводящий к принципиально сходящимся рядам теории возмущений (с конечным радиусом сходимости). Разработанный затем в [19], этот метод был приспособлен к $4 - \epsilon$ (MS) схеме. Мы развили инстантонный анализ для указанной ситуации и исследовали асимптотическое поведение этих сходящихся рядов. Затем мы использовали полученную информацию о поведении модели в высоких порядках теории возмущений, чтобы выделить явно главный вклад сингулярностей, определяющих радиус сходимости и тип особенности рядов модели [70, 19]. Вычисления проведены как для Γ - функций, так и для критических индексов. Данная процедура представлена в главе 2.

Кроме критических индексов в теории критического поведения рассматриваются универсальные отношения и скейлинговые (универсальные) функции [50, 57], высокие порядки разложений которых не были изучены. Несмотря на это, попытка пересуммирования соответствующих рядов была предпринята в [12]. Развитие метода перевала [68, 69] позволило аналитически исследовать асимптотики разложения различных величин в массивной теории ϕ^4 в ϵ -разложении. Поэтому следующим логическим шагом данной диссертации было вычисление асимптотик старших порядков ϵ -разложения скейлинговой функции парного коррелятора $\phi^4(O_n)$ модели в размерной регуляризации и схеме минимальных вычитаний, представленное в главе 3.

Для обсуждения принципиального вопроса о точности результатов, получаемых методами пересуммирования [9] существенна скорость, с которой петлевые разложения теории возмущений приближаются к асимптотической формуле. Наш анализ этого вопроса для $4 - \epsilon$ (MS) схемы показал, что константы ренормировки монотонно приближаются к своей асимптотике, но достаточно далеки от нее (так, например, для константы ренормировки Z_g при $N = 5$ наблюдается отличие примерно в 75 раз). Как уже упоминалось, этот факт ставит под сомнение точность результатов борелевского пересуммирования в данной схеме и вынуждает нас либо продолжать вычисление петлевых разложений, пока они не приблизятся в должной степени к асимптотике, либо интересоваться поправкой по $1/N$ к асимптотической формуле.

В работе [60] была рассмотрена поправка к липатовской асимптотической формуле [61], улучшающая выход на асимптотику петле-

вых разложений в единичной схеме ренормировки. Однако данная работа имеет уже описанный дефект - некорректное рассмотрение порядка предельных переходов $1/N$, $\epsilon \rightarrow 0$ и, как следствие, приведенная там схема вычисления амплитуды поправки к исследуемой асимптотике не годна для $4 - \epsilon$ (MS) схемы; чтобы получить такую поправку для констант ренормировки в $(4 - \epsilon)$ схеме, необходимо провести дополнительные вычисления, связанные с выделением УФ расходимостей в N -том порядке теории возмущений. Эти вычисления также представлены в данной диссертации: в четвертой главе мы получаем поправку к асимптотике высоких порядков для константы ренормировки Z_g и критического индекса η в $4 - \epsilon$ (MS) схеме. Конкуренция параметров $1/N$ и ϵ приведет к тому, что в отличие от [60] вклад в асимптотику высоких порядков дадут поправки по ϵ к инстантону ("точке" стационарности метода перевала в функциональном пространстве).

Константа ренормировки Z_g (и связанная с ней ренормгрупповая функция $\beta(g)$) является главной характеристикой при определении асимптотического поведения критических индексов. Именно она демонстрирует скорость выхода на асимптотику петлевых результатов, поэтому при вычислении поправки к асимптотической формуле мы ограничились лишь исследованием асимптотики высоких порядков константы ренормировки Z_g .

Суммируя все вышесказанное, перечислим проблемы, решаемые в данной работе.

1. Предложен способ вычисления асимптотик разложения констант ренормировки в высоких порядках теории возмущений для $O(n)$ - симметричной ϕ^4 модели в $4 - \epsilon$ (MS) схеме на основе ин-

стантонного анализа ультрафиолетовых расходимостей. Возникающие в данной схеме особенности приводят к отличиям от канонической техники [50] при вычислении амплитуды асимптотики высоких порядков для критических индексов. Обнаружены значительные отклонения точно известных к настоящему моменту членов разложения от главного порядка исследованных асимптотик как для констант ренормировки так и для критических индексов.

2. Показана применимость инстантонного анализа в модели [70, 19], представляющей собой модифицированный метод исследования теории ϕ^4 и приводящий к сходящимся рядам. Определен радиус сходимости и тип особенности рядов в этой модели, а также продемонстрировано, как поправки к липатовским асимптотикам могут быть явно использованы при пересуммировании рядов модели ϕ^4 .

3. Вычислена асимптотика высоких порядков ϵ - разложения скейлинговой функции парного коррелятора $O(n)$ - симметричной модели ϕ^4 (в размерной регуляризации и схеме минимальных вычитаний). Результат демонстрирует существенную неравномерность скейлинговой функции по ее аргументам.

4. Вычислена поправка к асимптотике высоких порядков для константы ренормировки Z_g и критического индекса η в $4 - \epsilon$ (MS) схеме. Полученные поправки существенно улучшают асимптотическое описание результатов петлевых расчетов.

Основные результаты опубликованы в статьях:

1. М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, Теор. и Мат. Физ. **126**, 409 (2001).
2. М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, Теор. и Мат. Физ. **129**, 387 (2001).

3. J. Honkonen, M. Komarova, M. Nalimov, *Acta Physica Slovaca* **52**,
303 (2002).

Глава 1

АСИМПТОТИКА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ: КОНСТАНТЫ РЕНОРМИРОВКИ И КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ $O(n)$ - СИММЕТРИЧНОЙ ϕ^4 МОДЕЛИ В $4 - \epsilon$ РАЗЛОЖЕНИИ.

В первом разделе данной главы коротко излагаются основные моменты использования метода перевала в функциональных интегралах и особенности, связанные с рассмотрением $4 - \epsilon$ - мерного пространства. Во втором описывается модификация схемы, предложенной в классической работе [61], позволяющая вычислять асимптотики констант ренормировки в ϕ^4 теории. В третьем разделе вычислены асимптотики коэффициентов разложения констант ренормировки и критических индексов, проведено их сравнение с известными членами разложений, получены экстраполяционные формулы для старших порядков ϵ - разложения. В заключение данной главы, в четвертом разделе, обсужден вопрос о влиянии полученных результатов на выбор параметров схем пересуммирования рядов для

критических индексов. Вклад поправочных по $1/N$ членов метода перевала в вычисленные асимптотики мы отнесли в Приложение 1.

1.1 Основные положения липатовского подхода.

Напомним коротко ход вычислений и основные формулы работы [61], используемые при расчете липатовских асимптотик для констант ренормировки и критических индексов. Рассматривается модель с действием

$$S_R(\vec{\phi}, g) = \frac{1}{2} Z_\phi^2 \partial_i \vec{\phi}_\alpha \partial_i \vec{\phi}_\alpha + \frac{1}{2} Z_\phi^2 Z_\tau \tau \vec{\phi}^2 + \frac{1}{4!} Z_\phi^4 Z_g g \mu^\epsilon (\vec{\phi}^2)^2 \quad (1.1)$$

в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$. Здесь $\vec{\phi}$ - n -компонентное векторное поле, символ $\vec{}$ стоит над векторами в изотопическом n -мерном пространстве (в отличие от векторов в D -мерном пространстве, над которым задано поле $\vec{\phi}$ и элементы которого выделены жирным шрифтом). Свертки по повторяющимся векторным индексам и интегрирования по полевым аргументам здесь и в дальнейшем подразумеваются, τ - массивный параметр, характеризующий отклонение от критической точки, g - константа связи, $Z_i \equiv Z_i(g)$ - константы ренормировки ($i = g, \phi$), μ - ренормировочная масса. Для краткости объект $(\vec{\phi}^2)^2$ в дальнейшем будем записывать в виде $\vec{\phi}^4$.

Для вычисления коэффициентов $G_k^{(N)}$ разложения k -хвостой функции Грина $G_k(g)$ по константе связи g в N -том порядке теории возмущений (для больших N) используется введенное в [61] интегральное представление для $G_k^{(N)}$

$$G_k^{(N)} = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dg}{(-g)^{N+1}} G_k(g) \quad (1.2)$$

(γ - замкнутый контур в комплексной плоскости g , охватывающий ноль), в основе которого лежит известная формула Коши, и которое

исследуется затем методом перевала при $N \rightarrow \infty$. Вариационные уравнения

$$\frac{\delta J}{\delta \vec{\phi}_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial g} = 0, \quad NJ(\vec{\phi}, g) = S_R(\vec{\phi}, g) + N \ln(-g). \quad (1.3)$$

не имеют решений при $D = 4$ в массивном ($\tau \neq 0$) случае [28] и при $D \neq 4$ в безмассовом ($\tau = 0$). Как указывается в [61, 9] в случае, если решение ϕ_c, g_c существует, справедливо

$$\vec{\phi}_c \sim N^{1/2}, \quad g_c \sim \frac{1}{N},$$

поэтому контрчлены действия (1.1) не существенны при вычислении точки стационарности; это означает, что на данном этапе при подстановке в выражение (1.3) действия модели (1.1) константы ренормировки могут быть положены равными нулю, и вариационные уравнения принимают вид:

$$-\Delta \vec{\phi}_\alpha + \tau \vec{\phi}_\alpha + \frac{1}{6} g \mu^\epsilon \vec{\phi}^2 \vec{\phi}_\alpha = 0; \quad \frac{g \mu^\epsilon}{4!} \int d\mathbf{x} \vec{\phi}^4(\mathbf{x}) = -N. \quad (1.4)$$

Семейство решений уравнений (1.4) в безмассовой теории при $D = 4$ найдено в [61] и имеет вид сферически-симметричных, убывающих функций. При $\epsilon = 0$ оно содержит зависимость от произвольных параметров \mathbf{x}_0, y и единичного вектора \vec{u} :

$$\vec{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, y, \vec{u}) = \frac{\vec{u}}{y^{(D-2)/2}} \left| \vec{\phi} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{y}, 0, 1, \vec{u} \right) \right|. \quad (1.5)$$

Параметры эти отражают, соответственно, трансляционную, масштабную и вращательную (изотопическую) инвариантности модели. Иными словами, точка стационарности функционала J , дающая существенный вклад в интеграл (1.2), вырождена. Чтобы учесть этот факт, при исследовании асимптотики применяется [61, 68] метод Фаддеева-Попова, заключающийся во введении под функциональный интеграл для функции Грина представления единицы в виде

интегралов по параметрам \mathbf{x}_0, y, \vec{u} от дельта - функций, фиксирующих значения этих параметров для каждого $\vec{\phi}$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} d(\ln y^2) \int d^D \mathbf{x}_0 \int d^n \vec{u} I(y, \mathbf{x}_0, \vec{u})$$

$$I = \left(-\frac{g}{4!} \int d\mathbf{x}^D \vec{\phi}^4(\mathbf{x}) \right)^{D+1} \delta^D \left(-\frac{g}{4!} \int d\mathbf{x}^D \vec{\phi}^4(\mathbf{x}) (\mathbf{x}^\nu - \mathbf{x}_0^\nu) \right) \times$$

$$\times \delta \left(-\frac{g}{4!} \int d\mathbf{x}^D \vec{\phi}^4(\mathbf{x}) \ln \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{y^2} \right) \delta^n \left(\vec{u} - \frac{\int d^D \mathbf{x} \vec{\phi}_\alpha(\mathbf{x}) |\vec{\phi}^l(\mathbf{x})|}{\sqrt{\sum_\alpha (\int d^D \mathbf{x} \vec{\phi}_\alpha |\vec{\phi}^l|^2)}} \right).$$
(1.6)

Здесь δ^D, δ^n - дельта - функции в D и n - мерном пространстве соответственно, значок ν нумерует проекции векторов \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 на координатные оси в D - мерном пространстве, а значок α - векторов $\vec{\phi}$ в n - мерном изотопическом пространстве; l - произвольное целое число, большее двух. Растяжение координат и поля

$$\mathbf{x} \rightarrow y\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \quad \vec{\phi}(y\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) \rightarrow y^{-1+\epsilon/2} \vec{\phi}(\mathbf{x}), \quad (1.7)$$

изменение порядков интегрирования по параметрам $\int dy d\mathbf{x}_0 d\vec{u}$ и переменным $\int dg, \int \mathcal{D}\vec{\phi}$ и последующее применение метода перевала по g и $\vec{\phi}$ приводят к окончательному выражению для асимптотик корреляционных функций [61].

В таком подходе решена также проблема отсутствия перевальных точек при $D = 4 - \epsilon$ в безмассовой теории. Как показано в [69], в этом случае следует искать функции, реализующие экстремум действия, предварительно зафиксировав масштабный параметр y . Введенное дополнительное условие

$$\langle \int d^D x \phi^4(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{\mathbf{x}}{y} \right)^2 \rangle = 0$$

накладывается одной из дельта - функций в I (1.6) и приводит к появлению дополнительного слагаемого с множителем Лагранжа в первом из вариационных уравнений (1.4) [68]:

$$-\Delta^{(D)} \vec{\phi}_\alpha + \frac{g\mu^\epsilon}{3!} \vec{\phi}^2 \vec{\phi}_\alpha + 4\rho \vec{\phi}^2 \vec{\phi}_\alpha \ln(\mathbf{x}^2) = 0, \quad (1.8)$$

здесь ρ - множитель Лагранжа, $\Delta^{(D)}$ - оператор Лапласа в D - мерном \mathbf{x} - пространстве. Второе из вариационных уравнений (1.4) остается при этом неизменным.

Сферически симметричное решение полученных уравнений стационарности - инстантон g_c , $\vec{\phi}_c(\mathbf{x})$ - существует и может быть найдено аналитически в виде рядов по ϵ . Для нахождения множителя Лагранжа уравнение (1.8) домножается на $\vec{\phi}_c(x)$, интегрируется по \mathbf{x} и рассматривается совместно с уравнением, отражающим специфику преобразования варьируемого функционала J при растяжении координат $x \rightarrow \lambda x$ (данный метод был впервые предложен в [28]):

$$\begin{aligned} & N \frac{\partial J\{\vec{\phi}_c(\lambda \mathbf{x})\}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = \\ & = \int d^D \mathbf{x} \left((D-2) \frac{\partial \vec{\phi}_c \partial \vec{\phi}_c}{2} + D \frac{g_c \mu^\epsilon \vec{\phi}_c^4}{4!} + 2\rho \vec{\phi}_c^4 \right) = 0. \end{aligned}$$

Условием совместности указанных уравнений является значение

$$\rho = -g_c \epsilon / 48.$$

Отметим, что величина ρ имеет порядок $O(\epsilon)$.

В ходе реализации метода Фаддеева-Попова производятся масштабные растяжения поля и координат, что приводит к замене параметров μ и ρ на эффективные $\mu \rightarrow \mu y$, $\rho \rightarrow \rho(\mu y)^\epsilon$. Чтобы указывать в последующих выражениях зависимость от N , y , μ явно,

перейдем к переменным

$$\bar{\phi} = |\vec{\phi}|/\sqrt{N}, \quad \bar{g} = Ng(\mu y)^\epsilon, \quad \bar{\varrho} = \varrho(\mu y)^\epsilon N. \quad (1.9)$$

В результате выражение для асимптотики больших N коэффициента разложения по g неренормированной функции Грина принимает вид [61, 68]:

$$G_k^{(N)}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k) = (-1)^N D^* L_k N^N N^{(k+n+3)/2} e^{-NS(\bar{\phi}_c, \bar{g}_c(\mu y)^{-\epsilon}) - N \ln(-\bar{g}_c)} \times \\ \times \int d^D \mathbf{x}_0 \int_0^\infty \frac{d(y^2)}{y^{D+2}} \frac{(\mu y)^{N\epsilon}}{y^{k(D/2-1)}} \bar{\phi}_c\left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{y}\right) \dots \bar{\phi}_c\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0}{y}\right), \quad (1.10)$$

где

$$L_k = \frac{S_n(k-1)!!}{n(n+2)\dots(n+k-2)}, \quad S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad (1.11)$$

в нулевом по ϵ порядке инстантон равен

$$\bar{\phi}_c^{(0)}(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)}, \quad \bar{g}_c^{(0)} = -16\pi^2. \quad (1.12)$$

Под D^* в (1.10) подразумевается гауссовский вклад от второй вариации функционала J в перевальной точке. Вообще говоря, эта величина зависит от ϵ , однако при вычислении главного по $1/N$ вклада в исследуемую асимптотику этой зависимостью можно пренебречь. Поэтому мы отложим обсуждение метода вычисления этой зависимости до главы 4, где она окажется существенна и используем известные из литературы результаты при $D = 4$. Величина гауссовского вклада от второй вариации была вычислена разными способами в [61] при $n = 1$, $D = 4$ и в [9] при произвольном n :

$$\bar{D}^* = 2^{(7-4n)/2} 3^{5n/2} \pi^{-(5+n)/2} 5^{-5/2} e^{-4(n+2)/3 - 7(n+8)/18 - R/12}, \quad (1.13)$$

где величина R может быть представлена в виде ряда

$$R = \sum_{l=2}^{\infty} (l+1)(l+2)(2l+3) \left(\ln \left[\frac{(l-1)(l+4)}{(l+1)(l+2)} \right] + (n-1) \ln \left[\frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)} \right] + \frac{2(n+2)}{(l+1)(l+2)} + \frac{2(n+8)}{(l+1)^2(l+2)^2} \right).$$

Выражение (1.13) вычислялось в упомянутых работах в так называемой "единичной" схеме ренормировки [57] без содержащих расходимости полных вкладов однопетлевых диаграмм



(линия - затравочный пропагатор теории ϕ^4 , волнистый хвост обозначает $\bar{\phi}_c$). Первая диаграмма обращается в ноль в безмассовой теории с размерной регуляризацией, где сдвиг критической температуры вследствие аддитивной ренормировки $\delta\tau$ отсутствует. Вклад второй диаграммы проще всего вычислить в импульсном представлении. Обозначив фурье-образ $\bar{g}_c \bar{\phi}_c^2/4$ через $v(k)$, в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$ получим с учетом симметричного коэффициента данной диаграммы следующее выражение для исследуемого объекта:

$$\frac{n+8}{144\pi^2} \int d^D k \frac{v(k)}{(2\pi)^D} \left[\frac{2}{\epsilon} + (\Psi(1) + \ln(4\pi) + 2) - 2 \ln |k| \right] v(-k) \equiv U. \quad (1.14)$$

Вклады в U независимых от импульса \mathbf{k} слагаемых в квадратных скобках немедленно вычисляются вследствие нормировки инстантонного решения: $\bar{g}_c \int d\mathbf{x} \bar{\phi}_c^4/4! = -1$. Что же касается слагаемого с логарифмической зависимостью от импульса, то для произвольной

функции $v(k)$ можно написать

$$\int d^{4-\epsilon} \mathbf{k} v(\mathbf{k}) \ln(|\mathbf{k}|) v(-\mathbf{k}) = S_D(-1) \frac{\partial}{\partial \chi} \int_0^\infty k^{3-\chi} v(k) v(-k) dk \Big|_{\chi=\epsilon}$$

Для члена с $\ln |\mathbf{k}|$ в (1.14) это приводит к выражению

$$S_D(-1) \frac{\partial}{\partial \chi} (2\pi)^{4-\chi} \int_0^\infty dx x^{3-\chi} \left(\frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c^2}{4} \right)^2 \Big|_{\chi=\epsilon}$$

Проводя дифференцирование по χ и вспоминая нормировку (см. второе соотношение в (1.4))

$$\bar{g}_c \int d\mathbf{x} \bar{\phi}_c^4 = -1$$

и равенство

$$\int d\mathbf{x} \ln(|\mathbf{x}|) \bar{\phi}_c^4(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.15)$$

обусловленное одной из дельта - функций в разбиении единицы (см. (1.6)), окончательно для конечной при $\epsilon \rightarrow 0$ части выражения (1.14) получим

$$U_{reg} = \frac{n+8}{6} (\Psi(1) + 2 - \ln(\pi)).$$

Множитель $\exp U_{reg}$ следует добавить в выражение (1.13), чтобы получить гауссовский вклад от второй вариации функционала J в перевальной точке в схеме MS:

$$D^* = \bar{D}^* \exp U_{reg}. \quad (1.16)$$

В пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$ переход к импульсному представлению в выражении (1.10) осуществляется с учетом справочной формулы

$$\bar{\phi}_c^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{1 + \mathbf{x}^2} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\pi} (2\pi)^{(4-\epsilon)/2} \frac{K_{1-\epsilon}(|\mathbf{p}|)}{|\mathbf{p}|}, \quad (1.17)$$

здесь $K_{1-\epsilon}$ - функция Макдональда [66]. В результате, после перехода к импульсному представлению и интегрирования по \mathbf{x}_0 и \vec{u} выражение (1.10) принимает вид

$$G_k^{(N)} = \frac{C_k^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty dy \chi_k(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k) y^{k-5} (\mu y)^{N\epsilon} e^{-\alpha\epsilon N} e^{(n+8)/(3\epsilon)}, \quad (1.18)$$

$$\chi_k(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k) = \frac{y K_1(y|\mathbf{p}_1|)}{|\mathbf{p}_1|} \dots \frac{y K_1(y|\mathbf{p}_k|)}{|\mathbf{p}_k|}, \quad \left(\sum_{l=1}^k \mathbf{p}_l = 0\right), \quad (1.19)$$

$$C_k^{(N)} = (-1)^N D^* L_k(4\sqrt{3}\pi)^k N^N N^{(k+n+3)/2} e^{-N}. \quad (1.20)$$

Здесь $e^{-\alpha\epsilon N}$ - добавка к варьируемому функционалу в перевальной точке $(\vec{\phi}_c, g_c)$, обусловленная сдвигом размерности пространства $4 \rightarrow 4 - \epsilon$:

$$\alpha = \left. \frac{dJ(\bar{\phi} = \bar{\phi}_c, \bar{g} = \bar{g}_c)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left[\frac{d\bar{\phi}_c}{d\epsilon} \frac{\delta J}{\delta \bar{\phi}} + \frac{d\bar{g}_c}{d\epsilon} \frac{\partial J}{\partial \bar{g}} + \frac{\partial J}{\partial \epsilon} \right] \Bigg|_{\substack{\epsilon=0 \\ \bar{\phi}=\bar{\phi}_c \\ \bar{g}=\bar{g}_c}} \quad (1.21)$$

Вклад $e^{(n+8)/(3\epsilon)}$ в (1.18) соответствует сингулярной по ϵ части выражения для U (1.14).

В $4 - \epsilon$ схеме функции Грина рассматриваются в форме разложения по ϵ . Поправки по ϵ к $\bar{\phi}_c^{(0)}$ и D^* при больших N дают несущественные вклады в (1.18) по сравнению с $\alpha N \epsilon$ и потому отброшены. При этом параметр $\rho \sim O(\epsilon)$ в D^* можно положить равным нулю, и, как уже упоминалось, вместо вычисления D^* в пространстве $D = 4 - \epsilon$ воспользоваться известными результатами (1.13, 1.16) в четырехмерном пространстве. Из аналогичных соображений в (1.18) отброшены множители типа y^ϵ по сравнению с $y^{N\epsilon}$.

Вследствие обращения в ноль вариаций функционала J в стационарной точке, лишь последнее слагаемое в (1.21) не обращается в

ноль. Поэтому:

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(S_{4-\epsilon} \int dx x^{3-\epsilon} \left[-\frac{1}{2} \bar{\phi}_c (\Delta_x + \frac{3-\epsilon}{x} \partial_x) \bar{\phi}_c + \frac{\bar{g} \bar{\phi}_c^4}{4!} \right] \right) \Big|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \Psi(1) - 1 \quad (1.22)$$

Здесь Ψ - логарифмическая производная гамма-функции; при получении последнего равенства мы использовали соотношение (1.15).

1.2 Схема вычисления асимптотик разложений констант ренормировки.

Мы утверждаем, что при вычислении асимптотик высоких порядков следует обратить особое внимание на регуляризацию и ренормировку теории. Для вычисления констант ренормировки в N - том порядке разложения по g рассмотрим функции Грина с R' операцией, т. е. с вычитаниями расходимостей подграфов с меньшим числом петель. Эта частичная ренормировка осуществляется константами Z в действии (1.1), вычисленными в теории возмущений по g вплоть до порядка $N - 1$. В размерной регуляризации они содержат полюса по ϵ . В [61, 9] справедливо отмечено, что в главном порядке по $1/N$ достаточно приближения: $Z_g \approx 1 + ag/(16\pi^2\epsilon)$, $Z_\phi \approx 1$, где

$$a = \frac{n+8}{3}. \quad (1.23)$$

После необходимых растяжений переменных (1.7, 1.9) рассматриваем для N -го коэффициента разложения, например, четыреххвостой функции Грина (с R' операцией и при $\tau = 0$):

$$G_4^{(N)} = \frac{(-1)^N}{\pi i} N^{N+2} \int_0^\infty \frac{dy}{y} y^{N\epsilon} \oint_\gamma \frac{d\bar{g}}{(-\bar{g})^{N+1}} \int D\bar{\phi} I e^{-\bar{S}} \times \\ \times y^{8-\epsilon} \bar{\phi}(\mathbf{p}_1 y) \dots \bar{\phi}(\mathbf{p}_4 y) \exp \left[-\frac{a\bar{g}(\mu y)^{-\epsilon} \bar{g}(\bar{\phi}^2)^2}{4!16\pi^2\epsilon} \right], \quad (1.24)$$

где

$$\bar{S} = \frac{N}{2} \partial_i \bar{\phi}_\alpha \partial_i \bar{\phi}_\alpha + \frac{N}{4!} \bar{g} \bar{\phi}^4 + N \bar{\rho} \bar{\phi}^4 \ln x^2,$$

сокращение вакуумных петель и нормировка на функциональный интеграл свободной теории подразумеваются. В размерной регуляризации при конечном ϵ множитель $y^{N\epsilon}$ устраняет УФ расходимость в нуле интеграла по y .

Перечислим используемые нами при вычислении приближения. Интегралы по $\bar{g} \bar{\phi}$ в (1.24) вычисляем методом перевала при больших N , в соответствии с изложенным в предыдущем разделе. Затем берем интеграл по y в форме разложения в ряд Лорана по ϵ . По окончании вычислений в одноподобных по ϵ выражениях вспоминаем о малом параметре $1/N$. Проблема заключается в том, что метод перевала плохо работает в области малых y , где, как показано в Приложении 1, реальным параметром разложения выступает $(\ln y)/N$. Вычисляя (1.24), мы можем держать ϵ не нулевым, но обязаны рассмотреть при этом произвольные y при интегрировании.

Тем не менее задачу определения асимптотик старших порядков разложения Γ функций удастся решить если:

- а) ограничиться вычислением определенных с УФ точки зрения объектов - таких, например, как вычеты по ϵ констант ренормировки (напомним, эти объекты полностью определяют критические индексы),
- б) уточнить форму написания предэкспоненциального фактора в выражении (1.24). Вся зависимость от y в интегранде под знаком $\int dg \int D\phi$ сосредоточена в члене, который рассматривается как предэкспонента при вычислении методом перевала. Преобразуем вклад

Z_g в (1.24):

$$\frac{a\bar{g}(\mu y)^{-\epsilon}\bar{g}\bar{\phi}^4}{4!16\pi^2\epsilon} = \frac{a\bar{g}[(\mu y)^{-\epsilon} - 1]\bar{g}\bar{\phi}^4}{4!16\pi^2\epsilon} + \frac{a\bar{g}^2\bar{\phi}^4}{4!16\pi^2\epsilon}.$$

Независящее от y второе слагаемое правой части этого равенства после замен $\bar{g} \rightarrow \bar{g}_c$, $\bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi}_c$ сокращает $\exp((n+8)/(3\epsilon))$ множитель в (1.18) (расходимости однопетлевых вершинных подграфов), возникающий в результате статфазного вычисления. Под знаком $\oint dg/g^{N+1}$ в (1.24) точным является равенство

$$\exp\left[-\frac{a\bar{g}[(\mu y)^{-\epsilon} - 1]\bar{g}\bar{\phi}^4}{4!16\pi^2\epsilon}\right] = \sum_{j=0}^{N/2} \frac{1}{j!} \left[-\frac{a\bar{g}[(\mu y)^{-\epsilon} - 1]\bar{g}\bar{\phi}^4}{4!16\pi^2\epsilon}\right]^j. \quad (1.25)$$

При фиксированном y оно справедливо и в асимптотике больших N , однако части этого равенства существенно различаются в УФ области интегрирования по y . Напомним, что константы ренормировки имеют смысл лишь в рамках определенной теории возмущений. Следовательно, представление предэкспоненты в форме правой части (1.25) является более естественным. Здесь становится важна погрешность стацфазного вычисления: в оценку предэкспоненты с помощью левой части выражения (1.25) дают ненулевой вклад все члены разложения по g , в частности пропорциональные g^M с $M > N$, в то время как использование правой части (1.25) исключает их из рассмотрения.

В результате стацфазного вычисления для частично-ренормированной (с вычитаниями на однопетлевые подграфы) четыреххвостой функции Грина в N -том порядке имеем:

$$G_4^{(N)} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty \frac{dy}{y} (\mu y)^{N\epsilon} \chi_4(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) e^{-\alpha N\epsilon} \times \sum_{j=0}^{N/2} \frac{1}{j!} \left[-a \frac{(\mu y)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon}\right]^j, \quad (1.26)$$

$\chi_k, C_k^{(N)}$ приведены в (1.19, 1.20). Теперь сингулярности при $y \rightarrow 0$ находят свое выражение в виде полюсов по ϵ . Простейший размерный анализ диаграмм обычной теории возмущений по константе связи g - основа УФ ренормировки теории - показывает, что поверхностная расходимость произвольной N -петлевой диаграммы приводит к полюсу первого порядка $1/(N\epsilon)$. Поэтому при вычислении интеграла по y коэффициент $N\epsilon$ следует считать малым, отбирая полюса по $N\epsilon$.

Рассматриваемый интеграл по масштабному параметру y по своей природе соответствует интегрированию по совокупности модулей внутренних импульсов диаграмм; его расходимость ассоциируется с поверхностной. Напомним, на примере выражения для функции $G_4^{(N)}$, основные правила вычислений в размерной регуляризации [38], которые мы и будем использовать для извлечения полюсов по ϵ .

- 1) Параметр ϵ (и даже $N\epsilon$) считается малым, однако $y^{N\epsilon}$ в расходящихся интегралах не следует разлагать в ряд по нему до окончания вычислений.
- 2) В расходящихся при малых y интегралах (регуляризованных множителем $y^{N\epsilon}$) полюсные члены легко выделяются интегрированием по частям. Например,

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y} \chi_4(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) y^{N\epsilon} \quad (1.27)$$

после интегрирования по частям дает

$$\int \frac{dy^{N\epsilon}}{N\epsilon} \chi_4(y) = -\frac{1}{N\epsilon} \int dy y^{N\epsilon} \frac{\partial \chi_4(y)}{\partial y}. \quad (1.28)$$

Зануление внеинтегральных членов обеспечивается асимптотическим поведением функции $\chi_k(y, \dots)$ из (1.19), убывающей экспоненциаль-

но благодаря содержащимся там функциям Макдональда $K_1(x)$. Образовавшийся в правой части (1.28) интеграл уже сходится при $\epsilon = 0$. Интересуясь полюсными по ϵ членами, в нем можно $y^{N\epsilon}$ разложить в ряд по $N\epsilon$ (существенна сходимость всех образовавшихся интегралов) и окончательно получить ответ для полюсного вклада (1.28) в виде

$$\frac{1}{N\epsilon} \frac{1}{\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 \mathbf{p}_3^2 \mathbf{p}_4^2}.$$

Аналогично (1.28) несложно получить соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dy}{y} \chi_4(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) (\mu y)^{N\epsilon} \left[a \frac{(\mu y)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right] = \\ = \frac{a}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) \frac{1}{\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 \mathbf{p}_3^2 \mathbf{p}_4^2} + O(1), \end{aligned} \quad (1.29)$$

которое означает, что при больших N этот интеграл содержит только второй полюс по $N\epsilon$.

Исследуя описанным выше способом каждое слагаемое в (1.26), получаем в рассматриваемой функции Грина полюса по $N\epsilon$ вплоть до порядка $N/2$ (вообще говоря, для рассматриваемой суммы диаграмм в N -м порядке теории возмущений следует ожидать появления полюсов по $N\epsilon$ до N - того порядка, однако метод стацфазы практически не позволяет контролировать старшие полюса). Подчеркнем, что форма записи (1.26) и составляет основное отличие нашего подхода от работ [61, 9], в которых под знаком интеграла по y вместо

$$\sum_j \frac{a^j (1 - (\mu y)^{-\epsilon})^j}{j! \epsilon^j}$$

поставлено $\exp(a \ln(\mu y))$ (при $\epsilon = 0$). Хотя асимптотически эти выражения равны, они дают принципиально разные вклады в интеграл по y . А именно, УФ конечность полученных в [9] выражений

(получаемая как следствие того, что $\exp(a \ln y) = y^a$ устраняет все УФ расходимости при малых y в интеграле по y) обусловлена тем, что под знаком $\int dy$ вклад любой степени выражения в квадратных скобках в (1.26) (логарифмических по y при $\epsilon = 0$) пропорционален соответствующей степени $1/(N\epsilon)$. Проведенное фактически суммирование степеней $\ln y$ в работах [61, 9] эквивалентно суммированию рядов по степеням g/ϵ в константах ренормировки, что приводит к их конечности при $\epsilon \rightarrow 0$ (см. Приложение 1).

Наличие в (1.26) множителя $\exp(-\alpha N\epsilon)$ приводит к необходимости вычислять полюсные члены всех порядков в интеграле по y для определения вычета в простом полюсе. Так, например, полюс s - того порядка $A_s/(N\epsilon)^s$, домноженный на $e^{-\alpha N\epsilon}$ даст вклад в вычет в нуле по ϵ порядка

$$\frac{A_s (-\alpha N)^{s-1}}{N\epsilon (s-1)!}.$$

Все такие вклады должны быть просуммированы¹⁾. Вычисления, однако, могут быть сделаны и более наглядным способом. Для этого сделаем в (1.26) замену переменной

$$y \rightarrow \tilde{y} = y \exp(-\alpha). \quad (1.30)$$

В результате получаем

$$G_4^{(N)} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} (\mu\tilde{y})^{N\epsilon} \chi_4(\tilde{y}e^\alpha, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) \sum_{j=0}^{N/2} \frac{1}{j!} \left[-a \frac{(\mu\tilde{y}e^\alpha)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right]^j. \quad (1.31)$$

Преобразуем (1.31) с учетом равенства (1.28), асимптотического поведения $\chi_4(\tilde{y}e^\alpha, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) \rightarrow 1$ при $\tilde{y} \rightarrow 0$ и соотношения

$$a \frac{(\mu\tilde{y}e^\alpha)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} = a \frac{(\mu\tilde{y})^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} + a(\mu\tilde{y})^{-\epsilon} \frac{(e^\alpha)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon}.$$

¹⁾ Для контроля мы провели эти вычисления, отсуммировав образовавшийся ряд вкладов в вычет в простом полюсе.

Несложно проверить, что также как и в соотношении (1.29), слагаемые (1.31), содержащие ненулевые степени $a((\mu\tilde{y})^{-\epsilon} - 1)/\epsilon$, дают вклад только в старшие полюса по $N\epsilon$ и не влияют на первый полюс.

Можно положить

$$(\mu\tilde{y})^{-\epsilon}(e^{-\alpha\epsilon} - 1)/\epsilon \approx -\alpha,$$

поправки по ϵ к этому равенству дают малые по $1/N$ вклады в наши вычисления (т.к. $(\mu\tilde{y})^{-\epsilon} \approx 1$, по сравнению с $(\mu\tilde{y})^{N\epsilon}$). Окончательно получим

$$\frac{\{G_4^{(N)}\}}{\epsilon} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{N\epsilon} \frac{1}{\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 \mathbf{p}_3^2 \mathbf{p}_4^2} \sum_{j=0}^{N/2} \frac{1}{j!} [a\alpha]^j \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} e^{a\alpha} \frac{1}{N\epsilon} \frac{1}{\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 \mathbf{p}_3^2 \mathbf{p}_4^2}. \quad (1.32)$$

Для парной корреляционной функции ($k = 2$) выражение, аналогичное интегралу (1.27), есть

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \chi_2(y, \mathbf{p}) (\mu y)^{N\epsilon} \quad (1.33)$$

и имеет полюса первого и второго порядка по ϵ . Перед вычислением выражения (1.33), следует предварительно осуществить вычитание из подынтегрального выражения:

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^3} (\mu y)^{N\epsilon} \left(\chi_2(y, \mathbf{p}) - \frac{1}{p^4} [q^4 \chi_2(y, q)] \Big|_{q=0} \right),$$

соответствующее аддитивной ренормировке массы. Далее, как и в случае $k = 4$, несколько раз проинтегрируем по частям. В возникшем слагаемом вида

$$\int dy \ln y (\mu y)^{N\epsilon-1} K_1(y|\mathbf{p}|)$$

оказывается возможным воспользоваться представлением

$$\ln y = \lim_{N\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial y^{N\epsilon}}{\partial (N\epsilon)}.$$

Существенным свойством функций Макдональда здесь является экспоненциальное затухание при больших аргументах и асимптотическое поведение

$$K_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{x \ln x}{2} - \frac{x}{2}(\ln 2 + \Psi(1) + 1/2) + O(x^3 \ln x), \quad x \rightarrow 0. \quad (1.34)$$

Выделяя полюса первого и второго порядка по ϵ , окончательно получим для (1.33):

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2(N\epsilon)^2} - \frac{(\ln 2 + \Psi(1) + 1/2)}{\mathbf{p}^2 N \epsilon}.$$

Повторив приведенные выше рассуждения, с заменой переменных (1.30), нетрудно получить для простого полюса в парной корреляционной функции G_2 :

$$\frac{\{G_2^{(N)}\}}{\epsilon} \approx \frac{C_2^{(N)}}{(16\pi^2)^N} e^{\alpha a} \left[\ln 2 + \Psi(1) + 1/2 + \alpha \right] \frac{1}{N\epsilon \mathbf{p}^2}. \quad (1.35)$$

Отметим, что в последнем выражении мы опустили вклад, имеющий логарифмическую зависимость от импульса и возникающий благодаря второму слагаемому в (1.34), так как вследствие общих положений теории ренормировки все такие члены не дают вклад в критические индексы, сокращаясь друг с другом. Мы использовали этот факт для контроля наших вычислений, наблюдая упомянутое сокращение явно (см. следующий раздел данной главы).

1.3 Асимптотики констант ренормировки

Конечность ренормированных функций G_{2R} и G_{4R} позволяет вычислить асимптотики констант ренормировки Z_ϕ и Z_g . Факториальный рост по N коэффициентов разложений существенно упрощает

исследование: при перемножении рядов в N -м по g порядке следует учитывать только их начальные и конечные члены [67].

Для ренормированной четыреххвостой функции Грина вплоть до N -го порядка по g напомним

$$G_4^R = Z_\phi^4 \left[- \text{diag}_1 g Z_g + \frac{(n+8)}{6} \text{diag}_2 g^2 Z_g^2 + \dots + g^N Z_g^N G_4^{(N)} \right]. \quad (1.36)$$

В этом равенстве подразумевается, что диаграммы содержат лишь поверхностные расходимости (при их вычислении учитываются контрчлены вплоть до порядка g^{N-1}), а первый полюс констант ренормировки Z_g , Z_ϕ содержит лишь слагаемые, соответствующие контрчленам порядка g^N .

Вклады в правую часть (1.36) порядка g^N , имеющие полюса первого порядка по ϵ , должны сокращаться. Получаемое отсюда условие на константы ренормировки в асимптотике больших N имеет вид:

$$-\frac{\{Z_g^{(N-1)}\}}{\epsilon} + \frac{\{G_4^{(N)}\}}{\epsilon} = 0. \quad (1.37)$$

Вклад от Z_ϕ^4 в (1.36) асимптотически мал, так как асимптотические поведения $Z_\phi^{(N)}$, $Z_g^{(N)}$ при больших N связаны соотношением

$$Z_\phi^{(N)} \sim Z_g^{(N-2)} \quad (1.38)$$

(вследствие $G_4^{(N-2)} \sim G_2^{(N)}$). Мы перешли к ампутированной функции Грина, опустив очевидный множитель $(\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 \mathbf{p}_3^2 \mathbf{p}_4^2)^{(-1)}$. Учитывая

$$C_k^{(N+1)} \approx -N C_k^{(N)}$$

и (1.32), получим окончательное выражение для асимптотики $\{Z_g\}$:

$$\{Z_g^{(N)}\}_{asympt} = -\frac{C_4^{(N)}}{16\pi^2} \exp\left(\frac{n+8}{6} \left[\Psi(1) - \ln(\pi) - 2\right]\right). \quad (1.39)$$

В окончательных выражениях $Z_i^{(N)}$ обозначает коэффициент при u^N в выражении для Z_i , $u \equiv g/(16\pi^2)$ как это принято в MS схеме [57].

Ряд теории возмущений для парной функции Грина при $\tau = 0$

$$G_2^R = \text{---} Z_\phi^2 + \frac{1}{6} \frac{(n+2)}{3} \text{---} \bigcirc \text{---} Z_\phi^2 g^2 Z_g^2 + \dots + Z_\phi^2 g^N Z_g^N G_2^{(N)} \quad (1.40)$$

позволяет найти константу ренормировки поля. Благодаря соотношению (1.38), кроме первого и последнего членов ряда (1.40) в старшем по N порядке следует учесть вклад диаграммы второго порядка по g :

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = -\frac{1}{(4\pi)^4 \epsilon} - \frac{1}{2(4\pi)^4} \left(\frac{13}{4} + \ln(4\pi) + \Psi(1) \right) + \frac{\ln |\mathbf{p}|}{(4\pi)^4}. \quad (1.41)$$

Учитывая (1.35, 1.39) получим

$$\begin{aligned} \{Z_\phi^{(N)}\}_{asymp} &= \frac{1}{2} \left[\frac{C_2^{(N)}}{N} \exp \left(\frac{n+8}{6} \left[\Psi(1) - \ln(\pi) - 2 \right] \right) \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{2} \left[\ln(4\pi) + 3 + \Psi(1) \right] + \frac{n+2}{18} \left[\frac{13}{4} + \ln(4\pi) + \Psi(1) \right] \frac{\{Z_g^{(N)}\}_{asymp}}{N^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Упомянутый в предыдущем разделе контроль за правильностью наших вычислений мы осуществили, проследив сокращение в старшем по N порядке членов, содержащих логарифм внешнего импульса, которые появляются как при вычислении $\{G_2^{(N)}\}$, так и в конечной части диаграммы (1.41).

Подстановка выражения (1.39) в (1.42) дает более компактную запись для константы ренормировки поля:

$$\{Z_\phi^{(N)}\}_{asymp} = -\frac{C_4^{(N)}(n+2)e^{\alpha a}}{2304\pi^2 N^2}. \quad (1.43)$$

Константа ренормировки массы Z_τ определяется условием конечности двуххвостой функции Грина со вставкой составного оператора $Q \equiv \phi^2/2$:

$$\langle \phi(x_1)\phi^2(x)\phi(x_2) \rangle = Z_\phi^2 \left[\text{diagram} \cdot Z_\tau - \frac{1}{2} \frac{n+2}{3} \text{diagram} \cdot Z_\tau Z_g g + g^N Z_g^N G_{Q,2} \right],$$

где

$$G_{Q,2} = \frac{C_4^{(N)}}{16\pi^2} \int_0^\infty dy (\mu y)^{N\epsilon} \chi_{Q,2}(y, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}) \left(1 - \frac{a}{N\epsilon} ((\mu y)^{-\epsilon} - 1) \right)^N, \quad (1.44)$$

$$\chi_{Q,2}(y, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}) = \frac{yK_1(y|\mathbf{p}_1|)}{|\mathbf{p}_1|} \frac{yK_1(y|\mathbf{p}_2|)}{|\mathbf{p}_2|} \frac{K_0(|\mathbf{p}|)}{8\pi^2}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0. \quad (1.45)$$

При получении выражения для $\chi_{Q,2}$ в дополнение к (1.17) была использована формула перехода к импульсному представлению

$$\frac{1}{(1 + \mathbf{x}^2)^2} \rightarrow 2\pi^2 K_0(|\mathbf{p}|),$$

составной оператор Q рассмотрен при ненулевом импульсе \mathbf{p} , чтобы избежать ИК расходимостей. Полюсные особенности (1.44) определяются как и в предыдущих аналогичных формулах. При вычислении Z_τ также, как и в случае для Z_ϕ , можно убедиться в том, что логарифмы внешних импульсов в старшем по N порядке сокращаются. Окончательная подстановка всех констант приводит к тому, что и прочие слагаемые в выражении для асимптотики константы ренормировки массы сокращаются, и в старшем по N порядке

$$\{Z_\tau^{(N)}\}_{asympt} = 0. \quad (1.46)$$

На основе полученных выражений представляет интерес выяснить насколько точно асимптотики (1.39, 1.43, 1.46) описывают ре-

альное поведение коэффициентов $Z_g^{(N)}$, $Z_\phi^{(N)}$, $Z_\tau^{(N)}$. В таблице 1 приведены для сравнения точные ($\{Z^{(N)}\}_{exact}$) [57] и асимптотические ($\{Z^{(N)}\}_{asympt}$) значения коэффициентов в случае $n = 1$. Можно увидеть, что последний точно вычисленный вклад $\{Z^{(5)}\}_{exact}$ очень сильно отличается от соответствующего асимптотического значения, хотя и наблюдается монотонность в приближении $\{Z^{(N)}\}_{exact}$ к вычисленным выражениям для $\{Z^{(N)}\}_{asympt}$. Аналогичная ситуация имеет место и для $n = 2, 3, \dots$

Таблица 1: точно вычисленные члены разложения констант ренормировки $\{Z^{(N)}\}_{exact}$ (однокомпонентное поле) и асимптотические значения членов разложения констант ренормировки $\{Z^{(N)}\}_{asympt}$.

$n = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
$\{Z_g^{(N)}\}_{exact}$	-2.833	10.850	-67.901	569.713
$\{Z_g^{(N)}\}_{asympt}$	-0.0049	0.062	-0.68	7.51
$\{Z_\phi^{(N)}\}_{exact}$	-0.0417	0.0208	-0.0846	0.3851
$\{Z_\phi^{(N)}\}_{asympt}$	-0.00003	0.0001	-0.0009	0.0063
$\{Z_\tau^{(N)}\}_{exact}$	-0.417	1.167	-4.989	30.151
$\{Z_\tau^{(N)}\}_{asympt}$	0	0	0	0

Константы ренормировки ренормализационно неинвариантны и, вообще говоря, факт их отклонения от асимптотических значений необъективен. Поэтому проведем аналогичное сравнение известных порядков $4 - \epsilon$ разложения и соответствующих асимптотических значений для критических индексов. Используя (4), превратим (1.39, 1.43, 1.46) в асимптотики Γ -функций:

$$\gamma_i^{(N)}{}_{asympt} = -N\{Z_i^{(N)}\}_{asympt}. \quad (1.47)$$

В результате для асимптотик $4 - \epsilon$ разложения критических индексов

$$\eta = 2\gamma_\phi(g_*), \quad \frac{1}{\nu} = 2 - \gamma_\tau(g_*), \quad (1.48)$$

где g_* - положение фиксированной точки: $\beta(g_*) = 0$ (см. (4)), имеем

$$\eta_{asympt}^{(N)} = 8a_\phi^{(2)} \frac{\{Z_g^{(N)}\}_{asympt}}{(a_g^{(1)})^{N+1}} e^{2a_g^{(2)}/a} \epsilon^N, \quad (1.49)$$

$$\nu_{asympt}^{(N)} = -\frac{1}{4} a_\tau^{(1)} \frac{\{Z_g^{(N+1)}\}_{asympt}}{(a_g^{(1)})^{N+1}} e^{2a_g^{(2)}/a} \epsilon^N. \quad (1.50)$$

Введенные здесь константы $a_i^{(s)}$

$$a_\phi^{(2)} = -(n+2)/72, \quad (1.51)$$

$$a_g^{(2)} = -(3n+14)/6, \quad (1.52)$$

$$a_\tau^{(1)} = (n+2)/3 \quad (1.53)$$

представляют из себя s -тый коэффициент разложения простого полюса по ϵ константы ренормировки $\{Z_i\}$, введенные в (5) (цитируем по [57]). Для случая $n=1$ сравнение асимптотических и точных значений членов разложения критических индексов приведено в таблице 2.

Таблица 2: точно вычисленные члены ϵ разложения критических индексов $\eta_\epsilon^{(N)}$, $\nu_\epsilon^{(N)}$ (однокомпонентное поле, при $\epsilon=1$) и асимптотические значения $\eta_{asympt}^{(N)}$, $\nu_{asympt}^{(N)}$.

$n=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
$\eta_\epsilon^{(N)}$	0.0185	0.0187	-0.0083	0.0257
$\eta_{asympt}^{(N)}$	$9.2 \cdot 10^{-6}$	$-3.9 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$-5.2 \cdot 10^{-4}$
$\nu_\epsilon^{(N)}$	0.0044	-0.020	0.0701	-0.217
$\nu_{asympt}^{(N)}$	$-8.70 \cdot 10^{-5}$	$3.20 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$4.44 \cdot 10^{-3}$

В [61] было предложено приближенно вычислять функции Грина, заменив неизвестные члены разложения их асимптотическими значениями. Наши результаты свидетельствуют, что в случае ϕ^4 теории,

главного по N члена асимптотики для этого совершенно недостаточно. Поэтому, интересуясь константами ренормировки, мы попытались учесть отличие $\{Z^{(N)}\}_{exact}$ от $\{Z^{(N)}\}_{asympt}$, вводя в асимптотике (4.7) первые поправки по $1/N$, вычисляя коэффициенты при поправочных членах по разнице последних известных точных и асимптотических членах разложения. В результате получились экстраполяционные формулы для еще не вычисленных порядков разложений констант ренормировки $\{\tilde{Z}_i^{(N)}\}$:

$$\{\bar{Z}_g^{(N)}\}_{asympt} = \{Z_g^{(N)}\}_{asympt} \left(1 + \frac{\bar{c}_g}{N}\right), \quad \bar{c}_g = \frac{5\{Z_g^{(5)}\}_{exact}}{\{Z_g^{(5)}\}_{asympt}} - 5 \quad (1.54)$$

$$\{\bar{Z}_\phi^{(N)}\}_{asympt} = \{Z_\phi^{(N)}\}_{asympt} \left(1 + \frac{\bar{c}_\phi}{N}\right), \quad \bar{c}_\phi = \frac{5\{Z_\phi^{(5)}\}_{exact}}{\{Z_\phi^{(5)}\}_{asympt}} - 5 \quad (1.55)$$

$$\{\tilde{Z}_\tau^{(N)}\} = \frac{C_4^{(N)}}{C_4^{(5)}} 5a_\tau^{(5)} / N \quad (1.56)$$

Здесь величины $\{Z_i^{(N)}\}_{asympt}$, $i = g, \phi$ определяются равенствами

$$\{Z_g^{(N)}\}_{asympt} = (-1)^N C_g N^N N^{\frac{7+n}{2}} e^{-N}, \quad (1.57)$$

$$\{Z_\phi^{(N)}\}_{asympt} = (-1)^N C_\phi N^N N^{\frac{3+n}{2}} e^{-N}, \quad (1.58)$$

$$C_g = -\frac{864\pi^{2+n/2} D^*}{n(n+2)\Gamma(n/2)} \exp\left(\frac{n+8}{6} [\Psi(1) - \ln(\pi) - 2]\right),$$

$$C_\phi = -\frac{6\pi^{2+n/2} D^*}{n\Gamma(n/2)} \exp\left(\frac{n+8}{6} [\Psi(1) - \ln(\pi) - 2]\right), \quad (1.59)$$

значения $\{Z_i^{(5)}\}_{exact}$, $\{Z_i^{(5)}\}_{asympt}$ при $n = 1$ могут быть взяты из таблицы 1; для произвольного n величины $\{Z_i^{(5)}\}_{asympt}$ следует вычислять непосредственно по формулам (1.39, 1.43, 1.46), выражения

для $\{Z_i^{(5)}\}_{exact}$ приведены, например, в [57]. Приведем также величину $a_\tau^{(5)}$ из (1.56) - коэффициент 5-го порядка разложения простого полюса по ϵ константы ренормировки Z_τ (цитируем по [57]):

$$\begin{aligned}
a_\tau^{(5)} = & (n + 2)(21n^3 + 45254n^2 + 1077120n + 3166528 + \\
& + 48\zeta(3)(17n^3 + 940n^2 + 8208n + 31848) - \\
& - 768\zeta(3)^2(2n^2 + 145n + 582) + \\
& + 288\zeta(4)(-3n^3 + 29n^2 + 816n + 2668) + \\
& + 768\zeta(5)(-5n^2 + 14n + 72) + \\
& + 9600\zeta(6)(2n^2 + 55n + 186))/933120, \quad (1.60)
\end{aligned}$$

В последней формуле $\zeta(x)$ - дзета функция Римана.

Заметим, что если бы нам не были точно известны члены разложений в пятом порядке теории возмущений, проведя вышеописанную экстраполяцию и основываясь на четвертом порядке, оказывалось возможным восстановить пятый порядок разложения константы ренормировки $\{Z_g\}_{exact}$ с точностью около 80 %. Результат экстраполяции для $\{Z_\phi\}_{exact}$ и $\{Z_\tau\}_{exact}$ значительно хуже (отклонение в два и более раз). Однако, как несложно видеть из формул (1.49, 1.50), что именно значение константы ренормировки Z_g определяет асимптотическое поведение ϵ - разложений критических индексов. Следовательно, в принципе полученные экстраполяционные выражения можно использовать для уточнения вычисления критических индексов.

1.4 Обсуждение полученных в данной главе результатов

Хочется отметить, что обнаруженное нами в теории $\phi^4(4 - \epsilon)$ расхождение вычисленных членов разложения критических индексов и их липатовских асимптотик может быть присуще только этой теории или данной конкретной схеме разложения. В значительной мере оно обусловлено уже упомянутым свойством перевального вычисления интегралов подменять конечные суммы рядами. Действительно, вычисляемые в компактной форме \bar{D}^* (1.13) и $\exp U_{reg}$ (1.14) связаны с конечными вкладками однопетлевых диаграмм, а вошедший в (1.39) множитель

$$\exp \left[\frac{(n+8)(\Psi(1)/2 - 1 - \ln(\pi)/2)}{3} \right]$$

своим происхождением обязан учету частичной ренормировки на расходимости однопетлевых графов. В N -том порядке исходной теории возмущений по g соответствующие подграфы, как объяснялось выше, присутствуют лишь в конечном числе, а их вклады - в виде конечных сумм. Отбирая конечные, независящие от N , вклады в константу ренормировки $\{Z_g^{(N)}\}$ (1.39) (определяющую поведение критических индексов), для $n = 1$ получаем вклад в амплитуду c_F из (4.7) для $\{Z_g\}$ порядка $e^{-3.10}$ (без учета таких естественных множителей, как S_n и $1/(16\pi^2)$). Для вычисления его в виде конечного отрезка ряда, как и происходит в традиционной теории возмущений, требуется учесть 10 - 11 членов для получения приличной точности; сумма первых пяти членов дает даже ошибку в знаке, что мы и имеем в асимптотике разложений критических индексов. Отсюда напрашивается не слишком оптимистичный прогноз: ряды $4 - \epsilon$

разложений выйдут на липатовские асимптотики не ранее чем в ϵ^{10} порядке.

Итак, как следует из наших результатов, для $4 - \epsilon$ разложения единственным реально используемым в схемах пересуммирования результатом метода Липатова является утверждение о борелевской суммируемости рядов для критических индексов. В сущности это и является основным моментом в различных методах пересуммирования. Однако объявленная в [24] возможность фиксировать параметры схемы пересуммирования данными асимптотического поведения представляется проблематичной. Аналогично, заключение о практической независимости результатов пересуммирования от асимптотик высоких порядков приведено и в [20] на основании исследования разложений в пределе сильной связи. По видимому этим и объясняется тот факт, что для фиксации параметров схем пересуммирования авторы [2, 49, 32] также не используют знание асимптотик, получая, тем не менее, хорошие результаты. С другой стороны, поскольку точность результатов борелевского пересуммирования строго не контролируется (из-за использования различного вида подгоночных параметров), и в то же время последнее также использует лишь знание пятипетлевых пертурбативных результатов и общий вид липатовской асимптотики (которая, в свою очередь, плохо описывает порядки теории возмущений при $N < 10 \sim 15$), мы вынуждены заключить, что точность результатов борелевского пересуммирования критических индексов может быть ниже, чем это обычно предполагается.

Глава 2

АСИМПТОТИКА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ В СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ МОДЕЛИ ϕ^4 В $4 - \epsilon$ РАЗЛОЖЕНИИ

Итак, в предыдущей главе было показано, что вычисленные по теории возмущений коэффициенты рядов, сконструированных для констант ренормировки и критических индексов в $4 - \epsilon$ (MS) схеме, не выходят на липатовскую асимптотику.

Асимптотичность обычных рядов теории возмущений - стандартная ситуация в квантовой теории поля. Чтобы получать приемлемые результаты уже давно разработаны различные методы, в которых заведомо расходящемуся ряду сопоставляют некоторый конечный результат. Упомянем здесь пересуммирование Бореля - Леруа в фиксированной размерности пространства [3, 23, 24, 17], а также в ϵ - разложении [17, 16, 25, 26, 27], простой метод Паде - Бореля [2] и самоподобные экспоненциальные аппроксиманты [49]. Однако сами

по себе расходящиеся ряды могут продуцировать произвольный результат, и только с помощью информации об асимптотике высоких порядков можно фиксировать этот произвол.

Но даже если мы имеем дело со сходящимся рядом, дополнительная информация о поведении его коэффициентов в высоких порядках теории возмущений также может улучшить численный результат. Знание о характере особенности на границе круга сходимости, а также о ее расположении может быть получено из известной асимптотики высоких порядков и использовано для увеличения скорости сходимости рассматриваемых рядов.

В этой главе мы рассмотрим формализм, естественным образом приводящий к *сходящимся* рядам для ϕ^4 модели. На основе результатов главы 1 мы исследуем радиус сходимости рядов для функций Грина и для РГ - функций. Для краткости мы в большинстве случаев ограничимся случаем $n = 1$, однако результаты легко можно обобщить на случай произвольного n . Мы покажем, как знание асимптотики высоких порядков изменяет результат вычисления критических индексов в $4 - \epsilon$ (MS) схеме и обсудим некоторые особенности, связанные с использованием асимптотической информации в моделях с конечным радиусом сходимости.

В первом разделе мы описываем метод построения сходящегося ряда для критических индексов модели ϕ^4 , во втором применяем инстантонный анализ и находим асимптотику высоких порядков сходящихся разложений. Характер особенности в сходящемся разложении для критических индексов а также их численные значения мы получаем в третьем разделе. Там же обсуждены полученные результаты.

2.1 Метод построения сходящегося ряда для критических индексов

В работе [19] был предложен новый подход к вычислению критических индексов модели ϕ^4 . Он основывался на модифицированном разложении [70] которое приводит к *сходящимся* рядам (напомним, что стандартный формализм приводит в асимптотическим рядам с нулевым радиусом сходимости). В упомянутом подходе стандартное действие ϕ^4 модели $S = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \frac{1}{2} \int dx \partial\phi\partial\phi, \quad S_2 = \frac{g}{4!} \int dx \phi^4$$

было представлено в виде $S = S_0 + S_I$, где

$$S_0 = S_1 + \bar{a}S_1^2, \quad S_I = \zeta(S_2 - \bar{a}S_1^2).$$

Здесь \bar{a} - произвольная константа, ζ - новый параметр разложения. Эта модель совпадает с традиционной ϕ^4 моделью в 'физической' точке ζ : $\zeta_{ph} = 1$. Еще в работе [70] утверждалось, что разложение по параметру ζ является сходящимся при $\zeta \leq \zeta_c = 1$, когда

$$\bar{a} \geq \frac{g}{64\pi^2} = \bar{a}_{min}. \quad (2.1)$$

В формализме ζ - разложений ренормированная $2k$ - точечная функция Грина может быть переписана в форме интеграла по вспомогательной переменной σ [19]:

$$G_{2k}^R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int d\sigma e^{-\sigma^2} \int D\phi \frac{\phi(\mathbf{x}_1) \dots \phi(\mathbf{x}_{2k})}{(1 + 2i\sigma\sqrt{\bar{a}}(1 - \zeta))^k} \tilde{Z}_\phi^{-2k} \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi - \frac{\zeta g \tilde{Z}_g \mu^\epsilon \phi^4}{4!(1 + 2i\sigma\sqrt{\bar{a}}(1 - \zeta))^2}\right). \quad (2.2)$$

Здесь величина \tilde{Z}_i ($i = g, \phi$) обозначает $Z_i(g\zeta/(1 + 2i\sigma\sqrt{\bar{a}}(1 - \zeta))^2)$, под $Z_i(g)$ мы подразумеваем ренормализационные константы как

функции константы связи, обсужденные в предыдущей главе. Такое представление дает нам возможность строить фейнмановские диаграммы обычным путем. Благодаря интегрированию по σ каждая диаграмма приобретает дополнительный множитель [70]:

$$\begin{aligned} U_j(\bar{a}) &= 1/\sqrt{\pi} \int d\sigma \exp(-\sigma^2)/(1 + 2i\sigma\sqrt{\bar{a}})^j \\ &= \int_0^\infty dt t^{j-1} \exp(-t - \bar{a}t^2)/(j-1)! \end{aligned} \quad (2.3)$$

В таком подходе уравнения РГ для функций Грина (2.2), выведенные в работе [19], имеют следующий вид

$$\mathcal{D}_{RG} G_{2k}^R \equiv [\mu\partial_\mu + \beta\partial_g + \beta_2\partial_g^2 + \dots + \gamma]G_{2k}^R = 0, \quad (2.4)$$

где γ и все β - функции зависят от параметров g , ζ , \bar{a} и k . В работе [19] показано, что уравнение (2.4) управляет инфракрасной асимптотикой исследуемой модели. Подставляя в него выражение (2.2), учитывая, что РГ - функции конечны про $\epsilon \rightarrow 0$ (т. е. тот факт, что когда производная ∂_g действует на константы ренормировки \tilde{Z}_i в G_{2k}^R , получающийся член содержит лишь полюсной по ϵ член в MS схеме ренормировке; все такие члены должны сократиться друг с другом ввиду упомянутой конечности β и γ функций) и приравнявая в получившемся выражении коэффициенты при одинаковых составных операторах, мы получили следующие соотношения:

$$\gamma = -2k \left[\int d\sigma \frac{e^{-\sigma^2}}{1 + 2i\sigma\sqrt{\bar{a}}(1 - \zeta)} \right]^{-1} g \frac{\partial}{\partial g} \int d\sigma e^{-\sigma^2} \frac{\{\tilde{Z}_\phi\}}{1 + 2i\sigma\sqrt{\bar{a}}(1 - \zeta)} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \beta = -\epsilon g + \left[\int d\sigma \frac{e^{-\sigma^2}}{(1 + 2i\sigma\sqrt{\bar{a}}(1 - \zeta))^3} \right]^{-1} g \frac{\partial}{\partial g} \int d\sigma e^{-\sigma^2} \times \\ \times \frac{\{\tilde{Z}_g - 2k\tilde{Z}_\phi\}}{(1 + 2i\sigma\sqrt{\bar{a}}(1 - \zeta))^3} - \gamma g. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Напомним, фигурные скобки обозначают вычет в нуле по ϵ . Представляя дробные выражения в интегралах в виде рядов по $2i\sigma\sqrt{\bar{a}(1-\zeta)}$, при $n = 1$, $k = 1$ эти формулы можно переписать в виде

$$\gamma = -\frac{2}{U_1(\bar{a}(1-\zeta))}g\partial_g \sum_{l=0} g^l \zeta^l \{Z_\phi^{(l)}\} U_{2l+1}(\bar{a}(1-\zeta)), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \beta = -\epsilon g + \frac{1}{U_3(\bar{a}(1-\zeta))}g\partial_g \sum_{l=0} g^l \zeta^l (\{Z_g^{(l)} - 2Z_\phi^{(l)}\}) \times \\ \times U_{2l+3}(\bar{a}(1-\zeta)) - \gamma g \equiv -\epsilon g + \bar{\beta}(g)g. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отметим, что если последние выражения представить в форме двойного разложения по ϵ и ζ , то первые члены совпадут с приведенными в [19]. Форма (2.7, 2.8) не использовалась в [19] так как эта работа была ориентирована на исследование конечного отрезка пертурбативного ряда, в то время как здесь нас интересуют вклады высоких порядков теории возмущений.

Критические индексы соотносятся с аномальными размерностями в формализме сходящихся рядов обычным образом [50]: $\eta = \gamma(g_*)/k$, $1/\nu = 2 - \gamma_\tau(g_*) + k\eta$. Здесь g_* - фиксированная точка, находящаяся из стандартного уравнения $\beta(g_*) = 0$, которое в данном случае можно с учетом (2.8) переписать в виде

$$\epsilon = \bar{\beta}(g_*). \quad (2.9)$$

В работе [19] было продемонстрировано, что уравнение (2.9) можно решить итеративно, вычисляя g_* в форме двойного разложения по параметрам ϵ и ζ . В результате критические индексы η и ν были вычислены при $n = 1$, $k = 1$, $\bar{a} = 0.134$ в физической точке $\zeta = \epsilon = 1$ (см. таблицу; колонки соответствуют количеству порядков теории возмущений, которые были учтены при получении результата. Ве-

личины со значком ϵ представляют собой результаты обычного ϵ - разложения, которое приведено для сравнения).

Таблица 3

Exponent	1	2	3	4	5
η	0	0.02553	0.04342	0.039745	0.039741
η_ϵ	0	0.01852	0.03721	0.02888	0.05454
ν	0.621	0.671	0.663	0.674	0.651
ν_ϵ	0.583	0.627	0.607	0.678	0.461

Заметим, что оценки, основанные на преобразовании Бореля стандартного ϵ - разложения дают $\eta = 0.0360 \pm 0.0050$ [17], $\eta = 0.035 \pm 0.002$ [16], $\nu = 0.6290 \pm 0.0025$ [17], $\nu = 0.628 \pm 0.001$ [16]. Типичный решеточный результат $\nu = 0.6305 \pm 0.0015$ [50]. Таким образом, несмотря на то, что исследованный в [19] ряд является сходящимся, точность результатов данной работы ниже, чем обычно цитируемый в случае использования борелевского пересуммирования. С другой стороны, формализм работы [19] является все же более предпочтительным, так как для получения значений критических индексов там не используются подгоночные параметры и какие бы то ни было аппроксимации, отображения (mappings) и пр. Именно по этой причине мы попытались использовать полученную в главе 1 информацию об асимптотике высоких порядков модели ϕ^4 чтобы улучшить результат суммирования сходящегося ряда теории возмущений [19].

2.2 Асимптотика высоких порядков сходящихся разложений

В работе [70] утверждалось, что инстантонный анализ не может быть использован для исследования сходящегося разложения функций Грина по параметру ζ . Тем не менее автор вычислил радиус

сходимости ζ - рядов и получил в качестве ответа не зависящий от параметра \bar{a} ответ $\zeta_c = 1$.

В нашей работе мы утверждаем, что инстантонный подход может быть адекватно применен в упомянутой задаче. Действительно, для N -того порядка ζ - разложения функции Грина можно записать

$$G_{2k}^{(N)} = \oint_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta^{N+1}} G_{2k},$$

где для G_{2k} следует использовать выражение (2.2). Последующее использование метода перевала по переменным σ , ζ и ϕ приводит к следующему инстантону (стационарной точке) при $n = 1$:

$$\phi_s = \sqrt{N} \phi_0 \left(\frac{2\sigma_0 \sqrt{\bar{a}(1 - \zeta_s)}}{\sqrt{\zeta_s g}} - \frac{i}{6\sqrt{\zeta_s g N}} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right), \quad (2.10)$$

где

$$\phi_0 = \frac{4\sqrt{3}}{y} \frac{1}{1 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 / y^2},$$

с произвольными параметрами \mathbf{x}_0 , y ,

$$\zeta_s = \bar{\zeta}_c \left(1 + \frac{7}{6\sqrt{\bar{a}N}} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right), \quad \bar{\zeta}_c = \frac{1}{1 - g/(64\pi^2 \bar{a})}$$

$$\sigma_s = \sqrt{N} \sigma_0, \quad \sigma_0 = \sqrt{\bar{\zeta}_c} \sqrt{\frac{g}{64\pi^2 \bar{a}}} + \frac{\bar{\zeta}_c}{\sqrt{N}} \frac{568\bar{a}\pi^2 + 3g}{96\pi\bar{a}\sqrt{g}} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Данный инстантон приводит к следующему асимптотическому поведению для N -того порядка ζ - разложений $2k$ - точечной функции Грина:

$$G_{2k}^{(N)} \sim N^{\bar{a}} \bar{\zeta}_c^N \exp\left(-\sqrt{\frac{N}{\bar{a}}}\right) \quad (2.11)$$

где $\bar{\zeta}_c$ - параметр, играющий роль радиуса сходимости, а \bar{a} - некоторая конечная величина. Заметим, что формула (2.11) содержит информацию о типе сходимости ряда (радиус сходимости, характер существенной особенности) для функции $G_{2k}^{(N)}$

В противоположность работе [70] мы получили в (2.11) радиус сходимости $\bar{\zeta}_c$, стремящийся к бесконечности при $\bar{a} \rightarrow \bar{a}_{min}$. Функция Грина была рассмотрена нами только в четырехмерном пространстве, однако это приближение (как мы видели в главе 1) изменяет лишь амплитуду асимптотики и не влияет на радиус сходимости. Тот же результат (2.11) может быть получен в переменных, предложенных в [70] (только в этом случае порядок величины инстантона ϕ_s оказывается равным $N^{1/4}$, что отличается от типичного для данной модели поведения $\sim \sqrt{N}$, вследствие чего, по - видимому, это решение и не было найдено в [70]. Итак, мы утверждаем, что инстантон существует.

Для обычных расходящихся рядов ϵ - разложения асимптотика высоких порядков функций Грина характеризует однозначно асимптотику РГ - функций и критических индексов. В случае сходящихся рядов ситуация оказывается более сложной, а именно знаменатели выражений (2.7, 2.8)

$$U_i(\bar{a}(1 - \zeta)) \quad i = 1, 3$$

имеют единичный радиус сходимости. Поэтому асимптотика высоких порядков ζ - разложения этих функций

$$U_i^{(N)}(\bar{a}(1 - \zeta)) \approx N^{i/2-1} e^{-\sqrt{N/\bar{a}+1/(8\bar{a})}} \frac{\bar{a}^{1-i}}{\Gamma(i)}$$

нетривиально влияет на асимптотическое поведения β и γ функций. Иными словами, хотя асимптотика функций Грина имеет радиус сходимости $\bar{\zeta}_c$, ряды для РГ - функций и критических индексов имеют еще и особенность на единичном круге, связанную с упомянутыми знаменателями.

2.3 Характер особенности в сходящемся разложении для критических индексов

Другая проблема, возникшая перед нами при учете высоких порядков теории возмущений в выражениях для критических индексов и специфическая именно для рядов с конечным радиусом сходимости, была связана с вычислением фиксированной точки g_* при помощи уравнения (2.9). Итеративно построенное решение $g_*(\epsilon, \zeta)$ уравнения (2.9) имеет дополнительную сингулярность в некоторой точке ϵ_m , которая совпадает с ближайшим к нулю экстремумом $\bar{\beta}$ -функции в комплексной плоскости g . Точка g_m , задаваемая условием

$$\epsilon_m = \bar{\beta}(g_m, \zeta), \quad \partial_g \bar{\beta}(g_m) = 0, \quad (2.12)$$

приводит в общем случае к сингулярности типа $g_* \sim \sqrt{\epsilon - \epsilon_m}$.

Выделить упомянутую сингулярность, можно лишь зная ее расположение ϵ_m . Чтобы вычислить ϵ_m второе уравнение системы (2.12) должно быть разрешено в форме ряда по ζ . К сожалению наши вычисления показывают, что пять известных к настоящему моменту членов разложения $\bar{\beta}$ не дают достаточной информации для определения g_m . Использование же экстраполяционных выражений (1.54, 1.55) в рамках метода Паде - аппроксимант привело к появлению целого множества сопряженных в комплексной плоскости точек g_m . Нам не удалось придумать способ выделения всех этих сингулярностей. Кроме того, полученная нами минимальная величина ϵ_m оказалась достаточно мала ($\sim .02$) что приводит к очень маленькому значению радиуса сходимости по ϵ (при фиксированном ζ) нашего двойного разложения по ϵ и ζ . Однако справиться с такой ситуацией можно, если перейти от переменных ϵ, ζ к переменным g, ζ . Этот

метод приводит к хорошим результатам в модели Крейчнана, где также появляются ряды с конечным радиусом сходимости [1].

Находя g_* непосредственно из уравнения (2.9), где использовалось выражение (2.8) для β - функции при $\epsilon = 1$, мы вычислили пять порядков ζ - разложения для критических индексов (при $n = 1$, $\zeta_{ph} = 1$; при вычислении i - той колонки сумма по l в (2.7, 2.8) обрывалась на значении $l = i$):

Таблица 4

Exponent	1	2	3	4	5
η	0	.021	0.023	0.027	0.029
$g_*/(16\pi^2)$	0.96	0.86	0.65	0.61	0.57
ν	0.612	0.650	0.638	0.641	0.640
$g_*/(16\pi^2)$	1.38	1.17	0.84	0.75	0.68

Эти результаты отличаются от приведенных в [19] тем, что в наших выражениях для РГ - функций выделена явно особенность на единичном круге, обсуждавшаяся в предыдущем разделе. Индекс η вычислялся при $\bar{a} = .14$, индекс ν for $\bar{a} = .17$ которые по нашим данным дают наибольшую скорость сходимости. Заметим, что вычисленное g_* обеспечивает сходимость рядов по ζ в обоих случаях (в смысле выполнения неравенства (2.1)). Результат улучшился так как для индекса η мы наблюдаем теперь монотонное приближение к "хорошему" решеточному результату $0.035 \sim 0.036$, значение индекса ν также улучшилось (если сравнивать его с решеточным результатом).

Теперь попытаемся продолжить полученную таблицу, вычисляя в ней новые колонки, соответствующие шестому и т.д. порядкам теории возмущений. При этом будем использовать экстраполяционные формулы (1.54, 1.55) для неизвестных членов разложения констант

ренормировки. Результаты, представленные на графиках, демонстрируют несостоятельность обычного экстраполяционного метода при вычислении критических индексов - после некоторой стабилизации значений индексов дальнейшее увеличение учтенных порядков приводит к развалу схемы.

Чтобы исправить эту ситуацию можно попытаться исследовать асимптотику высоких порядков функций (2.7), (2.8). Знаменатели этих выражений имеют, как уже говорилось, дополнительные сингулярности типа $U_1(a(1 - \zeta))$, $U_3(a(1 - \zeta))$ которые явно выделены. Для дальнейших вычислений оказывается удобным ввести величину

$$\delta Z_\phi^{(N)} \equiv \{Z_\phi^{(N)}\}_{exact} - \{\bar{Z}_\phi^{(N)}\}_{asympt}$$

и переписать выражение (1.58) для константы ренормировки Z_ϕ в асимптотически эквивалентном виде

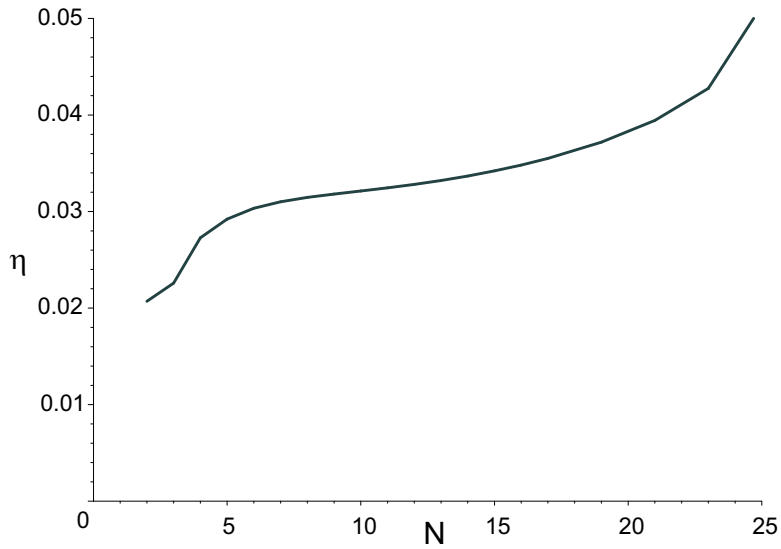
$$\{\bar{Z}_\phi^{(N)}\}_{asympt} = C_\phi (-1)^N N^2 \frac{(2N)!}{4^N \sqrt{2} N!} \left(1 + \frac{c_\phi}{N}\right). \quad (2.13)$$

Здесь константа c_ϕ может быть легко найдена тем же способом, что была найдена константа \bar{c}_ϕ в выражении (1.55) - сравнением асимптотического выражения (2.13) с результатами точного петлевого расчета величины $[Z_\phi^{(5)}]$.

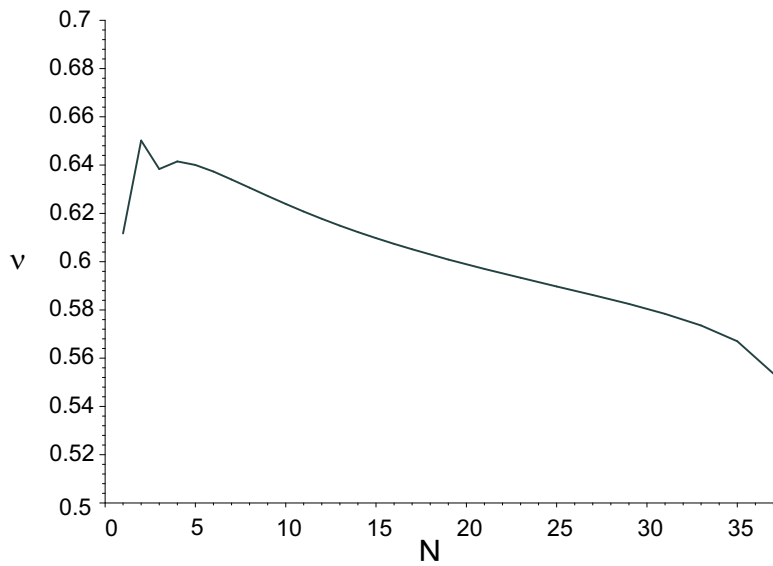
Подставляя затем $[\bar{Z}_\phi^{(5)}]_{asympt}$ в (2.7), перераскладывая результат по ζ и проводя суммирование по l , получим РГ - функцию γ в виде

$$\begin{aligned} \gamma = & -2 \sum_{j=1}^5 \frac{j(g\zeta)^j}{(16\pi^2)^j} \frac{U_{2j+1}(a(1 - \zeta)) \delta Z_\phi^{(j)}}{U_1(a(1 - \zeta))} - \frac{\sqrt{2} C_\phi}{U_1(a(1 - \zeta))} \times \\ & \times \left(- \frac{(g\zeta)^3}{(64\pi^2)^3} 6! U_7 + \frac{(g\zeta)^2}{(64\pi^2)^2} 4! (3 + c_\phi) U_5 - \frac{(g\zeta)}{(64\pi^2)} 2! (1 + c_\phi) U_3 \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь для краткости мы опустили аргумент у функции U_i , который подразумевается везде равным $a(1 - \zeta) + g\zeta/64\pi^2$. Выражение (2.14)



Величина критического индекса η как функция числа N коэффициентов теории возмущений, принятых во внимание.



Величина критического индекса ν как функция числа N коэффициентов теории возмущений, принятых во внимание.

характеризует не только расположение особенности ζ - рядов для γ - функций, но и тип соответствующей сингулярности.

Аналогично (2.14) мы получили выражение для β - функции

$$\beta = \sum_{j=1}^5 j \frac{(g\zeta)^j}{(16\pi^2)^j} \frac{U_{2j+3}(a(1-\zeta))(\delta Z_g^{(j)} - 2\delta Z_\phi^{(j)})}{U_3(a(1-\zeta))} + \frac{C_g}{2^{5/2}U_3(a(1-\zeta))} \times$$

$$\times \left(- \frac{(g\zeta)^3}{(64\pi^2)^3} 8!U_9 + \frac{(g\zeta)^2}{(64\pi^2)^2} 6!(3+c_g)U_7 - \frac{(g\zeta)}{(64\pi^2)} 4!(1+c_g)U_5 \right) - \gamma \quad (2.15)$$

Выражения (2.14), (2.15) несут информацию о стандартной модели ϕ^4 если положить $\zeta = 1$. Решим в этом случае уравнение (2.9) с β из (2.15) и подставим полученную таким образом величину $g_* = 0.382$ вместо g в выражение (2.14) для γ . Результат, полученный таким образом учитывает все порядки теории возмущений, в предположении, что неизвестные точно коэффициенты констант ренормировки в точности равны своим асимптотическим значениям (1.54, 1.55) (напомним, что при этом упомянутые экстраполяционные формулы содержат поправочный по $1/N$ член, определенный по отклонению точно вычисленного пятого порядка теории возмущений от асимптотического). Мы получили $\eta = 0.0236$. Учет асимптотической поправки к константам ренормировки по отклонению точно вычисленного четвертого порядка теории возмущений ϵ разложения дает результат $\eta_4 = 0.0241$.

Аналогичная процедура для индекса ν приводит к значениям $\nu = 0.580$, ($\nu_4 = 0.624$). В этих результатах мы использовали всю имевшуюся в данный момент информацию о рядах теории возмущений модели ϕ^4 в рамках формализма, приводящего к сходящимся рядам. Остается объяснить, почему результат, полученный с учетом всех порядков теории возмущений не слишком хорош. В от-

личие от полученных в предыдущей главе результатов (1.49, 1.50) при вычислении критических индексов в этой главе нам потребовалось использовать не только экстраполяционные формулы для константы ренормировки Z_g , но и экстраполяции для Z_ϕ . Как мы уже упоминали что точность наших результатов определяется (и гарантируется) точностью использованных аппроксимаций (1.54, 1.55) и ограничена скоростью с которой коэффициенты разложений ренормализационных констант выходят на предписанную асимптотику. Точность второй из этих формул особенно слаба что и приводит к низкой точности полученных результатов.

Полученные нами результаты также демонстрируют возможный способ учета поправочных по $1/N$ членов к главному порядку липатовской асимптотики при получении численных значений критических индексов в модели ϕ^4 . Тот факт, что учет поправок, полученных примитивной экстраполяцией (1.54, 1.55) не приводит к улучшению численных результатов *даже в формализме сходящихся разложений* заставляет нас заключить, что лишь после аккуратного вычисления поправок по $1/N$ к липатовским асимптотическим формулам поведение коэффициентов разложений констант ренормировки может быть описано адекватно и затем корректно использовано для обработки рядов в $4 - \epsilon$ (MS) схеме, причем как в формализме сходящихся рядов, так и для борелевского пересуммирования.

Глава 3

АСИМПТОТИКА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ: СКЕЙЛИНГОВЫЕ ФУНКЦИИ $O(n)$ - СИММЕТРИЧНОЙ ϕ^4 МОДЕЛИ В $4 - \epsilon$ РАЗЛОЖЕНИИ.

В этой главе нами на основе инстантонного подхода вычислена асимптотика высоких порядков $4 - \epsilon$ - разложения скейлинговой функции парного коррелятора O_n - симметричной теории ϕ^4 в MS схеме.

Напомним основные положения РГ, касающиеся скейлинговой функции парного коррелятора модели с действием (1.1).

Инфракрасная (ИК) асимптотика решения уравнения РГ

$$[\mu\partial_\mu + \gamma_\tau\tau\partial_\tau + \beta\partial_g + 2\gamma_\phi]G_2^R = 0$$

($\tau/\mu^2 \rightarrow 0$, $p/\mu \rightarrow 0$, p - внешние импульсы функций Грина) для парной ренормированной функции может быть представлена в эквивалентных формах [57]:

$$\langle \phi\phi \rangle = \frac{1}{\tau\tilde{s}^{\gamma-1}}\bar{G}(g_*, \bar{p})$$

или

$$\langle \phi\phi \rangle = \frac{1}{p^2 s^{-\eta}} \tilde{G}(g_*, \bar{\tau}),$$

где g_* - положение фиксированной точки, $\bar{\tau}$, \bar{p} - универсальные переменные, удовлетворяющие уравнениям

$$s \partial_s \bar{\tau} = (2 + \gamma_\tau) \bar{\tau}, \quad \tilde{s} \partial_{\tilde{s}} \bar{p} = 1/(2 + \gamma_\tau) \bar{p},$$

$s \equiv p/\mu$, $\tilde{s} \equiv \tau/\mu^2$, функции \bar{G} и \tilde{G} задаются соотношениями

$$\bar{G} = \tau \langle \phi\phi \rangle \Big|_{\substack{p=\bar{p} \\ \tau=\mu^2 \\ g=g_*}}, \quad \tilde{G} = p^2 \langle \phi\phi \rangle \Big|_{\substack{p=\mu \\ \tau=\bar{\tau} \\ g=g_*}}$$

Определенные так скейлинговые функции еще не являются ренормировочно - инвариантными. Для обеспечения универсальности их следует нормировать, устранив две произвольные неуниверсальные амплитуды. Начиная с двухпетлевого приближения скейлинговые функции не удается вычислить аналитически, вместо этого используются разложения по степеням универсальной переменной $\bar{\tau}$ или \bar{p} . Начальные отрезки таких разложений асимптотик высоких порядков и будут вычислены в этой главе данной диссертации. Мы принимаем каноническую нормировку результатов, которая заключается в фиксации двух первых членов разложения в окрестности $\bar{p} = 0$ функции

$$\bar{G}^{-1} = 1 + \bar{p}^2 + O(\bar{p}^4).$$

В первом разделе этой главы коротко описываются основные моменты использования метода перевала в функциональных интегралах, связанные с рассмотрением массивной модели. Во втором обсуждается разложение инстантона в ряд по нелинейностям вариационного уравнения. В третьем разделе описывается схема вычисления асимптотик скейлинговых функций в высоких порядках теории

возмущений. В четвертом и пятом найдены липатовские асимптотики для \bar{G} и \tilde{G} . В шестом разделе обсужден вопрос о канонической нормировке и асимптотике старших порядков ϵ - разложения скейлинговой функции, проведено сравнение с известными результатами точного расчета.

3.1 Основные положения липатовского подхода при $\tau \neq 0$

Приведем основные положения работ [61, 9, 68, 69], используемые нами при вычислении липатовских асимптотик разложений скейлинговых функций. Рассматривается теория с ренормированным действием (1.1) в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$. В отличие от главы 1 массивный параметр τ теперь рассматривается произвольным (не нулевым).

Вычисление коэффициентов $G_k^{[N]}$ разложения k -хвостой функции Грина $G_k(g)$ по константе связи g в высоких порядках ($N \rightarrow \infty$) осуществляется, как и в главе 1, на основе интегрального представления (1.2) с последующим применением метода перевала по переменной g и полю ϕ . При этом, проводится упомянутый в первой главе метод Фаддеева - Попова, также как и там производятся растяжения переменных (1.7, 1.9), чтобы указывать зависимость от переменных N , y явно. Соответствующие вариационные уравнения, определяющие точку стационарности (инстантон), имеют теперь вид

$$-\Delta \bar{\phi}_\alpha + \tau y^2 \bar{\phi}_\alpha + \frac{\bar{g}}{6} \bar{\phi}^2 \bar{\phi}_\alpha + 4 \bar{\rho} y^\epsilon \bar{\phi}^2 \bar{\phi}_\alpha \ln \left(\frac{\mathbf{x}}{y} \right)^2 = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\bar{g}}{4!} \int d\mathbf{x} \bar{\phi}^4(\mathbf{x}) = -1, \quad \int d\mathbf{x} \bar{\phi}^4(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{\mathbf{x}}{y} \right)^2 = 0. \quad (3.2)$$

В отличие от главы 1 мы выделили явно в этих уравнениях масштабный параметр y . Использование приема Фаддеева-Попова и растяжение переменных [61] как и в безмассовом случае приводит к тому, что инстантон оказывается зависящим от y только через коэффициенты $\mu y, \tau y^2, \varrho y^\epsilon$ уравнения (3.1), а интегрирование по этому параметру выделяется в выражении для $G_k^{[N]}$ явно. Отметим, что если в первой главе множитель Лагранжа $\bar{\varrho}$ решал проблему отсутствия перевальных точек в безмассовой модели при $\epsilon \neq 0$, то теперь он аналогично введен, чтобы обеспечить существование инстантона при $D = 4$ в массивной теории [69, 28].

Для частично ренормированной (с вычитаниями расходимостей подграфов) k -хвостой функции Грина такой подход приводит к выражению:

$$\begin{aligned}
G_k^{[N]}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k) &= (-1)^N L_k N^N N^{(k+n+3)/2} \int_0^\infty \frac{d(y^2)}{y^{D+2}} D_{et} e^{-NJ(\bar{\phi}, \bar{g}, \tau y^2, \bar{\varrho} y^\epsilon)} \times \\
&\quad \times \int d^D \mathbf{x}_0 (\mu y)^{N\epsilon} Z_\phi^{-k} \frac{1}{y^{k(1-D/2)}} \bar{\phi}\left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{y}\right) \dots \bar{\phi}\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0}{y}\right) \times \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{N/2} \frac{1}{j!} \left[(1 - Z_g Z_\phi^4) \frac{N \bar{g} \bar{\phi}^4}{4!} \right]^j \times \sum_{i=0}^{N/2} \frac{1}{i!} \left[(1 - Z_\tau Z_\phi^2) \frac{N \tau y^2 \bar{\phi}^2}{2} \right]^i, \quad (3.3)
\end{aligned}$$

здесь как и в первой главе J обозначает варьируемый функционал, однако теперь он равен

$$J(\phi, g, \tau, \varrho) = \int d^D \mathbf{x} \left(\frac{\partial \phi \partial \phi}{2} + \frac{\tau \phi^2}{2} + \frac{g \phi^4}{4!} + \varrho \phi^4 \ln(\mathbf{x}^2) \right) + \ln(-g),$$

L_k, S_n приведены в (1.10), D_{et} - детерминант ядра квадратичной формы $\delta^2 J / \delta \{\phi, g\} |_{\phi_c, g_c}$ на линейном функциональном подпространстве, ограниченном дополнительными условиями, фиксирующими положение, масштаб и направление инстантона; аргумент констант

ренормировки подразумевается следующим :

$$Z_{\tau,\phi,g} = Z_{\tau,\phi,g} \left(\frac{\bar{g}(\mu y)^{-\epsilon}}{N} \right).$$

Ренормировка в (3.3) осуществляется константами $Z_{\tau,\phi,g}$, вычисленными в виде рядов теории возмущений по g . В MS схеме для констант ренормировки можно ограничиться приближениями [61, 9]:

$$Z_g(g) \approx 1 + \frac{ag}{16\pi^2\epsilon}, \quad a = \frac{n+8}{3};$$

$$Z_\phi(g) \approx 1; \quad Z_\tau(g) \approx 1 + \tilde{b} \frac{g}{16\pi^2\epsilon}; \quad \tilde{b} = -\frac{(n+2)}{3}$$

так как остальные члены не дают вклад в главный порядок по $1/N$. Находящиеся в показателе экспоненты константы ренормировки в размерной регуляризации содержат полюса по ϵ , которые, как подробно обсуждалось в первой главе, должны быть разложены в ряды Лорана (последняя строка выражения (3.3)) до применения перевального метода.

Метод перевала не может быть распространен на интеграл по масштабному параметру y выражения (3.3). Следуя идеологии, разработанной в первой главе, интересуясь ϵ - разложением теории, следует рассматривать комбинацию параметров $N\epsilon$ малой. В асимптотике больших N наиболее существенной оказывается область малых y . В интегралах по y перевальная точка в области малых y отсутствует. Таким образом интеграл по y в (3.3) является существенно негауссовым. Асимптотики больших N оказываются существенно неравномерными по остальным параметрам (ϵ, τ, p). Проводя вычисления, мы будем фиксировать соотношения между этими параметрами, и, исследуя интегралы по y , ограничимся первыми членами разложения скейлинговых функций по их переменным.

Для значения в стационарной точке варьируемого функционала $J_c \equiv J(\bar{\phi}, \bar{g}, \tau y^2, \bar{\rho} y^\epsilon)$ в (3.3) будем использовать при малых y приближение

$$J_c = J_c \Big|_{\tau, \epsilon=0} + O(\tau y^2, \epsilon) \equiv 1 + \alpha \epsilon - \bar{J}_c \simeq 1 + \alpha \epsilon - \alpha_1 \tau y^2 \ln(\tau y^2) - \alpha_2 \tau y^2, \quad (3.4)$$

Коэффициенты α_1, α_2 будут обсуждены позднее, α вычислено в первой главе (см. (1.22)). В дальнейшем мы увидим, что все члены (3.4) дают вклад в главный порядок по $1/N$ скейлинговой функции, остальные поправки к (3.4) несущественны.

Рассматривая $4 - \epsilon$ разложение функций Грина, поправками по ϵ к $\bar{\phi}$ и D_{et} при $N \rightarrow \infty$ следует пренебречь по сравнению с $\alpha N \epsilon$ вкладом как и в первой главе. Поэтому инстантон достаточно вычислять в пространстве размерности $D = 4$. Массивные поправки к D_{et} оказываются малыми по сравнению с вкладами третьего и четвертого слагаемых (3.4) в выражение (3.3). Таким образом, вместо вычисления D_{et} в пространстве $D = 4 - \epsilon$ при $\tau \neq 0$ можно в старшем по $1/N$ порядке воспользоваться известными результатами при $D = 4$ и $\tau = 0$, т. е. считать $D_{et} = D^*$, где последняя величина дается формулами (1.16, 1.13).

3.2 Инстантон в массивной модели ϕ^4

Решение первого (дифференциального) уравнения (3.1) удобно представить в виде функционального интеграла, введя вспомогательное поле аналогично тому, как это обычно делается при рассмотрении стохастических уравнений [57]:

$$\bar{\phi} = \int D\varphi D\phi' \varphi \exp(-A) \det\left(\frac{\delta^2 A}{\delta\phi' \delta\varphi}\right) \quad (3.5)$$

где

$$A = \phi' \left(-\Delta\varphi + \tau\varphi + \frac{\bar{g}}{6}\varphi^3 + 4\bar{\varrho}\varphi^3 \ln x^2 \right). \quad (3.6)$$

Осуществив в (3.5) сдвиг полевой переменной $\varphi \rightarrow \varphi + \bar{\phi}_c$ на величину безмассового стационарного инстантона $\bar{\phi}_c$ при $\epsilon = 0$ (см. ф-лу (1.12)), получим действие вспомогательной теории в виде

$$A = \phi' \left(-\Delta\varphi + \tau\varphi + \frac{\bar{g}}{2}\bar{\phi}_c^2\varphi + \frac{\bar{g}}{2}\bar{\phi}_c\varphi^2 + \frac{\bar{g}}{6}\varphi^3 + 4\bar{\varrho}\bar{\phi}_c^3 \ln x^2 + \right. \\ \left. + 12\bar{\varrho}\bar{\phi}_c^2\varphi \ln x^2 + 12\bar{\varrho}\bar{\phi}_c\varphi^2 \ln x^2 + 4\bar{\varrho}\varphi^3 \ln x^2 + \tau\bar{\phi}_c \right). \quad (3.7)$$

Теория (3.5) с действием (3.7) позволяет построить нетривиальное решение $\bar{\phi}$ в виде разложения (3.5) в ряд по нелинейностям ($\sim g, \bar{\varrho}$). Начальный отрезок разложения инстантона определяется набором диаграмм:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(py, \tau y^2, \bar{\varrho} y^\epsilon) = & \\ = & \text{---} -\tau y^2 \quad \text{---} + \frac{\bar{g}}{2} \tau y^2 \quad \text{---} - \\ & -\frac{\bar{g}}{2} (\tau y^2)^2 \quad \text{---} + \frac{\bar{g}}{6} (\tau y^2)^3 \quad \text{---} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь обычной линии соответствует $1/(\mathbf{p}^2 y^2 + \tau y^2)$, волнистой - $\bar{\phi}_c(\mathbf{p}y)$ (в координатном представлении - $\bar{\phi}_c(\mathbf{x}/y - 0)$).

По сумме первых двух диаграмм (3.8), равной

$$\frac{4\sqrt{3}\pi|\mathbf{p}|yK_1(|\mathbf{p}|y)}{(\mathbf{p}^2 y^2 + \tau y^2)}, \quad (3.9)$$

можно вычислить поправку на τy^2 к J_c , т. е. найти коэффициенты α_1, α_2 в (3.4):

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2} - 3 \ln 2 + 3\gamma. \quad (3.10)$$

Остальные три диаграммы дают лишь $O((\tau y^2)^2 \ln(\tau y^2))$ вклады в (3.4) и поэтому не учитываются при вычислении J_c .

Анализ вклада с множителем Лагранжа $\bar{\varrho}$ можно провести способом, аналогичным описанному в первой главе. Рассмотрев первое из уравнений стационарности (3.1) совместно с уравнением, отражающим специфику преобразования варьируемого функционала J при растяжении координат $x \rightarrow \lambda x$ [28] при $D = 4$ (отличие от (1.9) заключается лишь в присутствии здесь массивного вклада)

$$\left. \frac{\partial J\{\bar{\phi}(\lambda x), \bar{g}, \tau y^2, \bar{\varrho} y^\epsilon\}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = \int d\mathbf{x} (\partial \bar{\phi} \partial \bar{\phi} + 2\tau y^2 \bar{\phi}^2 + (\bar{g}/6 + 2\bar{\varrho} y^\epsilon) \bar{\phi}^4 + 4\bar{\varrho} y^\epsilon \bar{\phi}^4 \ln x^2) = 0, \quad (3.11)$$

получим выражение, из которого несложно выразить $\bar{\varrho}$:

$$\tau y^2 \int d\mathbf{x} \bar{\phi}^2 + 2\bar{\varrho} y^\epsilon \int d\mathbf{x} \bar{\phi}^4 = 0. \quad (3.12)$$

Используя (3.9) можно видеть, что в последнем выражении интеграл от квадрата инстантона при малых τ демонстрирует логарифмическое поведение:

$$\int d\mathbf{x} \bar{\phi}^2 \sim \ln(\tau y^2) \quad (3.13)$$

Отметим, что вычисленные нами коэффициенты α_1, α_2 совпадают с результатами работы [69] (хотя приведенное в последней значение $\bar{\varrho}$, видимо вследствие опечатки, не удовлетворяет соотношению (3.12) и, следовательно, масштабному свойству (3.11)).

3.3 Скейлинговая функция парного коррелятора

Перейдя в (3.3) к импульсному представлению для асимптотики высоких порядков разложения функции Грина (с вычитаниями на

расходимости подграфов) можно написать:

$$G_2^{[N]}(p, \tau) = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \left(\frac{[y^2 \bar{\phi}(py, \tau y^2)]^2}{(4\pi\sqrt{3})^2} e^{N\bar{J}_c} - 1 \right) \times \\ \times (\mu y)^{N\epsilon} e^{-N\alpha\epsilon} \sum_{j=0}^{N/2} \frac{1}{j!} \left[\frac{-a[(\mu y)^{-\epsilon} - 1]}{\epsilon} \right]^j \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \left[\frac{-b}{2} \tau \bar{\phi}^2 \frac{(\mu y)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right]^i \quad (3.14)$$

где величина $C_k^{[N]}$ приведена в (1.20) (следует положить $k = 2$). Выполненное явно вычитание единицы в первой строке (3.14) соответствует аддитивной ренормировке $\delta\tau$.

При выделении ультрафиолетовых расходимостей множитель

$$\exp(N\alpha_1 y^2 \ln y^2)$$

из $\exp(N\bar{J}_c)$ позволяет при больших N в интеграле по y ограничиться рассмотрением области малых y . Поэтому следует разложить $\bar{\phi}$ в окрестности $y = 0$ и подставить это разложение в выражение (3.14).

Итак, обсудим разложение инстантона $\bar{\phi}$ по y^2 . Чтобы его получить, нужно учесть как разложение при малых y известной функции $\bar{\phi}_c$, так и поправочные по нелинейностям члены (3.5).

Здесь ряд теории возмущений по \bar{g} (3.8) оказывается очень удобным. Действительно, наличие в вариационном уравнении (3.1) членов вида τy^2 , $\ln(\mathbf{x}/y)$ свидетельствует о том, что малые y соответствуют ИК области. Безмассовый инстантон ведет здесь себя как $\bar{\phi}_c \sim 1/\mathbf{x}^2$, то есть имеет определенную каноническую размерность. Значит для (3.7) применим простой размерный анализ. В ИК области при $D = 4$ имеем канонические размерности: $d_\tau = 2d_p = 2$. Поскольку параметрами (3.7) являются τy^2 и py , можно заключить, что каноническая размерность и определяет зависимость от y . Имеем $d_{\phi'} = 0$, $d_{\bar{\phi}_c} = d_{\bar{\phi}} = 2$, $d_{\bar{g}} = -2$, размерность константы связи ока-

залась отрицательной, т. е. \bar{g} является ИК несущественной. Воспользовавшись выражением (3.13), легко видеть, что $\bar{\rho}y^\epsilon \sim \tau y^2 \ln(\tau y^2)$, поэтому $\bar{\rho}$ еще менее существенно при малых y , чем \bar{g} . Итак разложение инстантона по y^2 определяется набором диаграмм (3.8). Выражения, соответствующие этим диаграммам, должны быть разложены вплоть до требуемого порядка по y , затем вычислены (что удастся сделать лишь в форме разложения по переменным $p/\sqrt{\tau}$ или τ/p^2 ; здесь и далее $p \equiv |\mathbf{p}|$). Вычисление диаграмм (3.8) в асимптотике $p^2 \ll \tau$ приводит к следующему разложению инстантона в ряд по y :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(py, \tau y^2) = & \frac{4\sqrt{3}\pi}{(p^2 + \tau)y^2} \left(pyK_1(py) - \frac{3}{4}\tau y^2 \ln^2(\tau y^2) + R_1 \tau y^2 \ln(\tau y^2) + \right. \\ & \left. + R_2 \tau y^2 - \frac{1}{4}p^2 y^2 \ln\left(\frac{p^2}{\tau}\right) + R_3 p^2 y^2 + o(y^2, p^2) \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

здесь $R_1 \simeq 0.649$, $R_2 \simeq 3.32$, $R_3 \simeq 6.84$ (аналитические выражения для R_1 , R_2 и R_3 приведены в Приложении 2). Заметим, что выражение для $\bar{\phi}(p, \tau)$ является аналитическим по p в нуле; в рассматриваемом порядке по y это проявляется в том, что неаналитичность функции Макдональда (см. (1.34)) сокращается логарифмическим по p слагаемым. Это служит проверкой наших вычислений, ибо отражает аналитичность скейлинговой функции \bar{G} по \bar{p} .

Далее, интересуясь в (3.14) асимптотиками $p/\sqrt{\tau} \rightarrow 0$ и $\tau/p^2 \rightarrow 0$, следует провести интегрирование по y , а затем суммирование по j, i , отбирая лишь конечные при $\epsilon \rightarrow 0$ слагаемые (т.к. ренормированная корреляционная функция регулярна) в главном порядке по $1/N$.

3.4 Асимптотика $p^2 \ll \tau$; скейлинговая функция $\overline{G}^{[N]}(\overline{p})$

Положим $\tau = \mu^2$ и рассмотрим асимптотику парного коррелятора при малых p/μ . После замены $y \rightarrow y/\mu$ выражение (3.14) примет вид

$$\begin{aligned} G_2^{[N]}(\overline{p}) &= \sum_{j=0}^{N/2} G_j = \\ &= \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\overline{p}^2 + 1)^2} \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \left(\frac{[y^2 \overline{\phi}(\overline{p}y, y^2)]^2}{(4\sqrt{3}\pi)^2} e^{N\overline{J}_c(\tau=1)} - 1 \right) \times \\ &\quad \times y^{N\epsilon} e^{-N\alpha\epsilon} \sum_{j=0}^{N/2} \frac{(-a)^j [y^{-\epsilon} - 1]^j}{j! \epsilon^j}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Оказывается, из суммы по i в выражении (3.14), обусловленной константой ренормировки массы Z_τ , все слагаемые, кроме первого (при $i = 0$), дают несущественные по $1/N$ вклады в скейлинговую функцию по сравнению с главным (поэтому в (3.16) они опущены, комментарии смотри ниже). Также несущественными оказываются поправки $\sim o(y^2)$ к J_c и $\sim o(1)$ к $\overline{\phi}$.

Возводя выражение (3.15) в квадрат и отбрасывая при этом члены порядка $o(1)$, получим:

$$\begin{aligned} [y^2 \overline{\phi}(py, y^2)]^2 &\simeq \frac{48\pi^2}{(p^2 + 1)^2} \left(1 + Ay^2 \ln^2(y^2) + By^2 \ln(y^2) \right. \\ &\quad \left. + Cy^2 + Ep^2 y^2 + Fp^2 y^2 \ln(y^2) \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где для краткости введены обозначения в соответствии с (3.15)

$$\begin{aligned} A &= -\frac{3}{2}; & B &= 2R_1; & C &= 2R_2; \\ E &= 2R_3 + \gamma - \frac{1}{2} - \ln 2 \simeq 13.06; & F &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Рассмотрим отдельное слагаемое G_j из (3.16). Раскрытие в нем скобки $[y^{-\epsilon} - 1]^j$ приведет к появлению интегралов вида

$$I_1(s) = \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} y^s \left(\frac{[y^2 \bar{\phi}(\bar{p}y, y^2)]^2}{(4\sqrt{3}\pi)^2} e^{N\bar{J}_c(\tau=1)} - 1 \right) \quad (3.19)$$

где $s = N\epsilon$. Эти интегралы имеют при малых s полюсные особенности. При их исследовании \bar{J}_c можно в области малых y заменить асимптотическим выражением $\alpha_1 y^2 \ln(y^2) + \alpha_2 y^2$ (3.4). Затем полюсные особенности несложно выделить явно двукратным интегрированием по частям выражения (4.22) с учетом обращения в ноль при больших y выражения $\exp(N\bar{J}_c(y))$ (техника вычислений здесь такая же как в аналогичных вычислениях первой главы). Таким образом, имеем в старшем по N порядке:

$$I_1(s) = \frac{1}{\mu^2(1 + \bar{p}^2)^2} \left[\frac{a_1}{s^3} + \frac{b_1}{s^2} + \frac{c_1}{s} + d_1(s) \right], \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 8A, & b_1 &= -2N\alpha_1 - 2F\bar{p}^2, \\ c_1 &= N\alpha_2 + E\bar{p}^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

и $d_1(s)$ - регулярная в нуле функция:

$$d_1(s) = I_1(s) - \frac{a_1}{s^3} - \frac{b_1}{s^2} - \frac{c_1}{s}. \quad (3.22)$$

В (3.21) отброшены несущественные по $1/N$ члены, например, константные вклады по сравнению с $N\alpha_1$, $N\alpha_2$.

С учетом (4.22), слагаемое G_j из (3.16) приобретает вид

$$G_j = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\bar{p}^2 + 1)^2} \sum_{m=0}^j C_j^m (-1)^m a^j \frac{I_1((N-m)\epsilon)}{\epsilon^j j!} e^{-N\alpha\epsilon}.$$

Раскладывая в этом выражении $I_1((N-m)\epsilon)$ в окрестности нуля, получим:

$$G_j = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\bar{p}^2 + 1)^2} \sum_{m=0}^j C_j^m (-1)^m a^j \frac{1}{\epsilon^j j!} \times$$

$$\times \left(\frac{a_1}{(N-m)^3 \epsilon^3} + \frac{b_1}{(N-m)^2 \epsilon^2} + \frac{c_1}{(N-m) \epsilon} + d_1(0) + d_1'(0)(N-\epsilon)\epsilon + \frac{d_1''(0)(N-m)^2 \epsilon^2}{2!} + \dots + \frac{d_1^{(j)}(0)(N-m)^j \epsilon^j}{j!} \right) e^{-N\alpha\epsilon}.$$

Образовавшиеся в предыдущем выражении суммы можно преобразовать с учетом равенства

$$\sum_{m=0}^j (-1)^m C_j^m f(m) = (-1)^j \frac{\partial^j f(m)}{\partial m^j} \Big|_{m=j/2}, \quad (3.23)$$

являющегося точным если f - полином степени не выше j и асимптотически точным по $1/N$ если $f(m)$ зависит от разности $(N-m)$ и $j \ll N$. Результатом преобразований является

$$G_j = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\bar{p}^2 + 1)^2} a^j \left[a_1 \frac{(-1)^j (j+1)(j+2)}{(N\epsilon)^{j+3}} + b_1 \frac{(-1)^j (j+1)}{(N\epsilon)^{j+2}} + c_1 \frac{(-1)^j}{(N\epsilon)^{j+1}} + \frac{d_1^{(j)}(0)}{j!} \right] e^{-N\alpha\epsilon}.$$

В ренормированную скейлинговую функцию войдут только конечные при $\epsilon \rightarrow 0$ слагаемые, то есть те, в которых полюса по ϵ сокращаются за счет экспоненциального члена $\exp(-N\alpha\epsilon)$. В итоге, отбирая только эти слагаемые в G_j , а затем проводя суммирование по j , получим:

$$G^{[N]}(\bar{p}) = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\bar{p}^2 + 1)^2} \left(-a_1 \left[\frac{\alpha^2 e^{\alpha a}}{a} - \frac{2\alpha e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{2e^{\alpha a}}{a^3} - \frac{2}{a^3} \right] + b_1 \left[\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right] - c_1 \left[\frac{e^{\alpha a}}{a} - \frac{1}{a} \right] + d_1(a) \right). \quad (3.24)$$

Вычислив $d_1(a)$ с помощью соотношений (3.22), (3.21) (интеграл $I_1(a)$ оказывается мал в асимптотике больших N , в чем нетрудно

убедиться после замены переменной $y \rightarrow y/(\sqrt{N} \ln N)^1$), подставим в (3.24) значения $a_1, b_1, c_1, d_1(a)$ и отберем старшие по $1/N$ порядки. Окончательно для скейлинговой функции $\bar{G}(\bar{p})$ в асимптотике малых \bar{p} получим выражение

$$\bar{G}(\bar{p}) = \sum_N g^N \bar{G}^{[N]}(\bar{p}),$$

$$\bar{G}^{[N]}(\bar{p}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{p}^2 + 1)^2} \times$$

$$\times \left(- (2N\alpha_1 + 2F\bar{p}^2) \left[\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} \right] - (E\bar{p}^2 + N\alpha_2) \frac{e^{\alpha a}}{a} \right). \quad (3.25)$$

Напомним, что параметры $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ даются выражениями (1.21, 3.10); E, F приведены в (3.18)²).

При $n = 1$ в частности имеем

$$\bar{G}^{[N]}(\bar{p}) \simeq \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{p}^2 + 1)^2} \left[0.0068N - 0.014\bar{p}^2 \right]. \quad (3.26)$$

Понятно, что если бы мы задались целью найти старшие степени разложения $\bar{G}^{[N]}(\bar{p})$ по \bar{p}^2 , то получили бы выражение:

$$\bar{G}^{[N]}(\bar{p}) = \frac{\bar{C}_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{p}^2 + 1)^2} (A_1 N + A_2 \bar{p}^2 + A_3 \bar{p}^4 + A_4 \bar{p}^6 + \dots), \quad (3.27)$$

где A_i некоторые константы для каждого i . В этом выражении в главном по N порядке следует оставить лишь первое слагаемое разложения ($A_1 N$):

$$\bar{G}^{[N]}(\bar{p}) = \frac{\bar{C}_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{A_1 N}{(\bar{p}^2 + 1)^2}$$

¹) При этом проще положить равным нулю вычитательный (типа $\delta\tau$) член и заменить \bar{J}_c асимптотикой (3.4), определяющей главный вклад по $1/N$. После замены переменной y асимптотике больших N соответствует первый нетривиальный член разложения $\bar{\phi}$ по y . Подробнее о вычислении этого несущественного вклада можно посмотреть в [68]

²) Отметим, что повторяя вышеприведенные рассуждения для членов выражения (3.14), связанных с константой ренормировки массы Z_τ (в сумме по i при $i \neq 0$) можно убедиться в несущественности по $1/N$ их вклада в скейлинговую функцию по сравнению с (3.25)

. Однако в обратную корреляционную функцию, или так называемую "собственно - энергетическую часть", по которой традиционно и осуществляется нормировка скейлинговой функции [57], множитель $1/(\bar{p}^2 + 1)^2$ не дает вклада, поэтому в ней работают все члены разложения в скобках (3.27). В этом проявляется неравномерность асимптотики скейлинговой функции по аргументу.

3.5 Асимптотика $\tau \ll p^2$; скейлинговая функция $\tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau})$

При обсуждении асимптотики $\tau/p^2 \ll 1$ в скейлинговой функции ограничимся константой и членами порядка $\bar{\tau}$. Для старших порядков парной функции Грина, в которой проведено устранение расходимостей подграфов, снова воспользуемся асимптотическим выражением (3.14). Положим $p = \mu$ и рассмотрим асимптотику парного коррелятора при малых τ/μ^2 . Вклад в эту асимптотику поправок, связанных с ренормировкой массы (суммы по i , $i > 1$) рассматривать не будем, т.к. они пропорциональны τ^i ; вклад члена ($i=1$) вновь содержит малость $1/N$ по сравнению с членом $i = 0$.

После замены $y \rightarrow y/\mu$ выражение (3.14) примет вид

$$G^{[N]}(\bar{\tau}) = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \left(\frac{[y^2 \bar{\phi}(y, \bar{\tau}y^2)]^2}{(4\sqrt{3}\pi)^2} e^{N\bar{J}_c(\bar{\tau}y^2)} - 1 \right) \times \\ \times y^{N\epsilon} e^{-N\alpha\epsilon} \sum_{j=0}^{N/2} \frac{(-a)^j}{j!} \frac{[y^{-\epsilon} - 1]^j}{\epsilon^j}. \quad (3.28)$$

Аналогично (3.16) рассмотрим здесь отдельное слагаемое суммы по j , выделим в нем конечную при $\epsilon \rightarrow 0$ часть и просуммируем результат, снова воспользовавшись формулой (3.23). Отличие от (3.16) будет состоять в том, что здесь при выделении полюсных особенно-

стей можно ограничиться беспетлевым приближением в разложении для инстантона (3.8), т.к. уже сумма двух диаграмм (3.9) дает нетривиальный вклад в рассматриваемые нами ($\sim \text{Const}$ и $\sim \bar{\tau}$) члены $\widetilde{G}^{[N]}(\bar{\tau})$; вклады всех петлевых диаграмм (3.8) обращаются в ноль при $\tau = 0$.

Введем аналогично (4.23) величину $I_2(s)$

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} y^s \left(\frac{[y^2 \bar{\phi}(y, \bar{\tau} y^2)]^2}{(4\sqrt{3}\pi)^2} e^{N\bar{J}_c(\bar{\tau} y^2)} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{\mu^2(1 + \bar{\tau}^2)^2} \left[\frac{b_2}{s^2} + \frac{c_2}{s} + d_2(s) \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

с полюсными особенностями в нуле. Для определения b_2 и c_2 в ведущем порядке по $1/N$ для массивного инстантона достаточным оказывается приближение

$$[y^2 \bar{\phi}(y, \tau y^2)]^2 \simeq \frac{48\pi^2}{(1 + \tau)^2} \left(1 + y^2 \ln(y) - [-\gamma + 1/2 + \ln 2] y^2 \right), \quad (3.30)$$

Проводя вычисления, аналогичные проделанным в предыдущем разделе, получим для скейлинговой функции $\widetilde{G}^{[N]}(\bar{\tau})$ при $\bar{\tau} \ll 1$:

$$\begin{aligned} \widetilde{G}^{[N]}(\bar{\tau}) &= \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{\tau} + 1)^2} \times \\ &\times \left(b_2 \left[\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right] - c_2 \left[\frac{e^{\alpha a}}{a} - \frac{1}{a} \right] + d_2(a) \right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

где b_2 , c_2 , $d_2(a)$ вычисляются подстановкой (3.30) в (3.29):

$$b_2 = -2N\alpha_1\bar{\tau} - 1; \quad c_2 = N\alpha_1\bar{\tau} \ln \bar{\tau} + N\alpha_2\bar{\tau} - [-\gamma + 1/2 + \ln 2];$$

$$d_2(a) = I_2(a) - \frac{b_2}{a^2} - \frac{c_2}{a}. \quad (3.32)$$

При вычислении $I_2(a)$ в интересующем нас порядке по τ можно для \bar{J}_c ограничиться приближением (3.4).

Выражение (3.31) является окончательным для асимптотики больших N и малых $\bar{\tau}$ скейлинговой функции. Ответ демонстрирует неравномерность $\tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau})$ по универсальной переменной $\bar{\tau}$, в частности, вычисление интеграла $I_2(a)$ сильно зависит от соотношения параметров $\bar{\tau}$ и N .

Наиболее интересной для скейлинговой функции \tilde{G} представляется область очень малых $\bar{\tau} \ll 1/N$. Здесь, ограничившись в I_2 двумя первыми членами разложения $\exp(N\bar{J}_c)$ в ряд, получим:

$$I_2(a) = W_1(a) + NW_2(a)\alpha_1\bar{\tau} \ln \bar{\tau} + N[W_2(a)\alpha_2 + W_3(a)\alpha_1]\bar{\tau},$$

где введены

$$\begin{aligned} W_1(a) &= \int_0^\infty dy y^{a-3} [yK_1(y)]^2, & W_1(a) \Big|_{n=1} &\simeq 0.925, \\ W_2(a) &= \int_0^\infty dy y^{a-1} [yK_1(y)]^2, & W_2(a) \Big|_{n=1} &\simeq 0.867, \\ W_3(a) &= \int_0^\infty dy y^{a-1} [yK_1(y)]^2 \ln(y^2), & W_3(a) \Big|_{n=1} &\simeq 0.798, \end{aligned}$$

напомним, что $a = (n + 8)/3$.

Подставляя (3.32) в (3.31) получим для асимптотики $N\bar{\tau} \ll 1$:

$$\tilde{G}(\bar{\tau}) = \sum_N g^N \tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau}), \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{\tau} + 1)^2} \left(- \left[\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} \right] + \left[-\gamma + \ln 2 + \frac{1}{2} \right] \frac{e^{\alpha a}}{a} + \right. \\ & \left. + W_1(a) + \left[-\frac{e^{\alpha a}}{a} N\alpha_1 + NW_2(a)\alpha_1 \right] \bar{\tau} \ln \bar{\tau} + \right. \\ & \left. + \left[-2N\alpha_1 \left[\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} \right] - \frac{e^{\alpha a}}{a} N\alpha_2 + N(W_2(a)\alpha_2 + W_3(a)\alpha_1) \right] \bar{\tau} \right). \quad (3.34) \end{aligned}$$

Выражение (3.34) позволяет (с учетом известной асимптотики больших N критических индексов) однозначно восстановить коэффициенты соответствующих членов вильсоновского операторного разложения (SDE) асимптотики малых $\bar{\tau}$ скейлинговой функции.

В частности при $n = 1$ (3.34) дает

$$\tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau}) \simeq \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{\tau} + 1)^2} \left[0.93 + 1.30N\bar{\tau} \ln \bar{\tau} + 2.20N\bar{\tau} \right]. \quad (3.35)$$

3.6 Каноническая нормировка результатов

Разлагая скейлинговую функцию обратного парного коррелятора вплоть до членов первого порядка по аргументам, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\bar{\tau}) &\simeq \frac{1}{(\bar{\tau} + 1)^2} \left(1 + \bar{\tau} + \dots + [\alpha^{[N]} + \beta^{[N]}\bar{\tau} + \gamma^{[N]}\bar{\tau} \ln \bar{\tau}]g^N \right) = \\ &= \frac{1}{1 + \bar{\tau} + \dots - g^N[\alpha^{[N]} + \beta^{[N]}\bar{\tau} + \gamma^{[N]}\bar{\tau} \ln \bar{\tau}]} \end{aligned}$$

при $\bar{\tau} \rightarrow 0$, и

$$\begin{aligned} \bar{G}(\bar{p}) &\simeq \frac{1}{(1 + \bar{p}^2)^2} \left(1 + \bar{p}^2 + \dots + g^N[A^{[N]} + B^{[N]}\bar{p}^2] \right) = \\ &= \frac{1}{1 + \bar{p}^2 + \dots - g^N[A^{[N]} + B^{[N]}\bar{p}^2]} \end{aligned}$$

при $\bar{p} \rightarrow 0$.

Чтобы нормировать стандартным образом [57]

$$\bar{G}(\bar{p}) = \frac{1}{(1 + \bar{p}^2)}$$

скейлинговую функцию в N -том порядке, необходимо домножить функцию Грина на $1 - g^N A^{[N]}$ (что отражает произвол конечной ренормировки поля), а затем растянуть $\bar{p} \rightarrow \bar{p}(1 - g^N(A^{[N]} - B^{[N]}))$ (след произвола ренормировки τ). Здесь мы уже воспользовались

факториальным ростом всех коэффициентов и отобрали старшие по $1/N$ члены. В асимптотике $\bar{\tau} \rightarrow 0$ такое преобразование приведет к дополнительному множителю $(1 - g^N A^{[N]})$, а параметр $\bar{\tau}$ растянется: $\bar{\tau} \rightarrow (1 - g^N (B^{[N]} - A^{[N]}))\bar{\tau}$. В результате для нормированной скейлинговой функции $\tilde{G}(\bar{\tau})$ получим:

$$\tilde{G}_{\text{norm}}^{[N]}(\bar{\tau}) = \frac{1}{(1 + \bar{\tau})^2} \left((\alpha^{[N]} - A^{[N]}) + (\beta^{[N]} - 2A^{[N]} + B^{[N]})\bar{\tau} + \gamma^{[N]}\bar{\tau} \ln \bar{\tau} \right).$$

Учитывая, что $B^{[N]} \sim \alpha^{[N]} \sim A^{[N]}/N$, в старшем по N порядке липатовская асимптотика нормированной скейлинговой функции примет окончательно вид:

$$\tilde{G}_{\text{norm}}^{[N]}(\bar{\tau}) = \frac{1}{(1 + \bar{\tau})^2} \left(-A^{[N]} + (\beta^{[N]} - 2A^{[N]})\bar{\tau} + \gamma^{[N]}\bar{\tau} \ln \bar{\tau} \right). \quad (3.36)$$

Здесь, в соответствии с (3.25), (3.34)

$$A^{[N]} = -\frac{C_2^{[N]} N}{(16\pi^2)^N} \left[\frac{2\alpha\alpha_1 e^{\alpha a}}{a} - \frac{2\alpha_1 e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{\alpha_2 e^{\alpha a}}{a} \right], \quad (3.37)$$

$$\beta^{[N]} = -\frac{C_2^{[N]} N}{(16\pi^2)^N} \left[\frac{2\alpha\alpha_2 e^{\alpha a}}{a} - \frac{2\alpha_2 e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{\alpha_2 e^{\alpha a}}{a} - \left(W_2(a)\alpha_2 + W_3(a)\alpha_1 \right) \right], \quad (3.38)$$

$$\gamma^{[N]} = \frac{C_2^{[N]} N}{(16\pi^2)^N} \left(W_2(a)\alpha_1 - \frac{\alpha_1 e^{\alpha a}}{a} \right). \quad (3.39)$$

Так, например, при $n = 1$ ответ (3.36) принимает вид:

$$\tilde{G}_{\text{norm}}^{[N]}(\bar{\tau}) = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(1 + \bar{\tau})^2} (-0.0068N + 1.30N\bar{\tau} + 2.20N\bar{\tau} \ln(\bar{\tau})).$$

Сравнение нормированного результата $\tilde{G}_{\text{norm}}^{[N]}(\bar{\tau})$ при $N = 3$ ($n = 1$)

$$\frac{g^3}{(16\pi^2)^3} [0.019 - 6.07\bar{\tau} \ln \bar{\tau} - 5.54\bar{\tau}]$$

с результатами трехпетлевого расчета [6]

$$\frac{g^3}{(16\pi^2)^3} [0.2003 - 1.1826\bar{\tau} \ln \bar{\tau} + 0.7038\bar{\tau}]$$

демонстрирует³⁾, что вычисленное к настоящему моменту петлевое разложение скейлинговой функции \tilde{G} , как и разложения для критических индексов, не выходит на липатовскую асимптотику.

До сих пор мы обсуждали асимптотики высоких порядков разложения по константе связи g . Теперь рассмотрим асимптотику старших порядков ϵ - разложения. Для этого подставим в ряд (3.33) ϵ - разложение константы связи в фиксированной точке, и отберем члены $\sim \epsilon^N$. Для заряда $u_* \equiv g_*/(16\pi^2)$ в фиксированной точке в соответствии с [57] и результатами первой главы имеем:

$$u_* = \sum_N u_*^{[N]} \epsilon^N = \frac{\epsilon}{a} - \frac{2\epsilon^2 a_g^{(2)}}{a^3} + \dots, \\ u_*^{[N]} = -\frac{\{Z_g\}^{[N+1]}}{a^{N+1}} \exp\left(\frac{2a_g^{(2)}}{a}\right), \quad (3.40)$$

в последней формуле $Z_g^{[N]}$, $a_g^{(2)}$ приведены в (1.39, 1.52). Начальный кусок ряда (3.33) для нормированной скейлинговой функции⁴⁾ в приближении $\bar{\tau} \rightarrow 0$ имеет вид [57]

$$\tilde{G}_{\text{norm}}(\bar{\tau}) = \frac{1}{1 + \bar{\tau}} \left[1 + \bar{\tau} - u \frac{n+2}{6} \bar{\tau} \ln \bar{\tau} - \right. \\ \left. - u^2 \frac{n+2}{18} [C_0 + C_1 \bar{\tau}] - u^2 \frac{(n+2)(4-n)}{72} \bar{\tau} \ln^2 \bar{\tau} \right] \quad (3.41)$$

(здесь члены порядка $\bar{\tau}^2$ отброшены, различные по $\bar{\tau}$ члены учтены лишь в первом нетривиальном приближении по u ; $C_0 = 2.031302\dots$, $C_1 = 0.51586\dots$. Подставляя в (3.33) значение g соответствующее

³⁾В [6] приведено ϵ - разложение скейлинговой функции, используемое при сравнении выражение для разложения по константе связи восстановлено по нему.

⁴⁾восстановлена по данным ϵ - разложения [57].

выражению (3.40) и пользуясь тем, что коэффициенты всех рядов факториально растут, в N - том порядке ϵ - разложения нормированной скейлинговой функции получаем

$$\begin{aligned} \tilde{G}'_{\text{norm}} \epsilon^N = & \left(\left[\bar{A}^{[N]} - (16\pi^2)^N A^{[N]} \right] + \right. \\ & + \left[\bar{B}^{[N]} + (16\pi^2)^N \beta^{[N]} - 2(16\pi^2)^N A^{[N]} \right] \bar{\tau} + \\ & \left. + \bar{\gamma}^{[N]} \bar{\tau} \ln \bar{\tau} + \bar{\delta}^{[N]} \bar{\tau} \ln^2 \bar{\tau} \right) \frac{\epsilon^N}{(1 + \bar{\tau})^2}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \bar{A}^{[N]} = & -\frac{n+2}{9a} u_*^{[N-1]} C_0; \quad \bar{B}^{[N]} = -\frac{n+2}{9a} u_*^{[N-1]} C_1; \\ \bar{\gamma}^{[N]} = & -\frac{n+2}{6} u_*^{[N]}; \quad \bar{\delta}^{[N]} = -\frac{(n+2)(4-n)}{36a} u_*^{[N-1]}; \end{aligned}$$

коэффициенты $A^{[N]}$, $\beta^{[N]}$ даны в (3.37, 3.38).

Сравнение (3.42) при $n = 1$

$$\epsilon^3 [0.855 \cdot 10^{-4} - 2.002 \bar{\tau} - 0.635 \cdot 10^{-3} \bar{\tau} \ln(\bar{\tau}) + 0.289 \cdot 10^{-4} \bar{\tau} \ln^2(\bar{\tau})]$$

с результатами трехпетлевого расчета [6, 57]:

$$\epsilon^3 [-0.040 + 0.060 \bar{\tau} \ln \bar{\tau} + 0.11 \bar{\tau}]$$

вновь демонстрирует значительные отклонения результатов точных вычислений от асимптотики больших N .

Мы ограничились исследованием асимптотик больших N для членов $\sim \bar{p}^2$ в \bar{G} и $\sim \bar{\tau}$ в \tilde{G} . Расчет асимптотик следующих членов $\sim \bar{p}^4$, $\bar{\tau}^2$ не представляет принципиальных трудностей но требует громоздких вычислений. Наиболее важным результатом данного раздела следует признать утверждение о неравномерности асимптотики высоких порядков скейлинговых функций по переменным $\bar{\tau}$, \bar{p} . Этот факт должен привести к дополнительным сложностям при попытке пересуммировать результаты соответствующих ϵ - разложений.

Глава 4

ПЕРВАЯ ПОПРАВКА К АСИМПТОТИКЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ КОНСТАНТ РЕНОРМИРОВКИ $O(n)$ - СИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ϕ^4 В $(4 - \epsilon)$ - РАЗЛОЖЕНИИ

В данной главе с учетом специфики $4 - \epsilon$ (MS) схемы вычислены поправки к асимптотической формуле для коэффициентов разложения константы ренормировки Z_g и критического индекса η . Полученные поправки существенно улучшают асимптотическое описание результатов петлевых расчетов.

В первом разделе коротко изложено, какие поправочные по $1/N$ и ϵ члены по сравнению с аналогичными выражениями в первой главе следует учитывать при вычислении асимптотик высоких порядков разложений по константе связи частично ренормированной корреляционной функции. Во втором разделе обсуждаются особенности формализма ϵ - разложения. В третьем разделе описывается метод вычисления интеграла по флуктуациям в $4 - \epsilon$ (MS) схеме, а затем, в четвертом разделе, вычисляется поправка по ϵ к этому интегра-

лу (в гауссовском приближении по флуктуациям). В пятом разделе обсуждается техника расчета вычета в нуле по ϵ для частично ренормированной четыреххвостой корреляционной функции (в асимптотике больших N , в главном и поправочном по $1/N$ порядках). В шестом разделе мы вычисляем поправку к липатовской асимптотике для константы ренормировки Z_g и критического индекса η . В заключении мы анализируем полученные результаты. Чтобы не перегружать основной текст статьи промежуточными формулами, выражения для многих получаемых по ходу вычислений констант мы отнесли в раздел Приложение 3.

4.1 Поправки по $1/N$ и ϵ в липатовском подходе.

Результат для коэффициента при g^N разложения частично ренормированной функции Грина ($N \rightarrow \infty$) после перехода в импульсное представление и интегрирования по \vec{u} , x_0 , согласно первой главе может быть представлен в виде (ср. с (1.18, 1.19, 1.20)):

$$G_k^{(N)} = (-1)^N N^N N^{(k+n+3)/2} \int_0^\infty dy y^{k-5+\epsilon(k/2-1)} \times \\ \times \exp\left(-NJ(\vec{\phi}_c, \vec{g}_c(\mu y)^{-\epsilon})\right) \gamma_k(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_k, y, \epsilon) \quad (4.1)$$

Здесь функционал J определяется равенством

$$NJ(\vec{\phi}, g) = S_R(\vec{\phi}, g) + N \ln(-g),$$

рассматривается действие S_R из (1.1) в безмассовом случае (при $\tau = 0$); инстантон $\vec{\phi}_c$, \vec{g}_c подробно обсужден в первой главе; там же приведено его значение при $\epsilon = 0$ (см. (1.12)); γ_k - множитель, содержащий интеграл по флуктуациям вокруг инстантона. Интеграл по y в (4.1) требует специального исследования, так как именно в

нем проявляются поверхностные расходимости (в виде полюсов по ϵ).

Разложение γ_k по $1/N$ имеет вид

$$\gamma_k(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_k, y, \epsilon) = \gamma_k^{(0)} + \frac{1}{N} \gamma_k^{(1)} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad \left(\sum_{l=1}^k \mathbf{p}_l = 0\right), \quad (4.2)$$

величина, соответствующая вкладу $\gamma_k^{(0)}$ обсуждалась в первой главе и оказалась равна

$$\gamma_k^{(0)} = \exp\left(\frac{a\bar{g}}{16\pi^2\epsilon}\right) L_k D^* e^{\epsilon d} y^{k(2-\epsilon)} \bar{\phi}_c(y|\mathbf{p}_1) \dots \bar{\phi}_c(y|\mathbf{p}_k) + O(\epsilon^2), \quad (4.3)$$

здесь и далее мы обозначаем Фурье-образ от $\bar{\phi}_c(\mathbf{x})$ той же буквой ($\bar{\phi}_c(\mathbf{p})$), меняя лишь аргумент функции. Выражение (4.3) отличается от аналогичного вклада в первой главе лишь вкладами $y^{-k\epsilon}$, $e^{\epsilon d}$ которые были отброшены в первой главе как несущественные; выражения для констант L_k и D^* приведены в (1.11, 1.16, 1.13); константа a приведена в (1.23). Член $\gamma_k^{(0)}$ соответствует гауссовскому приближению для интеграла по флуктуациям вокруг инстантона. Член $\gamma_k^{(1)}$ содержит первую поправку по $1/N$ к гауссовскому приближению. Как и во многих последующих формулах мы использовали в (4.3) экспоненциальную запись первой поправки по ϵ в выражении для $\gamma_k^{(0)}$ (см. член $e^{\epsilon d}$); вычисление этой поправки будет подробно обсуждено позднее.

В отличие от предыдущих работ [61, 9, 60, 68], в $4 - \epsilon$ (MS) схеме кроме члена $\gamma_k^{(1)}$ в поправочном по $1/N$ порядке исследуемой асимптотики существенными оказываются первые поправки по ϵ ко всем объектам в (4.1) (к инстантону и $\gamma_k^{(0)}$).

Формула (4.1) будет являться стартовой для вычисления вычета в нуле по ϵ функции $G_k^{(N)}$ в асимптотике больших N (в главном и поправочном по $1/N$ порядках).

4.2 Особенности формализма в ϵ - разложении.

Как и в первой главе отличие наших расчетов от [61, 9, 68] и [60] будет заключаться в том, что стацфазный параметр N не будет самым большим: мы выделяем определенный с УФ точки зрения объект - полюс по ϵ - и только затем реализуем стацфазу по N . Технически это выражается в выделении из $G_k^{(N)}$ УФ расходимостей (полюсов по ϵ), которые будут проявляться в виде расходящихся при малых ϵ интегралов по масштабному параметру y . При этом поправку к асимптотике больших N дает не только учтенное в [60] $\gamma_k^{(1)}$, но и поправки по ϵ к инстантону $\{\bar{\phi}_c, \bar{g}_c\}$ и к интегралу по гауссовским флуктуациям $\gamma_k^{(0)}$. Как уже упоминалось, важным удобством MS - схемы является то, что первый полюс по ϵ в корреляционных функциях - величина $\{G_k^{(N)}\}/\epsilon$ - содержит всю необходимую информацию о константах ренормировки и критических индексах, поэтому, как и в первой главе мы можем ограничиться лишь вычислением $\{G_k^{(N)}\}$ (напомним, что фигурные скобки обозначают вычет в нуле по переменной ϵ).

Так как константы ренормировки имеют смысл лишь в рамках теории возмущений, из функционала $J(\bar{\phi}_c, \bar{g}_c(\mu y)^{-\epsilon})$, входящего в (4.1), выделяется слагаемое $A = \frac{1}{2}\partial\bar{\phi}_c\partial\bar{\phi}_c + \frac{1}{4!}\bar{g}_c\bar{\phi}_c^4 + \ln(-\bar{g}_c(\mu y)^{-\epsilon})$, которое не содержит расходимостей и может быть рассмотрено при анализе (4.1) как величина в показателе экспоненты: $\exp(-NA)$. Оставшееся слагаемое, контрчленная часть $B = \frac{1}{2}(Z_\phi^2 - 1)\partial\bar{\phi}_c\partial\bar{\phi}_c + \frac{1}{4!}(Z_\phi^4 Z_g - 1)\bar{g}_c\bar{\phi}_c^4$, содержит константы ренормировки и соответствующие им сингулярности по ϵ , которые могут быть рассмотрены только в рамках теории возмущений, и при инстантонном анализе (4.1)

должны быть представлены в полиномиальном виде¹⁾

$$e^{-NB} \rightarrow \sum_j \frac{(-NB)^j}{j!}.$$

При вычислении первой поправки по $1/N$ используем для A следующие члены разложения в ряд по ϵ :

$$A = 1 + \alpha\epsilon - \epsilon \ln(\mu y) + \beta\epsilon^2/2! + O(\epsilon^3) \quad (4.4)$$

(по сравнению с первой главой мы учли в A слагаемое $\beta\epsilon^2/2!$). Мы также вычислили инстантон с точностью до членов порядка ϵ

$$\bar{\phi}_c(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{3} \exp(-q\epsilon/2)}{\pi(1 + \mathbf{x}^2)} + \epsilon \frac{\sqrt{3}(3\mathbf{x}^2 \ln(\mathbf{x}^2) + (3 - \pi^2)\mathbf{x}^2 - 9 + \pi^2)}{6\pi(1 + \mathbf{x}^2)^2} + O(\epsilon^2),$$

$$\bar{g}_c = -16\pi^2 e^{q\epsilon} + O(\epsilon^2), \quad q = \frac{15\pi^3 - 158\pi}{64} \simeq -0.4887, \quad (4.5)$$

а в константах ренормировки ограничились приближением

$$Z_g Z_\phi^4 = 1 + \frac{ag}{\epsilon 16\pi^2} + \frac{b_1 g^2}{\epsilon (16\pi^2)^2} + \frac{b_2 g^2}{\epsilon^2 (16\pi^2)^2}, \quad Z_\phi^2 = 1 + \frac{cg^2}{\epsilon (16\pi^2)^2} \quad (4.6)$$

Коэффициенты α , β из (4.4), а также b_1 , b_2 , c из (4.6) приведены в (1.22), а также в Приложении 3 (см. ф-лы (5.4, 5.5)). Подставляя в (4.1) описанные приближенные выражения, получаем:

$$G_k^{(N)} = \frac{(-1)^N}{(16\pi^2)^N} N^N N^{(k+n+3)/2} \exp(-N - \alpha N\epsilon - \beta N\epsilon^2/2) \times \\ \times \int_0^\infty dy y^{k-5} y^{\epsilon(k/2-1)} (\mu y)^{N\epsilon} \gamma_k \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left(-a e^{q\epsilon} \frac{(\mu y)^{-\epsilon}}{\epsilon} \right)^j \quad (4.7)$$

Контрчлен, пропорциональный a из (4.6), выделен в (4.7) явно, так как он дает вклад в главный по $1/N$ порядок (см. второй раздел

¹⁾ Здесь, как и в первой главе оказывается существенным, что в УФ области интегрирования по масштабному параметру вклады в стацфазный ответ левой и правой части данного равенства оказываются различными из-за погрешности стацфазного вычисления.

первой главы). Вклады остальных контрчленов из (4.6) содержатся в $\gamma_k^{(1)}$.

Сингулярности по ϵ в (4.1), возникающие при вычислении γ_k (например, для слагаемого $\gamma_k^{(0)}$ см. член $\exp(a\bar{g}/(16\pi^2\epsilon))$ в ф-ле (4.3)), также могут анализироваться только в рамках теории возмущений и тоже должны быть представлены в полиномиальном виде в предэкспоненте. Это дает дополнительный вклад к слагаемым суммы по j в (4.7), так что вторая строка в выражении (4.7) заменится на

$$\int_0^\infty dy y^{k-5} y^{\epsilon(k/2-1)} (\mu y)^{N\epsilon\bar{\gamma}_k} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!} \left(-ae^{a\epsilon} \frac{(\mu y)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right)^j, \quad (4.8)$$

здесь $\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k^{(0)} + \bar{\gamma}_k^{(1)}/N$ - флуктуационный интеграл, расходимости которого устранены с соответствии с предписаниями MS - схемы ренормировки. Полученное в результате выражение аналогично (1.26), но содержит необходимые поправки по $1/N$, ϵ . Нашей целью является выделение в нем первого полюса по ϵ и вычисление коэффициента при нем - вычета $\{G_k^{(N)}\}$ - в главном и поправочном по $1/N$ порядках. Мы проведем эти вычисления для $G_4^{(N)}$ (случай $k = 4$). Главный член разложения совпадет с результатами первой главы, поправочный - позволит уточнить асимптотическое поведение константы ренормировки Z_g .

4.3 Об интеграле по флуктуациям в пространстве размерности $4 - \epsilon$

Вычисление интеграла по флуктуациям γ_k в главном по $1/N$ не обсуждалось в первой главе, так как нам было достаточно воспользоваться результатами работ [61, 9] при $\epsilon = 0$. В работе [60] была найдена первая поправка по $1/N$ к флуктуационному интегралу в

единичной схеме ренормировки. Однако, как мы увидим, в $4-\epsilon$ (MS) - схеме при вычислении $\{G_4^{(N)}\}$ существенной оказывается поправка по ϵ к флуктуационному интегралу (константа d из (4.3)). Вычислению этой константы и будут посвящены два следующих раздела.

Итак, обсудим флуктуации вокруг инстантона для выражения

$$\gamma_k = \frac{N^z}{\pi i} \oint \frac{d\bar{g}}{\bar{g}} \int d^n \vec{u} \frac{\int D\bar{\phi} I y^{2-\epsilon} \bar{\phi}(\mathbf{p}_1 y) \dots y^{2-\epsilon} \bar{\phi}(\mathbf{p}_k y) e^{-NJ(\bar{\phi}, \bar{g}(uy)^{-\epsilon})}}{NORM}, \quad (4.9)$$

$$NORM = \int D\bar{\phi} \exp\left(\frac{-N\partial\bar{\phi}\partial\bar{\phi}}{2} - \frac{N\bar{g}\bar{\phi}^4}{4!}\right). \quad (4.10)$$

Как и в [61] мы включили в (4.9) множитель N^z (здесь $z = (1 - n - D)/2$), чтобы величина γ_k не зависела от N при $N \rightarrow \infty$. Отметим, что вычисление (4.9) в главном по $1/N$ порядке соответствует слагаемому $\gamma_k^{(0)}$ в (4.2), а первая поправка по $1/N$ (4.9) дает, в свою очередь, $\gamma_k^{(1)}$.

Замена переменных $\bar{\phi} = \psi/\sqrt{-\bar{g}}$ расцепляет полевые флуктуации и флуктуации по параметру \bar{g} [9]. Перейдя затем в интегралах (4.9) и (4.10) от переменных ψ, \bar{g} к интегрированию по флуктуациям $\delta\psi, \delta\bar{g}$

$$\psi = \bar{\phi}_c \sqrt{-\bar{g}_c} + \delta\psi, \quad \bar{g} = \bar{g}_c + \delta\bar{g},$$

следует разложить функционал J по этим флуктуациям в окрестности инстантона вплоть до вариаций 4-го порядка [60]. Производя затем обычные для метода перевала растяжения $\delta\psi = \delta\varphi/\sqrt{N}$, $\delta\bar{g} = \delta g/\sqrt{N}$ получим

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{y^{(2-\epsilon)k}}{NORM} \frac{N^{z-1/2}}{\pi i \bar{g}_c} \int d^n \vec{u} \int D\delta\varphi_{\parallel} \int D\delta\varphi_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta g I \bar{\phi}_c(p_1 y) \dots \\ &\dots \bar{\phi}_c(p_k y) \exp\left(-\frac{(\delta g)^2}{2\bar{g}_c^2} - \frac{\delta\varphi_{\parallel} M_{\parallel} \delta\varphi_{\parallel}}{2!} - \frac{\delta\varphi_{\perp} M_{\perp} \delta\varphi_{\perp}}{2!} - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{J_3}{3!\sqrt{N}} - \frac{J_4}{4!N} \left[1 + \frac{P_1}{\sqrt{N}} + \frac{P_2}{2!N} \right], \quad (4.11)$$

Символ \parallel (или \perp) означает проектирование (исключение проекции) на направление $\bar{\phi}_c$, операторы M_{\parallel} и M_{\perp} равны соответственно

$$M_{\parallel} = \frac{1}{(-\bar{g}_c)} \left(-\Delta^{(D)} + \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c^2}{2!} \right), \quad M_{\perp} = \frac{1}{(-\bar{g}_c)} \left(-\Delta^{(D)} + \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c^2}{3!} \right),$$

J_3 и J_4 - всевозможные вклады вариаций 3-го и 4-го порядка функционала J по переменным $\delta\varphi_{\parallel}$, $\delta\varphi_{\perp}$, δg ; зависимость от N при них указана явно. Аналогично, квадратные скобки в (4.11) содержат P_1 и P_2 , которыми обозначены вклады от 1-й и 2-й вариаций предэкспоненты выражения (4.9). Отметим, что в (4.10) достаточно положить

$$NORM = \int D\delta\varphi_{\parallel} D\delta\varphi_{\perp} \exp \left(\frac{\delta\varphi_{\parallel} \Delta^{(D)} \delta\varphi_{\parallel} + \delta\varphi_{\perp} \Delta^{(D)} \delta\varphi_{\perp}}{2\bar{g}_c} \right) \quad (4.12)$$

так как все отброшенные в последнем выражении $O(1/N)$ - вклады приводят лишь к диаграммам, содержащим вакуумные петли и обрабатываемым в ноль в размерной схеме регуляризации в безмассовой модели.

Обозначим через $\{\Phi_{\lambda a}^{\parallel}\}$ и $\{\Phi_{\lambda b}^{\perp}\}$ полный набор собственных функций операторов

$$\bar{g}_c(\Delta^{(D)})^{-1} M_{\parallel} \quad \text{и} \quad \bar{g}_c(\Delta^{(D)})^{-1} M_{\perp}$$

соответственно. Индекс λ фиксирует собственное число (и собственное подпространство) для данной собственной функции; латинский индекс пробегает функции в данном собственном подпространстве. Разложим флуктуации $\delta\varphi_{\parallel}$, $\delta\varphi_{\perp}$ по указанным собственным функциям

$$\delta\varphi_{\parallel} = \sum_{\lambda, a} C_{\lambda a}^{\parallel} \Phi_{\lambda a}^{\parallel}, \quad \delta\varphi_{\perp} = \sum_{\lambda, b} C_{\lambda b}^{\perp} \Phi_{\lambda b}^{\perp}$$

и перейдем от функционального интегрирования по $\delta\varphi_{\parallel}$, $\delta\varphi_{\perp}$ к произведению интегралов $\int \Pi_{\lambda,a,b} dC_{\lambda a}^{\parallel} dC_{\lambda b}^{\perp}$ (как в интеграле (4.11), так и в интеграле (4.12)).

Среди собственных чисел обсуждаемых операторов есть равные нулю при $\epsilon = 0$. Интегралы по соответствующим коэффициентам разложения - нулевым модам C_{0a}^{\parallel} , C_{0b}^{\perp} (параметр a меняется от нуля до D , параметр b - от одного до $(n-1)$) - снимаются дельта - функциями, содержащимися в I (1.6) [61, 9]. Собственные функции, соответствующие нулевому собственному числу, легко получить, восстановив по выражению (4.5) (где параметры y , \mathbf{x}_0 были фиксированы дельта - функциями из I) при помощи формулы (1.5) исходное семейство инстантонов, зависящее от произвольных параметров y , \mathbf{x}_0 , \vec{u} . Дифференцируя полученный результат по y или по каждой из компонент векторов \mathbf{x}_0 , \vec{u} и снова полагая $y = 1$, $\mathbf{x}_0 = 0$, получим:

$$\Phi_{00}^{\parallel} = \vec{u} \frac{\partial \bar{\phi}_c}{\partial y}; \quad \Phi_{0a'}^{\parallel} = \vec{u} \frac{\partial \bar{\phi}_c}{\partial \mathbf{x}_0^{a'}}; \quad \Phi_{0b}^{\perp} = \vec{e}_b |\bar{\phi}_c|; \quad (4.13)$$

$$a' = 1, \dots, D, \quad b = 1, \dots, (n-1),$$

здесь \vec{e}_b - ортонормированный базис в изотопическом подпространстве, ортогональном направлению инстантона \vec{u} .

4.4 Вычисление поправки по ϵ к флуктуационному интегралу в гауссовском приближении

Пользуясь введенными в предыдущем разделе обозначениями, вычислим теперь константу d в (4.3). При этом нам достаточно ограничиться гауссовским приближением для функционального интеграла, т. е. рассматривать выражение (4.11) в главном порядке по $1/N$.

Проиллюстрируем, как "работают" в старшем по $1/N$ порядке

дельта - функции в выражении I на примере $\delta^D(-\bar{g} \int d^D \mathbf{x} \mathbf{x}_\mu \bar{\phi}^4(\mathbf{x})/4!)$. Раскладывая аргумент дельта - функции в ряд по $1/N$ и переходя к переменным C_{λ}^{\parallel} , C_{λ}^{\perp} , получим для вклада обсуждаемой дельта - функции в (4.9) (в главном по $1/N$ порядке):

$$N^{\frac{D}{2}} \prod_{\mu=1}^D \delta \left(\sum_{a'=1}^D C_{0a'}^{\parallel} B_{\mu a'}^0 + \sum_{\lambda \neq 0} \sum_c C_{\lambda c}^{\parallel} B_{\mu c}^{\lambda} \right), \quad (4.14)$$

введенные здесь коэффициентов матрицы B см. в Приложении 3 (ф-ла (5.6)). Теперь видно, что коэффициенты $C_{0a'}^{\parallel}$ в (4.14), которые входят в числитель выражения (4.9), фиксируются обсуждаемой дельта - функцией, а соответствующие им интегралы в числителе (4.9) снимаются.

Рассмотренная в качестве примера дельта - функция приводит в главном по $1/N$ порядке к множителю $\det(B_{\mu a'}^0)^{-1} = (-\bar{g}_c)^{D/2}$. Интеграл по C_0^{\parallel} в нормирующем знаменателе (4.12) является гауссовским и равен

$$\prod_{a=1}^D \sqrt{\frac{2\pi(-\bar{g}_c)}{\sum_{\nu=1}^D \left(\partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel}, \partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel} \right)}},$$

символ скалярного произведения $(,)$ здесь и далее означает интегрирование по D - мерной координате.

Рассматривая аналогично остальные члены I и выполняя гауссовское интегрирование по δg , $C_{\lambda a}^{\parallel}$, $C_{\lambda a}^{\perp}$, а также интегрирование по \vec{u} , получим для $\bar{\gamma}_4$ в главном по $1/N$ порядке:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_k^0 = & \frac{e^{U_{reg}} L_k}{\sqrt{2\pi}} \left(\Pi(1) \Pi(3)^{n-1} \right)^{-1/2} \sqrt{\sum_{b=1}^{n-1} \frac{\left(\partial_{\nu} \Phi_{0b}^{\perp}, \partial_{\nu} \Phi_{0b}^{\perp} \right)}{2\pi}} \times \\ & \times \prod_{a=0}^D \sqrt{\sum_{\nu=1}^D \frac{\left(\partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel}, \partial_{\nu} \Phi_{0a}^{\parallel} \right)}{2\pi}}, \quad (4.15) \end{aligned}$$

где

$$\Pi(\alpha) = \prod_{\substack{S \\ \alpha\mu_s \neq 1}} \left| 1 - \frac{1}{\alpha\mu_s} \right| \prod_{s'} \exp \left[\frac{1}{\alpha\mu_{s'}} + \frac{1}{2\alpha^2\mu_{s'}^2} \right]. \quad (4.16)$$

Здесь мы ввели μ_s - собственные числа задачи

$$\Delta^{(D)}\Psi_s(\mathbf{x}) = \mu_s \left(\frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c^2}{2!} + 12\bar{\rho} \bar{\phi}_c^2 \ln(\mathbf{x}^2) \right) \Psi_s(\mathbf{x}), \quad \bar{\rho} = -\frac{\bar{g}_c \epsilon}{48}. \quad (4.17)$$

Произведения $\Pi(1)$, $\Pi(3)$ в (4.15) возникают при гауссовском интегрировании по всем модам, кроме нулевых. Как и в работах [61, 9, 60, 68] расходимости однопетлевых диаграмм целиком вычтены множителями $\exp((\alpha\mu_s)^{-1} + (\alpha\mu_s)^{-2}/2)$. Такое вычитание соответствует "единичной" схеме ренормировки. Для того, чтобы результат был справедлив в MS - схеме, необходимо домножить его на $e^{U_{reg}}$, где U_{reg} представляет собой конечную часть упомянутых диаграмм. В первой главе мы подробно описали способ вычисления константы U_{reg} , в Приложении 3 мы привели результат с необходимой по сравнению с первой главой поправкой по ϵ (см. ф-лу (5.3)). Как уже отмечалось, вклады, соответствующие нулевым модам (т. е. таким, что $\alpha\mu_s = 1 + O(\epsilon)$, $\alpha = 1, 3$) должны быть исключены из произведения по s . Кроме того, оказывается, что одно из собственных чисел ($\mu_s = 1/3 + O(\epsilon)$) нарушает положительную определенность матрицы вторых производных функционала J . Для интегрирования по соответствующей моде произведен разворот контура в комплексной плоскости, сокращающий мнимую единицу из (4.11) и приводящий к появлению модуля в выражении для $\Pi(\alpha)$.

Выражение (4.15) зависит от ϵ посредством скалярного произведения $(,)$ и нулевых мод $\Phi_0^{\parallel}, \Phi_0^{\perp}$. Зависимость эту легко восстановить явно при помощи формул (4.13), результат приведен в Приложении

3 (см. ф-лы (5.7, 5.8, 5.9)). Однако в (4.15) также имеется зависимость от ϵ , содержащаяся в собственных числах μ_s задачи (4.17). Собственные числа невозмущенной задачи ($\epsilon = 0$) хорошо известны [9]:

$$\mu_s^{(0)} = \frac{(l+n)(l+n+1)}{6} \quad s \equiv [l, n], \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.18)$$

$$V = \frac{\Gamma(l+D-2)\Gamma(D+2l-2)}{\Gamma(D-1)\Gamma(l+1)} \equiv (l+1)^2 + \epsilon \aleph(l) + O(\epsilon^2), \quad (4.19)$$

здесь V - вырождение собственных чисел μ_s , полное выражение для $\aleph(l)$ приведено в Приложении 3 (см. ф-лу (5.10)). Следуя методу, описанному в [68] мы вычислили также собственные функции данной (невозмущенной) задачи:

$$\Psi_{l,n}^0(\mathbf{x}) = Y_l(\mathbf{x}) \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}^2 + 1} \right)^{n+l} \sum_{i=1}^{n/2} A_{n,i} (|\mathbf{x}|^{-n+2i-2} - |\mathbf{x}|^{n-2i})$$

при четном n , и

$$\Psi_{l,n}^0(\mathbf{x}) = Y_l(\mathbf{x}) \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}^2 + 1} \right)^{n+l} \left(\sum_{i=1}^{(n-1)/2} A_{n,i} (|\mathbf{x}|^{-n+2i-2} - |\mathbf{x}|^{n-2i}) + \frac{A_{n,(n+1)/2}}{|\mathbf{x}|} \right)$$

при нечетном n . Здесь $Y_l(\mathbf{x})$ - сферические функции, коэффициенты $A_{n,i}$ приведены в Приложении 3 (см. ф-лу (5.11)).

Будем искать собственные числа в виде $\mu_s = \mu_s^0 + \epsilon \bar{\mu}_s + O(\epsilon^2)$, интересуясь первой поправкой по ϵ . Чтобы найти $\bar{\mu}_s$ домножим (4.17) на Ψ_s и проинтегрируем по D -мерной координате. Подставим затем в (4.17) разложение в ряд для инстантона (4.5). Используем также явное выражение для оператора Лапласа в сферических координатах (см., например, [9])

$$\Delta^{(D)} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{L^2}{r^2},$$

L^2 - оператор Казимира D - мерной вращательной группы - имеет собственные числа $l(l + D - 2)$, $l = 0, 1 \dots$ с вырождением V (4.19). Представим D - мерный оператор Лапласа, действующий на собственную функцию (с собственным числом l) упомянутого оператора Казимира в виде

$$\Delta^{(D)} = \Delta^{(4)} + \epsilon \bar{\Delta}, \quad \Delta^{(4)} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+2)}{r^2}, \quad \bar{\Delta} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l}{r^2}.$$

Кроме того напишем формальное разложение для собственных функций $\Psi_s = \Psi_s^0 + \epsilon \bar{\Psi}_s$. Слагаемые в последнем равенстве следует понимать в смысле обобщенных функций, имея в виду естественное продолжение функции Ψ_s^0 в пространство размерности $4 - \epsilon$ (см., например, [31]). Выделив теперь линейные по ϵ члены и учитывая равенство

$$\mu_s \int d^4 \mathbf{x} \Psi_s^0 \bar{g}_c \bar{\phi}_c^2 \bar{\Psi}_s = \int d^4 \mathbf{x} \Psi_s^0 \Delta^{(4)} \bar{\Psi}_s,$$

которое легко может быть доказано, если разложить функцию $\bar{\Psi}_s$ по полному набору собственных функций $\{\Psi_s^0\}$ и учесть, что последние взаимно ортогональны относительно скалярного произведения

$$\sum_{\alpha=1}^4 \int d^4 \mathbf{x} \partial_\alpha \Psi_s^0 \partial_\alpha \Psi_{s'}^0,$$

получим, наконец, первую поправку по ϵ для собственных чисел задачи (4.17):

$$\bar{\mu}_s = \mu_s^0 \frac{(\Psi_s^0, \bar{\Delta} \Psi_s^0)}{(\Psi_s^0, \Delta^{(4)} \Psi_s^0)} - (\mu_s^0)^2 \frac{(\chi \Psi_s^0, \Psi_s^0)}{(\Psi_s^0, \Delta^{(4)} \Psi_s^0)}. \quad (4.20)$$

Здесь χ определяется равенством

$$12 \bar{\rho} \bar{\phi}_c^2 \ln \mathbf{x}^2 + \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c^2}{2!} = \left. \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c^2}{2!} \right|_{\epsilon=0} + \epsilon \chi + O(\epsilon^2),$$

явное выражение для χ приведено в Приложении 3 (см. ф-лу (5.12)).

Теперь несложно учесть зависимость от ϵ произведений по s и s' в (4.15):

$$\begin{aligned} \ln(\Pi(\alpha)) = \ln(\Pi(\alpha))|_{\epsilon=0} + \epsilon \left(\sum_{\alpha\mu_{l,n}^0 \neq 1} \left[(l+1)^2 \frac{\bar{\mu}_{l,n}}{\alpha(\mu_{l,n}^0)^2 - \mu_{l,n}^0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \left| 1 - \frac{1}{\alpha\mu_{l,n}^0} \mathfrak{N}(l) \right| \right] - \sum_{l,n} \left[(l+1)^2 \left(\frac{\bar{\mu}_{l,n}}{\alpha(\mu_{l,n}^0)^2} + \frac{\bar{\mu}_{l,n}}{\alpha^2(\mu_{l,n}^0)^3} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{\alpha\mu_{l,n}^0} + \frac{1}{2\alpha^2(\mu_{l,n}^0)^2} \right) \mathfrak{N}(l) \right] \right). \quad (4.21) \end{aligned}$$

С помощью формулы (4.20) мы получали численные значения поправок $\bar{\mu}_s$. Их подстановка в (4.21) дает

$$\ln \Pi(1) \simeq \ln \Pi(1)|_{\epsilon=0} - 4.90\epsilon + O(\epsilon^2),$$

$$\ln \Pi(3) \simeq \ln \Pi(3)|_{\epsilon=0} - 0.340\epsilon + O(\epsilon^2).$$

Окончательно, собрав в константу d все ϵ - поправки из (4.15), с учетом выражения для U_{reg} (см. Приложение, ф-лу (5.3)), имеем

$$\begin{aligned} d = \frac{4.90}{2} + \frac{(n-1)0.340}{2} - \frac{3}{2} \ln \pi + \frac{395}{32} \pi - \frac{75}{64} \pi^3 - \frac{46}{3} + \frac{4}{3} \pi^2 - \frac{5}{2} \gamma + \ln \frac{5}{6} + \\ + \frac{n+8}{6} \left(-\ln \pi - \frac{79}{16} \pi - \gamma + \frac{79}{32} \pi \gamma + \frac{79}{32} \pi \ln \pi - \frac{15}{64} \pi^3 \gamma - \right. \\ \left. - \frac{15}{64} \pi^3 \ln \pi + \frac{1}{2} \gamma \ln(\pi) + \frac{1}{4} \ln^2 \pi - \frac{1}{8} \pi^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \frac{15}{32} \pi^3 + \frac{5}{2} \right) \simeq -0.59 + 0.195n. \end{aligned}$$

4.5 Асимптотика $G_4^{(N)}$ при больших N

§ Вклад гауссовской части интеграла по флуктуациям

В первом параграфе этого раздела мы ограничимся рассмотрением вклада в исследуемую асимптотику, связанного с гауссовским приближением для интеграла по флуктуациям, т. е. положим пока

в (4.1) $\gamma_4 \equiv \gamma_4^{(0)}$. Этот вклад является наиболее интересным, так как демонстрирует взаимодействие параметров y , N и ϵ в MS - схеме, и его рассмотрение отсутствует в предыдущих работах (посвященных другим схемам). Для дальнейших вычислений нам понадобится входящее в $\gamma_4^{(0)}$ Фурье-преобразование в пространстве размерности D от $\bar{\phi}_c(x)$ (4.5). Приведем результат в пределе $\epsilon, p \rightarrow 0$:

$$\bar{\phi}_c(\mathbf{p}) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{\mathbf{p}^2} \left(e^{Q\epsilon} |\mathbf{p}|^\epsilon + \epsilon \left[\Psi'(1) - \frac{\ln(\mathbf{p}^2)}{2} + \frac{3 - \pi^2}{6} \right] + O(\epsilon^2) \right) + O(\ln(\mathbf{p}^2)),$$

$$Q = -\Psi(1) - \frac{3 \ln 2}{2} - \frac{\ln \pi}{2} - \frac{q}{2} \simeq -0.791,$$

напомним, $\Psi(x)$ - логарифмическая производная гамма-функции.

Разложим выражение $((\mu y)^{-\epsilon} - 1)^j$ в (4.8) по формуле бинома Ньютона, введя дополнительную сумму по m от нуля до j . Все образовавшиеся интегралы берутся интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dy}{y} y^\epsilon y^{(N-u)\epsilon} \left[y^{2-\epsilon} \bar{\phi}_c(y|\mathbf{p}_1|) \dots y^{2-\epsilon} \bar{\phi}_c(y|\mathbf{p}_4|) \right] \simeq \\ & \simeq \frac{(4\sqrt{3}\pi)^4}{\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 \mathbf{p}_3^2 \mathbf{p}_4^2} \left(\frac{1}{(N-u)\epsilon} + \frac{f}{(N-u)} + \frac{3}{(N-u)^2 \epsilon} \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$f = 2 - 6 \ln 2 - 2 \ln \pi + 79\pi/16 - 2\pi^2/3 - 15\pi^3/32 \simeq -10.05. \quad (4.23)$$

По сравнению с аналогичными вычислениями в первой главе (например, по сравнению с выражением (1.28)) мы учли в (4.22) дополнительные поправки по $1/N$ и ϵ . Последующие поправки к (4.22) дают в исследуемую асимптотику вклад порядка $O(1/N^2)$, т. е. являются несущественными. Затем с помощью формулы

$$\sum_{m=0}^j \frac{(-1)^m C_j^m}{(N-m)^z} = (-1)^j \left(\frac{(j+z-1)!}{(z-1)! N^{j+z}} + \frac{2(j+z)!}{(z-1)! N^{j+z+1}} \right) + O\left(\frac{1}{N^{j+z+2}} \right)$$

при $z = 1, 2$ нетрудно осуществить суммирование по m . Получившаяся формула отражает явно зависимость $G_4^{(N)}$ в (4.7) от параметра ϵ : в каждом слагаемом суммы по j полюса различной степени по ϵ умножены на экспоненциальный фактор $\exp(\alpha N\epsilon + \beta N\epsilon^2/2 + d\epsilon + qj\epsilon)$. Теперь необходимо в каждом слагаемом суммы по j выделить первый полюс по ϵ и просуммировать все вклады. Окончательно получим

$$\frac{\{G_4^{(N)}\}_0}{\epsilon} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \frac{e^{\alpha a}}{|\mathbf{p}|^8} \frac{1}{N\epsilon} \left(1 - \frac{W_4}{N}\right), \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} W_4 &= da + qa + qa^2\alpha + \beta a^2/2 - 5 - 5\alpha a + fa \simeq \\ &\simeq -3.58 + 1.48n + 0.16n^2, \end{aligned}$$

C_4^N приведено в (1.20) (следует положить $k = 4$); символом $\{G_4^{(N)}\}_0$ обозначен вклад слагаемого $\gamma_4^{(0)}$ в вычет по ϵ частично ренормированной функции Грина $G_4^{(N)}$, который и обсуждался в данном пункте.

§ Поправка к гауссовскому приближению в интеграле по флуктуациям

В данном параграфе текущего раздела обсудим вклад в исследуемую асимптотику, связанный с учетом первой стацфазной поправки к интегралу по флуктуациям, т. е. положим теперь в (4.1) $\gamma_4 \equiv \gamma_4^{(1)}/N$. Малость по $1/N$, содержащаяся в таком вкладе по сравнению со вкладом, рассмотренным в предыдущем пункте, дает нам возможность здесь не учитывать поправки по ϵ к конечным объектам. Первая стацфазная поправка к корреляционной функции $G_4^{(N)}$ вычислялась в [60] при использовании размерной регуляризации и единичной схемы ренормировки. Для поправки по $1/N$

к асимптотике функции Грина $G_4^{(N)}$ (и, соответственно, вершинной функции $\Gamma_4^{(N)}$) в [60] должен был быть получен ответ вида $\tilde{A} \ln^2(\mathbf{p}^2/\mu^2) + \tilde{B} \ln(\mathbf{p}^2/\mu^2) + \tilde{C}$. К сожалению, в [60] ответ для асимптотики коэффициента $G_4^{(N)}$ не приведен. Приводится лишь асимптотика функции Гелл-Мана-Лоу $\beta(g)$, которая связана с вершинной функцией Γ_4 соотношением [61]

$$\beta(g) = -\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \ln(\mathbf{p}^2/\mu^2)},$$

здесь μ - симметричная импульсная точка вычитания в единичной схеме ренормировки. При вычислении $\beta^{(N)}$ по $\Gamma_4^{(N)}$, член из $\Gamma_4^{(N)}$ пропорциональный $\ln^2(\mathbf{p}^2/\mu^2)$, который, как известно, не дает вклада в β , был отброшен. Затем в [60] осуществлялась замена переменных

$$\frac{\partial}{\partial \ln(p^2/\mu^2)} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \ln(\mu y)^2},$$

после чего производная перекинута по частям под знаком интеграла по y .

Чтобы восстановить результат [60] для функции Грина $G_4^{(N)}$, мы рассмотрели вклады контрчленов

$$\left(a \frac{4\bar{g}_c^2 \bar{\phi}_c^3 \delta \bar{\phi}}{N\epsilon 16\pi^2 4!} \right)^2, \quad b_2 \frac{\bar{g}_c^3 \bar{\phi}_c^4}{N\epsilon^2 (16\pi^2)^2 4!},$$

которые и соответствуют отброшенному коэффициенту \tilde{A} . Коэффициент \tilde{B} при члене $\ln(p^2/\mu^2)$ состоит из вклада контрчленов

$$b_1 \frac{\bar{g}_c^3 \bar{\phi}_c^4}{N\epsilon (16\pi^2)^2 4!}, \quad c \frac{\bar{g}_c^3 \bar{\phi}_c^4}{N\epsilon (16\pi^2)^2 4!}$$

и вклада X диаграмм, связанных с вариациями по флуктуациям величины I . С помощью приведенного в [60] результата для β - функции мы восстановили коэффициент X (см. Приложение, формулу (5.13)). Последний шаг - конечная ренормировка результатов

работы [60], чтобы преобразовать их к MS схеме - был осуществлен нами следующим образом. В единичной схеме параметры a , b_1 , c в (4.6) оказываются функциями ϵ , что добавляет некоторые конечные вклады к константам ренормировки (4.6) в пределе малых ϵ . Чтобы ликвидировать эти вклады мы, воспользовавшись приведенными в [60] выражениями для констант ренормировки в единичной схеме, положили, что симметричная точка вычитаний равна $\mu = 2(\pi \exp(\Psi(1) + 2))^{1/2}$. Это привело к исчезновению линейного по ϵ члена в функции $a(\epsilon)$ и тем самым уничтожило соответствующий вклад в константы ренормировки (4.6) в пределе малых ϵ . Кроме того мы домножили результат [60] на $\exp(U^{(1)}/N) = 1 + U^{(1)}/N + O(1/N^2)$ (константа $U^{(1)}$ приведена в Приложении 3, см. ф-лу (5.14)), что уничтожило вклад линейных по ϵ членов зависимостей $b_1(\epsilon)$, $c(\epsilon)$ в константы ренормировки (4.6). Окончательно преобразованный к MS схеме результат [60] для вклада в функцию Грина, связанного с членом $\gamma^{(1)}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
G_4^{(N)}\left(\gamma_4 \rightarrow \frac{\gamma_4^{(1)}}{N}\right) &= \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \frac{e^{-\alpha N\epsilon}}{(4\sqrt{3}\pi)^4} \int_0^\infty \frac{dy}{y} (\mu y)^{N\epsilon} \left(-\frac{[y^2 \bar{\phi}_c(y|\mathbf{p})]^4}{N} \times \right. \\
&\quad \times \left[\frac{a^2((\mu y)^{-\epsilon} - 1)^2}{\epsilon^2} + \frac{b_2((\mu y)^{-2\epsilon} - 1)^2}{\epsilon^2} + \frac{X((\mu y)^{-\epsilon} - 1)}{\epsilon} + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(b_1 - 2c)((\mu y)^{-2\epsilon} - 1)}{\epsilon} + \tilde{C} - U^{(1)} \right] + \frac{[y^2 \bar{\phi}_c(y|\mathbf{p})]^3}{N\mathbf{p}^2} (S - 2 \ln y) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{24}{5} \frac{[y^2 \bar{\phi}_c(y|\mathbf{p})]^2}{N\mathbf{p}^4} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-a)^j ((\mu y)^{-\epsilon} - 1)^j}{j! \epsilon^j} \quad (4.25)
\end{aligned}$$

константы S , \tilde{C} и X приведены в Приложении 3 (см. ф-лы (5.15-5.17, 5.13)).

Аналогично первому параграфу этого раздела сосчитаем вклад в $G_4^{(N)}$ выражения (4.25). Вместо (4.22, 4.23) нам потребуется ис-

пользовать следующие формулы (справедливые в требуемом порядке разложения по $1/N$ и ϵ):

$$\int \frac{dy}{y} y^{(N-u)\epsilon} [y^2 \bar{\phi}_c(y|\mathbf{p}|)]^z \simeq \frac{(4\sqrt{3}\pi)^z}{|\mathbf{p}|^{2z}} \frac{1}{(N-u)\epsilon}, \quad z = 2, 3, 4$$

$$\int \frac{dy}{y} y^{(N-u)\epsilon} \ln y [y^2 \bar{\phi}_c(y|\mathbf{p}|)]^3 \simeq -\frac{(4\sqrt{3}\pi)^3}{|\mathbf{p}|^6} \frac{1}{(N-u)^2 \epsilon^2}.$$

Окончательно для вклада $\gamma^{(1)}$ в первый полюс по ϵ функции Грина $G_4^{(N)}$ получим

$$\frac{\{G_4^{(N)}\}_1}{\epsilon} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \frac{e^{\alpha a}}{|\mathbf{p}|^{8N^2\epsilon}} \widetilde{W}_4, \quad (4.26)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_4 &= \alpha^2 a^2 + 4b_2 \alpha^2 - X\alpha - 2\alpha(b_1 - 2c) + \widetilde{C} - \\ &\quad - U^{(1)} + \frac{\sqrt{3}(S - 2\alpha)}{12\pi} + \frac{1}{10\pi^2} \simeq \\ &\simeq \frac{7879.39 + 3982.50n + 755.17n^2 + 63.07n^3 + 1.924n^4}{(n+8)^2} \end{aligned}$$

Сумма (4.24) и (4.26) дает вычет в нуле по ϵ частично ренормированной функции $G_4^{(N)}$ в $4 - \epsilon$ (MS) схеме в главном и поправочном члене $1/N$ разложения.

4.6 Константы ренормировки и критические индексы

Из соображений конечности ренормированной функции G_{4R} для константы ренормировки Z_g в асимптотике больших N в первой главе было получено соотношение (1.37):

$$-\frac{\{Z_g^{(N-1)}\}}{\epsilon} + \frac{\{G_4^{(N)}\}}{\epsilon} = 0, \quad (4.27)$$

которое, как нетрудно проверить, остается справедливым и при рассмотрении поправочного по $1/N$ порядка исследуемой асимптотики. Здесь $\{G_4^{(N)}\}$ - ампутированная функция Грина, очевидный множитель $1/|\mathbf{p}|^8$ опущен. С помощью суммы выражений (4.24) и (4.26), представляющей собой вычисленную нами функцию $\{G_4^{(N)}\}$, а также учитывая, что

$$C_4^{(N+1)} \approx -NC_4^{(N)} \left(1 + \frac{3 + n/2}{N} \right),$$

получаем окончательный результат для асимптотики $\{Z_g\}$:

$$\{Z_g^{(N)}\}_{asymp} = -\frac{C_4^{(N)}}{16\pi^2} e^{\alpha a} \left(1 + \frac{3 + n/2 + \widetilde{W}_4 - W_4}{N} \right). \quad (4.28)$$

В окончательных выражениях $Z_i^{(N)}$ обозначает коэффициент при u^N в выражении для Z_i , $u \equiv g/(16\pi^2)$ как это принято в MS схеме [57].

На основе полученного выражения представляет интерес выяснить насколько учет поправки по $1/N$ к асимптотике (4.28) улучшает аппроксимацию коэффициентов $Z_g^{(N)}$. В таблице 5 приведены для сравнения точные ($\{Z^{(N)}\}_{exact}$) [57], а также асимптотические ($\{Z_g^{(N)}\}_{asymp}$) значения коэффициентов в случае $n = 1$ как без учета так и с учетом поправочного члена.

Таблица 5: точно вычисленные коэффициенты разложения константы ренормировки $\{Z_g^{(N)}\}_{exact}$ (однокомпонентное поле) и соответствующие асимптотические значения.

$n = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
$\{Z_g^{(N)}\}_{exact}$	-2.833	10.85	-67.90	569.7
$\{Z_g^{(N)}\}_{asymp}$ в гл. порядке по $1/N$	-0.0049	0.062	-0.68	7.51
$\{Z_g^{(N)}\}_{asymp}$ с поправкой по $1/N$	-0.405	3.42	-28.4	251

Можно видеть, что учет вычисленной в данной работе поправки к липатовской асимптотической формуле демонстрирует существенное улучшение результатов - последний точно вычисленный вклад $\{Z^{(5)_g}\}_{exact}$ отличается от соответствующего асимптотического значения теперь уже не в 75, а примерно в два раза, наблюдается монотонность в приближении $\{Z_g^{(N)}\}_{exact}$ к $\{Z_g^{(N)}\}_{asympt}$. Аналогичная ситуация имеет место и для $n = 2, 3, \dots$

Результат (4.28) позволяет также провести сравнение известных порядков $4 - \epsilon$ разложения и соответствующих асимптотических значений для критического индекса η (вычисления проводились по формулам (1.47, 1.48)). При вычислении первой поправки по $1/N$ в выражении для $\eta_{asympt}^{(N)}$ константу ренормировки $Z_\phi^{(N)}$ достаточно учесть лишь в главном по $1/N$ порядке (соответствующее выражение было вычислено в первой главе, см. ф-лу (1.43)). Окончательно для асимптотики высоких порядков разложения индекса η мы получили

$$\eta_{asympt}^{(N)} = -\frac{C_4^{(N)} a_\phi^{(2)}}{2\pi^2 a^{N+1}} \exp\left(\alpha a + \frac{2a_g^{(2)}}{a}\right) \left[1 + \frac{\Omega}{N}\right]$$

$$\Omega = -\widetilde{W}_4 + W - \frac{7+n}{2} \left[e^{-2a_g^{(2)}/a} + 1\right] + \frac{3a_g^{(3)}}{a} - \frac{4a_g^{(2)}}{a^2} +$$

$$+ \frac{3a_g^{(2)}}{a} + 4\left(\frac{a_g^{(2)}}{a}\right)^2 - \frac{n}{2} - \frac{9a_\phi^{(3)}}{4a_\phi^{(2)}} + \frac{(n+2)a}{576}.$$

Входящие в это выражение начальные коэффициенты разложения констант ренормировки в $4 - \epsilon$ (MS) схеме приведены в (1.51, 1.52) и в Приложении 3 (см. ф-лу (5.18)).

Как и в случае константы ренормировки Z_g поправка к асимптотике для критического индекса η существенно улучшает асимптотический результат (см. таблицу 6).

Таблица 6: точно вычисленные члены разложения критического индекса $\{\eta^{(N)}\}_{exact}$ (однокомпонентное поле) и соответствующие асимптотические значения $\{\eta^{(N)}\}_{asympt}$

$n = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
$\{\eta^{(N)}\}_{exact}$.0185	.0187	-.00833	.02566
$\{\eta^{(N)}\}_{asympt}$ в гл. пор.	$9.2 \cdot 10^{-6}$	$-3.9 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$-5.2 \cdot 10^{-4}$
$\{\eta^{(N)}\}_{asympt}$ с погр.	$-8.2 \cdot 10^{-4}$.00229	-.00626	.01821

4.7 Обсуждение полученных в данной главе результатов

Итак, мы вычислили поправку к асимптотической формуле Липатова с учетом особенностей $4 - \epsilon$ (MS) схемы. Данная поправка существенно улучшает выход коэффициентов теории возмущений на асимптотический режим - уже пятипетлевые результаты приемлемо описываются теперь асимптотической формулой. Таким образом, мы вынуждены заключить, что учет данной поправки необходим для улучшения точности вычислений при пересуммировании результатов методами Бореля, Бореля-Лероя.

Кроме того мы продемонстрировали, что дальнейшее улучшение точности вычисления критических индексов может осуществляться не только при помощи вычисления последующих порядков теории возмущений, но и путем расчета последующих поправок по $1/N$ к липатовской асимптотике, причем в рамках $4 - \epsilon$ (MS) схемы последняя деятельность особенно существенна. Действительно, наш анализ в первой главе дает основания предполагать, что ряды $(4 - \epsilon)$ разложений выйдут на главный член липатовской асимптотики лишь в 10 - 11 порядке теории возмущений. Поскольку количество диаграмм и, следовательно, объем вычислений лавинообразно растет с ростом порядка теории возмущений, не исключено, что поиск дальнейших

поправок к липатовской асимптотике является перспективной задачей на данном этапе исследований.

Следует отметить, что задача нахождения асимптотик высоких порядков для динамических моделей также представляется весьма важной. Инстантонный анализ для их исследования последовательно не проводился, а попытки предъявить инстантонные решения к настоящему моменту найдены лишь в нескольких простейших моделях [13, 4]. Однако представленный в данной диссертации формализм может быть обобщен и для исследования динамических моделей, в частности динамической ϕ^4 модели.

Глава 5

Заключение

Суммируя все вышесказанное, перечислим проблемы, решаемые в данной работе.

Во - первых, на основе инстантонного анализа ультрафиолетовых расходимостей нами предложен способ вычисления асимптотик разложения констант ренормировки в высоких порядках теории возмущений для $O(n)$ - симметричной ϕ^4 модели. При этом использовалась схема минимальных вычитаний (MS) в $(4 - \epsilon)$ разложении, как наиболее продвинутая в техническом отношении (вычислено пять порядков теории возмущений). В отличие от предыдущих работ в нашем методе ультрафиолетовые расходимости N - того порядка теории возмущений естественным образом проявляются в виде полюсов по ϵ . Было показано, что для корректного использования инстантонного подхода в теории ϕ^4 в $4 - \epsilon$ (MS) схеме необходимо аккуратное рассмотрение порядка предельных переходов $1/N$, $\epsilon \rightarrow 0$. Возникающие в данной схеме особенности приводят к отличиям от канонической техники [50] при вычислении амплитуды асимптотики высоких порядков для констант ренормировки и критических индексов. Нами обнаружены значительные отклонения точно известных к настоящему моменту членов разложения от асимптотических

значений как для констант ренормировки и критических индексов. Упомянутый способ вычисления представлен в главе 1 настоящей диссертации.

Во-вторых, мы применили инстантонный анализ в модели [70, 19], представляющей собой модифицированный метод исследования теории ϕ^4 и приводящий к сходящимся рядам. Мы определили радиус сходимости и характер особенности рядов модели [19], а также, используя полученные в главе 1 результаты выделили явно главный вклад сингулярностей сходящихся рядов для РГ - функций и критических индексов. Наш результат также демонстрирует, каким образом поправки по $1/N$ к главному порядку липатовской асимптотики может быть принят во внимание при обработке рядов для критических индексов. Данная процедура представлена в главе 2.

Затем, в главе 3, развитая идеология используется для вычисления асимптотики высоких порядков ϵ разложения скейлинговой функции парного коррелятора $O(n)$ - симметричной модели ϕ^4 (в размерной регуляризации и схеме минимальных вычитаний). Наш результат демонстрирует существенную неравномерность скейлинговой функции по ее аргументам.

Так как в ходе исследования нами были обнаружены значительные отклонения точно известных к настоящему моменту членов разложения от асимптотических значений, в главе 4 мы вычисляем поправку к асимптотике высоких порядков для константы ренормировки Z_g и критического индекса η (в $4 - \epsilon$ (MS) схеме). Полученные поправки существенно улучшают асимптотическое описание результатов петлевых расчетов - последний точно вычисленный вклад константы ренормировки Z_g отличается от соответствующего асимпто-

тического значения теперь уже не в 75 раз (как это было в главном по $1/N$ порядке), а примерно в два раза; наблюдается монотонность в приближении упомянутых вкладов к асимптотике.

Приложение 1

Здесь приведены некоторые факты, следующие из ренормируемости теории, полезные для контроля вычислений и оценки результатов, а также обсужден вопрос о влиянии $1/N$ поправок метода стационарной фазы на асимптотики констант ренормировки и критических индексов.

Следствием определения $g_0 = g\mu^\epsilon Z_g$ является известное выражение

$$\beta(g) = \frac{-\epsilon g}{1 + g\partial_g \ln Z_g}. \quad (5.1)$$

Конечность β -функции при $\epsilon \rightarrow 0$ требует сокращения старших полюсов по ϵ в (5.1). Разлагая обе части этого равенства в ряды по g и учитывая факториальный рост коэффициентов, в асимптотике больших N для, например, для коэффициента при втором полюсе по ϵ получаем

$$Z_{(2)g}^{(N)} \approx \frac{a\{Z_g^{(N)}\}}{N}$$

($Z_g = 1 + \{Z_g\}/\epsilon + Z_{(2)g}/\epsilon^2 + \dots$). Именно такой результат для $Z_{(2)g}^{(N)}$ получается при вычислении $G_4^{(N)}$ предложенным нами методом.

Рассматривая (5.1) как дифференциальное уравнение на Z_g , в MS схеме получаем

$$Z_g = \exp\left(-\int_0^g \frac{du}{\beta(u)} - \int_0^g \frac{du}{u}\right).$$

Ограничившись однопетлевым приближением $\beta(g) = g(-\epsilon + ag)$, имеем

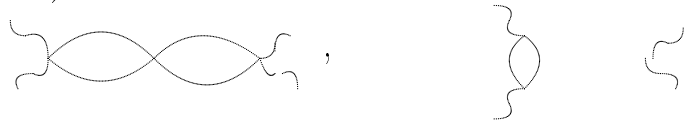
$$Z_g \approx \frac{\epsilon}{\epsilon - ag} + O\left(\frac{g^2}{\epsilon}\right), \quad (5.2)$$

что есть результат суммирования в разложении Z_g "главных" вкладов по g/ϵ . Заметим, что это выражение конечно при $\epsilon \rightarrow 0$, $g = \text{Const}$.

Аналогичное суммирование имело место в [61, 9], что и объясняет полученную конечность частично ренормированных функций Грина теории ϕ^4 в этих работах.

Обсудим вклады в $\{Z_g\}$ поправок порядка $1/N$ перевального вычисления $\oint dg \int D\phi$. Они получаются в результате учета поправочных членов при интегрировании по отклонениям $\delta\phi$, δg от положения точки стационарности ϕ_c , g_c , и могут быть представлены диаграммами, линии которых определяются оператором $\delta^2 S(\phi_c, g_c)/\delta\phi^2$. Очевидно несингулярные при $\epsilon \rightarrow 0$ (и $y \rightarrow 0$) вклады в эти диаграммы дают лишь $O(1/N)$ поправки к $\{Z_g\}$. Итак внимательно следует рассмотреть лишь полюсные по ϵ члены.

Интересуясь расходящимися диаграммами, следует выделить 1-неприводимые (проблема с 1-приводимыми диаграммами решается тривиально):



здесь хвостиками обозначены решения уравнения стацфазы ϕ_c , выделение расходимостей по ϵ , в частности, приводит к разложению линий в ряд по $g_c\phi_c^2$.

Ренормировочные контрчлены теории - часть предэкспоненты вычисляемого методом перевала интеграла. Учтенный в главном по N порядке контрчлен $\sim a\mu^\epsilon g^2\phi^4/\epsilon$ дает вклад и в поправку порядка $a(\mu y)^{-\epsilon} g^2\phi_c^2(\delta\phi)^2/\epsilon$. После интегрирования по $\delta\phi$ этот член сокращает расходимости подграфов в рассматриваемых диаграммах, а оставшаяся поверхностная расходимость устраняется пропорциональными g^2 вкладками в Z_g : $\sim a^2 g^2/\epsilon^2$ и $\sim a_g^{(2)} g^2/\epsilon$. В результа-

те вышеупомянутых сокращений мы получаем вклады в $\int dy y^{N\epsilon-1}$: $\sim a_g^{(2)}(1 - (\mu y)^{-\epsilon})/(N\epsilon)$ и $\sim a^2(1 - (\mu y)^{-\epsilon})^2/(N\epsilon^2)$. Им соответствуют (см. (1.29)) вклады в Z_g вида $a_g^{(2)}/(N^3\epsilon^2)$, ... и $a^2/(N^4\epsilon^3)$, ..., несущественные по сравнению со степенными $1/(N\epsilon)^j$, которые мы учли при получении (1.32).

Приложение 2

Чтобы получить в (3.15) коэффициенты R_1 , R_2 , R_3 , диаграммы (3.8) раскладывались в ряд по параметру p^2/τ . Возникающие при этом логарифмические особенности приходилось выделять явно, получавшиеся интегралы упрощались с помощью пакета "Maple". Численные значения кратных интегралов в выражениях для R_1 , R_2 , R_3 , содержащих функции Бесселя, вычислялись методом Монте-Карло. Приведем результат:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{3}{2\pi^2} \left[\int_0^\infty dx \frac{\exp(-x^2) - x^2 K^2(x)}{x} - \pi^2 \gamma + \pi^2 \right] \simeq 0.649, \\
R_2 &= -\frac{6}{\pi^3} \int_0^\infty dk k^3 \int_0^\infty dq q^3 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \left(\frac{K_1(k)K_1(q)K_1(Q)}{Qqk^3} - \frac{e^{-k^2} K_1^2(q)}{k^4 Q^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-k^2-q^2}}{q^4 k^2 Q^2} - \frac{e^{-k^2} K_1^2(q)}{k^2 q^2 Q^2} + 2kq \cos \theta \frac{e^{-k^2-q^2}}{k^4 q^4 Q^2} - 2kq \cos \theta \frac{e^{-k^2} K_1^2(q)}{k^4 q^2 Q^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{k^2 q^2 (k^2 + 1)(q^2 + 1)(Q^2 + 1)} \right) - \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1}{\alpha_1^2} \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\alpha_2} (1 - e^{-\alpha_1}) \times \\
&\quad \times \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) - \frac{3}{2} (\gamma^2/2 - \pi^2/12 + 1 + \gamma) + \frac{3\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{K_1^2(q)q^2 - e^{-q^2}}{q} - \\
&\quad - \frac{2}{\pi^3} \int_0^\infty dk k^3 \int_0^\infty dq q^3 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \frac{1}{k^2 q^2 Q^2 (k^2 + 1)(q^2 + 1)(Q^2 + 1)} \simeq 3.32, \\
R_3 &= -\frac{6}{\pi^3} \int_0^\infty dk k^3 \int_0^\infty dq q^3 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \frac{3Q^2 - 1}{k^2 q^2 (k^2 + 1)(Q^2 + 1)^3} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{3\gamma}{4} + \frac{45}{8} + \frac{3}{4}\ln(\pi) + 1.015651206 \simeq 6.84,$$

здесь

$$Q = \sqrt{k^2 + q^2 + 2(\mathbf{kq})}.$$

Приложение 3

$$U_{reg}(\epsilon) = \frac{n+8}{6} \left(\Psi(1) + 2 - \ln \pi \right) + \epsilon \frac{n+8}{6} \left(-\ln \pi - \frac{79}{16}\pi - \gamma + \frac{79}{32}\pi\gamma + \frac{79}{32}\pi \ln \pi - \frac{15}{64}\pi^3(\ln \pi + \gamma) + \frac{1}{2}\gamma \ln \pi + \frac{1}{4}\ln^2 \pi - \frac{1}{8}\pi^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{15}{32}\pi^3 + \frac{5}{2} \right), \quad (5.3)$$

здесь и далее γ - постоянная Эйлера, $\gamma = -\Psi(1) \approx 0.5772$.

$$\beta = -\frac{79}{16}\pi + \frac{56041\pi^2}{3072} - 1 + \frac{\gamma \ln \pi}{2} + \frac{675\pi^6}{4096} + \frac{15\pi^3}{32} + \frac{15\pi^3 \ln \pi}{64} - \frac{79\pi\gamma}{32} - \frac{79\pi \ln \pi}{32} + \frac{15\pi^3\gamma}{64} + \ln \pi + \gamma + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{3555\pi^4}{1024} + \frac{\ln^2 \pi}{4} \simeq -0.05045 \quad (5.4)$$

$$b_1 = -\frac{5n+22}{9}, \quad b_2 = \frac{n^2+16n+64}{9}, \quad c = -\frac{n+2}{36}. \quad (5.5)$$

$$B_{\mu c}^\lambda = \int d^D \mathbf{x} \frac{\sqrt{-\bar{g}_c} \bar{\phi}_c^3 \Phi_{\lambda c}^\parallel \mathbf{x}^\mu}{3!}; \quad B_{\mu a'}^0 = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}_c}} \delta_{\mu a'} \quad (5.6)$$

$$\sum_{\nu=1}^D (\partial_\nu \Phi_{00}^\parallel, \partial_\nu \Phi_{00}^\parallel) = \frac{12}{5} + \epsilon \left(-\frac{6}{5} \ln \pi - \frac{24}{5} - \frac{12}{5} q + \right.$$

$$\sum_{\nu=1}^D (\partial_\nu \Phi_{0a}^{\parallel}, \partial_\nu \Phi_{0a}^{\parallel}) = \frac{12}{5} + \epsilon \left(-\frac{6}{5} \ln \pi - \frac{12}{5} q - 8 + \frac{4\pi^2}{5} + \right. \\ \left. + \frac{6}{5} \Psi(1) \right) + O(\epsilon^2), \quad (5.7)$$

$$\sum_{\nu=1}^D (\partial_\nu \Phi_{0a}^{\parallel}, \partial_\nu \Phi_{0a}^{\parallel}) = \frac{12}{5} + \epsilon \left(-\frac{6}{5} \ln \pi - \frac{12}{5} q - 8 + \frac{4\pi^2}{5} + \right. \\ \left. + \frac{6}{5} \Psi(1) \right) + O(\epsilon^2), \quad (5.8)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} (\partial_\nu \Phi_{0b}^\perp, \partial_\nu \Phi_{0b}^\perp) = 4. \quad (5.9)$$

$$\aleph = \frac{\Psi(3)(l+1)^2}{2} - \frac{l+1}{1} - (l+1)^2 \Psi(l+2) \quad (5.10)$$

$$A_{n,i} = \frac{(-1)^{i+1}(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} \frac{(l+n)!(l+1)!}{(l+n-i+1)!(l+i)!} \quad (5.11)$$

$$\chi = -8 \frac{3 \ln(\mathbf{x}^2) \mathbf{x}^2 + 3 \mathbf{x}^2 - 9 + \pi^2 - \pi^2 \mathbf{x}^2}{(\mathbf{x}^2 + 1)^3} + \frac{12 \ln \mathbf{x}^2}{(\mathbf{x}^2 + 1)^2} \quad (5.12)$$

$$-a(X + 2(b_1 - 2c)) = -\frac{(n^2 + 10n + 36)}{6}, \quad (5.13)$$

ср. правую часть с выражением для I_1 в [60].

$$U^{(1)} = \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{216} \pi^2 \right) n^2 + \left(\frac{2}{27} \pi^2 + \frac{5}{9} \tau - \frac{35}{36} - \frac{1}{36} \gamma \right) n + \frac{22}{9} \tau + \\ + \frac{8}{27} \pi^2 - \frac{1}{18} \gamma - \frac{7}{2}, \quad (5.14)$$

здесь и далее $\tau \simeq 0.749$ [60].

$$S = -\frac{1}{80} \frac{1289 + 55n}{n+8} + 4 \ln 2 - 3\gamma - \frac{T}{16}, \quad (5.15)$$

$$T \equiv \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty dt_3 \ln t_3 \frac{1}{(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3)^2} \times \\ \times \exp \left(-\frac{7t_1 t_3 / 3 + 4t_3^2 / 3 + t_1^2 + t_1 t_2 + t_2 t_3}{4(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3) / (t_1 + t_3)} \right) \approx 17.6 \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{C} = & -\frac{(180\gamma - 219 - 90 \ln 3)n^3}{360(n+8)^2} + \\
& -\frac{(-1560 \ln 3 + 12 + 35\pi^2 - 120 \ln 2 - 600\tau + 3240\gamma)n^2}{360(n+8)^2} + \\
& +\frac{(22272 + 20880\gamma + 560\pi^2 - 9840 \ln 3 - 1200 \ln 2 - 7440\tau)n}{360(n+8)^2} + \\
& +\frac{(86880 + 2240\pi^2 + 51840\gamma - 1920 \ln 2 - 21120\tau - 24960 \ln 3)}{360(n+8)^2}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$a_g^{(3)} = \frac{(33n^2 + 922n + 2960 + 96\zeta(3)(5n + 22))}{648}, \tag{5.18}$$

$$a_\phi^{(3)} = \frac{(n+2)(n+8)}{1296} \tag{5.19}$$

Литература

- [1] Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V., Barinov V. A., Kabrits Yu. S., Vasil'ev A. N., Phys. Rev. E **64**, 056306 (2001).
- [2] Antonenko S. A., Sokolov A. I., Phys. Rev. E **51**, 1894 (1995).
- [3] Baker Jr. G. A., Nickel B. G., Meiron D. I., Phys. Rev. B **17**, 1365 (1978).
- [4] Balkovsky E., Lebedev V., Phys. Rev. B **58**, 5776 (1998).
- [5] Bogoljubov N. N., Sirkov D. V., Nuovo Cim., **3**, 845 (1956).
- [6] Bray A. J., Phys. Rev. B **14**, 1248 (1976).
- [7] Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J., Phys. Rev. D **8** 2418 (1973).
- [8] Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J., *Phase Transitions and Critical Phenomena* (New York), **6**, 114 (1976).
- [9] Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J., Phys. Rev. D **15**, 1544 (1977).
- [10] Brezin E., Parisi G., J. Stat. Phys. **19**, 269 (1978).
- [11] Callan C. G., Phys. Rev. D, **2**, 1541 (1970).

- [12] Campostrini M., Pelissetto A., Rossi P., Vicari E., Phys. Rev. E **57**, 184 (1998).
- [13] Chertkov M., Phys. Rev. E **55**, 2722 (1997)
- [14] Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V., Phys. Lett. B **99**, 147 (1981)
- [15] Gell - Mann M., Low F. E., Phys. Rev. **95**, 1300 (1954).
- [16] Gorishny S. G., Larin S. A., Tkachev F. V., Phys. Lett. A **101**, 120 (1984).
- [17] Guida R., Zinn-Justin J., J. Phys. A **31**, 8103 (1998).
- [18] Hohenberg P. C., Halperin B. I., Rev. Mod. Phys. **49**, 455 (1977).
- [19] Honkonen J., Nalimov M., Phys. Lett. B **459**, 582 (1999).
- [20] Kleinert H., Phys. Rev. D **60**, 085001 (1999).
- [21] Kleinert H., Neu J., Schulte-Frohlinde V., Chetyrkin K. G. and Larin S. A., Phys. Lett. B **272**, 39 (1991)
- [22] Kleinert H., Neu J., Schulte-Frohlinde V., Chetyrkin K. G. and Larin S. A., Phys. Lett. B **319**, 545 (1993).
- [23] Le Guillou J. C., Zinn-Justin J., Phys. Rev. Lett. **39**, 95 (1977).
- [24] Le Guillou J. C. and Zinn-Justin J., Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980).
- [25] Le Guillou J. C. and Zinn-Justin J., J. Physique Lett. **46**, L137 (1985).
- [26] Le Guillou J. C. and Zinn-Justin J., J. Physique **48**, 19 (1987).

- [27] Le Guillou J. C. and Zinn-Justin J., *J. Physique* **50**, 1365 (1989).
- [28] Makhankov V. G., *Phys. Lett. A* **61**, 431 (1977).
- [29] Martin P.C., Siggia E.D., Rose H.A., *Phys. Rev. A* **8**, 423 (1973).
- [30] McKane A. J., Wallace D. J., *J. Phys. A: Math. Gen.* **11**, 2285 (1978).
- [31] McKane A. J., Wallace D. J., de Alcantara Bonfim O.F., *J. Phys.A: Math. Gen.* **17**, 1861 (1984).
- [32] Mudrov A. I., Varnashev K. B., *Phys. Rev. E* **58**, 5371 (1998).
- [33] Olla P., *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2465 (1991);
- [34] Olla P., *Int. J. Mod. Phys. B* **8**, 581 (1994).
- [35] Stueckelberg E. C. G., Petermann A., *Helvetica Physica Acta* **26**, fasc. 5, 499 (1953).
- [36] Symanzik K., *Commun. Math. Phys.* **18**, 227 (1970).
- [37] t'Hooft G., *Nucl. Phys. B* **61**, 455 (1973).
- [38] t'Hooft G., Veltman M. *Nucl. Phys. B* **44**, 189, (1972).
- [39] Wegner F.J., *Phys. Rev. B* **6** 1891 (1972).
- [40] Wilson K. G., *Phys. Rev. B* **4**, 3174 (1971).
- [41] Wilson K. G., *Phys. Rev. Lett.* **28**, 548 (1972).
- [42] Wilson K. G., *Phys. Rev. D* **7**, 2911 (1973).
- [43] Wilson K. G., Fisher M. E., *Phys. Rev. Lett.* **28**, 240 (1972).
- [44] Wilson K. G., Kogut J., *Phys. Rep.* **12**, 75 (1974).

- [45] Yakhot V., Phys. Rev. A **23**, 1486 (1981).
- [46] Yakhot V., Orszag S.A., Phys. Rev. Lett. **57**, 1722 (1986);
- [47] Yakhot V., Orszag S.A., J. Sci. Comp. **1**, 3 (1986).
- [48] Yakhot V., Smith L.M., J. Sci. Comp. **7**, 35 (1992).
- [49] Yukalov V. I., Gluzman S., Phys. Rev. E **58**, 1359 (1998).
- [50] Zinn-Justin J., *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1989).
- [51] Аджемян Л. Ц., Антонов Н. В., Васильев А. Н., Журн. exper. и теор. физ. **95**, 1272 (1989).
- [52] Аджемян Л. Ц., Антонов Н. В., Васильев А. Н., Успехи физ. наук **95**, 1257 (1996).
- [53] Антонов Н. В., Налимов М. Ю., Удалов А. А., Теор. и мат. физ. **110**, 385 (1997).
- [54] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Докл. АН СССР **29**, 203 (1955).
- [55] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Докл. АН СССР **29**, 391 (1955).
- [56] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Журн. exper. и теор. физ. **30**, 77 (1956).
- [57] Васильев А. Н., *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике* (ПИЯФ, С-Пб., 1998).
- [58] Владимиров А. А. Теор. и мат. физ. **36**, 271, (1978).

- [59] Казаков Д.И., Тарасов О.В., Ширков Д.В., Теор. и мат. физ. **38**, 15 (1979).
- [60] Кубышин Ю. А., Теор. и мат. физ. **57**, 363 (1983).
- [61] Липатов Л. Н., Журн. exper. и теор. физ. **72**, 411 (1977).
- [62] Ма Ш. *Современная теория критических явлений* (М.: Мир, 1980).
- [63] Налимов М. Ю., Удалов А. А. Вестник СПбГУ **4**, 33 (1996).
- [64] Овсянников Л. В. Докл. АН СССР **109**, 1112 (1956).
- [65] Паташинский А. З., Покровский В. Л., *Флуктуационная теория фазовых переходов*. (М.: Наука, 1982.) - стр. 381.
- [66] Рыжик И.М., Градштейн И.С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: ГИТТЛ, 1951.) - стр. 353.
- [67] Суслов И. М., Журн. exper. и теор. физ. **106**, 560 (1994).
- [68] Суслов И. М., Журн. exper. и теор. физ. **111**, 220 (1997).
- [69] Суслов И. М., Журн. exper. и теор. физ. **111**, 1896 (1997).
- [70] Ушверидзе А. Г., Ядерная физика **38**, 798 (1983).