САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Калагов Георгий Алибекович

# НЕПЕРТУРБАТИВНОЕ РЕНОРМГРУППОВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СКЕЙЛИНГОВОГО ПОВЕДЕНИЯ

Специальность 01.04.02 —

«теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Налимов Михаил Юрьевич

Санкт-Петербург — 2018

## Оглавление

# Введение

**Актуальность темы.**

Наиболее универсально и естественно скейлинговые явления в системах различной физической природы описываются теоретико-полевыми методами, в рамках которых задача сводится к исследованию поведения эффективных полевых моделей в инфракрасной (ИК) области. Эффективное действие в зависимости от геометрии поля строится из инвариантов соответствующей группы симметрии, причём ведущий вклад в асимптотику дают ИК-существенные инварианты в соответствии с их размерностями. Поэтому ренормгрупповой (РГ) поток определяется лишь общими свойствами исследуемой модели, что приводит, при наличии ИК-устойчивых фиксированных точек РГ траекторий, к универсальности скейлингового поведения физических систем.

Самым распространённым и даже каноническим инструментом реализации теоретико-полевых методов является теория возмущений. Последовательный алгоритм вычитания ультрафиолетовых (УФ) расходимостей в форме $R$-операции Боголюбова наряду с РГ подходом позволяют вычислить β-функции и аномальные размерности моделей в виде отрезка разложения по константе связи, дина которого всецело определяется технической сложностью вычисления многопетлевых диаграмм Фейнмана. По меньшей мере существуют два альтернативных теоретико-возмущенческих подхода нахождения РГ функций: ренормгруппа в реальной размерности пространства $d = 2$ или $d = 3$ и ренормгруппа в размерности $d = d_* - \varepsilon$, где $d_*$ – логарифмическая размерность модели, параметр ε считается формально малым. В последней схеме, впервые предложенной К. Вильсоном для модели $\phi^4$ [1], положения фиксированных точек РГ тока и значения критических показателей строятся в виде рядов по ε. При $\varepsilon < 0$ точной в ИК области является теория среднего поля для данной модели, а вычисление петлевых графиков даёт поправки по степеням $\varepsilon$ к среднеполевому приближению. В размерной регуляризации ($\mathrm{d}^d p \to \mu^\varepsilon \mathrm{d}^{d_*-\varepsilon} p$, где $\mu$ – ренормировочная масса размерности импульса, введение которой необходимо для сохранения размерности меры интегрирования) УФ расходимости диаграмм проявляются в виде полюсов по регуляризатору $\varepsilon$, которые и вычитаются в рамках $R$-операции, что порождает MS (minimal subtraction) схему ренормировки [2].

Несмотря на мощь теории возмущений, вопрос об аналитических свойствах пертурбативных разложений остаётся за скобками конструктивного анализа: метод не контролирует вклады старших порядков. Поэтому единственным основанием использования теории возмущений является априорное предположение о несущественности высших поправок. Однако оказывается, что практически все ряды носят асимптотических характер и имеют нулевой радиус сходимости. Тем не менее, асимптотический ряд с отброшенными – начиная с некоторой степени – членами при достаточно малых параметрах разложения даёт приемлемые количественные результаты, находящиеся в согласии с экспериментально получаемыми оценками. Это характерно, например, для разложений в КЭД, однако совершенно не типично для эффективных моделей статистической физики, где формально малый параметр $\varepsilon$ вовсе не мал. В реальных размерностях пространства, в зависимости от конкретного действия, $\varepsilon = 1, 2, 3, \ldots$. Для извлечения числовых результатов в подобных ситуациях применяют процедуру пересуммирования по Борелю-Лерою доступных членов разложения, которая восстанавливает функцию по её асимптотическому ряду. При выполнении некоторых требований (теорема Ватсона), такое восстановление однозначно [3]. Информация, необходимая для проведения пересуммирования, содержится не только в начальных порядках разложения, но и в асимптотике высоких порядков, далее АВП. Проведение пересуммирования без учёта АВП не может быть признано корректным, поскольку в этом случает параметры преобразования Бореля-Лероя не фиксируются, а рассматриваются как подгоночные. Поэтому методы исследования АВП, основанные на инстантонном анализе, являются ключевым инструментом для восстановления функции по соответствующему асимптотическому разложению. Подчеркнём, что инстантонный анализ играет роль непертурбативного дополнения к теории возмущений и придаёт ей полноту: результатом теперь является не формальное разложение величины, а её числовое значение, допускающее сравнение с результатами других подходов.

Альтернативным методом исследования скейлингового поведения, никак не связанным с существованием в модели малых параметров, является метод непертурбативной ренормгруппы. Если база квантово-полевой РГ – существование в квантовой теории поля группы ренормировочных преобразований [4], то основа непертурбативной РГ – идеи Кадданова-Вильсона построения эффективного действия, определяющего ведущие ИК асимптотики в моделях статистической физики [1]. Подход непертурбативной РГ в форме метода эффективного усреднённого действия (effective average action, далее EAA) [5] лишён недостатков теории возмущений и может быть использован не только при малых значениях параметров разложения, но и в пределе сильной связи, поэтому сейчас пользуется популярностью и применяется при исследовании фазовых переходов и скейлинговых явлений в задачах квантовой теории поля и статистической физики [6].

В рамках инстантонного анализа в данной диссертации рассматриваются скалярная модель $\phi^3$ [7] и $SU(N)$ симметричная модель типа $\phi^4$ с комплексным антисимметричным матричным полем [8]; в рамках непертурбативной РГ динамическая модель $A$ [9] с турбулентным полем скорости Крейчнана [10].

Как было впервые показано Фишером [11], модель $\phi^3$ с мнимым зарядом непосредственно связана с вопросом о поведении нулей статистической суммы изинговского ферромагнетика в комплексной плоскости активности. В работе Янга и Ли [12] доказано, что нули распределены на единичной окружности, а плотность их распределения в окрестности точки фазового перехода имеет степенную асимптотику с показателем $\sigma$, который выражается через индекс Фишера $\eta$ модели $\phi^3$ и даётся формулой $\sigma = (d-2+\eta)/(d+2-\eta)$. Величина индекса $\sigma$ может быть оценена по данным зависимости изотермической намагниченности образца от приложенного магнитного поля [13].

Наиболее известным представителем квантовых систем является электронная жидкость в некоторых металлах, демонстрирующих при достаточно низких температурах непрерывный фазовый переход в сверхпроводящее состояние, которое впервые наблюдал Каммерлинг-Оннес в 1911 году, охлаждая ртуть ниже температуры $4.15K$. Позже сверхпроводимость была открыта в целом ряде других металлов [14]. Теоретическое микроскопическое объяснение это явление получило в рамках модели БКШ, описавшей куперовское спаривания электронов. Однако формирование куперовских пар возможно не только в системе электронов проводимости: оно происходит в коллективе любых фермионов со сколь угодно слабым притяжением [15]. В частности, в системе нейтральных атомов $^3He$ сверхтекучая фаза имеет место при температуре ниже $3mK$. Как электроны проводимости, так и атомы $^3He$ имеют полуцелый спин $s = 1/2$, поэтому каждая частица находится в $N = 2s + 1 = 2$ состояниях, а соответствующая ферми-жидкость является двухкомпонентной. Естественно, вся разновидность исследуемых систем не исчерпывается упомянутыми случаями; большой интерес представляют многокомпонентные ферми-жидкости $N > 2$, составленные из атомов или их изотопов, имеющих спин $s > 1/2$ и обладающих $SU(N)$ симметрией, наличие которой связано с независимостью амплитуды рассеяния от спиновых состояний взаимодействующих частиц [16]. Вопросы куперовского спаривания и магнетизм активно исследуются в таких системах [16—24]. Кроме атомных систем, $SU(N)$ симметрия также наблюдается и в твёрдых телах, например, в граффене [25], где благодаря геометрии решётки электроны проводимости приобретают дополнительные степени свободы, приводящие к $SU(4)$ симметрии.

Модель $A$ критической динамики, в соответствии с классификацией [9], является типичным представителем эффективных теорий, описывающих процесс релаксации и критического замедления в неравновесной системе и позволяющих установить дисперсию $\omega \sim k^z$ флуктуаций параметра порядка в ИК пределе $k \to 0$. Модель $A$ принадлежит изинговскому классу универсальности, который включает непосредственно изинговский магнетик, бинарные смеси и критическую точку жидкость-пар. Интерес к критическим жидкостям связан с их нетривиальными физическими, термодинамическими и транспортными свойствами, поэтому проблемы поведения флюидов вблизи критичности и на сегодня остаются в фокусе как теоретических, так и экспериментальных изысканий. Использование идеализированных математических моделей, включающих лишь флуктуации параметра порядка и не учитывающих сторонние возмущения, выносит за рамки анализа критические режимы, которые могли бы иметь место в реальности. Действительно, критическая система чрезвычайно чувствительна к пертурбациям, ввиду сингулярного поведения сжимаемости, объёмной вязкости, восприимчивости и т.д. Учёт сторонних факторов: турбулентное течение; стратификация, вызванная земной гравитацией; примеси и т.д. – может изменить "чистое" автомодельное поведение либо вовсе породить иные скейлинговые режимы с новыми критическими показателями [26—28]. Среди этих факторов особую роль занимает развитая турбулентность, возникающая при достаточно больших числах Рейнольдса и характеризующаяся, как и термодинамические критические явления, сильными нелинейными флуктуациями и степенными асимптотиками корреляционных функций в ИК пределе [29]. Поэтому анализ влияния развитой турбулентности на динамическое критическое поведение является сегодня предметом многочисленных исследований.

**Степень разработанности темы исследования.** Нахождение АВП в полевых моделях было предложено Л. Липатовым в работе [30]. Идея липатовского подхода заключается в экстраполяции метода перевала на функциональный интеграл, что даёт для коэффициента $N$-ого порядка разложения $F^{(N)}$ наблюдаемой $F(g)$ в ряд по константе связи $g$ асимптотическую формулу

$$F^{(N)} = c(-a)^N N^b N! \left(1 + \mathcal{O}\left(N^{-1}\right)\right) , \tag{1}$$

где $a$ и $b$ – некоторые константы, $c$ в зависимости от природы $F(g)$ может быть либо числом, либо функцией координат или импульсов. Перевальными конфигурациями на функциональном пространстве являются инстантоны – локализованные в некоторой области решения уравнения на экстремум действия, дающие в него конечный вклад. Инстантоны принципиально непертурбативные конфигурации, наличие которых приводит к АВП типа (1). Таким образом аналитические свойства теоретико-полевых разложений напрямую связаны в непертурбативными эффектами соответствующей теории. Последовательный способ нахождения АВП констант ренормировки и РГ функций в схеме MS был разработан авторами [31] и применён к модели $\phi^4$ в логарифмической размерности $d^* = 4$. Одним из результатов работы является заключение о том, что вычисленные на тот момент коэффициенты $\varepsilon$-разложения (5-петлевое приближение) не выходят на асимптотику Липатова и выйдут на неё не ранее чем в 10 порядке. Однако, замечено, что факт такого значительного отклонения старших вычисленных коэффициентов от соответствующих асимптотических значений может быть свойственен лишь данной теории. Там же была построена формула, содержащая поправку по $1/N$ к ведущему члену асимптотики типа (1) и позволяющая экстраполировать следующие члены разложения констант ренормировки. Инстантонный анализ, в данном контексте метод Липатова, также был использован для исследования ренормгрупповых разложений в реальной размерности пространства, где перевальные конфигурации находились численно [32]. Метод был развит для исследования моделей динамического критического поведения [33]. В работе [34] приводится обзор разнообразных теоретико-полевых моделей сквозь призму инстантонного анализа.

Метод непертурбативной РГ в форме ЕАА первоначально был применён к моделям теории поля и равновесной статистической физики [6], однако позже он показал свою эффективность и при исследовании разнообразных неравновесных систем: модели $A$ [35] и $C$ [36] критической динамики, стохастическое уравнение Навье-Стокса [37], модель Крейчнана пассивного переноса примеси [10], модель перколяции [38], модель Кардара-Паризи-Занга [39].

На сегодня индекс Фишера модели $\phi^3$ вычислен в четырёхпетлевом ренормгрупповом приближении в размерности $d = 6 - \varepsilon$ в виде отрезка $\varepsilon$-разложения: численные расчёты представлены в статье [40]; аналитические результаты, полученные в рамках метода конформного бутстрапа, опубликованы в [41]; в работе [7] аналитические результаты найдены с помощью стандартной квантово-полевой РГ, там же автор приводит обобщения модели $\phi^3$ на поля различной геометрии, используемые для описания процесса протекания (перколяции), сильного взаимодействия и т.д.

В работе [8] ИК поведение $SU(N)$-симметричной модели было исследовано методом квантово-полевой ренормализационной группы. В рамках однопетлевого анализа установлено отсутствие ИК-устойчивых фиксированных точек при $N \geq 4$. РГ траектории покидают область устойчивости системы, что интерпретируется как указание на существование фазового перехода первого рода. Данный результат, разумеется, не может быть признан окончательным, поэтому необходим дополнительный анализ, учитывающий влияние старших порядков теории возмущений и свойства самих разложений, которые могут быть систематически изучены посредством инстантонного анализа.

В литературе наиболее распространены два способа включения турбулентных пульсаций в “идеальные” модели. Один из них, ансамбль Крейчнана, предполагает, что стохастическое поле скорости $\upsilon_j = \upsilon_j(x,t)$, $j = \overline{1,d}$ подчинено распределению Гаусса с нулевым математическим ожиданием и заданным коррелятором $\sim \delta(t-t')|x-x'|^{\zeta}$ [42; 43]. В основе второго лежит стохастическое уравнение Навье-Стокса [44; 45]. Различные расширения динамических моделей в рамках этих подходов были изучены в целом ряде работ [46—53] с помощью пертурбативных ренормгрупповых расчётов в размерной регуляризации $d = 4 - \varepsilon$. Выяснено, что включение стохастического поля скорости приводит к возникновению новых ИК-устойчивых скейлинговых режимов. Соответствующие критические показатели вычислялись в виде двойного регулярного $(\varepsilon, \zeta)$-разложения [54]. Однако, так же как и в статических моделях, для установления типа фиксированный точек и значений критических индексов в реальных физических системах, где $\varepsilon \sim \zeta \gtrsim 1$, необходимы дополнительные методы пересуммирования. Главный недостаток применения теоретико-возмущенческого подхода связан со сложностью моделей, поэтому многопетлевые вычисления в них до сих пор не выполнены, а авторы всех перечисленных выше работ ограничивались в основном низшим однопетлевым приближением. Сложившаяся ситуация не может гарантировать достаточной достоверности полученных ранее качественных и количественных выводов.

**Целью** данной работы является исследование критического поведения и фазовых переходов в перечисленных выше моделях в рамках непертурбативного формализма: инстантонного анализа и метода эффективного усреднённого действия.

Достижение поставленных целей связано с решением следующих задач:

1. Для модели $\phi^3$ в размерной регуляризации $d = 6 - \varepsilon$ в схеме MS с помощью инстантонного анализа найти АВП разложений по заряду частично ренормированных функций Грина. Из требования их

УФ конечности найти АВП вычетов в простом полюсе по $\varepsilon$ констант ренормировки. Используя последние найти АВП $\beta$-функции и аномальных размерностей. Далее найти АВП $\varepsilon$-разложения индекса Фишера и провести процедуру его пересуммирования по методу Бореля-Лероя на основе известных на сегодня четырёхпетлевых расчётов.

2. Для эффективной $SU(N)$-симметричной двухзарядной матричной модели типа Ландау-Гинзбурга в размерной регуляризации $d = 4 - \varepsilon$ в схеме MS с помощью инстантонного анализа найти АВП разложений $\beta$-функций. Провести борелевское суммирование уравнений Гелл-Манна-Лоу на основе известных на сегодня пятипетлевых ренормгрупповых расчётов и исследовать фазовый портрет на предмет наличия ИК-устойчивых фиксированных точек. Включить в полевое действие старшие вершины и провести мультипликативную ренормировку в одной петле, рассматривая новые члены в качестве составных операторов. Оценить температуру фазового перехода.
3. Рассматривая модель $A$ с турбулентным перемешиванием Крейчнана в формализме эффективного усреднённого действия, решить непертурбативное ренормгрупповое уравнение. Исследовать поведение решений в ИК области. Найти устойчивые скейлинговые режимы и вычислить соответствующие критические показатели.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Вычислена АВП индекса Фишера в модели $\phi^3$. Сравнение асимптотических выражений коэффициентов разложения с их точными величинами обнаруживает факт отклонения последних от своей асимптотики, что объясняет заметное расхождение значений индекса Фишера, полученного в рамках различных реализаций проведённого борелевского суммирования.

2. В двухзарядной $SU(N)$-симметричной матричной модели найдена АВП β-функций. Показано, что аналитические свойства петлевых разложений уравнений Гелл-Манна-Лоу зависят от матричной структуры инстантона и от положения зарядов модели на фазовой плоскости. Показано, что в случае $N \geq 4$ в трёхмерной модели отсутствуют ИК-притягивающие фиксированные точки. Ренормгрупповые траектории, стартуя с различных начальных значений, выходят из области устойчивости системы, что трактуется как указание на существование в системе фазового перехода первого рода. Ренормгрупповой анализ составных операторов, проведённый в однопетлевом приближении, показывает, что температура обнаруженного фазового перехода превышает значение, получаемое в приближении теории среднего поля Ландау (которая к тому же предсказывает непрерывный фазовый переход при любых значениях $N$). Произведена оценка температуры фазового перехода.

   Двумерная система оказывается менее "универсальной", здесь также отсутствуют ИК-устойчивые фиксированные точки РГ потока, но лишь траектории с близкими к нулю стартовыми значениями могут покинуть области устойчивости.

3. С помощью непертурбативной ренормгруппы подтверждены качественные выводы однопетлевых расчётов, что модель критической динамики $A$ с учётом развитых турбулентным флуктуаций, моделируемых ансамблем Крейчнана, может демонстрировать четыре скейлинговых режима, в зависимости от соотношений параметра $\zeta$ и размерности $d$: тривиальная гауссова точка, чистая модель $A$, турбулентный перенос пассивного скаляра и нетривиальный режим, где критические и турбулентные флуктуации одинаково существенны. Оценены значения критических показателей, которые, однако, оказываются

неуниверсальными, а зависят от параметра, задающего сжимаемость системы.

**Научная новизна:**В диссертации впервые решены следующие задачи:

1. В скалярной модели $\phi^3$ в схеме минимальных вычитаний найдена асимптотика высоких порядков разложений ренормгрупповых функций и $\varepsilon$ разложения индекса Фишера, используемая при суммировании последнего по Борелю-Лерою;
2. В эффективной двухзарядной модели с комплексным антисимметричным матричным полем, описывающей критические флуктуации вблизи сверхтекучего фазового перехода в $SU(N)$-симметричной системе фермионов, с помощью методов инстантонного анализа была найдена асимптотика высоких порядков $\beta$-функций. Выяснено влияние матричной структуры инстантона на аналитические свойства квантово-полевых разложений, что учтено при борелевском пересуммировании уравнений Гелл-Манна-Лоу. Проведена ренормировка составных операторов старших порядков, обеспечивающих устойчивость системы в ИК области. Оценена температура фазового перехода первого рода в сверхтекучее состояние в системе фермионов с высшим спином.
3. Скейлинговое поведение модели $A$ критической динамики с учётом сильно развитых турбулентных пульсаций, моделируемых ансамблем Крейчнана, исследовано в рамках метода усреднённого эффективного действия.

**Теоретическая и практическая значимость.** Полученные в диссертации результаты должны стимулировать развитие непертурбативных методов применительно к анализу скейлингового поведения нелинейных коррелированных систем, где стандартные теоретико-возмущенческие подходы либо дают неполное описание, либо их применение затруднительно. Качественные и количественные результаты могут быть использованы при построении теоретической базы экспериментальных исследований коллективов вырожденных ферми-частиц с высоким спином и различных ко́мплексных систем вблизи их критичности.

**Методология и методы исследования.** В работе используется аппарат квантово-полевой ренормализационной группы, в частности ренормировка составных операторов. Исследование аналитических свойств рядов теории возмущения базируется на инстантонном подходе. Для восстановления функций по их начальным отрезкам разложения и асимптотики высоких порядков применяется техника борелевского суммирования расходящихся рядов. Анализ скейлинговых явлений в задаче о турбулентном перемешивании критической жидкости осуществляется с помощью метода непертурбативной ренормализационной группы.

**Степень достоверности** результатов исследования обеспечивается использованием развитых и надёжных методов теоретической физики, хорошо зарекомендовавших себя при решении задач, близких к рассматриваемым в настоящей диссертации. Результаты, как конечные, так и промежуточные, находятся в соответствии с полученными ранее другими авторами в различных частных случаях.

**Апробация работы.** Полученные результаты обсуждались и докладывались на следующих научных конференциях и школах:

1. Международная студенческая конференция “Science and Progress” (Санкт-Петербург, Россия, 2014 г.);

   http://phys.spbu.ru/files/Book-of-abstracts-2014.pdf

2. 47-я Школа ПИЯФпо Физике Конденсированного Состояния (Санкт-Петербург, Россия, 2013);

   https://lns.pnpi.spb.ru/fks2013/participants/index.html

3. 48-я Школа ПИЯФпо Физике Конденсированного Состояния (Санкт-Петербург, Россия, 2014);

https://lns.pnpi.spb.ru/fks2014/abstracts/index.html

4. 49-я Школа ПИЯФпо Физике Конденсированного Состояния (Санкт-Петербург, Россия, 2015);
   http://fks2015.pnpi.spb.ru/thesis.html

5. “XIX International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists” (Дубна, Россия, 2015 г.);
   http://omus.jinr.ru/conference2015/participants.php#section1

6. “Small Triangle Meeting” (Медзилаборце, Словакия, 2017 г.);
   https://indico-hlit.jinr.ru/event/96

7. “The 10th CHAOS 2017 International Conference” (Барселона, Испания, 2017 г.);
   www.cmsim.org/images/BOOK_OF_ABSTRACTS-CHAOS2017-8-5.pdf

8. “Mathematical Modeling and Computational Physics” (Дубна, Россия, 2017 г.);
   https://indico-new.jinr.ru/conferenceDisplay.py?confId=137

**Личный вклад.** Вошедшие в диссертацию результаты были получены автором лично либо при его непосредственном участии.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в журналах, включённых в перечень ВАК и индексируемых базами данных “Scopus”, “РИНЦ” и “Web of Sciense”, в виде четырёх печатных работ:

1. G.A. Kalagov, M. Yu. Nalimov, “Higher-order asymptotics and critical indexes in the $\phi^3$ theory”, Nuclear Physics B **884** (2014) 672–683;

2. Г. А. Калагов, М. В. Компаниец, М. Ю. Налимов, “Ренормгрупповое исследование сверхпроводящего фазового перехода: асимптотика

высоких порядков разложений и результаты трехпетлевых расчетов”, ТМФ **181**:2 (2014) 374–386;

3. G.A. Kalagov, M. V. Kompaniets, M. Yu. Nalimov, “Renormalization-group investigation of a superconducting $U(r)$-phase transition using five loops calculations”, Nuclear Physics B **905** (2016) 16–44;

4. M. Hnatič, G. Kalagov, M. Nalimov, “Turbulent mixing of a critical fluid: the non-perturbative renormalization”, Nuclear Physics B **926** (2018) 1–18.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 95 страниц с 8 рисунками и 5 таблицами. Список литературы содержит 65 наименований.

# Глава 1. Инстантонный анализ модели $\phi^3$

## 1.1 АВП функций Грина

Пусть в $d$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ задано скалярное поле $\phi = \phi(x)$, тогда безмассовая модель $\phi^3$ определяется действием

$$S(\phi) = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{g}{3!}\phi^3. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже, там, где это не вызовет недоразумений, знак интегрирования по всему пространству опускается. Константа связи $g$, вообще говоря, – комплексное число; $\nabla$ – $d$-мерный оператор набла.

УФ расходимости в модели (1.1) в размерной регуляризации $d = 6 - \varepsilon$ проявляются в виде полюсов по регуляризатору $\varepsilon$. Они могут быть устранены путём мультипликативной ренормировки поля и заряда

$$\phi \to Z_\phi \phi, \quad g_0 = Z_g \mu^{\varepsilon/2} g, \tag{1.2}$$

здесь $\mu$ – ренормировочная масса, имеющая размерность импульса; $g$ – безразмерный ренормированный заряд. В схеме минимальных вычитаний константы ренормировки имеют структуру полюсов по $\varepsilon$

$$Z_i = 1 + \frac{\{Z_i\}}{\varepsilon} + \text{старшие полюса по } \varepsilon, \quad i = \{\phi, g\}, \tag{1.3}$$

и зависят явно только от константы связи $g$ и параметра $\varepsilon$. Всюду ниже обозначение $\{A\}$ суть вычет величины $A$ в простом полюсе по $\varepsilon$. Таким образом, ренормированное действие модели (1.1) даётся выражением

$$S_R(\phi, g) = \frac{1}{2} Z_\phi^2 (\nabla\phi)^2 + Z_\phi^3 Z_g \mu^{\varepsilon/2} \frac{g}{3!}\phi^3. \tag{1.4}$$

Метод Л. Липатова [30] основан на идее, что $N$-ый коэффициент разложения наблюдаемой в ряд по $g$ может быть вычислен путём подстановки представления Коши

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}g}{g^{N+1}} e^{-S_R(\phi,g)}, \tag{1.5}$$

где $\gamma$ – замкнутый контур в комплексной плоскости $g$ вокруг нуля, под знак соответствующего функционального интегрирования $\mathcal{D}\phi$. Так $k$-хвостая функции Грина определяется функциональным усреднением

$$G_k(x_1, \ldots, x_k; g) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\phi\phi(x_1)\ldots\phi(x_k) e^{-S_R(\phi)}, \tag{1.6}$$

с нормировочным множителем

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-(\nabla\phi)^2/2}. \tag{1.7}$$

Тогда $N$-ый коэффициент $G_k^{(N)} = G_k^{(N)}(x_1, \ldots, x_k)$ разложения функции (1.6) по константе связи $g$ вычисляется по формуле

$$G_k^{(N)} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\phi\phi(x_1)\ldots\phi(x_k) \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}g}{g^{N+1}} e^{-S_R(\phi,g)}. \tag{1.8}$$

В высоких порядках $N \to \infty$ коэффициенты $G_k^{(N)}$ могут быть оценены с помощью метода перевала в представлении (1.8). Перевальные конфигурации ищутся одновременно по полю $\phi$ и заряду $g$.

В формуле (1.8) используем тождество $g^N = \exp(N \ln g)$, после чего экспонента будет содержать функционал $S_R(\phi, g) + N \ln g$. Введём новые переменные согласно соотношениям: $\phi = N^{1/2}\bar{\phi}$, $g = \bar{g}/(N^{1/2}\mu^{\varepsilon/2})$ – и получим в логарифмической размерности, т.е. при $\varepsilon = 0$, вариационные уравнения для функционала относительно переменных $\bar{\phi}, \bar{g}$

$$- \nabla^2 \bar{\phi}_c + \frac{\bar{g}_c}{2} \bar{\phi}_c^2 = 0, \quad \frac{\bar{g}_c}{3!} \int \mathrm{d}^d x \bar{\phi}_c^3 = -1. \tag{1.9}$$

При исследовании ведущего члена асимптотики контрчлены действия (2.6) дают старшие порядки по $1/N$ к решению (1.9) и оказываются несущественными для нахождения точек перевала. По этой же причине несущественны и поправки к перевальным конфигурациям по $\varepsilon$ [30; 32]. Решением вариационных уравнений (1.9) является 7-параметрическое семейство инстантонов

$$\bar{\phi}_c(x) = \frac{48}{\bar{g}_c} \frac{y^2}{(y^2 + |x - x_0|^2)^2}, \quad \bar{g}_c = \pm \mathrm{i}\, 48 \sqrt{\frac{2\pi^3}{15}}, \tag{1.10}$$

содержащих зависимость от произвольных параметров $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и $y \in \mathbb{R}^1$, которые отражают инвариантность теории относительно трансляций и растяжений, соответственно. Для корректного учёта вклада каждого инстантона применяется трюк Фаддеева-Попова [30]: под знак функционального интегрирования в (1.8) вставляется следующая конструкция

$$1 = \left( -\frac{g}{3!} \int \mathrm{d}^d x \phi^3 \right)^7 \int \mathrm{d} \ln y^2 \int \mathrm{d}^d x_0\, \delta^d \left( -\frac{g}{3!} \int \mathrm{d}^d x \phi^3 (x - x_0) \right) \times \\ \times \delta \left( -\frac{g}{3!} \int \mathrm{d}^d x \phi^3 \ln \frac{|x - x_0|^2}{y^2} \right), \tag{1.11}$$

содержащая $\delta$-функции и фиксирующая значения свободных параметров $x_0$, $y$ для каждой реализации $\phi(x)$. Поменяем местами интегрирование по произвольным параметрам $\int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}^d x_0$ и интеграл $\int \mathcal{D}\phi \oint \mathrm{d}g$, после чего совершим преобразование

$$x \to yx + x_0, \quad \phi(yx + x_0) \to y^{-2+\varepsilon/2} \phi(x), \quad \mu \to y\mu. \tag{1.12}$$

В полученном выражение реализуем метод перевала относительно $g$ и $\phi$, раскладывая действие вокруг инстантонного решения и интегрируя по малым флуктуациям вокруг него (см. Приложение A). После вычислений получим выражение для асимптотики $N$-ого коэффициента разложения $k$-хвостой функции Грина (1.6)

$$G_k^{(N)} = 2\,\mathrm{i}^N\, D N^{N/2} N^{k/2+3} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}y^2 e^{-NS_R(\bar\phi_c, \bar g_c (\mu y)^{-\varepsilon/2}) - N\ln|\bar g_c|} \times$$
$$\times \int \mathrm{d}^d x_0 \frac{(\mu y)^{N\varepsilon/2}}{y^{8-\varepsilon(1+k/2)+2k}} \bar\phi_c\left(\frac{x_1 - x_0}{y}\right)\ldots\bar\phi_c\left(\frac{x_k - x_0}{y}\right). \tag{1.13}$$

Коэффициент $G_k^{(N)} = 0$ при разных чётностях $N$ и $k$. Величина $D$ в (1.13) содержит гауссов интеграл, связанный со второй вариацией $S_2$ функционала $S(\bar\phi, \bar g \mu^{-\varepsilon/2}) + \ln(\bar g \mu^{-\varepsilon/2})$ в точке перевала.

Итак, видно, что наличие нетривиального непертурбативного решения “уравнения движения” (1.9) – инстантона – приводит к факториально растущим в высоких порядках коэффициентам (1.13). Т.е ряды теории возмущений в модели $\phi^3$ имеют нулевой радиус сходимости.

Теперь рассмотрим вклады конрчленов в (1.13)

$$(Z_\phi^2 - 1)\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + (Z_\phi^3 Z_g - 1)\mu^{\varepsilon/2}\frac{g}{3!}\phi^3. \tag{1.14}$$

В однопетлевом приближении они имеют следующую структуру

$$Z_\phi^2 - 1 = \frac{d_2}{\varepsilon}g^2, \quad Z_\phi^3 Z_g - 1 = \frac{d_3}{\varepsilon}g^2, \tag{1.15}$$

где $d_2 = -1/(384\pi^3), d_3 = -1/64\pi^3$ – числовые множители, возникающие при вычислении диаграмм для одетого пропагатора и одетой вершины, соответственно. После перехода к переменным $\bar\phi, \bar g$ в (1.14) с учётом сделанных ранее растяжений (1.12) получим

$$\frac{1}{2}(\nabla\bar{\phi})^2\frac{d_2\bar{g}^2(\mu y)^{-\varepsilon}}{\varepsilon}+\frac{\bar{g}}{3!}\bar{\phi}^3\frac{d_3\bar{g}^2(\mu y)^{-\varepsilon}}{\varepsilon}. \tag{1.16}$$

Как видно данный вклад оказывается порядка $O(1)$ при $N\to\infty$ и в ходе реализации метода перевала может быть рассмотрен как медленная предэкспонента, в которой полагаем $\bar{\phi}=\bar{\phi}_c$. Старшие петлевые поправки к контрчленам (1.15) дают вклад порядка $O(1/N)$ в ведущую асимптотику, поэтому отброшены. Выделим сингулярность по $\varepsilon$ в (1.16) с помощью тождества $(\mu y)^{-\varepsilon}/\varepsilon=[(\mu y)^{-\varepsilon}-1]/\varepsilon+1/\varepsilon$, последний полюсной член здесь не зависит от $y$, поэтому соответствующий множитель можно вынести за знак $\int \mathrm{d}y$ в формуле (1.13). Окончательно он имеет вид

$$e^{-(r_{2s}+r_{3s})/\varepsilon}, \tag{1.17}$$

где $r_{2s}=-6/5$ и $r_{3s}=24/5$. Данный вклад, как показано ниже, сокращает УФ расходимости однопетлевых диаграмм, возникающих при петлевом разложении детерминанта квадратичной формы $S_2$, к вычислению которого мы и переходим.

## 1.2 Вычисление флуктуационного интеграла

Рассмотрим вычисление функционального интеграла $D$ по отклонениям $\delta\phi$ от инстантонного решения $\bar{\phi}_c=\bar{\phi}_c(x)$. Напишем его в явном виде $D$ (см. Приложение A)

$$D=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathcal{Z}}\int\mathcal{D}(\delta\phi)e^{-S_2}\delta^d\left(\frac{|\bar{g}_c|}{2}\int\mathrm{d}^dx\,\bar{\phi}_c^2\delta\phi x\right)\delta\left(\frac{|\bar{g}_c|}{2}\int\mathrm{d}^dx\,\bar{\phi}_c^2\delta\phi\ln|x|^2\right), \tag{1.18}$$

$S_2$ квадратичная часть действия на фоне инстантонного решения

$$S_2 = \frac{1}{2}(\nabla\delta\phi)^2 + \frac{\bar{g}_c\bar{\phi}_c}{2}(\delta\phi)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{|\bar{g}_c|}{2}\int \mathrm{d}^d x\, \bar{\phi}_c^2\delta\phi\right]^2. \tag{1.19}$$

Для вычисления флуктуационного интеграла используется замена переменной $\delta\phi = 4Y(z)/(1+|x|^2)^2$ [30], где $z$ – координаты на единичной сфере в 7-мерном пространстве: $z = 2x/(1+|x|^2)$ и $z_0 = (|x|^2-1)/(|x|^2+1)$. Далее флуктуации $Y(z)$ раскладываются $Y(z) = \sum_{\lambda_m} C_{\lambda_m} y_{\lambda_m}(z)$ в базисе сферических функций $y_{\lambda_m}(z)$, являющихся ортонормированными собственными функциями оператора Лапласа на единичной сфере, которым соответствуют собственные числа $\lambda_m = m(m+5), m = 0{,}1{,}2\ldots$, с кратностью $N_m = (m+4)!(2m+5)/(m!5!)$. Это позволяет перейти от функционального интегрирования к обычному многомерному $\int \mathcal{D}Y \to \int \prod_{\lambda_m} \mathrm{d}C_{\lambda_m}$.

Дельта-функции в (1.18), возникшие в следствии применения метода Фадеева-Попова, призваны корректно учесть вклад нулевых мод. Рассмотрим последние. Инстантон $\bar{\phi}_c$ (1.10), зависящий от произвольных параметров $x_0$ и $y$, удовлетворяет вариационному уравнению

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\bar{\phi}}\right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}_c} = 0. \tag{1.20}$$

Продифференцируем его относительно вектора $x_0$ и параметра $y$ при $x_0 = 0$ и $y = 1$

$$\left.\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\phi}^2}\right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}_c}\frac{\partial\bar{\phi}_c}{\partial x_0} = 0, \qquad \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\phi}^2}\right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}_c}\frac{\partial\bar{\phi}_c}{\partial y} = 0. \tag{1.21}$$

Таким образом имеется шесть трансляционных нулевых мод

$$\frac{\partial\bar{\phi}_c}{\partial x_0} = -4\bar{\phi}_c\frac{x}{1+|x|^2} = -2\bar{\phi}_c\, z \tag{1.22}$$

и одна диллатационная

$$\frac{\partial \bar{\phi}_c}{\partial y} = 2\bar{\phi}_c \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2} = 2\bar{\phi}_c\, z_0. \tag{1.23}$$

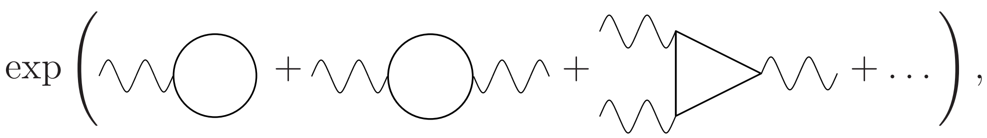
Данным нулевым модам соответствует член $C_{\lambda_1} y_{\lambda_1}(z) = \sum C^i y^{(i)}$ в разложении флуктуаций по сферическим гармоникам ($i = 0, \ldots 6$, $y^{(i)}$ собственные функции отвечающие одному собственному числу $\lambda_1$). Мера интегрирования с учётом дельта-функций имеет вид

$$\int \prod_{\lambda_m} \mathrm{d}C_{\lambda_m} \delta^6(C^i)\delta(C^0). \tag{1.24}$$

В итоге интегрирование по нулевым модам $m = 1$ снимается, что даёт вклад в (1.18)

$$D \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty} N_m \ln\left(1 - \frac{12}{\lambda_m + 6}\right)\right). \tag{1.25}$$

Расходимость ряда в этом выражении связана с УФ расходимостями диаграмм, которые возникают при петлевом разложении детерминанта формы $S_2$ (отметим, что последний член в (1.19) нетривиален лишь для моды $m = 0$, поэтому к расходимости ряда отношение не имеет)




(1.26)

где сплошная линия соответствует пропагатору свободной теории $(-\nabla^2)^{-1}$, а волнистая – выражению $\bar{g}_c\bar{\phi}_c$; множитель при диаграмме $n$-ого порядка равен $(-1)^n/(2n)$. Изображенные графы содержат УФ расходимости, все прочие –

конечны. Разложение по сферическим функциям приводит к выражениям

$$\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} N_m \frac{12}{\lambda_m+6} \quad \text{– для первой диаграммы,}$$
$$\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty} N_m \left(\frac{12N_m}{\lambda_m+6}\right)^2 \quad \text{– для второй,}$$
$$\frac{1}{6}\sum_{m=0}^{\infty} N_m \left(\frac{12N_m}{\lambda_m+6}\right)^3 \quad \text{– для третьей.}$$

После их вычитания из суммы в 1.25 получим вклад от конечных диаграмм во флуктуационный интеграл

$$D' = \frac{1}{2\pi^4}\left(\frac{12}{7}\right)^{\frac{7}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty} N_m \ln\left[1-\frac{12}{(m+3)(m+2)}\right] \right. \tag{1.27}$$
$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} N_m \left[\frac{12}{(m+3)(m+2)} + \frac{1}{2}\frac{12^2}{(m+3)^2(m+2)^2} + \frac{1}{3}\frac{12^3}{(m+3)^3(m+2)^3}\right]\right)$$
$$\approx 1.33 \cdot 10^{-5}.$$

Заметим, что вычтенные диаграммы содержат как УФ расходящуюся часть, так и конечные вклады. Вычитание расходящейся части этих графов и есть результат учёта однопетлевых контрчленов в предэкспоненте (1.17). В конечную часть в схеме MS дают вклады только вторая и третья диаграммы, в отличии от модели $\phi^4$, где необходим лишь граф типа второго. Для сингулярных частей, второго и третьего графика имеем: $r_{2s} = -6/5$ и $r_{3s} = 24/5$. Конечные части найдены численно: $r_2 \approx -0.936$ и $r_3 \approx -1.27$ (см. Приложение Б). Таким образом, для флуктуационного интеграла окончательно получим $D = D' e^{r_2+r_3} \approx 1.47 \cdot 10^{-6}$. Тогда выражение (1.13) может быть написано (в импульсном представлении) в форме

$$G_k^{(N)} = C_k^{(N)} D \int_0^\infty dy \chi_k(y,p_1,\dots,p_k) y^{2k-7} (\mu y)^{N\varepsilon/2} e^{-\alpha\varepsilon N} e^{-(r_{2s}+r_{3s})((\mu y)^\varepsilon - 1)/\varepsilon},$$

$$\chi_k(y,p_1,\dots,p_k) = \frac{yK_1(|p_1|y)}{|p_1|} \dots \frac{yK_1(|p_k|y)}{|p_k|}, \qquad (\sum_{l=1}^{k} p_l = 0), \tag{1.28}$$

$$C_k^{(N)} = 2(\mathrm{i})^N N^{N/2} N^{k/2+3} e^{-N/2} \left( \frac{\sqrt{15}}{48\sqrt{2\pi^3}} \right)^N (2\sqrt{30\pi^3})^k,$$

здесь $K_1$ – функция Макдональда (см. Приложение Б); множитель $e^{-\alpha\varepsilon N}$ связан с зависимостью от $\varepsilon$ функционала $S(\phi_c, g_c) + \ln(|g_c|)$ в точке перевала при $d = 6 - \varepsilon$ и равен

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left( \mathcal{S}_{6-\varepsilon} \int_0^\infty d|x||x|^{5-\varepsilon} \left[ -\frac{1}{2}\bar{\phi}_c \left( \partial^2_{|x|} + \frac{5-\varepsilon}{|x|}\partial_{|x|} \right) \bar{\phi}_c + \frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c^3}{3!} \right] \right) \Bigg|_{\varepsilon=0} = \tag{1.29}$$
$$-\frac{1}{4}\ln(\pi) + \frac{1}{4}\Psi(3),$$

где $\Psi(y)$ – логарифмическая производная Гамма-функции $\Gamma(y)$, $\mathcal{S}_d = 2\pi^d/\Gamma(d/2)$ – площадь единичной сферы. Формула для АВП коэффициентов разложения $k$-хвостой функции Грина по константе связи позволяет перейти к нахождению АВП разложений ренормгрупповых функций.

## 1.3 АВП ренормгрупповых функций

В схеме MS РГ функции – коэффициенты уравнения РГ [2; 55] – связаны с вычетами в простом полюсе по $\varepsilon$ констант ренормировки (1.3) соотношениями

$$\gamma_i = -\frac{g}{2}\partial_g\{Z_i\}, \quad \beta = -g\left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma_g\right). \tag{1.30}$$

Функции $\gamma_i$ – аномальные размерности параметра $i$, $\beta$ – бета-функция заряда.

Пусть вычет $\{Z_i\}$ определяется рядом

$$\{Z_i\} = \sum_N g^N \{Z_i^{(N)}\}, \tag{1.31}$$

тогда из соотношений (1.30) получим коэффициенты разложения РГ функций по $g$

$$\gamma_i^{(N)} = -\frac{N}{2}\{Z_i^{(N)}\}, \quad \beta^{(N)} = -\frac{N}{2}\{Z_g^{(N-1)}\}. \tag{1.32}$$

Для вычисления АВП вычета в простом полюса констант ренормировки использовался подход развитый в работе [31] для модели $\phi^4$. Сингулярный при малых $y$ и $\varepsilon$ член $\exp[(r_{2s}+r_{3_s})((\mu y)^{\varepsilon}-1)/\varepsilon]$ в (1.28) рассматриваются как отрезок разложения экспоненты вплоть до $N$-ого порядка. Таким образом, в результате вычисления асимптотики частично-ренормированной (произведены вычитая УФ-расходимостей вплоть до порядка $N-1$) трёх-точечной функции Грина находим

$$G_3^{(N)} = C_3^{(N)} D \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} (\mu y)^{N\varepsilon/2} \chi_3(y, p_1, \ldots, p_3) e^{-\alpha N \varepsilon} \sum_{j=0}^{N/3} \frac{1}{j!} \left[ -(r_{2s}+r_{3s}) \frac{(\mu y)^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon} \right]^j, \tag{1.33}$$

После растяжения переменных $y \to \tilde{y} = y\exp(-2\alpha)$ в выражении (1.33) получим

$$G_3^{(N)} = C_3^{(N)} D \int_0^{\infty} \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} (\mu \tilde{y})^{N\varepsilon/2} \chi_3(\tilde{y}e^{2\alpha}, p_1, \ldots, p_3) \sum_{j=0}^{N/3} \frac{1}{j!} \left[ -(r_{2s}+r_{3s}) \frac{(\mu \tilde{y} e^{2\alpha})^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon} \right]^j. \tag{1.34}$$

Члены в формуле (1.34), содержащие ненулевые степени $((\mu\tilde{y})^{-\varepsilon}-1)/\varepsilon$, дают вклад лишь в высшие полюса по $\varepsilon$ и не влияют на простой полюс, как и в модели $\phi^4$ (1.28). Это видно, если учитывая свойства функции $\chi$: $\chi_3 \to$ const при $\tilde{y} \to 0$ и $\chi_3$ экспоненциально убывает при $\tilde{y} \to \infty$ – провести интегрирование по частям, предварительно написав

$$\frac{(\mu\tilde{y}e^{2\alpha})^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon} = \frac{(\mu\tilde{y})^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon} + (\mu\tilde{y})^{-\varepsilon}\frac{(e^{2\alpha})^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon}. \tag{1.35}$$

Далее, используя приближение $(e^{-2\alpha\varepsilon}-1)/\varepsilon \approx -2\alpha$ при $\varepsilon \to 0$ получим выражение для вычета в простом полюсе функции $G_3^{(N)}$

$$\frac{\{G_3^{(N)}\}}{\varepsilon} \approx C_3^{(N)} D \frac{2}{N\varepsilon} e^{(r_{2s}+r_{3s})2\alpha} \frac{1}{p_1^2 p_2^2 p_3^2}. \tag{1.36}$$

Аналогичное выражение можно получить и для парного пропагатора, где $k=2$. В соответствии с общей формулой (1.28) коэффициент коррелятора $G_2^{(N)}$ содержит интеграл

$$\int_0^\infty dy \chi_2(y,p)(\mu y)^{N\varepsilon/2} y^{-3}, \tag{1.37}$$

который имеет полюса первого и второго порядков. После растяжения переменной $y \to y/|p|$ и интегрирования по частям получим интеграл

$$\int dy \ln y (\mu y)^{N\varepsilon/2-1} K_1(y|p|).$$

Представляя логарифм $\ln y$ в виде производной $\partial_{(N\varepsilon/2)} y^{N\varepsilon/2}$, выделяя сингулярности по $\varepsilon$ и пользуясь асимптотикой в нуле функции Макдональда

$$K_1(y) = \frac{1}{y} + \frac{y}{2}(\ln y - \ln 2 + \Psi(1) + 1/2) + O(y^3 \ln y), \quad y \to 0, \tag{1.38}$$

мы получим вклад в вычет в простом полюсе коэффициента $G_2^{(N)}$

$$\frac{\{G_2^{(N)}\}}{\varepsilon} = C_2^{(N)} D e^{(r_{2s}+r_{3s})2\alpha}\left[-\ln|p| + \ln 2 + \Psi(1) + 1/2 + 2\alpha\right]\frac{2}{N\varepsilon p^2}. \quad (1.39)$$

Ренормированные функции Грина $G'_2$ и $G'_3$ УФ-конечны, поэтому теперь можно найти АВП вычета первого порядка соответствующих констант ренормировки $Z_\phi$ и $Z_g$, требуя сокращения простых полюсов в $N$-ом порядке. Разложения для ампутированной вершинной функции Грина $G'_3$

$$G'_3 = Z_\phi^3\left(-gZ_g + \cdots + Z_g^{2N+1}G_3^{(2N+1)}\right) \quad (1.40)$$

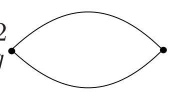
приводит к следующей асимптотике

$$\{Z_g^{(2N)}\} = -\{G_3^{(2N+1)}\}. \quad (1.41)$$

Поскольку разложение констант ренормировки в модели $\phi^3$ реально идёт по $g^2$, то обычно вводят новый заряд $u = g^2/(64\pi^3)$ [2], тогда $\{Z_u^{(N)}\} = \{Z_g^{(2N)}\}(64\pi^3)^N$, что даёт асимптотическое равенство

$$\{Z_u^{(N)}\} = -\{G_3^{(2N+1)}\}(64\pi^3)^N \approx -\frac{C_3^{(2N+1)}}{N}(64\pi^3)^N D e^{(r_{2s}+r_{3s})2\alpha}, \quad (1.42)$$

где внешние импульсы в $\{G_3^{(2N+1)}\}$ естественно опущены. Используя разложение для ренормированного пропагатора

$$G'_2 = Z_\phi^2\left(1 + \frac{1}{2}g^2 Z_g^2\right.$$

$$\left. + \ldots + g^{2N} Z_g^{2N} G_2^{(2N)}\right) \quad (1.43)$$

мы находим АВП констант ренормировки $Z_\phi$

$$\{Z_\phi^{(N)}\} = -\frac{1}{2}\left(G_2^{(N)}(u) + \{Z_u^{(N-1)}\}\left[\frac{3\Psi(1) - 3\ln(4\pi) - 8 + 6\ln|p|}{18}\right]\right). \quad (1.44)$$

Здесь также учтена конечная часть однопетлевой диаграммы (см. Приложение Б). Между собой АВП ренормализационных констант связаны соотношением $Z_u^{(N)} \sim N Z_\phi^{(N)}$ (т.к. $G_3^{(2N+1)} \sim N G_2^{(2N)}$). Корректность полученных выражений (1.39), (1.42) подтверждается фактом сокращения членов порядка $N$ в (1.39), содержащих нелокальность $\ln|p|$, возникшую как в $\{G_2^{(N)}\}$, так и в диаграмме (1.43).

Асимптотические выражения (1.42), (1.44) могут быть сведены к стандартной форме (1) с параметрами $\{a_u = -5/12, b_u = 7/2, c_u = -0.106\}$ для $\{Z_u\}$; $\{a_\phi = -5/12, b_\phi = 5/2, c_\phi = -0.067\}$ для $\{Z_\phi\}$. Найденные АВП позволяют сравнить на сколько они близки к значения первых членов разложения полюсов $\{Z_u^{(N)}\}$ и $\{Z_\phi^{(N)}\}$, полученных в рамках 4-петлевого приближения. В таблице 1 представлены точные [7] и асимптотические (1.42, 1.44) значения коэффициентов $\{Z^{(N)}\}$. Видно, что о близости числовых оценок говорить не приходится. Константы $Z_i$ не являются объектами универсальными,

Таблица 1 — Значения точно вычисленных членов разложения полюсов $\{Z^{(N)}\}$ [7] и их асимптотических оценок (1.42,1.44), разложение идёт по степеням заряда $u$.

| $N$ | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{Z_u^{(N)}\}$ | точные | 0.305 | −0.155 | 0.268 | −0.768 |
| | асипмт. | 0.040 | −0.401 | 2.101 | −9.652 |
| $\{Z_\phi^{(N)}\}$ | точные | 0.083 | −0.015 | 0.011 | −0.012 |
| | асипмт. | 0.026 | −0.127 | 0.443 | −1.528 |

а зависят от схемы ренормировки. Поэтому объективно сравнивать ренорм-инвариантные аномальные размерности или критические показатели. Через новый заряд $u$ формулы (1.30) переписываются в виде

$$\gamma_i = -2u\partial_u\{Z_i\}, \quad \beta_u = -u(\varepsilon + \gamma_u), \tag{1.45}$$

где вычеты $\{Z_i\}$ зависят только от $u$, тогда АВП $u$-разложения для РГ функций

$$\gamma_i^{(N)} = -2N\{Z_i^{(N)}\}, \quad \beta_u^{(N)} = -2N\{Z_u^{(N-1)}\}. \tag{1.46}$$

Критический индекс $\eta$ выражается через аномальную размерность поля $\eta = 2\,\gamma_\phi|_{u=u_*}$, где $u_*$ – корень уравнения $\beta_u|_{u=u_*} = 0$ – ИК-устойчивая фиксированная точка. Из разложения $\beta_u = -\varepsilon u + \beta_u^{(2)} u^2 + \beta_u^{(3)} u^3 + \cdots + \beta_u^{(N)} u^N$, определяем искомую точку $u_* = \varepsilon/\beta_u^{(2)} - \varepsilon^2 \beta_u^{(3)}/[\beta_u^{(2)}]^3 + \cdots + u_*^{(N)} \varepsilon^N$, где

$$u_*^{(N)} = -\frac{\beta_u^{(N+1)}}{(\beta_u^{(2)})^{N+1}} \exp\left(-\frac{u_c \beta_u^{(3)}}{2\beta_u^{(2)}}\right). \tag{1.47}$$

Далее, используя формулы (1.42, 1.44, 1.46), мы получим АВП $\varepsilon$-разложения критического индекса Фишера

$$\eta^{(N)} = 4\{Z_\phi^{(1)}\} \frac{N\{Z_u^{(N)}\}}{(\beta_u^{(2)})^{N+1}} e^{-\frac{u_c \beta_u^{(3)}}{2\beta_u^{(2)}}}, \tag{1.48}$$

$Z_\phi^{(1)} = -1/12, \beta_u^{(2)} = 3/2, \beta_u^{(3)} = -125/72, u_c = g_c^2/(64\pi^3) = 24/5$, описывающуюся структурой (1) с параметрами $a_\eta = 5/18, b_\eta = 9/2, c_\eta = -0.000586$. Сопоставление коэффициентов АПВ $\varepsilon$-разложения индекса Фишера с соответствующими точными значениями представлены в таблице 2. Видно, что

Таблица 2 — Точно вычисленные коэффициенты $\varepsilon$-разложения идекса $\eta$ [7; 41] и соответствующие им асимптотические оценки (1.48).

| $N$ | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\eta^{(N)}$ | точные | $-0.111$ | $-0.059$ | $0.0436$ | $-0.079$ |
| | асипмт. | $0.0004$ | $-0.005$ | $0.026$ | $-0.105$ |

четвёртый порядок разложения ещё далёк от своей АВП, однако чётко прослеживается тенденция к выходу коэффициентов разложения на липатовскую асимптотику.

### 1.4 Методы борелевского пересуммирования

Пусть имеется некоторая функция $F$, заданная в виде разложения по параметру $x$

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} F_k x^k, \tag{1.49}$$

при этом АВП коэффициентов $F_k$ определяется выражением (1). Ей сопоставляется функция, называемая борелевским образом, определяемая рядом

$$B(x) = \sum_{k \geq 0} B_k x^k, \quad B_k = \frac{F_k}{\Gamma(k + b_0 + 1)}, \tag{1.50}$$

где $\Gamma(k)$ – Гамма-функция, $b_0$ – некоторый произвольный параметр. Исходная функция связана с своим образом преобразованием Бореля-Лероя [55]

$$F(x) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}t\ t^{b_0} e^{-t} B(xt). \tag{1.51}$$

Знание АВП с некоторыми предположениями об аналитических свойствах функции $B(x)$ (см. [3]) позволяет просуммировать ряд (1.49) с помощью формул (1.50, 1.51), восстановить функцию $F(x)$ и вычислить её значения при заданном $x$.

Если в качестве разложения (1.49) выступает $\varepsilon$-разложение индекса $\eta$ с АВП (1.48), тогда ряд для функции $B(x)$ сходится в круге $|x| < 1/a_\eta = 18/5$. Ближайшая к нулю особенность лежит на отрицательной вещественной полуоси в точке $x = -1/a_\eta$. Интегрирование в преобразовании (1.51) ведётся по всей положительной полуоси $t \in [0, \infty)$; в точке $x = 1/a_\eta$ контур интегрирования пересекает границу круга сходимости, поэтому необходимо строить аналитическое продолжение функции $B(x)$ во внешность области $|x| < 1/a_\eta$.

Проблема решается с помощью метода конформных отображений либо метода аппроксимаций Паде [3].

Обычно, конформное отображение выбирается в виде

$$u(x) = \frac{\sqrt{1+ax}-1}{\sqrt{1+ax}+1} \quad \Leftrightarrow \quad x(u) = \frac{4u}{a(u-1)^2}. \tag{1.52}$$

Как видно $u(x) = O(x)$ при $x \to 0$, поэтому ряд (1.51) может быть переразложен по величине $u$

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} x^n B_n \quad \longrightarrow \quad B(u) = \sum_{n\geq 0} u^n U_n,$$

где

$$U_0 = B_0, \quad U_n = \sum_{m=1}^{n} B_m (4/a)^m C_{n+m-1}^{n-m}, \quad n \geq 1. \tag{1.53}$$

Тогда конформное преобразование Бореля-Лероя функции $F$ приобретает вид

$$F(x) = \sum_{k\geq 0} U_k \int\limits_0^\infty dt\ t^{b_0} e^{-t} (u(xt))^k. \tag{1.54}$$

Параметр $b_0$ фиксируется условием $b_0 = b + 3/2$ [3].

При использовании метода Паде-Бореля-Лероя вычисляются Паде аппроксиманты

$$P_M^L(x) = \frac{\sum_{i=0}^{L} p_i x^i}{1 + \sum_{j=1}^{M} q_j x^j}, \quad M \geq 1 \quad L + M = N. \tag{1.55}$$

Коэффициенты $p_i$,$q_i$ фиксируются из требования равенства коэффициентов ряда (1.50) и коэффициентов ряда Тейлора функции (1.55) при $x \to 0$

$$B_0 = p_0, \quad B_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} P_M^L(x) \bigg|_{x=0}, \quad n = 1,...,N. \tag{1.56}$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных $p_i$,$q_i$, получаем

$$
\begin{aligned}
p_i &= p_i(B_0, B_1, ..., B_N), \quad i = 1,...,L, \\
q_j &= q_j(B_0, B_1, ..., B_N), \quad j = 1,...,M.
\end{aligned} \tag{1.57}
$$

Тогда преобразование Паде-Бореля-Лероя определяется выражением

$$
F(x) = \int_0^\infty dt\ t^{b_0} e^{-t} P_M^L(xt). \tag{1.58}
$$

## 1.5 Результаты пересуммирования индекса η

Начнем с результатов метода Паде-Бореля-Лероя. Обычно параметры $a$ and $b$ в формулах (1.51) и (1.58) произвольны. Параметр $b_0$ выбирают из условия, позволяющего ослабить сингулярность функции $B(x)$ (1.51) в точке $x = -1/a$. Воспользуемся этим условием и выберем $b_0 = b$. Значения $a$ и $b$ известным нам из найденной АВП: $a = 5/18$ and $b = 9/2$. Выражение для Паде-аппроксиманты имеет форму

$$
P_1^3(x) = \frac{B_1 B_3 x + (B_2 B_3 - B_1 B_4) x^2 + (B_4 B_3 - B_2 B_3) x^3}{B_3 - B_4 x}. \tag{1.59}
$$

Все прочие Паде-аппроксиманты имеют полюса на оси интегрирования. В таблице 3 представлены результаты вычисления значения индекса η в размерностях $d = 2, 3, 4, 5$ при различном числе учтённых петель $N$. Значения $N < 4$ представлены для демонстрации скорости сходимости ряда и оценки погрешности используемого метода. Эти значения получаются путём вычисления аппроксимант $P_1^2$ (для $N = 3$), $P_1^1$ (для $N = 2$), $P_1^0$ (для $N = 1$). Ряд (1.50) должен иметь сингулярность типа полюса в точке $x = -1/a$ (при

Таблица 3 — Значения индекса η полученные в рамках метода Паде-Бореля-Лероя.

| d \ N | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | -0.444 | -1.385 | -0.700 | -1.023 |
| 3 | -0.333 | -0.862 | -0.508 | -0.668 |
| 4 | -0.222 | -0.457 | -0.321 | -0.378 |
| 5 | -0.111 | -0.169 | -0.146 | -0.154 |

$b = b_0$). Выделим явно этот полюс и определим модифицированную Паде-аппроксиманту

$$P^L_{M+1,-1/a}(x) = \frac{1}{1+ax} P^L_M(x). \tag{1.60}$$

В результате получим

$$P^4_{1,-1/a}(x) = \frac{B_1 x + (B_1 a + B_2)x^2 + (B_2 a + B_3)x^3 + (B_3 a + B_4)x^4}{1+ax}.$$

Заметим, что условие применимости аппроксимаций Паде складывается из двух требований: сингулярности не лежат на положительной полуоси и точка $x = -1/a$ является ближайшей к нулю особенностью ряда (1.50). Результаты вычислений модифицированным методом с использованием $P^4_{1,-1/a}$ представлены в таблице 4. Результаты полученные с использованием конформных отображений (1.52) представлены в таблице 5. Как видно, результаты, полученные разными методами, демонстрируют большие погрешности, особенно в малых размерностях пространства, и не вполне согласуются друг с другом даже с учетом этой погрешности. Причиной этого являются как большие

Таблица 4 — Значения индекса η полученные в рамках метода Паде-Бореля-Лероя с использованием аппроксимации $P^4_{1,-1/a}$

| d \ N | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | -0.061 | -0.557 | -1.093 | -0.555 |
| 3 | -0.058 | -0.414 | -0.704 | -0.485 |
| 4 | -0.053 | -0.272 | -0.391 | -0.331 |
| 5 | -0.042 | -0.131 | -0.156 | -0.150 |

Таблица 5 — Значения индекса $\eta$ полученные в рамках конформного метода Бореля-Лероя.

| d \ N | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | -0.127 | -0.310 | -0.470 | -0.557 |
| 3 | -0.113 | -0.260 | -0.374 | -0.433 |
| 4 | -0.094 | -0.195 | -0.263 | -0.294 |
| 5 | -0.063 | -0.111 | -0.134 | -0.142 |

значения параметра $\varepsilon$ и недостаточное количество сосчитанных порядков $\varepsilon$-разложения, так и значительное отклонения вычисленных членов разложения от асимптотики (1.48).

# Глава 2. Инстантонный анализ матричной модели

## 2.1 Эффективная модель

В вырожденных системах основной вклад в процессы столкновения даётся амплитудой $s$-рассеяния $a_{sc}$. Она является единственным параметром, описывающим взаимодействие и входящим в макроскопические физические величины всей системы, поэтому при расчётах вместо реального потенциала используют $\delta$-образный потенциал

$$U(x_1 - x_2) = \frac{\lambda}{2}\delta(x_1 - x_2), \tag{2.1}$$

где константа связи в трехмерной системе выражается через длину рассеяния $a_{sc}$ и массу атома $m$: $\lambda = 4\pi a_s/m$; в случае притяжения $\lambda < 0$. Кроме того, детальное устройство взаимодействие иррелевантно, если интересоваться вопросами критического состояния, когда длина корреляции намного превосходит все микроскопические масштабы системы.

Общепризнанным аппаратом исследования квантовых многочастичных систем является метод вторичного квантования и аппарат функций Грина, допускающий модификацию на случай систем, находящихся при конечной температуре $T$. В формализме температурных функций Грина [56] действие, описывающее равновесную многочастичную фермионную систему со взаимодействием (2.1), имеет вид

$$S_\psi = \psi_i^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu\right)\psi_i + \frac{\lambda}{2}\psi_j^*\psi_i^*\psi_i\psi_j. \tag{2.2}$$

По переменной $t$ подразумевается интегрирование на отрезке $[0, 1/T]$; фермионное поле $\psi_i = \psi_i(t, x)$ является грассмановым и удовлетворяет антипериодическим граничным условиям $\psi_i(0,x) = -\psi_i(1/T,x)$; индекс $i$ обозначает спиновое состояние частицы и пробегает значения от 1 до $N$; химический потенциал $\mu$ вырожденного фермионного газа будем полагать равным ферми-евской энергии $\mu \approx \varepsilon_F$.

В рассматриваемой системе температура фазового перехода $T_c$ определяется появлением аномальных решений уравнения Дайсона [56], а параметр упорядочения сверхпроводящего (сверхтекучего) фазового перехода суть среднее значение составных операторов $\psi_i\psi_j$ и $\psi_i^*\psi_j^*$. Чтобы построить эффективную модель, описывающую поведение системы в окрестности точки фазового перехода, авторы работы [8], используя преобразования Хаббарда-Стратоновича, вводят бозонные поля $\chi$, $\chi^\dagger$ с помощью действия

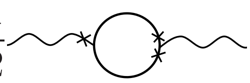
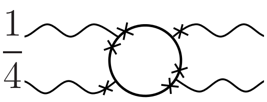
$$S_{\psi,\chi} = \psi_i^* \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi_i + \frac{1}{2\lambda} \operatorname{tr} \chi\chi^\dagger - \frac{1}{2}\psi_i^*\chi_{ij}\psi_j^* - \frac{1}{2}\psi_i(\chi^\dagger)_{ij}\psi_j. \qquad (2.3)$$

Результат гауссова интегрирования $\exp(-S_{\psi,\chi})$ по переменным $\chi$, $\chi^\dagger$ приводит к исходному фермионному действию $\exp(-S_\psi)$. Новые бозонные поля $\chi$, $\chi^\dagger$ – антисимметричные комплексные матрицы размера $N \times N$. С помощью уравнений Швингера было показано [8], что введённые поля являются критическими модами фазового перехода в системе, т.е. они определяют параметр порядка $\langle \chi_{ij} \rangle = \lambda \langle \psi_i\psi_j \rangle$, и в точке перехода оказываются безмассовыми.

Функциональное интегрирование $\exp(-S_{\psi,\chi})$ по фермионным полям $\psi$, $\psi^*$ приводит к новому действию, содержащему лишь бозонные переменные

$$S_\chi = \frac{1}{2\lambda} \operatorname{tr} \chi\chi^\dagger - \operatorname{tr} \ln \begin{pmatrix} -\chi^\dagger & -i\omega_s - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \\ -i\omega_s + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu & -\chi \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

где $\omega_s = \pi T(2s+1)$ – мацубаровские частоты, $s \in \mathbb{Z}$. Далее логарифм в действии (2.4) раскладывается, что приводит к представлению

$S_\chi = \frac{1}{2\lambda} \operatorname{tr} \chi\chi^\dagger + \frac{1}{2}$  $+ \frac{1}{4}$  $+ \ldots,$ (2.5) где внешние волнистые линии соответствуют полям $\chi$, $\chi^\dagger$, линии в петлях обозначают пропагатор $\langle\psi\psi^*\rangle$; сопряжённые поля $\psi^*$, $\chi^\dagger$ помечены крестиком. Для получения эффективной теории в ИК области, все петлевые части диаграмм в действии (2.5) раскладываются по втекающим в них импульсам $p$ и частотам, при этом поля $\chi$, $\chi^\dagger$ считаются $t$-независимыми [8], а интеграл по переменной $t$ сводится к несущественному множителю $\beta = 1/T$. В результате эффективная модель редуцируется к функционалу типа Гинзбурга-Ландау

$$S_{GL} = \operatorname{tr}\chi^\dagger(c_0p^2 + \widetilde{\tau}_0)\chi + \frac{\widetilde{g}_{01}}{4}(\operatorname{tr}\chi\chi^\dagger)^2 + \frac{\widetilde{g}_{02}}{4}\operatorname{tr}(\chi\chi^\dagger\chi\chi^\dagger). \tag{2.6}$$

Вершина $(\operatorname{tr}\chi\chi^\dagger)^2$ не возникает в процессе получения эффективного действия, поэтому $\widetilde{g}_{01} = 0$, однако она разрешена симметрией и размерностью и необходима для обеспечения мультипликативной ренормируемости модели. Соответствующие контрчлены генерируются вершиной $\operatorname{tr}(\chi\chi^\dagger\chi\chi^\dagger)$ начиная с однопетлевых диаграмм. Параметры $c_0 > 0$, $\widetilde{g}_{02} > 0$ и $\widetilde{\tau}_0$ даются формулами

$$\begin{aligned}
c_0 &= -\frac{\beta}{2}T\partial_p^2\sum_{\omega_s}\int\frac{\mathrm{d}^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(i\omega_s+\varepsilon_k)(-i\omega_s+\varepsilon_{k+p})}\Bigg|_{p=0},\\
\widetilde{g}_{02} &= \beta T\sum_{\omega_s}\int\frac{\mathrm{d}^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\omega_s^2+\varepsilon_k^2)^2},\\
\widetilde{\tau}_0 &= \frac{\beta}{2\lambda} - \frac{\beta}{2}T\sum_{\omega_s}\int\frac{\mathrm{d}^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{\omega_s^2+\varepsilon_k^2}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь $\varepsilon_k = k^2/(2m) - \varepsilon_F$; интегрирование по импульсу $k$ выполняется по малой окрестности Ферми-сферы $|\varepsilon_k - \varepsilon_F| < \delta$. Параметр $\delta$ суть дебаевская частота в системе электронов в твёрдом теле, либо он связан с фермиевской энергией $\varepsilon_F$ в системе ультра-холодных газов, для которых $\delta = (2/e)^{7/3}\varepsilon_F \approx 0.49\varepsilon_F$ [57]. Переопределяя для удобства поля и параметры функционала

(2.6) с помощью замены

$$g_{0j} = \widetilde{g}_{0j}/c_0^2, \quad \tau_0 = \widetilde{\tau}_0/c_0, \quad \chi \to \chi/\sqrt{c_0}, \tag{2.8}$$

мы придём к окончательной форме ИК эффективного действия, описывающего коллективное поведение многокомпонентной системы фермионов вблизи перехода в сверхтекучее состояние

$$S = \operatorname{tr}\chi^\dagger(\nabla^2 + \tau_0)\chi + \frac{g_{01}}{4}\left(\operatorname{tr}\chi^\dagger\chi\right)^2 + \frac{g_{02}}{4}\operatorname{tr}\chi^\dagger\chi\chi^\dagger\chi. \tag{2.9}$$

Важно заметить, что отныне интегрирование в выражении (2.9) проводится лишь по $d$-мерным координатам.

Условие устойчивости системы формулируется в виде требования положительной определённости члена взаимодействия функционала (2.9). Для случая $N \geq 4$ оно имеет вид

$$g_{02} > 0,\ g_{02} + Ng_{01} > 0, \tag{2.10}$$

что следует из очевидного неравенства

$$\operatorname{tr}\left(\chi^\dagger\chi - \frac{1}{N}\operatorname{tr}\chi^\dagger\chi\right)^2 > 0. \tag{2.11}$$

При значениях $N = 2$, $N = 3$ вершины оказываются линейно зависимыми $\left(\operatorname{tr}\chi^\dagger\chi\right)^2 = 2\operatorname{tr}\chi^\dagger\chi\chi^\dagger\chi$, и действие (2.9) сводится к $O(2)$- и $O(6)$-симметричным векторным моделям $\phi^4$ с зарядом $\sim g_{01} + 2g_{02}$, соответственно.

## 2.2 АВП β-функций

Действие (2.9) мультипликативно ренормируемо [8]

$$S_R = Z_\chi^2 \operatorname{tr}\chi^\dagger(-\nabla^2+\tau Z_\tau)\chi + Z_1\, Z_\chi^4\, \mu^\varepsilon \frac{g_1}{4}\left(\operatorname{tr}\chi\chi^\dagger\right)^2 + Z_2\, Z_\chi^4\, \mu^\varepsilon \frac{g_2}{4}\operatorname{tr}\chi\chi^\dagger\chi\chi^\dagger, \quad (2.12)$$

где ренормированные параметры связаны с затравочными соотношениями типа (1.2)

$$\chi \to \chi Z_\chi, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad g_{0i} = g_i \mu^\varepsilon Z_i, \quad i = 1,\,2. \qquad (2.13)$$

Модель логарифмична в черырёхмерном пространстве, поэтому $\varepsilon = 4 - d$. Ренормгрупповые функции в данном случае связаны с РГ константами соотношениями

$$\begin{aligned} &\gamma_i = -(g_1\partial_1 + g_2\partial_2)\{Z_i\}, \quad \gamma_\tau = -(g_1\partial_1 + g_2\partial_2)\{Z_\tau\}, \\ &\beta_i = -g_i(\varepsilon + \gamma_i). \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Уравнение РГ в форме Калана-Симанчика приводит к известным уравнениям РГ для инвариантных зарядов [2]

$$\partial_\xi \bar g_i = \frac{\beta_i}{2+\gamma_\tau}, \quad \bar g_i|_{\xi=0} = g_i, \quad \text{где} \quad \xi \equiv \ln(\tau/\mu^2). \qquad (2.15)$$

ИК поведение модели $\xi \to -\infty$ связано с неподвижными точками $(g_1^*, g_2^*)$ системы (2.15), являющимися корнями бета-функций $\beta_i(g_1^*, g_2^*) = 0$, $\forall i$. Фиксированные точки ИК-устойчивы, если вещественные части собственных чисел матрицы $\omega_{ij} \equiv \partial_j \beta_i(g_1^*, g_2^*)$ положительны.

В работе [8] показано, что при $N \geq 4$ ИК-устойчивые фиксированные точки отсутствуют, по крайней мере в однопетлевом приближении. Там же было указано, что пертурбативные уравнения (2.15) можно построить в виде

$\varepsilon$-разложений, переопределив переменные $\bar{g}_i \to \varepsilon\bar{g}_i, \xi \to \xi/\varepsilon$

$$\partial_\xi \bar{g}_i = -\bar{g}_i + \sum_{K=0}^{M} \varepsilon^K B_i^{(K)}, \tag{2.16}$$

где $M$ = число учтённых петель − 1, а коэффициенты $B_i^{(K)} = B_i^{(K)}(\bar{g}_1,\bar{g}_2)$ находятся из разложения правых частей уравнений (2.15). При этом малый параметр $\varepsilon$ выпадет из однопетлевых уравнений, что означает независимость асимптотического поведения системы от её размерности в данном приближении. Наряду с анализом фиксированных точек авторы [8] исследовали фазовый портрет системы (2.15) и установили, что траектории инвариантных зарядов, стартуя с различных начальных значений, пересекают границу области устойчивости $\bar{g}_2 + N\bar{g}_1 > 0$.

Непосредственный численный анализ уравнений (2.16) невозможен ввиду расходимости $\varepsilon$-разложения, поэтому для исследования физически интересных случаев $\varepsilon = 1, 2$ ряды (2.16) должны быть пересуммированы. Пересуммирование требует знания АВП коэффициентов $B_i^{(K)}$. Общий способ нахождения АВП здесь схож с инстантонным анализом модели $\phi^3$, однако, интересуясь АВП петлевых разложения, мы естественным образом предполагаем, что заряды $g_1$ и $g_2$ одного порядка малости. Сделав переопределение $g_i \to zg_i$, будем исследовать разложения по степеням $z$. По окончании вычислений положим $z = \varepsilon$ и поделим бета-функции на $\varepsilon^2$, получив тем самым разложение (2.16).

По аналогии с выражениями (1.5, 1.6, 1.8), $K$-ый коэффициенты $G_{2k}^{(K)}$ разложения $2k$-точечной функции Грина

$$G_{2k}(x_1, \ldots, x_{2k}; z) = \frac{1}{W} \int \mathcal{D}\chi\mathcal{D}\chi^\dagger \chi(x_1)\chi^\dagger(x_2)\ldots\chi(x_{2k-1})\chi^\dagger(x_{2k})e^{-S_R}, \tag{2.17}$$

$$W = \int \mathcal{D}\chi\mathcal{D}\chi^\dagger e^{-S_R}.$$

по степеням $z$ вычисляется в высоких порядках $K \to \infty$ методом перевала в интеграле

$$G_{2k}^{(K)} = \frac{1}{W} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\chi^\dagger \chi(x_1)\chi^\dagger(x_2)\ldots\chi(x_{2k-1})\chi^\dagger(x_{2k}) \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^{K+1}} e^{-S_R}, \tag{2.18}$$

где $\gamma$ – замкнутый контур вокруг нуля в комплексной плоскости $z$. Поскольку анализ проводится в рамках схемы MS, АВП будет находиться в безмассовой модели (2.12) в логарифмической размерности $d = 4$. Растянем параметры: $g_i \to g_i/K$, $\chi \to \sqrt{K}\chi$ – тогда вариационные уравнения для функционала $S_R + \ln z$ относительно полей и заряда $z$ примут вид

$$\begin{gathered}
-\nabla^2\chi_c + \frac{z_c g_1}{2}\chi_c \operatorname{tr}\chi_c{\chi_c}^\dagger + \frac{z_c g_2}{2}\chi_c{\chi_c}^\dagger\chi_c = 0,\\
-\nabla^2{\chi_c}^\dagger + \frac{z_c g_1}{2}{\chi_c}^\dagger \operatorname{tr}\chi_c{\chi_c}^\dagger + \frac{z_c g_2}{2}{\chi_c}^\dagger\chi_c{\chi_c}^\dagger = 0,\\
\int \mathrm{d}^d x \left\{\frac{z_c g_1}{4}\left(\operatorname{tr}\chi_c{\chi_c}^\dagger\right)^2 + \frac{z_c g_2}{4}\operatorname{tr}\chi{\chi_c}^\dagger\chi{\chi_c}^\dagger\right\} = -1.
\end{gathered} \tag{2.19}$$

Контрчлены здесь также несущественны для нахождения стационарных конфигураций. Без ограничения общности можно считать, что поля унитарными преобразованиями приведены к пфаффовой форме, состоящей из $p = N/2$ блоков

$$\chi_c = \operatorname{diag}(s_1\sigma, \ldots, s_p\sigma), \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

где $s_j(x)$ – некоторые комплексные функции подлежащие определению. Напишем систему на неизвестные $s_j(x)$

$$-\nabla^2 s_i(x) + z g_1 \sum_{k=1}^{p} |s_k(x)|^2 s_i(x) + \frac{z g_2}{2}|s_i(x)|^2 s_i(x) = 0. \tag{2.21}$$

В качестве анзаца возьмём инстантон скалярной модели $\phi^4$,

$$s_j(x) = \frac{C_j e^{i\alpha_j} y^{-1}}{|x - x_0|^2 + y^2}, \quad C_j, \alpha_j \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Функции $s_j(x)$ зависят от произвольных параметров $x_0$ и $y$, что связано с инвариантностью действия относительно трансляций и растяжений, соответственно. Подстановка анзаца (2.22) в систему дифференциальных уравнений (2.21) приводит к системе алгебраических

$$8C_i + zg_1 \sum_{k=1}^{p} C_k^2 C_i + \frac{zg_2}{2} C_i^3 = 0. \tag{2.23}$$

Существует $m = 0, \ldots, p-1$ тривиальных решений $C_i = 0$, а также $n = p, \ldots, 1$ ненулевых $C_i^2 = -16/(2nzg_1 + zg_2)$, причём $n+m = p$. Фазы $\alpha_i$ не фиксируются и являются произвольными параметрами, отражающими инвариантность действия относительно глобальных калибровочных преобразований. Корректный учёт эквивалентных инстантонов, различающихся лишь значениями $x_0, y, \alpha_i$, выполняется с помощью метода Фаддеева-Попова. Как и ранее, в выражение (2.18) вставляется разбиение единицы, содержащее дельта-функции, которые фиксируют произвол: $x_0 = 0, y = 1, \alpha_i = 0$. Такая процедуры позволяет корректно учесть наличие нулевых мод при функциональном интегрировании по флуктуациям вокруг инстантона. Как и в предыдущей модели, флуктуационный интеграл существенен лишь для вычисления значений амплитуд АВП функций Грина. Амплитуды, однако, не используются в процессе пересуммирования, поэтому важно знать лишь число нулевых мод, для которых процедура Фаддеева-Попова устанавливает “закон равнораспределений” (аналогично модели $\phi^3$, см. Приложение A): каждая нулевая мода вносит дополнительный множитель $\sim K^{1/2}$ в АВП. Общее число нулевых мод: 1 – диллатационная ($y$), 4 – трансляционных ($x_0$), $n$ – число произвольных фаз ($\alpha_j$), $N^2 - N - N$ – число элементов комплексной антисиммеричной матрицы, которые не фиксируются уравнениями (2.23). Итого $N^2 - 2N + n + 5$. Для определения стационарной точки $z_c$ необходимо воспользоваться последним уравнением (2.19)

$$z_c = -\frac{4n}{3}\frac{1}{2ng_1 + g_2}, \tag{2.24}$$

в результате $C_j^2 = 12/n$.

Теперь в полной аналогии с вычислениями параграфа 1.3 можно оценить асимптотику вычета $\{G_4^{(K)}\}$, после чего для АВП бета-функций $\beta_i^{(K)} \sim K\{G_4^{(K)}\}$ получить искомую формулу

$$\beta_i^{(K)} = const_i K! K^{b_n} (-a)^K \left(1 + O\left(K^{-1}\right)\right), \tag{2.25}$$

здесь $const_i$ – несущественная для пересуммирования амплитуда, $b_n = (N^2 - 2N + n + 11)/2$ и $a = \max\limits_n |a(n)|$, $a(n) = -1/z_c$. Величина $a(n)$ меняется вместе с зарядами $g_1, g_2$, поэтому наибольшее из чисел $a(n)$ даёт лидирующий вклад в АВП, а все прочие вносят лишь экспоненциально малые поправки. И так, в исследуемой полевой модели (2.12) ε-разложения (2.16) носят асимптотический характер $B_i^{(K)} \sim \beta_i^{(K)}$, причём их свойства определяются как матричной структурой инстантона, так и положением зарядов на фазовой плоскости. Последнее обстоятельство окажется существенным при проведении процедуры пересуммирования РГ уравнений.

## 2.3 Пересуммирование РГ уравнений

Ниже мы используем конформный метод Бореля-Лероя, поскольку он полностью фиксируется АВП [58]. В рассматриваемом случае положение полюсов функции $B(t)$ зависит от положения инвариантных зарядов в плоскости $(\bar{g}_1,\ \bar{g}_2)$.

Для определённости рассмотрим систему (2.15) в случае $N = 4$. Имеется два типа инстантонов различной матричной структуры. Первый содержит один нетривиальный блок и приводит к значению параметра АВП $a(1) = 3(2g_1 + g_2)/4$. Второй имеет два блока $a(2) = 3(4g_1 + g_2)/8$. Как результат в области устойчивости $\bar{g}_2 + 4\bar{g}_1 > 0$ существует две подобласти на плоскости $(\bar{g}_1,\ \bar{g}_2)$, где функция $B(t)$ обладает различными аналитическими свойствами:

Область $I$: если инвариантные заряды находятся в области $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 > 0$, то $|a(1)| > |a(2)|$. Поэтому ближайшая сингулярность борелевского образа $B(t)$ находится в точке $t = -1/a(1)$;

Область $II$: если инвариантные заряды удовлетворяют условию $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 \leq 0$, то $|a(2)| > |a(1)|$. В этом случае ближайшая сингулярность функции $B(t)$ расположена на положительной полуоси в точке $t = 1/|a(2)|$.

Таким образом плоскость $(\bar{g}_1,\ \bar{g}_2)$ разделена прямой $8\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2 = 0$. Выше этой границы аналитические свойства $B(t)$ определяются инстантоном с одним нетривиальным блоком; ниже – инстантоном с двумя ненулевыми блоками. Начальные значения инвариантных зарядов находятся в области $I$, здесь допустимо применение конформного метода Бореля-Лероя к уравнениям (2.16). В области $II$ этот метод не может быть использован, поскольку полюс функции $B(t)$ расположен на положительной полуоси.

Формула (1.54) позволяет пересуммировать РГ уравнения (2.16)

$$\begin{aligned} &\partial_\xi \bar{g}_i = -\bar{g}_i + \sum_{K=0}^{M} U_i^{(K)} \int\limits_0^\infty dt\ t^{b_0} e^{-t} u(\varepsilon t)^K, \\ &\bar{g}_i|_{\xi=0} = g_i. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Отметим, что $U_i^{(K)}$ и $u(t)$ являются функциями инвариантных зарядов $\bar{g}_i$. Систему (2.26) можно решить стандартными конечно-разностными методами, в настоящей работе использовался метод Рунге-Кутты 4-ого порядка.

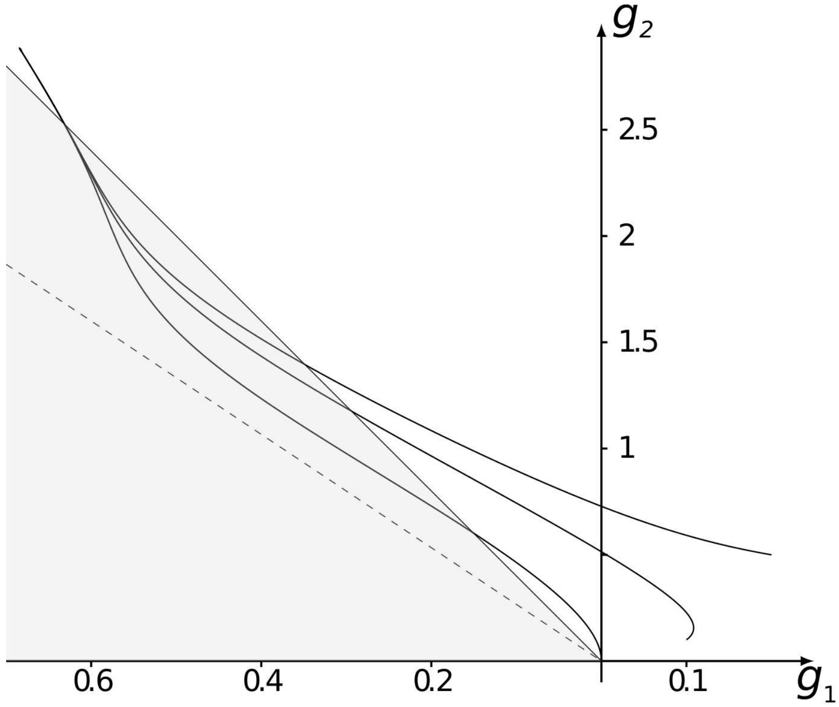



Рисунок 2.1 — Траектории инвариантных зарядов при $d = 3$ и $N = 4$; пунктирная прямая – граница применимости метода пересуммирования.

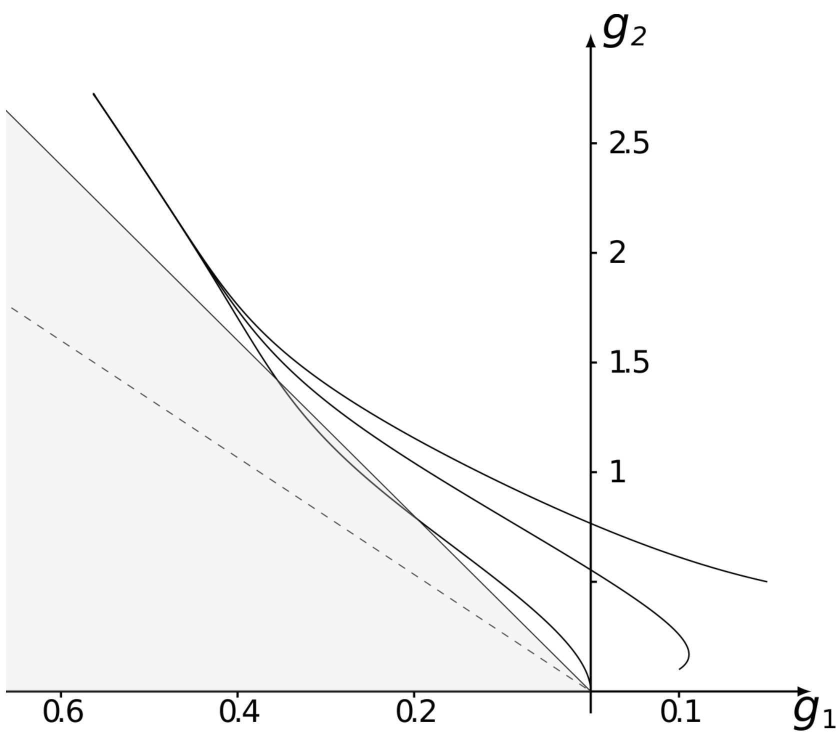



Рисунок 2.2 — Траектории инвариантных зарядов при $d = 2$ и $N = 4$; пунктирная прямая – граница применимости метода пересуммирования.

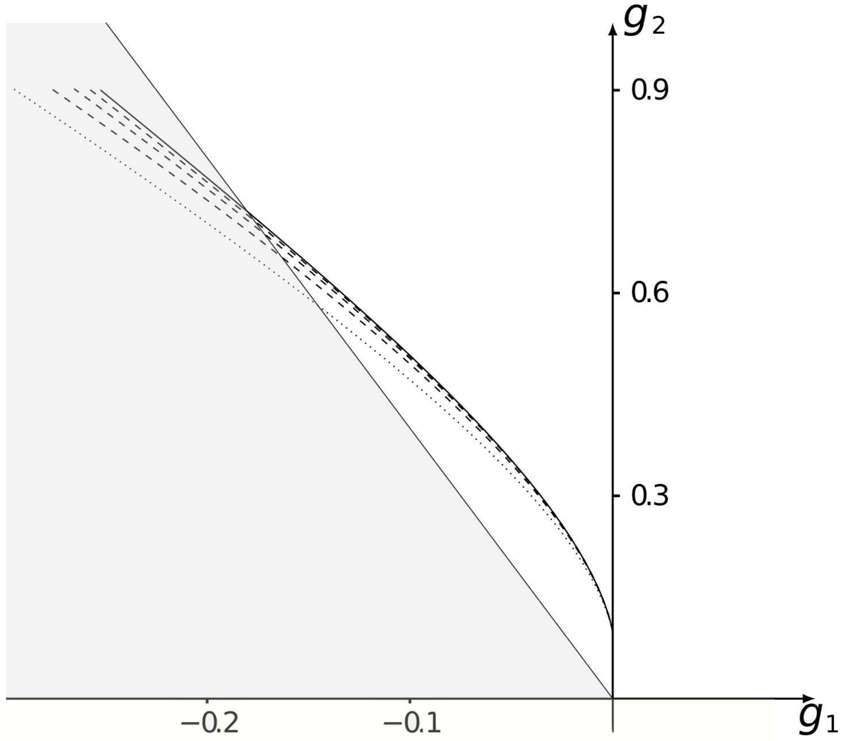



Рисунок 2.3 — Траектории инвариантных зарядов ($d = 3$ и $N = 4$) при различном числе учтённых петель: одно-петлевое приближение – точечная линия, пяти-петлевое приближение – сплошная линия.

Бета-функции модели (2.12) были вычисленны в работе [59] в пятипетлевом приближении, что соответствует $M = 4$ в системе (2.26). Результаты численного анализа для случая $N = 4$ показаны на Рис. 2.1 при $\varepsilon = 1$ и на Рис. 2.2 при $\varepsilon = 2$. Видно, что при $d = 3$ траектории инвариантных зарядов, стартуя с различных начальных значений, пересекают границу области устойчивости действия при некотором значении $\xi_0$ параметра $\xi$. Аналогичное поведение наблюдается для прочих значений $N \geq 4$. В двумерной системе также отсутствуют ИК устойчивые фиксированные точки. Здесь только траектории с достаточно малыми начальными значениями зарядов пересекают границу область устойчивости, что явствует из Рис. 2.2, все остальные – не нарушают устойчивость системы. Поэтому судить о наличии или типе фазового перехода в двумерной модели (2.9), используя лишь пересуммированные пятипетлевые разложения, невозможно.

На Рис. 2.3 показана зависимость РГ траекторий от числа учтённых петлевых вкладов в уравнениях (2.26) при $d = 3$. Видно, что траектории сходятся с увеличением $M$, и пятипетлевое приближение оказывается достаточным, чтобы гарантировать объективность выводов о потере устойчивости системы и оценить значение $\xi_0$. Найденные решения системы (2.26) являются устойчивыми относительно малых изменений начальных данных. Заметим так же, что при рассмотрении 4-петлевых бета-функций, удаётся обнаружить устойчивую в ИК области фиксированную точку, которая отсутствует при учёте младших петель и вновь исчезает при анализе 5-петлевых вкладов. Такое поведение не позволяет считать эту точку действительно существующей. Она рассматривается как артефакт теории возмущений.

В области устойчивости, а также в некоторой окрестности вне её, $a(1)$ даёт наибольший вклад в АВП при любых значениях $N > 2$. Естественно предположить, что фазовый переход первого рода в системе происходит, когда РГ траектории пересекли границу области стабильности, но ещё не отдалились от ней, поэтому при любых $N$ метод Бореля-Лероя может быть реализован с АВП, определяемой лишь величиной $a(1)$. Иными словами, главный вклад в АВП при исследовании модели (2.12) в окрестности границы устойчивости системы даёт наиболее вырожденный нетривиальный инстантон.

Точка $\xi_0$ не является точкой фазового перехода первого рода; при $\xi = \xi_0$ появляются лишь метастабильные состояния. При каком значении $\xi_c$ эти состояния станут стабильными, т.е. в системе появится конденсат, можно будет судить лишь после включения в действие (2.12) старших членов типа $\sim \chi^6$. При построении модели (2.9) такие вершины отбрасывались ввиду их ИК несущественности по сравнению с ведущими членами типа $\sim \chi^4$, однако теперь они релевантны с точки зрения обеспечения устойчивости системы.

## 2.4 Ренормировка составных операторов

При петлевом разложении функционала (2.4) в действии (2.12) возникает вершина $F_3 \equiv \mathrm{tr}(\chi^\dagger\chi)^3$, которая в рамках ренормгруппового анализа будет рассматриваться как составной оператор [2] с канонической размерностью $\Delta_3 = 6 - 3\varepsilon$. Можно составить ещё два монома той же размерности $F_2 \equiv \mathrm{tr}(\chi^\dagger\chi)^2\,\mathrm{tr}(\chi^\dagger\chi)$ и $F_1 \equiv (\mathrm{tr}\,\chi^\dagger\chi)^3$. В процессе ренормировки операторы одной размерности могут смешиваться друг с другом, поэтому в действие (2.12) должна быть включёна линейная комбинация $\lambda_{0j}F_j/36$, где $\lambda_{0j}$ – затравочные источники. Определим ренормированные параметры $\lambda_i$ соотношением $\lambda_{0j} = Z_{jk}\lambda_k\mu^{2\varepsilon-2}$. Матрица констант ренормировки имеет общий для схемы MS вид (1.3)

$$Z_{jk} = \delta_{jk} + \frac{\{Z\}_{jk}}{\varepsilon} + \text{старшие полюса по } \varepsilon, \quad j,\, k = 1, 2, 3. \tag{2.27}$$

Полюс $\{Z\}_{jk}$ является функций только зарядов $g_i$. Аналогично (2.14) можно написать РГ функции для источников $\lambda_j$

$$\beta_{\lambda_j} = -(2\varepsilon - 2)\lambda_j + \lambda_k(g_1\partial_1 + g_2\partial_2)\{Z\}_{kj}. \tag{2.28}$$

Константы ренормировки $Z_{jk}$ находятся из требования УФ конечности ренормированных 6-хвостых функций Грина с одной вставкой составного оператора $F_j$. Бета-функции (2.28) были вычислены в однопетлевом приближении

$$\beta_{\lambda_1} = 2(1-\varepsilon)\lambda_1 + g_1\left[\frac{3}{4}\lambda_1(N^2-N+14)+\lambda_2(N-1)+\frac{3}{4}\lambda_3\right]+ \\ +\frac{3}{2}g_2\left[\lambda_1(N-1)+\lambda_2\right],$$

$$\beta_{\lambda_2} = 2(1-\varepsilon)\lambda_2 + \frac{1}{4}g_1\left[\lambda_3(6N-9)+\lambda_2(N^2-N+38)\right]+ \\ +\frac{3}{2}g_2\left[6\lambda_1+\lambda_2(N-2)+3\lambda_3\right], \tag{2.29}$$

$$\beta_{\lambda_3} = 2(1-\varepsilon)\lambda_3 + \frac{15}{2}g_1\lambda_3 + \frac{3}{2}g_2\left[\lambda_3(N-4)+4\lambda_2\right],$$

растяжение зарядов $g_i \to g_i/16\pi^2$ подразумевается.

В процессе перенормировки операторов $F_i$ должно быть учтено полное семейство составных операторов с одинаковой канонической размерностью при $d = 4$. Помимо самих мономов $F_i$ это семейство включает следующие операторы

$$\begin{aligned}
&f_2 = \operatorname{tr}\nabla^2\chi^\dagger\nabla^2\chi, \quad f_{45} = (\operatorname{tr}\nabla\chi^\dagger\nabla\chi)(\operatorname{tr}\chi^\dagger\chi)\\
&f_{41} = \operatorname{tr}\nabla^2\chi^\dagger\chi\chi^\dagger\chi + \operatorname{tr}\chi^\dagger\nabla^2\chi\chi^\dagger\chi,\\
&f_{42} = \operatorname{tr}\nabla\chi^\dagger\chi\nabla\chi^\dagger\chi + \operatorname{tr}\chi^\dagger\nabla\chi\chi^\dagger\nabla\chi,\\
&f_{43} = (\operatorname{tr}\nabla^2\chi^\dagger\chi)(\operatorname{tr}\chi^\dagger\chi) + (\operatorname{tr}\chi^\dagger\nabla\chi)(\operatorname{tr}\chi^\dagger\chi),\\
&f_{44} = (\operatorname{tr}\nabla\chi^\dagger\chi)(\operatorname{tr}\nabla\chi^\dagger\chi) + (\operatorname{tr}\chi^\dagger\nabla\chi)(\operatorname{tr}\chi^\dagger\nabla\chi),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

с каноническими размерностями $d[f_2] = D+2$, $d[f_{4i}] = 2D-2$. Оператор дифференцирования здесь действует только на первое поле следующее за ним. Мы ограничиваемся лишь учётом $F_i$; вклады (2.30) опущены по причинам, которые обсудим ниже.

## 2.5 Функциональное описание фазового перехода

Как было отмечено выше, параметром порядка фазового перехода в рассматриваемой модели является среднее значение $\Delta \equiv \langle\chi\rangle$, появление которого свидетельствует о переходе системы в упорядоченную фазу. Функциональное преобразование Лежандра [60] позволят находить точное значение $\Delta$ как решение вариационной задачи на экстремум функционала

$$\Gamma(\Delta, \Delta^\dagger) = \ln Z(A, A^\dagger) - \operatorname{tr} \Delta A^\dagger - \operatorname{tr} \Delta^\dagger A \tag{2.31}$$

где "статистическая сумма" модели (2.9) во внешних полях $A, A^\dagger$

$$Z(A, A^\dagger) = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\chi^\dagger e^{-S + \operatorname{tr} \Delta A^\dagger + \operatorname{tr} \Delta^\dagger A}. \tag{2.32}$$

Средние полевые значения $\Delta$, $\Delta^\dagger$ находятся дифференцированием $Z(A, A^\dagger)$ по соответствующим источникам

$$\Delta = \frac{\delta}{\delta A^\dagger} \ln Z(A, A^\dagger), \quad \Delta^\dagger = \frac{\delta}{\delta A} \ln Z(A, A^\dagger). \tag{2.33}$$

Функционал (2.31) – производящий функционал 1-неприводимых функций Грина, которые находятся подходящим дифференцированием $\Gamma = \Gamma(\Delta, \Delta^\dagger)$ по его полевым аргументам. В частности, определение (2.31) приводит к уравнениям состояния системы

$$\frac{\delta}{\delta \Delta^\dagger} \Gamma = -A, \quad \frac{\delta}{\delta \Delta} \Gamma = -A^\dagger, \tag{2.34}$$

определяющим значения $\Delta, \Delta^\dagger$ во внешних полях $A, A^\dagger$; функционал $-\Gamma$ суть свободная энергия системы.

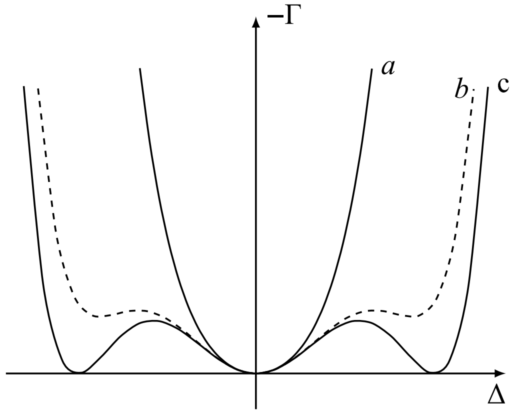



Рисунок 2.4 — Схематическое изображение свободная энергия как функции параметра порядка: $a$ – неупорядоченная фаза, $b$ – метастабильное состояние, $c$ – “сверхтекучая” фаза.

В древесном (среднеполевом) приближении свободная энергия в расширенной старшими членами $F_i$ модели (2.9) на однородных полевых конфигурациях имеет вид

$$-\Gamma =\tau \operatorname{tr} \Delta\Delta^\dagger + \mu^{\varepsilon}\frac{g_1}{4}\left(\operatorname{tr}\Delta\Delta^\dagger\right)^2 + \mu^{\varepsilon}\frac{g_2}{4}\operatorname{tr}\Delta\Delta^\dagger\Delta\Delta^\dagger + \\ +\mu^{2\varepsilon-2}\frac{\lambda_1}{36}\left(\operatorname{tr}\Delta\Delta^\dagger\right)^3 + \mu^{2\varepsilon-2}\frac{\lambda_2}{36}\operatorname{tr}\Delta\Delta^\dagger\Delta\Delta^\dagger\operatorname{tr}\Delta\Delta^\dagger + \mu^{2\varepsilon-2}\frac{\lambda_3}{36}\operatorname{tr}\Delta\Delta^\dagger\Delta\Delta^\dagger\Delta\Delta^\dagger. \tag{2.35}$$

Бесконечны объём системы $V = \int \mathrm{d}^d x$ считается отнесённым к $-\Gamma$, поэтому, строго говоря, функция (2.35) – удельная свободная энергия, см. Рис.2.4.

Без ограничения общности можно считать, что антисимметричные матрицы $\Delta, \Delta^\dagger$ приведены к пфаффовой форме типа (2.20) с вещественными коэффициентами $\Delta_m$, $m = 1, \ldots, N/2$ на главной диагонали. Тогда уравнения состояния (2.34), определяющие экстремум свободной энергии, в отсутствии внешних полей сведутся к системе

$$\frac{\partial\,\Gamma}{\partial\Delta_m} = 0. \tag{2.36}$$

Точка фазового перехода находится из условия равенства свободных энергий системы в неупорядоченной ($a$) и упорядоченной ($c$) фазах: $\Gamma = 0$ (см.

Рис. 2.4). При дальнейшем понижении температуры нетривиальный минимум $-\Gamma$ становится глобальным, а сверхтекучая фаза устойчивой.

Петлевые поправки к древесному приближению (2.35) содержат ИК сингулярности, которые суммируются методом ренормализационной группы в инвариантные переменные (2.16), т.е. параметры $g_i, \lambda_j$ и поля $\Delta_m$ в (2.35) должны быть заменены на из инвариантные аналоги $\bar{g}_i, \bar{\lambda}_j, \bar{\Delta}_m$, которые теперь зависят от безразмерного параметра $\xi = \ln(\tau/\mu^2)$. После этой процедуры вклады от старших петель дают лишь регулярные $\varepsilon$-поправки к древесному приближению (2.35). Введём безразмерную переменную $z_m \equiv \Delta_m/\mu^{d_\chi}$, где $d_\chi = 1 - \varepsilon/2$ – каноническая размерность поля $\chi$, тогда соответствующие РГ уравнения на инвариантные величины запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&\partial_\xi \bar{g}_i = \frac{\beta_i}{2+\gamma_\tau}, \quad \bar{g}_i|_{\xi=0} = g_i, \quad i = 1,2; \\
&\partial_\xi \bar{\lambda}_j = \frac{\beta_{\lambda_j}}{2+\gamma_\tau}, \quad \bar{\lambda}_j\big|_{\xi=0} = \lambda_j, \quad j = 1,2,3; \\
&\partial_\xi \bar{\Delta}_m = -\bar{\Delta}_m \frac{d_\chi + \gamma_\chi}{2+\gamma_\tau}, \quad \bar{\Delta}_m\big|_{\xi=0} = z_m, \quad m = 1,\dots,N/2.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Разрешая систему (2.36) для функционала (2.35) при условии $\Gamma = 0$, получим

$$\bar{\Delta}_m^2 = -\frac{9}{2}\frac{2n\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{4n^2\bar{\lambda}_1 + 2n\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3}, \tag{2.38}$$

$$\exp(\xi) = \frac{9}{16}\frac{(2n\bar{g}_1 + \bar{g}_2)^2}{4n^2\bar{\lambda}_1 + 2n\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3}, \tag{2.39}$$

где $n$ – количество ненулевых решении $\Delta_m$ уравнения (2.36). При уменьшении $\xi$ инвариантные заряды пересекают границу устойчивости $N\bar{g}_1 + \bar{g}_2 = 0$ в точке $\xi_0$, после чего появляется нетривиальное решение (2.38). Появившейся фазе соответствует параметр порядка $\Delta$ с $n = N/2$ ненулевыми блоками. Уравнение (2.39) определяет “температуру” $\xi = \xi_c$ фазового перехода первого рода, при которой новое решение (2.38) становится глобальным минимумом свободной энергии. Поведение рассматриваемой системы не является уни-

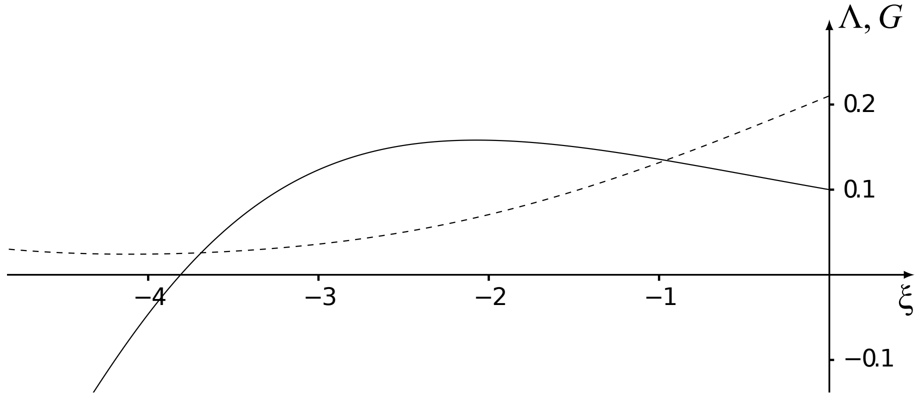



Рисунок 2.5 — Траектории зарядов $\Lambda$ (пунктирная линия) и $G$ (сплошная линия) при $d = 3$ и $n = 2$.

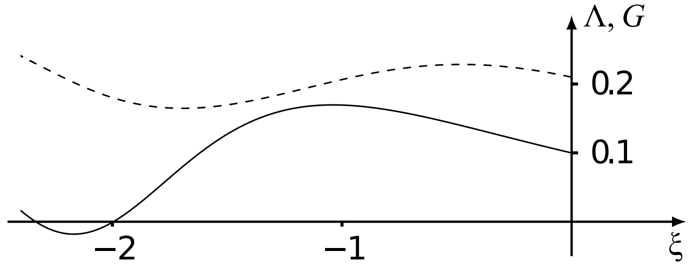



Рисунок 2.6 — Траектории зарядов $\Lambda$ (пунктирная линия) и $G$ (сплошная линия) при $d = 2$ и $n = 2$.

версальным: величина $\xi_c$ зависит от начального положения ренормгрупповых траекторий, однако её можно оценить.

Инвариантные заряды в формуле (2.39) входят в виде линейных комбинаций $\Lambda \equiv 4n^2\bar{\lambda}_1 + 2n\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3$ и $G \equiv 2n\bar{g}_1 + \bar{g}_2$. Эволюция эффективных констант связи $\Lambda, G$ при $N = 4$ показана на Рис. 2.5 в трехмерной системе и на Рис. 2.6 для $d = 2$. В ИК области вблизи появления матастабильных состояний трёхмерной системы вклад старших членов $F_i$ остаётся малым, что оправдывает их рассмотрение в качестве составных операторов. В двумерной системе вклад составных операторов не уменьшается в ИК области. При $d = 2$ все вершины разложения в функционале Ландау-Гинзбурга (2.6) имеют одну каноническую размерность и являются одинаково существенными.

Оценим температуру фазового перехода в трехмерной системе. Численное исследование уравнения (2.39) показывает незначительное изменение величины $\zeta_c = \exp(\xi_c)/g_2^2 \approx 2 \div 3$ в широком диапазоне варьирования стартового значения $g_2 \approx 10^{-5} \div 0.1$. Затравочные и ренормированные параметры модели связаны соотношениями $\tau_0 = \tau Z_\tau$ и $g_{02} = \mu g_2 Z_2$. Отсюда следует связь

$$\exp(\xi) = g_2^2 \frac{\tau_0}{g_{02}^2} \frac{Z_2^2}{Z_\tau}. \tag{2.40}$$

Полагая $g_1 \sim g_2 \ll 1$, оценим отношение $Z_\tau / Z_{g_2}^2 \sim 1$, тогда в точке перехода

$$\frac{\tau_0}{g_{02}^2} \approx \zeta_c. \tag{2.41}$$

Проводя суммирование и интегрирование в формулах (2.7) и учитывая вырожденность системы $T/\delta \ll 1$, получим в главном порядке по $T/\delta$ выражения для затравочных величин

$$\widetilde{g}_{02} \approx \frac{7\nu_F \beta}{8(\pi T)^2}\zeta(3), \quad \widetilde{\tau}_0 \approx \frac{\beta}{2\lambda}\left(1 - \lambda\nu_F \ln\frac{\gamma\delta}{\pi T}\right), \quad c_0 \approx \frac{7\nu_F p_F^2 \beta}{96(\pi T m)^2}\zeta(3), \tag{2.42}$$

здесь $p_F$ – фермиевский импульс, $\nu_F = m p_F/(2\pi^2)$ – плотность состояний на уровни Ферми, $T_F$ – фермиевская температура (используется ниже). Теория среднего поля предсказывает для модели (2.9) при любом $N$ непрерывный фазовый переход в сверхтекучее состояния в точке $\tau_0 = 0$, откуда находится соответствующая температура $T_0$

$$1 - \lambda\nu_F \ln\frac{\gamma\delta}{\pi T_0} = 0. \tag{2.43}$$

Мы показали, что система демонстрирует переход первого рода при $\tau_c > 0$, т.е. при более высокой по сравнению с $T_0$ температуре $T_c$, хотя относительная разность $(T_c - T_0)/T_0$ невелика: ренормгрупповое рассмотрение справедливо лишь при малых $\tau_c$. Вблизи точки $T_c$ величина $\tau_0$ может быть оценена

$$\tau_0 \approx \frac{\beta\nu_F}{2c_0}\frac{T_c - T_0}{T_0}. \tag{2.44}$$

Объединяя формулы (2.41, 2.42, 2.44, 2.8), получим оценку относительной разности температур

$$\frac{T_c - T_0}{T_0} = \zeta_c \frac{6912\pi^6}{7\zeta(3)} \left(\frac{T_0}{T_F}\right)^4 . \tag{2.45}$$

Сделаем ряд замечаний. Вообще не только уравнения эволюции инвариантных зарядов $\bar{g}_i$, но и РГ уравнения для параметров $\bar{\lambda}_i$ строятся в виде $\varepsilon$-разложения. Аналогично системе (2.16) можно переписать уравнения (2.37) на $\bar{\lambda}_i$ в виде

$$\partial_\xi \bar{\lambda}_i = -\frac{2\varepsilon - 2}{\varepsilon}\bar{\lambda}_i + \sum_{K=0}^{M} \varepsilon^K \bar{\lambda}_j L_{ji}^{(K)}(\bar{g}_1,\bar{g}_2), \quad \bar{\lambda}_i\big|_{\xi=0} = \lambda_i. \tag{2.46}$$

Сумма должна быть подвергнута преобразованию Бореля-Лероя. Поэтому здесь необходима АВП коэффициентов $L_{ji}^{(K)}$. Вычисление величин $L_{ji}^{(K)}$ связано с ренормировкой 6-хвостых функций Грина $\sim (\sqrt{K})^6$ со вставкой составного оператора $F_j \sim (\sqrt{K})^6$. В то время как при получении коэффициентов $B_i^{(K)}$ в (2.16) ренормировались вершины с четырьмя полями $\sim (\sqrt{K})^4$. Поэтому, используя лишь это отличие, можно написать $L_{ji}^{(N)}/(\sqrt{N})^{6+6} \sim B_i^{(N)}/(\sqrt{N})^4$. Тензорная структура коэффициентов разложения несущественна при пересуммировании системы (2.46) методом (1.54). На практике, однако, оказывается, что в выполнении борелевского суммирования многопетлевого разложения (2.46) нет необходимости [59]: осуществление ренормировки составных операторов $F_i$ в старших петлях не даёт какого-либо качественного и заметного количественного отличий по сравнению с результатами однопетлевого счёта (2.29).

Обсудим влияние операторов $f$ (2.30) на полученные результаты. Во-первых, вклады $f$ малы по сравнению со вкладами операторов $F$, поскольку последние более ИК-существенны в реальных системах $d = 2, 3$ в соответствии с их каноническими размерностями. Во-вторых, инстантонный анализ показывает, что поправки старших порядков операторов $f$ малы по $1/N$ по сравнению со вкладами тех же порядков операторов $F$.

# Глава 3. Турбулентное перемешивание критической жидкости: непертурбативный ренормгрупповой анализ

## 3.1 Модель $A$ с турбулентным перемешиванием Крейчнана

В рамках модели $A$ релаксационная динамика скалярного параметра порядка $\phi = \phi(x,t)$ переносимого случайным полем скорости $\upsilon_j = \upsilon_j(x,t)$ определяется стохастическом уравнением ланжевеновского типа

$$\lambda \nabla_t \phi(x,t) = -\frac{\delta H_0[\phi]}{\delta\phi(x,t)} + \eta(x,t), \tag{3.1}$$

где $\nabla_t = \partial_t + \upsilon_j \partial_j$ – материальная производная , $\lambda > 0$ – обратный кинематический коэффициент, случайный гауссовый шум $\eta(x,t)$ с нулевым математическим ожиданием определяется заданием коррелятора $\langle\eta(x,t)\eta(x',t')\rangle = 2\lambda\,\delta(x-x')\delta(t-t')$, шум моделирует фон молекулярных степеней свободы. Функционал $H_0[\phi]$ – $t$-локальный “гамильтониан” построенный из поля $\phi(x,t)$ и его пространственных производных. Вблизи критической точки $H_0[\phi]$ имеет вид

$$H_0[\phi] = \int \mathrm{d}^d x \left\{ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{\tau_0}{2}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 \right\}. \tag{3.2}$$

“Затравочная масса” $\tau_0 \sim T - T_c$ – отклонение температуры от её среднеполевого критического значения $T_c$, константа связи $g_0 > 0$.

В настоящей работе мы используем ансамбль Крейчнана, в котором $\langle\upsilon_i(x,t)\rangle = 0$, а коррелятор $\langle\upsilon_j(x,t)\upsilon_i(x',t')\rangle = D_{ji}$ берётся в виде

$$D_{ji} = D_0\,\delta(t-t') \int\limits_{p>m} \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d} \frac{P^{\perp}_{ji} + \alpha P^{\parallel}_{ji}}{p^{d+\zeta}} \exp[ip(x-x')] \tag{3.3}$$

тензоры $P^{\|}_{ji} = p_j p_i/p^2$ и $P^{\perp}_{ji} = \delta_{ji} - P^{\|}_{ji}$ – продольный и поперечный проекторы, соответственно; префакторы $D_0 > 0$ и $\alpha > 0$. Специальный случай $\alpha = 0$ отвечает несжимаемому потоку жидкости. Величина $m$ – внешний макроскопический масштаб турбулентности, который обычно обеспечивает ИК регуляризацию. В инерционном интервале вычисляемые количественные характеристики, например аномальные размерности, не зависят от $m$. Отметим, что методы, которые мы намерены использовать далее, не требуют данной регуляризации, а потому она всюду опускается. Выписанная корреляционная функция (3.3) воспроизводит колмогоровский закон 5/3 для развитых турбулентных пульсаций, если $\zeta = \zeta_K = 4/3$.

Временны́е $\delta(t - t')$-корреляции более естественно понимать в смысле Стратоновича, что соответствует конечному времени корреляций, которое, однако, много меньше чем прочие временны́е масштабы в системе. На вычислительной стадии предписание Стратоновича суть регуляризация тета-функции в нуле $\Theta(0) = 1/2$, что связано с предположением о симметричности коррелятора $D_{ji}$ относительно перестановки $t \leftrightarrow t'$.

В соответствии в общим MSR-формализмом [2], стохастическая задача (3.1) эквивалентна квантовополевой модели с полями $\Theta = \{\phi, \phi', \upsilon_j\}$

$$S[\Theta] = \int \mathrm{d}^d x \mathrm{d}t \left\{ \lambda\, \phi' \nabla_t \phi + \phi' \, \frac{\delta H_0[\phi]}{\delta \phi} - \lambda\, \phi' \phi' + \frac{1}{2} \upsilon_i D^{-1}_{ij} \upsilon_j \right\}. \tag{3.4}$$

Данное утверждение означает, что статистическое усреднение случайной величины в первоначальной постановке (3.1) может быть представлено в виде функционального усреднения с весом $\exp(-S[\Theta])$.

## 3.2 Уравнение Вейттериха

Пусть система описывается полевой моделью с действием $S = S[\phi, e]$, где $e$ – набор параметров модели. Флуктуации $\phi = \phi(p)$ разделим на медленную компоненту $\phi_s(p)$ с импульсом $p$ меньшим некоторого $k$ и быструю моду $\phi_r(p)$, импульс которой находится в слое от $k$ до $\Lambda$, где $\Lambda$ – УФ регуляризация, связанная с микроскопическими масштабами системы. Тогда исходное действие запишется в виде $S[\phi, e] = S_r[\phi_r, e] + S_s[\phi_s, e] + S_{rs}[\phi_r, \phi_s, e]$, члены $S_r$ и $S_s$ описывают быстрые и медленные моды соответственно, $S_{rs}$ – межмодовое взаимодействие. Далее выполним интегрирование по быстрым компонентам $\phi_r$ и получим действие для медленных мод $S'_s[\phi_s, e']$ с новыми параметрами $e'$. Подходящим растяжением интервал $[0, k]$ отображается на отрезок $[0, \Lambda]$, после чего описанная процедура повторяется над действием $S'_s$. В результате последовательного интегрирования по коротковолновым модам эффективное действие, являющееся центральным объектом РГ Вильсона, позволяет исследовать ИК асимптотики $k/\Lambda \to 0$ наблюдаемых. В классической схеме Вильсона само функциональное интегрирование реально проводится лишь в рамках теории возмущений, приводящей, в частности, к построению $\varepsilon$-разложения, которое вновь нужно пересуммировать с использованием АВП. Заметим, что действие $S$ не является физическим объектом. Физическим объектом в полевых моделях является производящий функционал 1-неприводимых функций Грина $\Gamma$ (или свободная энергия, на термодинамическом языке), простым дифференцированием которого находятся уравнение состояния системы, одетые пропагаторы, вершины и т.д. Метод эффективного усреднённого действия (effective average action, далее EAA), развитый К. Вейттерихои [5], является конструктивным способом вычисления $\Gamma$ в рамах непертурбативного ренормгруппового подхода, минуя непосредственные манипуляции с исходным действием системы $S$. Здесь в качестве основного объекта анализа выступает эффективное усреднённое действие $\Gamma_k$, которое, по построению, интерполирует между действием $S$ системы на УФ масштабе $k/\Lambda \sim 1$ и функционалом $\Gamma$ в ИК пределе $k/\Lambda \to 0$. Функционал $\Gamma_k$ является свободной энергией быстрых мод $k < p < \Lambda$, заинтегрированных при реализации схемы Вильсона. Действительно, при $k = 0$ функциональное интегрирование проводится по всему спектру флуктуаций $0 < p < \Lambda$, поэтому, осуществляя стандартное преобразование Лежандра, мы придём к свободной энергии всей системы. В противном случае $k = \Lambda$ флуктуации вовсе не учитываются, и мы приходим к теории среднего поля Ландау, где свободная энергия суть действие системы. В данном подходе импульс разделения $k$ автоматически играет роль ИК обрезания, поэтому проблем с инфракрасными сингулярностями, как это имеет место в квантово-полевой РГ, не возникает.

Пусть $\Theta$ – весь набор полевых переменных, $J$ – набор сопряжённых источников, $S = S[\Theta]$ – действие модели. Тогда статистическая сумма определяется интегралом

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Theta \exp\{-S[\Theta] + J\,\Theta\}. \tag{3.5}$$

Чтобы на масштабе $k$ разделить моды на быструю и медленную компоненты в действие $S$ добавляется $k$-зависимый локальный массивный член $\Delta S_k[\Theta]$

$$\Delta S_k[\Theta] = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}\Theta(p)\, R_k(p)\, \Theta(-p). \tag{3.6}$$

Цель такого приёма – модификация пропагатора медленных мод добавочной массой для подавления их вкладов в функциональное интегрирование. Форма ядра может быть произвольной $R_k(p)$, однако его асимптотические свойства фиксируются условиями

$$R_k(p) \sim \begin{cases} k^2, & \text{при} \quad p \ll k; \\ 0, & \text{при} \quad p \gg k; \\ 0, & \text{при} \quad k = 0, \quad \forall p; \\ \infty \quad (\text{или} \sim \Lambda^2), & \text{при} \quad k = \Lambda, \quad \forall p. \end{cases} \tag{3.7}$$

Статистическая сумма теперь имеет вид

$$Z_k[J] = \int \mathcal{D}\Theta \exp\{-S[\Theta] - \Delta S_k[\Theta] + J\,\Theta\}. \tag{3.8}$$

Среднее значение поля $\Theta$ даётся производной

$$\Phi = \langle\Theta\rangle = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J}, \tag{3.9}$$

где $W_k[J] = \ln Z_k[J]$. В модифицированное модели определим преобразование Лежандра

$$\tilde{\Gamma}_k[\Phi] = J\Phi - W_k[J], \tag{3.10}$$

которое приводит к соотношению

$$\frac{\delta\tilde{\Gamma}_k[\Phi]}{\delta\phi} = J. \tag{3.11}$$

Рассмотрим функционал

$$\Gamma_k[\Phi] = \tilde{\Gamma}_k[\Phi] - \Delta S_k[\Phi]. \tag{3.12}$$

В ИК пределе массивный член $\Delta S_k[\Phi]$ исчезает и мы приходим к свободной энергии системы $\Gamma_{k=0}[\Phi] = \tilde{\Gamma}_{k=0}[\Phi]$. Для вычисления $\Gamma_{k=\Lambda}[\Phi]$ проэкспоненциируем функционал $-\Gamma_k[\Phi]$

$$\exp\{-\Gamma_k[\Phi]\} = \exp\{W_k[J] - J\Phi + \Delta S_k[\Phi]\} \tag{3.13}$$

и используем формулу $\exp\{W_k[J]\} = Z_k[J]$, в результате получим

$$\exp\{-\Gamma_k[\Phi]\} = \int \mathcal{D}\Theta \exp\{-S[\Theta] - \Delta S_k[\Theta - \Phi] + J\,(\Theta - \Phi)\}. \tag{3.14}$$

Переходя к пределу $k \to \Lambda$ и рассматривая функционалы $\exp\{-\Delta S_k[\Theta - \Phi]\}$ как дельта-образную последовательность $\lim_{k\to\Lambda} \exp\{-\Delta S_k[\Theta - \Phi]\} \sim \delta(\Theta - \Phi)$, получим

$$\exp\{-\Gamma_{k=\Lambda}[\Phi]\} = \exp\{-S[\Phi]\}. \tag{3.15}$$

Равенство $\Gamma_{k=\Lambda}[\Phi] = S[\Phi]$ выполнено.

Рассмотрим эволюцию $\Gamma_k[\Phi]$ при изменении масштаба. Сначала вычислим производную функционала $\tilde{\Gamma}_k[\Phi]$ относительно переменной $t = \ln(k/\Lambda)$

$$\partial_t\tilde{\Gamma}_k[\Phi] + \frac{\delta\tilde{\Gamma}_k[\Phi]}{\delta\phi}\partial_t\Phi = -\partial_t W_k[J] - \frac{\delta W_k[J]}{\delta J}\partial_t J + J\partial_t\Phi + \Phi\partial_t J, \tag{3.16}$$

используя формулы (3.9) и (3.11), найдем $\partial_t\tilde{\Gamma}_k[\Phi] = -\partial_t W_k[J]$. Теперь вычислим производную $\partial_t W_k[J]$

$$
\begin{aligned}
\partial_t W_k[J] &= \frac{\partial_t Z_k[J]}{Z_k[J]} = -\frac{1}{Z_k[J]}\int \mathcal{D}\Theta(\partial_t \Delta S_k[\Theta])\exp\{-S[\Theta]-\Delta S_k[\Theta]+J\,\Theta\} = \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x_1 \mathrm{d}^d x_2 \frac{\partial_t R_k}{Z_k[J]}\int \mathcal{D}\Theta \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\exp\{-S[\Theta]-\Delta S_k[\Theta]+J\,\Theta\} = \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x_1 \mathrm{d}^d x_2 \partial_t R_k\left(\frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}+\frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x_1)}\frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x_2)}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x_1 \mathrm{d}^d x_2 \partial_t R_k\left(\frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}+\Phi(x_1)\Phi(x_2)\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x_1 \mathrm{d}^d x_2 \partial_t R_k \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} + \Delta S_k[\Phi].
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Используя свойство

$$
\frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} = \left(\frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k[\Phi]}{\delta\Phi(x_1)\delta\Phi(x_2)}\right)^{-1} = \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k[\Phi]}{\delta\Phi(x_1)\delta\Phi(x_2)}+R_k\right)^{-1}, \tag{3.18}
$$

получим уравнение Вейттериха [6]

$$
\partial_t \Gamma_k[\Phi] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x_1 \mathrm{d}^d x_2 \partial_t R_k \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k[\Phi]}{\delta\Phi(x_1)\delta\Phi(x_2)}+R_k\right)^{-1}. \tag{3.19}
$$

Учитывая локальность ядра $R_k \sim \delta(x_1 - x_2)$ в компактных обозначениях это уравнение примет вид

$$
\partial_t \Gamma_k[\Phi] = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \operatorname{tr}\ln(\Gamma^{(2)}+R_k), \tag{3.20}
$$

где $\Gamma^{(2)}$ – гессиан эффективного усреднённого действия $\Gamma_k[\Phi]$, производная $\tilde{\partial}_t$ действует только на ядро

$$
\tilde{\partial}_t = \int \mathrm{d}^d y\, \partial_t R_k(y)\frac{\delta}{\delta R_k(y)}. \tag{3.21}
$$

Удобно рассматривать уравнение (3.19) в импульсном представлении

$$\partial_t \Gamma_k[\Phi] = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d} \partial_t R_k(p) \left(\Gamma^{(2)}(p) + R_k(p)\right)^{-1}. \tag{3.22}$$

Это уравнение имеет однопетлевую структуру. Здесь нет необходимости вводить УФ обрезание, поскольку функция $\partial_t R_k(p)$ локализована в области $p \lesssim k$.

Уравнение (3.22) – точное интегро-дифференциальное уравнение, которое в принципе решает поставленную задачу о вычислении функционала $\Gamma[\Phi]$: необходимо найти асимптотику решения $\Gamma_k[\Phi]$ в ИК области $t \to -\infty$. При непосредственных вычислений используют различные приближённые схемы, которые, однако, не основаны на существовании в модели каких-либо малых параметров. Это открывает возможность для проведения непертурбативного анализа.

Действие $S$ обычно включает конечное число вершин, однако функционал $\Gamma[\Phi]$ генерирует 1-неприводимые функции Грина любого порядка, т.е. содержит всевозможные вершины, согласующиеся со свойствами симметрии. В этом смысле $\Gamma[\Phi]$ определен на бесконечномерном пространстве, натянутом на всевозможные типы вершин, причем соответствующие константы связи играют роль координат функционала. Исследовать ренормгрупповой ток бесконечного числа констант связи не представляется возможным, поэтому одна из наиболее распространённых схем связана с решением функционального уравнения (3.22) на ограниченном подпространстве, натянутом на конечное число мономов, что приводит к конечномерному РГ потоку. Уравнение Вейттериха зависит от функции $R_k$, тем не менее естественно предполагается независимость физических наблюдаемых от конкретного выбора ядра $R_k$. При решении РГ уравнения на суженном подпространстве имеет место слабая зависимость критических показателей от обрезания $R_k$ [61]. Здесь уместно вспомнить, что результаты борелевского пересуммирования $\varepsilon$-разложения тоже зависят от способа пересуммирования, что ни как не умаляет роль теории возмущений в общем и квантово-полевой ренормализационной группы в частности.

На суженном $m$-мерном подпространстве функционала $\Gamma_k[\Phi]$ можно представить в форме

$$\Gamma_k[\Phi] = \sum_{j=1}^{m} g_j(k)\mathcal{W}_j[\Phi], \tag{3.23}$$

где независимые локальные функционалы $\mathcal{W}_j[\Phi]$ образуют базис в данном подпространстве, константы связи $g_j(k)$ задают “координаты” в данном базисе. Подставляя разложение (3.23) в уравнение (3.22), получим

$$\partial_t\Gamma_k[\Phi] = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\beta}_j(g_1(k), \ldots, g_m(k), k)\mathcal{W}_j[\Phi], \tag{3.24}$$

старшие мономы с $j > m$ возникшие при этом не принадлежат рассматриваемому подпространству, поэтому они должны быть опущены. Чтобы найти фиксированную точку РГ потока, вводятся безразмерные заряды $\bar{g}_j(t)$, связанные с первоначальными соотношениями $g_j(k) = k^{\Delta_j}\bar{g}_j(t)$, где величина $\Delta_j$ включает не только каноническую размерность, но и аномальные вклады. Окончательно функциональное РГ уравнение сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial_t\bar{g}_j(t) = \beta_j(\bar{g}_1(t), \ldots, \bar{g}_m(t)), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.25}$$

здесь $\beta_j$-функции явно не зависят от переменной $t$. Они даются выражениями

$$\beta_j(\bar{g}_1(t), \ldots, \bar{g}_m(t)) = -\Delta_j\bar{g}_j(t) + k^{-\Delta_j}\widetilde{\beta}_j(k^{-\Delta_1}\bar{g}_1(t), \ldots, k^{-\Delta_m}\bar{g}_m(t), k), \tag{3.26}$$

начальные значения $\bar{g}_j(0)$ для РГ траекторий находятся из граничного условия $\Gamma_{k=\Lambda}[\Phi] = S[\Phi]$.

Возможные скейлинговые режимы модели находятся из анализа фазового портрета автономной системы (3.25). Пусть $g^* = \{g_1^*, \ldots, g_m^*\}$ – какая-либо неподвижная точка потока (3.25) при $t \to -\infty$. В малой окрестности $g^*$ линеаризуем РГ уравнения

$$\partial_t \bar{g}_j(t) \approx \omega_{ji}(\bar{g}_i(t) - g_i^*), \quad \omega_{ji} = \left.\frac{\partial \beta_j}{\partial \bar{g}_i}\right|_{\bar{g}=g^*}, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{3.27}$$

Решение системы имеет вид

$$\bar{g}_j(t) \approx g_j^* + \sum_i u_{ji} c_i e^{\lambda_i t}, \tag{3.28}$$

где $\lambda_i$ – собственные числа матрицы $\omega$, $c_i$ – константы интегрирования, $u_{ji}$ – матрица, осуществляющая диагонализацию $\omega$. РГ траектории движутся вдоль иррелевантных направлений, для которых $\lambda_i > 0$, в неподвижную точку; в релевантных направлениях – $\lambda_i < 0$ – траектории удаляются от фиксированной точки. В маргинальном случае $\lambda_i = 0$ линейного приближения не достаточно. В моделях, представляющих интерес, существуют как иррелевантные, так и релевантные направления, последние образуют критическую поверхность. Положим имеется одно направление с отрицательным значением $\lambda_1 < 0$, все остальные $\lambda_i > 0$. Например массивный член $\Theta^2$ всегда релевантен. В этом случае критический индекс $\nu$, связанный в сингулярностью корреляционного радиуса в критической точке, определяется формулой $\nu = -1/\lambda_1$ [6].

## 3.3 Непертурбативные РГ уравнения модели

Метод ЕАА переносится и на динамические модели (во избежании путаницы вместо обозначения $t$ для величины $\ln(k/\Lambda)$ в РГ уравнениях будем использовать обозначение $s$, при этом $t$ – время). В данном случае знак tr в уравнении (3.20) обозначает как интегрирование по импульсам, так и по частотам. Запишем действие модели $A$, модифицированное включением турбулентных пульсаций, (3.4)

$$S[\Theta] = \int \mathrm{d}^d x \mathrm{d}t \left\{ \lambda\, \phi' \nabla_t \phi + \phi' \, \frac{\delta H_0[\phi]}{\delta \phi} - \lambda\, \phi' \phi' + \frac{1}{2} \upsilon_i D_{ij}^{-1} \upsilon_j \right\}. \tag{3.29}$$

Наш дальнейший анализ основан на использовании следующего анзаца для решения уравнения (3.20)

$$\Gamma_k[\Phi] = \int \mathrm{d}^d x \mathrm{d}t \left\{ X_k\, \varphi' \left\{ \nabla_t + A_k \left( \partial_i v_i \right) \right\} \varphi + \varphi' \frac{\delta H_k[\varphi]}{\delta \varphi} - Y_k\, \varphi' \varphi' + \frac{1}{2} v_i D_{ij}^{-1} v_j \right\}, \tag{3.30}$$

где

$$H_k = \int \left\{ \frac{1}{2} Z_k \left( \nabla \varphi \right)^2 + U_k(\varphi) \right\} \mathrm{d}^d x. \tag{3.31}$$

Действие (3.29) галилеево-инвариантно, поэтому материальная производная $\nabla_t$ должна входить в анзац (3.30) единой структурой. Связанный с продольной компонентой поля скорости член $\partial_i v_i$ отсутствует в действии (3.29), однако его наличие в (3.30) ничем не запрещено. Безразмерная константа связи $A_k$ на УФ масштабе тривиальна $A_{k=\Lambda} = 0$. Член $v_i D_{ij}^{-1} v_j$, как показано ниже, вовсе не перенормируется. Чистая $A$ модель без включения скорости оказывается инвариантной относительно преобразований $t \to -t, \varphi \to \varphi, \varphi' \to \varphi' - \partial_t \varphi$, что ведёт к равенству $X_k = Y_k$ [2; 62]. Однако, данные преобразования не оставляют инвариантным действие (3.29) с включённым полем скорости. Поэтому в рассматриваемом случае $X_k \neq Y_k$. Ренормализационные функции $X_k, Y_k, Z_k, A_k$ зависят, не только от масштаба $k$, но и от поля $\varphi$, поэтому, следуя общей схеме разложения по полям, представим их и потенциал $U_k(\varphi)$ рядами в окрестности некоторой однородной нетривиальной конфигурации $\rho_k = \varphi_k^2/2$

$$X_k = X_k(\rho_k) + X_k^{(1)}(\rho_k)(\rho - \rho_k) + \ldots,$$
$$Y_k = Y_k(\rho_k) + Y_k^{(1)}(\rho_k)(\rho - \rho_k) + \ldots,$$
$$Z_k = Z_k(\rho_k) + Z_k^{(1)}(\rho_k)(\rho - \rho_k) + \ldots,$$
$$A_k = A_k(\rho_k) + A_k^{(1)}(\rho_k)(\rho - \rho_k) + \ldots,$$
$$U_k(\varphi) = \frac{\lambda_k}{2}(\rho - \rho_k)^2 + \ldots$$

где $\rho = \varphi^2/2$. В работе [61] было показано, что при исследовании скейлинговых явлений с помощью уравнения Вейттериха, разложение функционала $\Gamma_k[\Phi]$ по полям рационально проводить в окрестности его нетривиального однородного минимума $\rho_k \neq 0$. Такая тактика способствует улучшению сходимости полевых разложений и приводит к более точным результатам при учёте меньшего числа членов по сравнению с разложениями в окрестности $\rho_k = 0$. В настоящем анализе мы ограничимся учётом нулевых $k$-зависимых членов в разложении ренормализационных функций. Такое приближение называется LPA' (local potential approximation'), здесь учитывается перенормировка поля $\varphi$, в отличии от более простого LPA, где $Z_k \equiv 1$, и перенормируются лишь параметры потенциала $U_k(\varphi)$. Для потенциала примем квадратичную аппроксимацию.

Вблизи критичности ренормализационные функции демонстрируют степенное поведение $X_k \sim k^{-a_X}, Y_k \sim k^{-a_Y}$ и $Z_k \sim k^{-\eta}$, где $a_X, a_Y$ – аномальные размерности соответствующих величин, $\eta$ – индекс Фишера. Естественно определить “бегущие аномальные размерности” соотношениями

$$\gamma_k^X = -\partial_s \ln X_k, \quad \gamma_k^Y = -\partial_s \ln Y_k, \quad \eta_k = -\partial_s \ln Z_k. \tag{3.32}$$

По мере приближении к неподвижной точке при $s \to -\infty$ величины (3.32) стремятся к аномальным размерностям $a_X, a_Y, \eta$. Тогда динамический критический индекс $z$, определяющий дисперсию критических флуктуаций $\omega \sim k^z$, даётся выражением $z = 2 - \eta + a_X$.

В рассматриваемой модели (3.29) ИК регуляризатор $R_k$ является матрицей $5 \times 5$ по полевым индексам. Из структуры квадратичной части действия следует структура матрицы $R_k$

$$R_k = \begin{pmatrix} 0 & R_k^{\varphi}(p) & 0 \\ R_k^{\varphi}(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k^{v}(p) \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

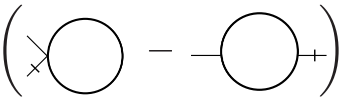
Наиболее часто используемым ядром является функция $R_k^{\varphi}(p) = (k^2 - p^2)\,\Theta(1 - p^2/k^2)$ [63]. В работах [64; 65] показано, что такой выбор в рамках $LPA'$ схемы ускоряет сходимость полевых разложений и повышает точность численных результатов, полученных в ведущих порядках разложения потенциала. Более того, тета-обра́зный регуляризатор допускает аналитическое вычисление петлевого интеграла (3.22). Отметим также, что при рассмотрении приближений с учётом более старших производных в разложении (3.31) используют более гладкие ядра, поскольку тета-регуляризатор из-за неаналитичести приводит к техническим трудностям. Из соображений размерности регуляризатор $R_k^v(p)$ возьмём в виде $R_k^v(p) = (k^{d+\zeta} - p^{d+\zeta})\,\Theta(1 - p^2/k^2)\mathrm{I}$, где $\mathrm{I}$ – единичная матрица по индексам поля скорости.

Как было описано ранее, подстановка аназаца (3.30) в функциональное РГ уравнение (3.22) приводит к системе РГ уравнений на константы связи. Функция $X_k = X_k(\rho_k)$ находится подходящим дифференцированием $\Gamma_k$

$$X_k(\rho_k) = \lim_{\substack{\omega \to 0 \\ q \to 0}} \partial_{i\omega} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\varphi(-q, -\omega)\delta\varphi'(q, \omega)}\Bigg|_{\substack{\varphi' = v_j = 0 \\ \rho = \rho_k}}, \tag{3.34}$$

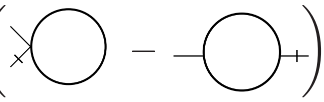
действуя производной $\partial_s$ на обе части равенства и используя уравнение Вейттериха (3.22), получим

$$\partial_s X_k(\rho_k) = \frac{1}{2}\,\overline{\partial}_s \lim_{\substack{\omega\to 0\\ q\to 0}} \partial_{i\omega} \left.\frac{\delta^2 \operatorname{tr}\ln\left(\Gamma_k^{[2]} + R_k\right)}{\delta\varphi(-q,-\omega)\delta\varphi'(q,\omega)}\right|_{\substack{\varphi'=v_j=0\\ \rho=\rho_k}} =$$

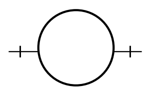
$$= \frac{1}{2}\,\overline{\partial}_s \lim_{\substack{\omega\to 0\\ q\to 0}} \partial_{i\omega} \Bigg($$

$$\Bigg). \qquad (3.35)$$

Аналогичными действиями получим РГ уравнения для "константы" ренормализации поля

$$\partial_s Z_k(\rho_k) = \frac{1}{2}\,\overline{\partial}_s \lim_{\substack{\omega\to 0\\ q\to 0}} \partial_{q^2} \left.\frac{\delta^2 \operatorname{tr}\ln\left(\Gamma_k^{[2]} + R_k\right)}{\delta\varphi(-q,-\omega)\delta\varphi'(q,\omega)}\right|_{\substack{\varphi'=v_j=0\\ \rho=\rho_k}} =$$

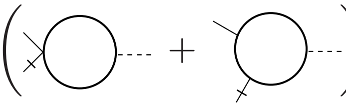
$$= \frac{1}{2}\,\overline{\partial}_s \lim_{\substack{\omega\to 0\\ q\to 0}} \partial_{q^2} \Bigg($$

$$\Bigg), \qquad (3.36)$$

для аномальной размерности $Y_k(\rho_k)$

$$\partial_s Y_k(\rho_k) = -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\omega\to 0\\ q\to 0}} \left.\frac{\delta^2 \partial_s \Gamma_k}{\delta\varphi'(-q,-\omega)\delta\varphi'(q,\omega)}\right|_{\substack{\varphi'=v_j=0\\ \rho=\rho_k}} = -\frac{1}{4}\,\overline{\partial}_s \lim_{\substack{\omega\to 0\\ q\to 0}}$$

$$, \qquad (3.37)$$

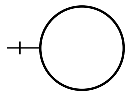
и РГ уравнение

$$\partial_s [X_k(\rho_k) A_k(\rho_k)] = \lim_{\substack{\omega,\nu\to 0\\ q,p\to 0}} \partial_{iq_j} \left.\frac{\delta^3 \partial_s \Gamma_k}{\delta v_j(q,\omega)\delta\varphi(-q-p,-\omega-\nu)\delta\varphi'(p,\nu)}\right|_{\substack{\varphi'=v_j=0\\ \rho=\rho_k}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\overline{\partial}_s \lim_{\substack{\omega,\nu\to 0\\ q,p\to 0}} \partial_{iq_j} \Bigg($$

$$\Bigg), \qquad (3.38)$$

позволяющее вместе с уравнением (3.35) найти эволюцию заряда $A_k(\rho_k)$. Также получим поток для вариационной производной потенциала

$$\partial_s \frac{\delta H_k[\varphi]}{\delta\varphi} = \lim_{\substack{\omega\to 0\\ q\to 0}} \frac{\delta \partial_s \Gamma_k}{\delta\varphi'(q,\omega)}\bigg|_{\substack{\varphi'=v_j=0\\ \rho=\rho_k}} = \frac{1}{2}\,\overline{\partial}_s \lim_{\substack{\omega\to 0\\ q\to 0}} \quad . \tag{3.39}$$



В диаграммах внешним хвостам соответствуют поля: пунктирная линия – поле скорости, перечёркнутая линия – поле $\varphi'$. Линии в петлях соответствуют пропагатору $(\Gamma_k^{[2]} + R_k)^{-1}$, чьи элементы взяты на конфигурации $\{\varphi' = v_j = 0, \varphi = \varphi_k\}$. Найдем его. Матрица $\Gamma_k^{[2]}$ в координатном представлении имеет вид

$$\Gamma_k^{[2]} = \begin{pmatrix} \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\varphi_1\delta\varphi_2} & \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\varphi_1\delta\varphi_2'} & \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\varphi_1\delta v_{j_2}} \\ \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\varphi_1'\delta\varphi_2} & \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\varphi_1'\delta\varphi_2'} & \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\varphi_1'\delta v_{j_2}} \\ \frac{\delta\Gamma_k}{\delta v_{i_1}\delta\varphi_2} & \frac{\delta\Gamma_k}{\delta v_{i_1}\delta\varphi_2'} & \frac{\delta\Gamma_k}{\delta v_{i_1}\delta v_{j_2}} \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

где $\varphi_1 = \varphi(x_1, t_1)$, прочие поля аналогично. Подставляя сюда разложение (3.30), получим в импульсно-частотном представлении

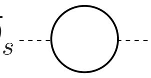
$$\Gamma_k^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\,\omega X_k + Z_k p^2 + 2\lambda_k\rho_k & 0 \\ -\mathrm{i}\,\omega X_k + Z_k p^2 + 2\lambda_k\rho_k & -2Y_k & \mathrm{i}\,p_i X_k A_k \varphi_k \\ 0 & -\mathrm{i}\,p_j X_k A_k\varphi_k & D_{ji}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Окончательно приходим к выражению для искомого пропагатора

$$(\Gamma_k^{[2]} + R_k)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2Y_k + (X_k A_k \varphi_k)^2 p_j D_{ji} p_i}{|h_k|^2} & \frac{1}{h_k^*} & -\mathrm{i}\,p_j D_{ji}\frac{X_k A_k\varphi_k}{h_k^*} \\ \frac{1}{h_k} & 0 & 0 \\ \mathrm{i}\,p_i D_{ji}\frac{A_k\varphi_k}{h_k} & 0 & (D_{ji}^{-1} + R_k^v)^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

где $h_k = \mathrm{i}\,\omega X_k + Z_k p^2 + 2\lambda_k\rho_k + R_k^{\varphi}$.

Заметим, что $t$-локальность действия $v_i D^{-1}_{ij} v_j$ связана с галилеевой инвариантностью модели. Действительно, рассмотрим преобразование $x - x' \to x - x' + V(t-t')$, тогда коррелятор скорости $\langle \upsilon_j(x,t)\upsilon_i(x',t')\rangle = D_{ji}(x-x', t-t')$ преобразуется по закону $D_{ji}(x-x', t-t') \to D_{ji}(x-x'+V(t-t'), t-t')$. Чтобы обеспечить инвариантность действия $v_i D^{-1}_{ij} v_j$, мы должны брать коррелятор в виде $D_{ji}(x-x', t-t') = \delta(t-t')\bar{D}_{ji}(x-x')$ (3.3), где $\bar{D}_{ji}(x-x')$ зависящая исключительно от координат функция. Теперь формально можно выписать РГ уравнение на $D^{-1}_{ij}$. Оно даётся диаграммой

$$\partial_s D^{-1}_{ij} = -\frac{1}{2}\,\overline{\partial}_s$$  ,

на нулевой втекающей частоте. Из-за запаздывающей структуры пропагатора граф содержит произведение $\Theta(t-t')\Theta(t'-t)$ (либо в импульсном представлении – $\int \mathrm{d}\omega h_k^{-2}$), поэтому имеет место тождественное равенство $\partial_s D^{-1}_{ij} = 0$. Действие для поля скорости $v_i D^{-1}_{ij} v_j$ не перенормируется.

Следующий шаг связан переходом к безразмерным зарядам

$$\begin{aligned} g_1 &= X_k^{-1}\, Y_k\, Z_k^{-2}\, k^{d-4}\, \lambda_k, \quad g_2 = X_k\, Z_k^{-1} k^{-\zeta} D_0, \\ g_3 &= X_k\, Y_k^{-1}\, Z_k\, k^{2-d}\, \rho_k, \quad g_4 = A_k, \end{aligned} \tag{3.43}$$

где переменные $\lambda_k, \rho_k$ могут быть выражены через потенциал соотношениями $\lambda_k = U''_k(\rho_k)$ и $U'_k(\rho_k) = 0$, здесь $U'_k = \partial U_k/\partial\rho$. Также удобно переопределить безразмерные константы $g_1 \to g_1/c(d)$, $g_2 \to g_2/c(d)$, $g_3 \to c(d)\, g_3$, где $c(d) = \left(2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)\right)^{-1}$. В результате получаем выражения для аномальных размерностей (3.32) и РГ уравнения для констант связи

$$\gamma_k^X = \left\{\frac{9}{2}\, g_1^2\, g_3\, Q(3{,}0{,}1{,}0) - \frac{3}{2}\, g_1\, g_2\, g_3\, g_4^2\, \alpha\, Q(2{,}1{,}0{,}1|0{,}0)\right\}, \tag{3.44}$$

$$\gamma_k^Y = \left\{\frac{9}{2}\, g_1^2\, g_3\, Q(3{,}0{,}2{,}0|0{,}0) + 3\, g_1\, g_2\, g_3\, g_4\, (1-g_4)\, \alpha\, Q(2{,}1{,}1{,}1|0{,}0) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} g_2\, (1-g_4)^2 \alpha\, Q(1{,}1{,}1{,}1|0{,}0)\right\},$$

$$\eta_k = -\left\{\frac{9}{2\,d} g_1^2\, g_3\, [2\, Q(4{,}0{,}1{,}1|1{,}2) - 2\, Q(3{,}0{,}1{,}1|2{,}1) - d\, Q(3{,}0{,}1{,}0|1{,}1)] + \right.$$
$$+ \frac{3\alpha}{2\,d} g_1\, g_2\, g_3\, g_4 [2\, Q(2{,}1{,}0{,}1|1{,}1) - 2\, g_4\, Q(3{,}1{,}0{,}2|1{,}2) +$$
$$\left. + 2\, g_4 Q(2{,}1{,}0{,}2|2{,}1) + d\, g_4\, Q(2{,}1{,}0{,}1|1{,}1)] - g_2 \frac{d-1+\alpha}{2\,d} Q(0{,}1{,}0{,}0|0{,}0)\right\},$$

$$\partial_s g_1 = (d - 4 + \gamma_k^X - \gamma_k^Y + 2\,\eta_k)\, g_1 + \left\{\frac{9}{2}\, g_1^2 Q(2{,}0{,}1{,}0|0{,}0)\ - \right. \tag{3.45}$$
$$\left. - \frac{3}{2} g_1\, g_2\, g_4^2\, \alpha Q(1{,}1{,}0{,}1|0{,}0)\right\},$$

$$\partial_s g_2 = -\zeta\, g_2 + (\eta_k - \gamma_k^X)\, g_2,$$

$$\partial_s g_3 = -(d - 2 + \gamma_k^X - \gamma_k^Y + \eta_k)\, g_3 + \left\{\frac{3}{2} Q(1{,}0{,}1{,}0|0{,}0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha g_2\, g_4 (1-g_4)}{2\, g_1} Q(0{,}1{,}0{,}1|0{,}0)\right\},$$

$$\partial_s g_4 = g_4\, \gamma_k^X - \left\{18\, g_1^2\, g_3 \left(g_4 Q(3{,}0{,}1{,}0|0{,}0) - \frac{3}{2\,d} Q(4{,}0{,}1{,}1|1{,}1)\right) - \right.$$
$$- 6\alpha g_1\, g_2\, g_3\, g_4^2 \left(\frac{g_4}{2} Q(2{,}1{,}0{,}1|0{,}0) - Q(3{,}1{,}0{,}2|1{,}1)\right) -$$
$$\left. -3\, g_1 \left(\frac{g_4}{2} Q(2{,}0{,}1{,}0|0{,}0) - \frac{1}{2\,d} Q(3{,}0{,}1{,}1{,}|1{,}1)\right)\right\}.$$

Безразмерные функции зарядов

$$Q(n_1, n_2, n_3, n_4 | m_1, m_2) \equiv -\widetilde{\partial}_s \int_0^\infty \frac{(1+f(y))^{n_3}}{h_1(y)^{n_1}\, h_2(y)^{n_2}} \left[h_1^{(m_1)}\right]^{m_2} y^{(d/2-1+n_4)} \mathrm{d}y,$$

$$\widetilde{\partial}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \left\{ s_1(y) \frac{\delta}{\delta r_1(y)} + s_2(y) \frac{\delta}{\delta r_2(y)} \right\}, \tag{3.46}$$

отражают непертурбативный характер РГ уравнений. Здесь $h_1(y) = y + r_1(y) + 2\, g_1\, g_3$, $h_2(y) = y + r_2(y)$, $s_1(y) = (2 - \eta_k)\, r_1(y) - 2\, y\, r_1'(y)$, $s_2(y) = (d + \zeta)\, r_2(y) - 2\, y\, r_2'(y)$, $h_1^{(m_1)}(y) = \partial^{m_1} h_1(y)/\partial y^{m_1}$, $r_1(y) = (1 - y)\Theta(1 - y)$, $r_2(y) = (1 - y^{(d+\zeta)/2})\Theta(1 - y)$, $f(y) = g_2\, g_3\, g_4^2 \alpha y / h_2(y)$.

В отсутствии поля скорости вклад вершины с зарядом $g_2$ опускается, и уравнения сводятся с известным РГ уравнениям для модели $A$ [35]. В противном случае, когда вершина с зарядом $g_1$ не рассматривается, мы приходим к результатам анализа модели Крейчнана турбулентного переноса пассивной примеси [10].

Рассмотрим предел слабой связи модели (3.29), раскладывая систему (3.48) в окрестности логарифмической размерности $d = 4 - \varepsilon$ и считая заряды малыми. Также учтём условие $\varepsilon \sim \zeta \to 0$, которое предполагается при исследовании модели в рамках квантово-полевой РГ [53] и является необходимым для обеспечения ИК существенности обеих вершин. Система уравнений в ведущем порядке (что соответствует однопетлевому приближению) имеет вид

$$
\begin{aligned}
\partial_s g_1 &= (-\varepsilon - \gamma_k^Y + 2\, \eta_k)\, g_1 + \left\{ \frac{9}{2}\, g_1^2 Q(2{,}0{,}1{,}0|0{,}0) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{2} g_1\, g_2\, g_4^2\, \alpha Q(1{,}1{,}0{,}1|0{,}0) \right\}, \\
\partial_s g_2 &= -\zeta\, g_2 + \eta_k\, g_2, \\
\partial_s g_3 &= -(2 - \varepsilon - \gamma_k^Y + \eta_k)\, g_3 + \left\{ \frac{3}{2} Q(1{,}0{,}1{,}0|0{,}0) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha g_2\, g_4 (1 - g_4)}{2\, g_1} Q(0{,}1{,}0{,}1|0{,}0) \right\}, \\
\partial_s g_4 &= -3\, g_1 \left( \frac{g_4}{2} Q(2{,}0{,}1{,}0|0{,}0) - \frac{1}{2\, d} Q(3{,}0{,}1{,}1{,}|1{,}1) \right),
\end{aligned}
$$

аномальные размерности даются соотношениями

$$\begin{aligned}
\gamma_k^X &= 0, \\
\gamma_k^Y &= \frac{1}{2} g_2\,(1-g_4)^2 \alpha\, Q(1{,}1{,}1{,}1|0{,}0), \\
\eta_k &= g_2 \frac{3+\alpha}{2\,d} Q(0{,}1{,}0{,}0|0{,}0).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Всюду, кроме уравнения на $g_3$, функции $Q$ следует брать в нулевом приближении по зарядам. Прямые вычисления дают $Q(1{,}1{,}1{,}1|0{,}0) = 2$, $Q(0{,}1{,}0{,}0|0{,}0) = 2$, $Q(2{,}0{,}1{,}0|0{,}0) = 2$, $Q(1{,}1{,}0{,}1|0{,}0) = 2$, $Q(3{,}0{,}1{,}1,|1{,}1) = d/2$, $Q(1{,}0{,}1{,}0|0{,}0) = 1-4g_1g_3+2g_2g_3g_4^2\alpha$, $Q(0{,}1{,}0{,}1|0{,}0) = 4/3$. В работе [53] вместо величины $g_3$ использовалась переменная $\tau = g_1g_3$. Окончательно мы получим для РГ уравнений

$$\begin{aligned}
\partial_s g_1 &= -\varepsilon g_1 + 9g_1^2 + \frac{3+\alpha}{2} g_1 g_2 - \alpha[3g_4^2 + (1-g_4)^2] g_1 g_2 \\
\partial_s g_2 &= -\zeta\, g_2 + \frac{3+\alpha}{4} g_2^2, \\
\partial_s \tau &= -\tau(2+\gamma_\tau) + \frac{3}{2} g_1 + \frac{2}{3}\alpha g_2\, g_4 (1-g_4), \\
\partial_s g_4 &= \frac{3}{4}\, g_1 (4g_4 - 1),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

и для аномальных размерностей

$$\begin{aligned}
\gamma_k^X &= 0, \\
\gamma_k^Y &= g_2\,(1-g_4)^2 \alpha \\
\eta_k &= g_2 \frac{3+\alpha}{4},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

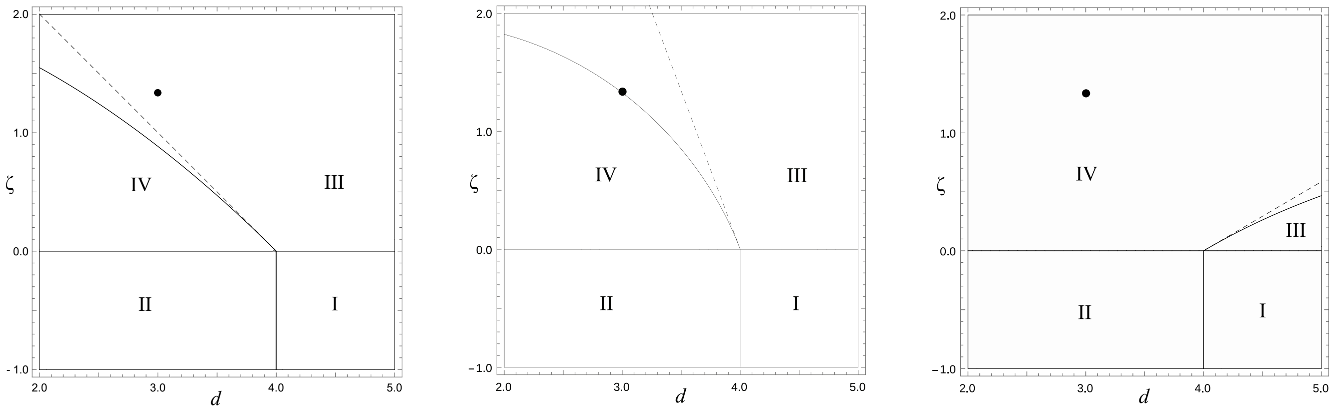
где $\gamma_\tau = -3g_1 - g_2(3+\alpha)/4$. Данные выражения в точности воспроизводят результаты однопетлевых расчётов [53], что можно считать проверкой наших вычислений.

### 3.4 Скейлинговые режимы модели

Система (3.48) зависит от трёх параметров $\alpha, d, \zeta$, поэтому мы будем рассматривать картину скейлинговых режимов модели в плоскости $(d, \zeta)$ при некоторых значениях “сжимаемости” $\alpha$. Результаты вычислений показаны на Рис. 3.1. В рассматриваемой модели обнаружено четыре ИК-устойчивых скейлинговых режима

- I. Гауссова фиксированная точка: $g_{1*} = g_{2*} = 0, \forall g_{4*}$. Флуктуации параметра порядка и поля скорости здесь несущественны. Динамический критический индекс $z = 2$.
- II. Фиксированная точка, соответствующая чистой $A$ модели: $g_{1*} \neq 0, g_{2*} = 0, g_4 = 0$. Здесь ведущую роль играют критические флуктуации, в то время как турбулентные пульсации, с заданным коррелятором () при $\zeta < 0$, оказываются несущественными. Численные оценки дают значение критического индекса $z \approx 2.046$ при $d = 3$ и $z \approx 2.151$ при $d = 2$. Модель $A$ также была исследована в работе [35] в рамках UZA аппроксимации, которая учитывает зависимость ренормализационных функций $X_k, Z_k$ от полей.
- III. Фиксированная точка, соответствующая модели Крейчнана турбулентного переноса пассивной примеси: $g_{1*} = 0, g_{2*} \neq 0, g_4 = 0$. В данном случае критические индексы вычисляются точно $\nu^{-1} = 2 - \zeta, \eta = \zeta, z = 2 - \zeta$ и для физического случая ($\zeta = \zeta_K$)воспроизводят закон Ричардсона [44]. Данный режим оказывается устойчивым при значениях $\alpha < \alpha_c \approx 2.26$.
- IV. Фиксированная точка: $g_{1*} \neq 0, g_{2*} \neq 0, g_{4*} \neq 0$. В данном случае существенны как критические, так и турбулентные флуктуации. Скейлинговый режим становится ИК устойчивым при $\alpha > \alpha_c \approx 2.26$. Динамический критический индекс здесь находится точно $z = 2 - \zeta$.

Прочие показатели: $\nu^{-1}, \eta$ – являются неуниверсальными. Их зависимость от $\alpha$ показана на Рис.3.2. Экстраполяция индексов при $\alpha \to \infty$ даёт $\eta \approx 1.47$ и $\nu^{-1} \approx 2.75$.




(а) (б) (в)

Рисунок 3.1 — Область ИК устойчивых фиксированных точек в модели (3.29). Пунктирная линия – граница между областями $III$ и $IV$ предсказываемая в рамках однопетлевых расчётов [53]. Точка $(3, 4/3)$ – физическая точка. Фазовые диаграммы при различной “сжимаемости” $\alpha$: случай $\alpha = 1$ показан на рисунке (а); случай $\alpha = 2.2$ показан на рисунке (б); случай $\alpha = 10$ – на рисунке (в).

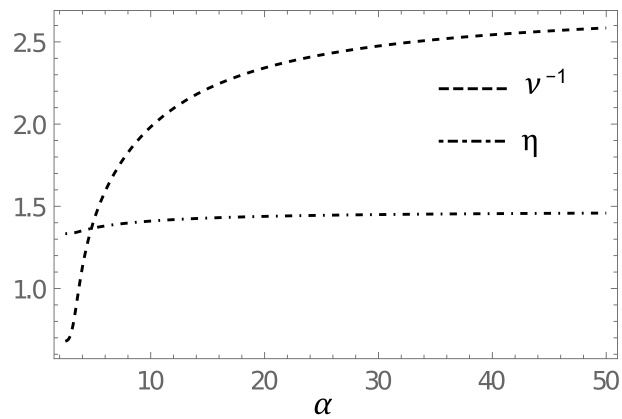



Рисунок 3.2 — Неуниверсальные критические показатели $\nu^{-1}, \eta$ модели (3.29) в режиме $IV$.

Существование нетривиального скейлингового режима $IV$ предсказано в работе [53], где для $\alpha_c$ получено значение $\alpha_c = \alpha_c^{1-loop} = 15/7 \approx 2.14$, при котором в реальной системе $d = 3$ и $\zeta = \zeta_K$ крупномасштабное поведение формируется благодаря совокупной роли критичности и турбулентности.

Однако однопетлевые разложения критических показателей не могут быть использованы при реальных значениях параметров разложения [53]. В случае “малой сжимаемости” $\alpha < \alpha_c$ реализуется режим $III$. Когда параметр $\alpha$ превосходит $\alpha_c$, скейлинговое поведение системы определяется режимом $IV$, см. Рис. 3.1(в). Относительная разница между величинами $\alpha_c = 2.26$ и $\alpha_c^{1-loop} = 2.14$ оказывается небольшой. Таким образом, непертурбативный анализ подтверждает выводы качественного характера работы [53].

## Заключение

В настоящей работе непертурбативные подходы: инстантонный анализ и метод эффективного усреднённого действия – были применены к трём моделям, описывающим поведение систем вблизи критической точки или точки фазового перехода. В рамках инстантонного анализа рассматривалась модель скалярного поля $\phi^3$ и эффективная матричная модель, описывающая поведение коллектива фермионов с высшим спином в окрестности точки перехода системы в сверхтекучее состояние. Динамическая модель $A$ с учётом турбулентного переноса Крейчнана была исследована методом непертурбативной ренормгруппы. Основные результаты работы заключаются в следующем.

В модели $\phi^3$ в размерной регуляризации $d = 6-\varepsilon$ и схеме ренормировки MS были найдены асимптотики высоких порядков разложений по заряду ренормгрупповых функций и АВП $\varepsilon$-разложения критического индекса $\eta$ (1.48). Проведено сравнение (см. Табл. 2) коэффициентов разложения с соответствующими им значениями, вычисляемыми по асимптотической формуле, и обнаружен монотонное стремление к асимптотике. Проведено пересуммирование $\varepsilon$-разложения индекса Фишера на основе известных четырехпетлевых результатов [41]. Найденная АВП позволила фиксировать произвол схемы пересуммирования.

В матричной модели инстантон имеет структуру с различным числом $n$ нетривиальных блоков (2.23). В АВП (2.25) $\varepsilon$-разложения уравнений РГ (2.16) это приводит к серии величин $a(n)$, которые меняются вместе с эволюцией инвариантных зарядов $\bar{g}_1, \bar{g}_2$. Наибольший вклад в АВП в некоторой области плоскости $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ даёт наибольший по модулю $a(n)$ в данной области. Показано, что в действительности АВП определяется инстантоном с одним нетривиальным блоком в физической области, представляющей интерес с точки зрения исследования ИК поведения модели. Результаты пересуммирования РГ уравнений конформным методом Бореля-Лероя на основе известных пятипетлевых расчётов показали, что при $N \geq 4$ в модели отсутствуют ИК-устойчивые фиксированные точки, т.е. такая система не демонстрирует критический скейлинг. РГ траектории в ИК пределе покидают область устойчивости системы. Для корректного рассмотрения поведения модели в этом случае были рассмотрены старшие члены в разложении Ландау-Гинзбурга, стабилизирующие систему. В силу своей ИК несущественности при ренормировки в одной петле они рассматривались как составные операторы. Анализ позволяет сделать заключение, что в системе фермионов со спином $s > 1/2$ происходит фазовый переход первого рода, причём значение температуру этого перехода выше оценки, даваемой теорией среднего поля Ландау (2.45). В двумерной системе однозначного ответа об ИК поведении модели в рамках борелевского пересуммирования пятипетлевых разложений дать нельзя. Заметим, что при $d = 2$ поле $\chi$ оказывается безразмерным, поэтому все вершины в разложении Ландау-Гинзбурга оказываются одинаково существенными, и ограничиваться лишь членами $\sim \chi^4$ нельзя.

В последней главе рассмотрена модель $A$ стохастической динамики несохраняющегося параметра порядка в $d$ измерениях в присутствии сильно развитого турбулентного течения, моделируемого ансамблем Крейчнана с показателем $\zeta$ и параметром $\alpha$, учитывающим сжимаемость потока. Стохастическая задача (3.1) сформулированная на полевой языке позволила применить метод эффективного усреднённого действия, заключающийся в решении точного РГ уравнения Вейттериха на функционалах (3.30). При решении использовалось приближение $LPA'$ и тета-образный ИК регуляризатор, оптимизирующий решения в выбранном приближении. В пределе слабой связи $4 - d \sim \zeta \to 0$ полученные непертурбативные РГ уравнений воспроизвели результаты однопетлевых расчётов [53]. Исследование ИК асимптотики РГ траекторий выявили существование черырёх ИК-притягивающих фиксированных точек. При физических значениях параметров задачи $d = 3$ и $\zeta = 4/3$

система может находится в двух режимах. В случае “слабой” сжимаемости $\alpha < \alpha_c$ критические флуктуации параметра порядка иррелевантны и среда пассивно перемешивается турбулентным полем скорости, демонстрируя скейлинговое поведение с точными значениями критических показателей. В сжимаемой среде $\alpha > \alpha_c$ скейлинговое поведение устанавливается за счёт одинаково релевантного влияния турбулентных и критических флуктуаций. Данный режим был обнаружен в работе [53], однако старшие порядки теории возмущений могли кардинально изменить однопетлевые результаты. Проведённый непертурбативный анализ подтвердил существования нового нетривиального скейлингового режима и позволил оценить значения критических показателей, которые оказались неуниверсальными, а зависящими от параметра $\alpha$ (см. Рис. 3.2).

## Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Налимову Михаилу Юрьевичу за неоценимое многолетнее сотрудничество и наставничество; профессору Гнатичу Михалу за многочисленные советы, конструктивную критику и всестороннюю помощь в процессе работы над диссертацией; профессору Аджемяну Лорану Цолаковичу за обсуждение рядя вопросов, затронутых в настоящей работе; Компанийцу Михаилу Владимировичу за соучастие при проведении исследований и подготовке научных статей.

Автор признателен сотрудникам кафедры статистической физики; своим одногруппникам: Волгину Игорю, Дьяконову Игорю, Ивановой Эле и Куликову Анатолию; своим друзьям: Артёму, Ирине, Никите, Александру, Василию, Олегу, Анастасии; коллегам: Томашу, Шарлоте, Лукашу, Виктору; своим близким: Людмиле, Валентине, Георгию, Андрею, Виктории.

*Я посвящаю эту диссертацию своей Маме.*

## Список литературы


1. *Wilsonab K. G.*, *Kogut J.* The renormalization group and the ε-expansion // Physics Reports. — 1974. — T. 12, № 25. — C. 75.
2. *Васильев А. Н.* Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. — СПб. : ПИЯФ, 1998. — 774 с.
3. *Kleinert H.* Critical Properties of $\phi^4$-Theories. — Singapore : World Scientific Publishing, 2001. — C. 512.
4. *Боголюбов Н. Н.*, *Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — Четвёртое. — Москва : Наука, 1984. — 600 с.
5. *Wetterich C.* Exact evolution equation for the effective potential // Phys. Lett. B. — 1993. — T. 301. — C. 90.
6. *Berges J.*, *Tetradis N.*, *Wetterich C.* Exact evolution equation for the effective potential // Physics Reports. — 2002. — T. 363. — C. 223.
7. *Gracey J. A.* Four loop renormalization of $\phi^3$ theory in six dimensions // Phys. Rev. D. — 2015. — July. — Vol. 92, no. 2. — P. 025012.
8. *Комарова М. В.*, *Налимов М. Ю.*, *Хонконен Ю.* Температурные функции Грина в ферми-системах: сверхпроводящий фазовый переход // ТМФ. — 2013. — T. 176, № 1. — C. 89.
9. *Hohenberg P. C.*, *Halperin B. I.* Theory of dynamic critical phenomena // Rev. Mod. Phys. — 1977. — T. 49. — C. 435.
10. *Pagani C.* Functional renormalization group approach to the Kraichnan model // Phys. Rev. E. — 2015. — T. 92. — C. 033016.
11. *Fisher M. E.* Lee-Yang edge singularity and $\phi^3$ field theory // Phys. Rev. Lett. — 1978. — June. — Vol. 40, no. 25. — P. 1610.

12. *Lee T. D.*, *Yang C. N.* Statistical theory of equation of state and phase transitions. II. Lattice gas and Ising model // Phys. Rev. — 1952. — Aug. — Vol. 87, no. 3. — P. 410.

13. *Binek C.*, *Kleemann W.*, *Aruga Katori H.* Yang–Lee edge singularities determined from experimental high-field magnetization data // J. Phys.: Condens. Matter. — 2001. — Aug. — Vol. 13. — P. 811.

14. Superconductivity. Conventional and Unconventional Superconductors. T. 1 / под ред. K. Bennemann, J. Ketterson. — Verlag Berlin Heidelberg : Springer, 2008. — 1584 с.

15. *Legget A. L.* Quantum Liquids: Bose condensation and Cooper pairing in condensed-matter systems. — First. — Oxford : Oxford University Press, 2006. — 408 с.

16. *Cazalilla M. A.* Ultracold Fermi gases with emergent $SU(N)$ symmetry // Reports on Progress in Physics. — 2014. — Т. 77, № 12. — С. 124401.

17. *Cherng R. W.*, *Refael G.*, *E. D.* Superfluidity and Magnetism in Multicomponent Ultracold Fermions // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Т. 99. — С. 130406.

18. *Ozawa T.*, *Baym G.* Population imbalance and pairing in the BCS-BEC crossover of three-component ultracold fermions // Phys. Rev. A. — 2010. — Т. 82. — С. 063615.

19. *Bohn J. L.* Cooper pairing in ultracold $^{40}K$ using Feshbach resonances // Phys. Rev. A. — 2000. — Т. 61. — С. 053409.

20. *Wu C.* Exotic many-body physics with large-spin Fermi gases // Physics. — 2010. — Т. 3. — С. 92.

21. *Ho T.*, *Yip S.* Pairing of Fermions with Arbitrary Spin // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Т. 82, № 2. — С. 247.

22. *Sakaida M.*, *Kawakami N.* Disorder-induced charge-density-wave–superfluid transition in $SU(N)$ Fermi systems // Phys. Rev. A. — 2014. — Т. 90. — С. 013632.

23. *Cazalilla M. A.*, *Ho A. F.*, *Ueda M.* Ultracold gases of ytterbium: ferromagnetism and Mott states in an SU(6) Fermi system // New Journal of Physics. — 2009. — Т. 11. — С. 103033.

24. *Kagan M. Y.*, *Baranov R. W.* On the possibility of a superfluid transition in a Fermi gas of neutral particles at ultralow temperatures // JETP Lett. — 1996. — Т. 64, № 4. — С. 301.

25. *Katsnelson M. I.* Graphene. Carbon in Two Dimensions. — Camdridge : Camdridge University press, 2012. — С. 363.

26. *Иванов Д. Ю.* Критическое поведение неидеализированных систем. — Москва : Физматлит, 2003. — 248 с.

27. *Анисимов М. А.* Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. — Москва : Наука, 1987. — 272 с.

28. *Khabibullaev P. K.*, *Saidov A. A.* Phase Separation in Soft Matter Physics: Micellar Solutions, Microemulsions, Critical Phenomena. — New York : Springer, 2003. — 180 с.

29. *Frish U.* Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov. — First. — Cambridge : Cambridge University Press, 1996. — 312 с.

30. *Липатов Л. Н.* Расходимость рядов теории возмущения и квазиклассичесая теория // ЖЭТФ. — 1977. — Т. 72. — С. 411.

31. *Комарова М. В.*, *Налимов М. Ю.* Асимптотика старших порядков теории возмущений: константы ренормировки $O(n)$-симметричной теории $\phi^4$ в $(4-\varepsilon)$-разложении // ТМФ. — 2001. — Т. 126, № 3. — С. 409.

32. *Brezin E.*, *Le Guillou J. C.*, *Zinn-Justin J.* Perturbation theory at large order. I: the $\Phi^{2N}$ interaction // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 15. — С. 1544.

33. *Honkonen J.*, *Komarova M. V.*, *Nalimov M. Y.* Instantons for dynamic models from $B$ to $H$ // Nuclear Physics B. — 2005. — Т. 714, № 3. — С. 292.

34. *Суслов И. М.* Расходящиеся ряды теории возмущений // ЖЭТФ. — 2005. — Т. 127, № 6. — С. 1350.

35. *Canet L.*, *Chate H.* A non-perturbative approach to critical dynamics // Journal of Physics A. — 2007. — Т. 40. — С. 1937.

36. Dynamic universality class of Model C from the functional renormalization group / D. Mesterhazy [и др.] // Phys. Rev. B 88. — 2013. — Т. 88. — С. 174301.

37. *Canet L.*, *Delamotte B.*, *Wschebor N.* Fully developed isotropic turbulence: Nonperturbative renormalization group formalism and fixed-point solution // Phys. Rev. E. — 2016. — Т. 93. — С. 063101.

38. Nonperturbative Renormalization-Group Study of Reaction-Diffusion Processes / L. Canet [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Т. 92. — С. 195703.

39. Nonperturbative Renormalization Group for the Kardar-Parisi-Zhang Equation / L. Canet [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Т. 104. — С. 150601.

40. *Аджемян Л. Ц.*, *Компаниец М. В.* Ренормгруппа и $\varepsilon$-разложение: представление $\beta$-функций и аномальных размерностей несингулярными интегралами // ТМФ. — 2011. — Окт. — Т. 169, № 1. — С. 110.

41. *Pismensky A. L.* Calculation of critical index $\eta$ of the $\phi^3$-theory in 4-loop approximation by the conformal bootstrap technique // Int. J. Mod. Phys. A. — 2015. — Авг. — Т. 30, № 24. — С. 1550138.

42. *Falkovich G.*, *Gawedzki K.*, *Vergassola M.* Particles and fields in fluid turbulence // Rev. of Mod. Phys. — 2001. — Т. 73. — С. 913.

43. *Kraichnan R. H.* Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Т. 72. — С. 1016.

44. *Монин А. С.*, *Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Т. 2. — Москва : Наука, 1967. — 720 с.

45. *Adzhemyan L. T.*, *Antonov N. N.*, *Vasiliev A. N.* The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence. — Philadelphia : Gordon, Breach Science Publishers, 1999. — 208 с.

46. *Satten G.*, *Ronis D.* Critical phenomena in randomly stirred fluids // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Т. 55. — С. 91.

47. Процесс направленного протекания в присутствии “синтетического” поля скорости со сжимаемостью: ренормгрупповой анализ / Н. В. Антонов [и др.] // ТМФ. — 2017. — Т. 190, № 3. — С. 377.

48. *Антонов Н. В.*, *Какинь П. И.* Скейлинг в эрозии ландшафтов: ренормгрупповой анализ бесконечнозарядной модели // ТМФ. — 2017. — Т. 190, № 2. — С. 226.

49. *Antonov N. V.*, *Kapustin A. S.* Critical behaviour of the randomly stirred dynamical Potts model: novel universality class and effects of compressibility // Journal of Physics A. — 2012. — Т. 50, № 50. — С. 505001.

50. *Antonov N. V.*, *Hnatich M.*, *Honkonen Y.* Effects of mixing and stirring on the critical behaviour // Journal of Physics A. — 2006. — Т. 39. — С. 7867.

51. *Antonov N. V.*, *Iglovikov V. I.*, *Kapustin A. S.* Effects of turbulent mixing on the nonequilibrium critical behaviour // Journal of Physics A. — 2009. — Т. 42. — С. 135001.

52. Superfluid phase pransition with activated velocity fluctuations: renormalization group approach / M. Dančo [и др.] // Phys. Rev E. — 2016. — Т. 93. — С. 012109.

53. *Antonov N. V.*, *Kapustin A. S.* Effects of turbulent mixing on critical behaviour in the presence of compressibility: Renormalization group analysis of two models // Journal of Physics A. — 2010. — Т. 43. — С. 405001.

54. *Hnatič M.*, *Honkonen J.*, *Lučivjanský T.* Advanced field-theoretical methods in stochastic dynamics and theory of developed turbulence // Acta Physica Slovaca. — 2016. — Т. 66, № 2. — С. 69.

55. *Zinn J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. — Fourth. — Oxford : Clarendon Press, 2002. — С. 1074.

56. *Абрикосов А. А.*, *Горьков Л. П.*, *Дзялошинский И.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — Второе. — Москва : Добросвет, 1998. — 514 с.

57. *Горьков Л.*, *Мелик-Бархударов Т.* К теории сверхтекучести неидеального ферми-газа // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 40. — С. 1452.

58. *Налимов М. Ю.*, *Сергеев В. А.*, *Сладкофф Л.* Борелевское пересуммирование ε-разложения динамического индекса $z$ модели $A$ $\phi^4(O(n))$-теории // ТМФ. — 2009. — Т. 159, № 1. — С. 96.

59. *Kalagov G.*, *Kompaniets M. V.*, *Nalimov M. Y.* Renormalization-group investigation of a superconducting $U(r)$-phase transition using five loops calculations // Nuclear Physics B. — 2016. — Т. 905. — С. 16.

60. *Васильев А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. — Ленинград : Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. — 296 с.

61. Rapidly converging truncation scheme of the exact renormalization group / K. Aoki [и др.] // Prog.Theor.Phys. — 1998. — Т. 9. — С. 451.

62. *Canet L.*, *Chate H.*, *Delamotte B.* General framework of the non-perturbative renormalization group for non-equilibrium steady states // Journal of Physics A. — 2011. — T. 44. — C. 495001.

63. *Litim D. F.* Optimized renormalization group flows // Phys. Rev. D. — 2001. — T. 64. — C. 105007.

64. *Litim D. F.* Derivative expansion and renormalisation group flows // JHEP. — 2001. — T. 11. — C. 059.

65. *Pawlowski J. M.* Aspects of the functional renormalisation group // Ann. Phys. — 2007. — T. 769. — C. 105.

# Приложение А

## Получение формулы 1.13

Рассмотрим получение асимптотики коэффициентов разложения (1.13) $k$-хвостой функции Грина

$$G_k^{(N)} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\phi\phi(x_1)\dots\phi(x_k) \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}g}{g^{N+1}} e^{-S_R(\phi,g)} \left(-\frac{g}{3!}\int \mathrm{d}^d x\phi^3\right)^7 \times \tag{A.1}$$
$$\times \int \mathrm{d}\ln y^2 \int \mathrm{d}^d x_0\, \delta^d \left(-\frac{g}{3!}\int \mathrm{d}^d x\phi^3(x-x_0)\right) \delta\left(-\frac{g}{3!}\int \mathrm{d}^d x\phi^3 \ln\frac{|x-x_0|^2}{y^2}\right).$$

Сделаем растяжения $\phi = N^{1/2}\bar{\phi}$, $g = \bar{g}/(N^{1/2}\mu^{\varepsilon/2})$ и поменяем порядок интегрирования по $\int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}^d x_0$ и $\int \mathcal{D}\phi \oint \mathrm{d}g$

$$G_k^{(N)} = \frac{N^{N/2}N^{k/2}}{2\pi\,\mathrm{i}\,\mathcal{Z}} \int \mathrm{d}\ln y^2 \int \mathrm{d}^d x_0 \mu^{N\varepsilon/2} \int \mathcal{D}\bar{\phi}\bar{\phi}(x_1)\dots\bar{\phi}(x_k) \oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}\bar{g}}{\bar{g}} e^{-NJ} \times \tag{A.2}$$
$$\times \left(-\frac{\bar{g}}{3!}\int \mathrm{d}^d x\bar{\phi}^3\right)^7 \delta^d\left(-\frac{\bar{g}}{3!}\int \mathrm{d}^d x\bar{\phi}^3(x-x_0)\right) \delta\left(-\frac{\bar{g}}{3!}\int \mathrm{d}^d x\bar{\phi}^3 \ln\frac{|x-x_0|^2}{y^2}\right),$$

где функционал $J = S_R(\bar{\phi}, \bar{g}\mu^{-\varepsilon/2}) + \ln\bar{g}$. Система (1.10) имеет два решения $(+) = (\bar{\phi}_{c+}, \bar{g}_{c+})$ и $(-) = (\bar{\phi}_{c-}, \bar{g}_{c-})$, здесь $\bar{g}_{c+} = +\mathrm{i}\,|\bar{g}_c|$ и $\bar{g}_{c-} = -\mathrm{i}\,|\bar{g}_c|$. Разложим функционал $J$ в окрестности каждого из решений, там где знак точки перевала не важен просто будем писать $(\bar{\phi}_c, \bar{g}_c)$

$$J_\pm = S_R(\bar{\phi}_c, \bar{g}_c\mu^{-\varepsilon/2}) - \ln\bar{g}_{c\pm} - \frac{(\delta g)^2}{2\bar{g}_c^2} + \frac{(\nabla\delta\phi)^2}{2} + \frac{\bar{\phi}_c^2}{2}\delta g\delta\phi + \frac{\bar{g}_c\bar{\phi}_c}{2}(\delta\phi)^2. \tag{A.3}$$

Далее линеаризуем аргументы дельта-функций, а нормирующий множитель возьмём в точке перевала

$$N^{7/2}\delta^d\left(-\frac{\bar{g}_{c\pm}}{2}\int \mathrm{d}^d x\bar{\phi}_c^2\delta\phi(x-x_0)\right)\delta\left(-\frac{\bar{g}_{c\pm}}{2}\int \mathrm{d}^d x\bar{\phi}_c^2\delta\phi\ln\frac{|x-x_0|^2}{y^2}\right). \quad \text{(A.4)}$$

В асимптотике нужно учитывать две точки стационарности $(+)$ и $(-)$, причём их вклады отличаются лишь знаком $(-1)^{N+k}$, поэтому сумма содержит множитель $(-1)^{N+k}+1$, который равен 2, если чётности $N$ и $k$ совпадают, и нулю в противном случае. Контур интегрирования по $\delta g$ проходит через точки перевала вдоль мнимой оси. Сделаем разворот $\delta g \to \mathrm{i}\,\delta g$, после чего вычислим гауссовый интеграл по $\delta g$. Дополнительное растяжение $\sqrt{N}\delta\phi \to \delta\phi$ позволяет устранить множитель $N$ перед квадратичной частью действия $J_\pm$. Также учтём замену переменных (1.12). В результате получим

$$G_k^{(N)} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathcal{Z}}\int \mathcal{D}\delta\phi e^{-S_2}\delta^d\left(\frac{\bar{g}_c}{2}\int \mathrm{d}^d x\bar{\phi}_c^2\delta\phi x\right)\delta\left(\frac{\bar{g}_c}{2}\int \mathrm{d}^d x\bar{\phi}_c^2\delta\phi\ln|x|^2\right)\right]\times$$
$$\times\, 2\,\mathrm{i}^N N^{N/2}N^{k/2+3}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}y^2 e^{-NS_R(\bar{\phi}_c,\bar{g}_c(\mu y)^{-\varepsilon/2})-N\ln|\bar{g}_c|}\times$$
$$\times\int \mathrm{d}^d x_0\frac{(\mu y)^{N\varepsilon/2}}{y^{8-\varepsilon(1+k/2)+2k}}\bar{\phi}_c\left(\frac{x_1-x_0}{y}\right)\ldots\bar{\phi}_c\left(\frac{x_k-x_0}{y}\right).$$

Величина в квадратных скобках – флуктуационный интеграл не зависящий от $N$. В формуле (1.13) мы его обозначили символом $D$.

## Приложение Б

## Вычисление диаграмм в разложении детерминанта

Все вычисления удобно проводить в импульсном представлении. Фурье преобразование инстантона (1.10) имеет вид

$$\bar{\phi}_c(p) = \frac{48}{\bar{g}_c} \int \frac{\mathrm{d}^6 x \, e^{\mathrm{i}\,px}}{(|x|^2+1)^2} = \frac{192}{\bar{g}_c} \frac{K_1(|p|)}{|p|}, \tag{Б.1}$$

где $K_1(|p|)$ – функция Макдональда. Однохвостая диаграмма в разложении (1.26) в $MS$ схеме равна нулю

$$D_1 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{\mathrm{d}^d k}{k^2} = 0. \tag{Б.2}$$

Далее вычислим петлевой интеграл в двуххвостой диаграмме

$$D_2(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{\mathrm{d}^d k}{k^2 (p-k)^2} = \frac{\pi^{d/2} \Gamma(2-d/2) |p|^{d-4}}{(2\pi)^d} B\left(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}-1\right), \tag{Б.3}$$

где $\Gamma(a)$ – гамма-функция; $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ – бета-функция Эйлера. При $d = 6 - \varepsilon$ выделим в этом выражении полюсную по $\varepsilon$ и конечную части

$$D_2(p) = -\frac{|p|^2}{192\pi^3} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{8 + 3\ln(4\pi) - 6\ln|p| - 3\Psi(1)}{1152\pi^3} |p|^2, \tag{Б.4}$$

здесь $\Psi(a)$ – логарифмическая производная гамма-функции. Тогда вклад во флуктуационный интеграл (1.26) от второй диаграммы имеет вид

$$\frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}^6 p}{(2\pi)^6} \bar{g}_c \bar{\phi}_c(p) D_2(p) \bar{g}_c \bar{\phi}_c(-p) = \frac{6}{5\varepsilon} - 0.936. \tag{Б.5}$$

Аналогичным образом, используя фейнмановскую параметризацию, можно получить выражение для петлевого интеграла треххвостки

$$D_3(p,q) = \frac{1}{64\pi^3}\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\ln(4\pi) - \gamma}{128\pi^3} - \\ - \frac{1}{64\pi^3}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\delta(x_1+x_2+x_3-1)\times \\ \times \ln\left(\frac{(x_1+x_3)x_2|q|^2 + (x_1+x_2)x_3|p|^2 + 2x_2x_3pq}{x_1+x_2+x_3}\right), \tag{Б.6}$$

и окончательный вклад в разложение детерминанта

$$-\frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}^6q}{(2\pi)^6}\frac{\mathrm{d}^6p}{(2\pi)^6}\bar{g}_c\bar{\phi}_c(p)\bar{g}_c\bar{\phi}_c(q)D_3(p,q)\bar{g}_c\bar{\phi}_c(-p-q) = -\frac{24}{5\varepsilon} - 1.27. \tag{Б.7}$$

Конечная часть находилась численно.