

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Иванова Элла Валерьевна

**Многопетлевой расчет критических индексов в
моделях критической динамики и статике**

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Аджемян Лоран Цолакович
д. ф.-м. н., проф.

Санкт-Петербург – 2019

Содержание

Введение	4
1 Глава 1: Постановка задачи. Используемые методы.	11
1.1 Формулировка задач	11
1.1.1 Статические модели	11
1.1.2 Динамические модели	12
1.2 Процедура перенормировки	14
1.3 Метод Sector Decomposition расчета диаграмм	16
1.3.1 Фейнмановское представление	16
1.3.2 Описание метода Sector Decomposition (SD)	19
2 Глава 2: Статика	23
2.1 Описание модели ϕ^4 с кубической симметрией	23
2.2 Ренормировка модели	23
2.3 Ренормгрупповой анализ в шестипетлевом приближении	25
2.4 Критические индексы η и ν	30
3 Глава 3: Динамика	34
3.1 Динамическая А модель	34
3.1.1 Ренормировка модели	35
3.1.2 Диаграммная техника и временные версии	36
3.1.3 Фейнмановское представление динамических диаграмм	39
3.1.4 Сокращение диаграмм	41
3.1.5 Результат метода сокращения диаграмм для А модели	46
3.1.6 Критический индекс z	49
3.2 Динамическая Е модель	53
3.2.1 Ренормировка модели	55
3.2.2 Диаграммная техника и схема редукции	56
3.2.3 Анализ фиксированных точек	60
4 Глава 4: Процедура пересуммирования	63
4.1 Модель ϕ^4 с кубической симметрией	66
4.2 А модель	69

Заключение	72
Приложение А	74
Приложение В	75
Приложение С	77
Список литературы	89

Введение

Актуальность темы

Данная работа посвящена применению современных методов расчета диаграмм Фейнмана при описании непрерывных фазовых переходов и критических явлений методом ренормализационной группы (РГ) и ε -разложения. РГ метод позволяет обосновать критический скейлинг как в задачах критической статистики (термодинамика, одновременные корреляционные функции), так и при описании процессов релаксации (критическое замедление). Количественными характеристиками скейлинга являются критические показатели. Метод ренорм-группы позволяет вычислять их в виде ε -разложений (этот формально малый параметр показывает отклонение размерности пространства d от своего критического значения d_c). Получающиеся ряды являются асимптотическими и требуют пересуммирования. Для эффективного пересуммирования по Борелю необходимо знать как можно больше членов разложения. Сложность расчета коэффициентов этого ряда возрастает по мере рассмотрения все более высоких порядков теории возмущений.

Достигнутый к концу XX века прогресс в решении этих задач не позволял все же ответить на многие вопросы теории фазовых переходов. Продвижение в высшие порядки теории возмущений сопровождается рядом существенных сложностей, таких как факториальный рост числа диаграмм, а также нетривиальным видом соответствующих подынтегральных выражений в задачах динамики, не позволяющим непосредственно воспользоваться современными методами численного расчета диаграмм. В течение длительного промежутка времени в этой области не наблюдалось заметного прогресса и лишь в последнее время появились значительные успехи. Развитие новых аналитических методов вычисления диаграмм Фейнмана, а также численных алгоритмов расчетов (метод Sector Decomposition) позволило продвинуться в высшие порядки теории возмущений. В задачах критической статистики рекордный пятый порядок ε разложения был получен в 1993 [1] году и продержался до 2016 года [2]. Расчеты в задачах критической динамики существенно сложнее. И здесь высшим достижением до последнего времени был третий порядок теории возмущений, полученный в 1984 году [3].

Исследование представленных в данной работе моделей критической динамики – А модели и Е модели – представляет несомненный интерес: как недавно показано [4], модель А описывает не только критическое поведение ферромагнетиков, для которых она традиционно использовалась, но и фазовые переход в мультиферроиках [4]. Е модель успешно описывает поведение планарных симметричных антиферромагнетиков. Обобщение недавно полученных аналитических результатов для $O(n)$ -симметричной модели ϕ^4 [2] на модель ϕ^4 с кубической симметрией позволяет получить ряд новых результатов для этой модели.

Степень разработанности темы исследования

Метод ренормализационной группы (РГ) и ε -разложения успешно зарекомендовал себя применительно к задачам критической статистики. В настоящее время $O(n)$ -симметричная модель ϕ^4 исследована с шестипетлевой точностью [5, 6, 2], а для аномальной размерности поля известен и семипетлевой результат [7]. Данные работы являются необходимой базой для продвижения в шестой порядок теории возмущений в модели ϕ^4 с кубической симметрией. Детальное изучение критических показателей в данных статических моделях проводилось многими группами: в работах [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] исследование проводилось с помощью ε -разложения, а в [15, 16, 17] – в рамках ренормгруппы в реальном пространстве.

В отличие от статического случая, исследование критических показателей динамических моделей долгое время не могло продвинуться дальше третьего порядка теории возмущений. К примеру, теория перколяции [3] изучена только до второго порядка, численный двухпетлевой результат получен также для H модели [18]. Так как модель А является простейшим представителем динамических моделей, то продвинуться в ней удалось немного дальше, хотя долгое время она была изучена только до второго порядка теории возмущений [19]. Затем в работе [18] был представлен результат третьего порядка по ε , но он оказался ошибочным из-за технической погрешности. Также трехпетлевой, но уже верный расчет, был продемонстрирован в работе [3]. Далее долгое время имеющийся технический аппарат не позволял продвинуться в следующий – четвертый – порядок. Лишь спустя почти четверть века в работе [20] был

представлен четырехпетлевой численный результат для динамического критического индекса z и на основании полученных данных в работе [21] проведено пересуммирование разложения для этого индекса.

Исследование динамической E модели представляет особый интерес. Эта модель является одной из простейших динамических моделей, учитывающих межмодовую связь. С разницей в год были опубликованы статьи [22] и [23], которые противоречили друг другу. Обе работы были выполнены в двухпетлевом приближении, дальше второго порядка в дальнейшем никому продвинуться не удалось из-за значительного увеличения числа диаграмм и их сложности.

Целью данной работы является получение высокоточного численного результата для критических показателей в модели ϕ^4 с кубической симметрией, а также в моделях A и E критической динамики. Для этого решаются следующие **задачи**:

- 1) Обобщение результатов многопетлевого расчета $O(n)$ -симметричной ϕ^4 -модели на модель ϕ^4 с кубической симметрией.
- 2) Разработка и применение метода редукции динамических диаграмм на примере A и E моделей критической динамики.
- 3) Обобщение метода “Sector Decomposition” на задачи критической динамики и вычисление с помощью этого метода динамических критических индексов моделей A и E.
- 4) Выполнение пересуммирования пятипетлевого ε -разложения динамического критического индекса A-модели и шестипетлевого ε -разложения статического критического индекса кубической модели модифицированным методом конформ-Бореля.

Научная новизна Сформулированные выше цели и задачи диссертации являются новыми. Все основные результаты диссертации получены впервые, что подтверждается их публикацией в ведущих отечественных и международных журналах и апробацией на представительных международных конференциях.

Теоретическая и практическая значимость Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в широком классе моделей критической динамики, таких, как модели C, F и H [24], а также для изучения моделей,

основанных на модели ϕ^4 , но принадлежащих к другому классу симметрии.

Методология и методы исследования. Методология диссертации основана на использовании теоретико-полевых методов – методе функционального интегрирования, диаграммной технике Фейнмана, методе редукции диаграмм, теории ренормировок и ренормализационной группе, численном расчете диаграмм методом Sector Decomposition, методе борелевского суммирования расходящихся рядов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием апробированных теоретико-полевых методов. Результаты исследования, проведенного в диссертации, опубликованы в ведущих рецензируемых журналах, докладывались на российских и международных конференциях. Также расчеты проверялись сравнением с ранее полученными результатами других авторов.

Положения, выносимые на защиту

- 1) Метод Sector Decomposition, адаптированный в работе применительно к задачам критической динамики, является эффективным способом вычисления фейнмановских диаграмм в старших порядках теории возмущений.
- 2) Предложенный в работе метод редукции динамических диаграмм является эффективным средством в продвижении в старшие порядки теории возмущений в критической динамике.
- 3) Проведенный учет старших порядков в ε разложении позволяет значительно уточнить величину критических индексов, как в статической ϕ^4 модели с кубической симметрией, так и в динамической модели A.

Апробация работы

Результаты и положения работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

- “The XIX International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists - AYSS” (Dubna, Russia, 2015)
- “The International Student Conference “Science and Progress” (Saint Petersburg,

Russia, 2015)

- “The XX International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists” (Dubna, Russia, 2016)
- “42nd Conferences of the Middle European Cooperation in Statistical Physics” (Lyon, France, 2017)
- “VI International Conference Models in Quantum Field Theory - MQFT” (Saint Petersburg, Russia, 2018)
- “The Small Triangle Meeting - SMT20” (Pticie, Slovakia, 2018)

По теме диссертации опубликовано 5 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ и входящих в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus

- L.Ts. Adzhemyan, M. Danco, M. Hnatic, E.V. Ivanova and M.V. Kompaniets; *Multi-Loop Calculations of Anomalous Exponents in the Models of Critical Dynamics*; EPJ Web of Conferences, Vol. 108, p. 02004, 2016
- S.Y. Vorobyeva, E.V. Ivanova, V.D. Serov; *Borel summation of the dynamic index z in the model A of critical dynamics with an account of the strong coupling asymptotics*; Vestnik SPbU. Physics and Chemistry, Vol. 5(63), iss. 1, p. 13-19, 2018
- L.Ts. Adzhemyan, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets, S.Ye. Vorobyeva; *Diagram reduction in problem of critical dynamics of ferromagnets: 4-loop approximation*; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 51, Num. 15, 2018
- L.Ts. Adzhemyan, S.E. Vorob'eva, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets; *Representation of renormalization group functions by nonsingular integrals in a model of the critical dynamics of ferromagnets: The fourth order of the ε -expansion*; Theoretical and Mathematical Physics, 195:1, p. 584-594, 2018
- L.T. Adzhemyan, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets, A. Kudlis, A.I. Sokolov; *Six-loop ε expansion study of three-dimensional n -vector model with cubic anisotropy*; Nuclear Physics B, Vol 940, p.332-350, 2019

Личный вклад автора

Все основные результаты получены соискателем лично, либо при его прямом

участии в неразделимом соавторстве.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из Введения, четырех глав, Заключения и трех Приложений. Полный объем диссертации составляет 94 страницы. Диссертация содержит 15 рисунков, 12 таблиц и список литературы из 57 наименований.

- Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, описаны методология, методы исследования и степень разработанности темы исследования, а также показана практическая значимость полученных результатов и представлены выносимые на защиту научные положения.
- **Первая глава** посвящена описанию методов, применяемых в последующих трех главах. Сюда входит описание построения динамических и статических моделей, описание выбранной процедуры ренормировки (Minimal Substraction) и описание численного метода расчета диаграмм Sector Decomposition.
- Во **второй главе** выполнено обобщение шестипетлевых ренормгрупповых результатов для $O(n)$ -симметричной модели ϕ^4 на модель ϕ^4 с кубической симметрией. Получено ε -разложение критических индексов η , z , ν в шестом порядке теории возмущений. Проведено уточнение критического значения числа n_c компонент поля, которое влияет на выбор устойчивой фиксированной точки (конкуренция кубической неподвижной точки и точки Гайзенберга). Материал **второй главы** основан на работе [25].
- **Третья глава** посвящена исследованию динамических критических моделей А и Е. Проведено обобщение метода Sector Decomposition, описанного в первой главе, на динамический случай. На примере моделей А и Е подробно описана предложенная в работе схема сокращения диаграмм (“diagram reduction”). Данная схема позволила не только сократить количество эффективных диаграмм, но и упростить соответствующие им подынтегральные выражения. Это позволило провести пятипетлевой расчет А-модели и получить ε -разложение динамического критического индекса z с точностью до ε^5 . В модели Е выполнен двухпетлевой расчет и проведена редук-

ция трехпетлевых диаграмм, приводящая к значительному сокращению их числа. Материал **третьей главы** основан на работах [26, 27].

- В **четвертой главе** проведено описание суммирования полученных асимптотических рядов методом модифицированного конформ-Бореля с использованием параметра сильной связи. На примере нульмерной теории путем сравнения с известным в данном случае точным результатом показано, что использование параметра сильной связи значительно улучшает сходимость процедуры суммирования. Данная техника пересуммирования была применена к расчету критического показателя η в модели с кубической симметрией, а также критического динамического индекса z А-модели. Материал **четвертой главы** основан на работах [25, 28].
- В **Заключении** диссертации представлены основные результаты и выводы. В **Приложении А** приведены численные результаты пятипетлевого приближения А-модели. А в **Приложении В** приведен результат редукции трехпетлевых диаграмм Е модели.

Глава 1: Постановка задачи. Используемые методы.

1.1 Формулировка задач

1.1.1 Статические модели

Задачи термодинамики и описания равновесной структуры вещества в окрестности критических точек принято относить к задачам критической статики. В изучении этого класса проблем не фигурирует зависимость от времени.

Рассматриваем систему в d -мерном евклидовом пространстве, где определен набор классических случайных полей $\Phi = \{\Phi_i(x)\}$, для которых вес конфигурации определяется величиной $\exp[S(\Phi)]$, где задающий модель функционал действия $S(\Phi)$ представляет из себя полином по полям Φ вида

$$S(\Phi) = -\frac{1}{2}\Phi K \Phi + gV(\Phi). \quad (1)$$

Действие состоит из квадратичной части $\Phi K \Phi$ и “взаимодействия” $gV(\Phi)$, где g – константа связи, определяющая силу взаимодействия, $V(\Phi)$ – полином по Φ степени выше второй. В подробной записи квадратичная часть имеет вид

$$-\frac{1}{2}\Phi K \Phi = -\frac{1}{2} \int dx \int dx' \sum_{k,l} \phi_k(x) K_{kl}(x, x') \phi_l(x'). \quad (2)$$

Зная действие рассматриваемой модели, можно ввести производящий функционал функций Грина

$$G(A) = \frac{1}{C} \int D\Phi \exp [S(\Phi) + A\Phi], \quad (3)$$

где A – набор источников поля $A = \{A_i\}$, по которому определяется производящий функционал связных функций $W(A) = \ln G(A)$. Применяя к $W(A)$ преобразование Лежандра по A , приходим к производящему функционалу 1-неприводимых функций

$$\Gamma(\alpha) = W(A) - \alpha A, \quad \alpha = \frac{\delta W(a)}{\delta A}. \quad (4)$$

Величины G , W , Γ можно найти из теории возмущений как разложение по константам связи. В итоге эти величины представляют из себя бесконечные ряды, коэффициенты в которых изображаются с помощью диаграммной техники Фейнмана. Диаграммам сопоставляются интегралы по импульсам (координатам). Они представляют из себя набор линий и вершин, линиям соответствуют величины $K^{-1}(x, x')$ – так называемые пропагаторы, вершинам сопоставляются вершинные множители

$$V(x_1..x_n) = \delta V(\Phi) / [\delta\Phi(x_1)..\delta\Phi(x_n)] . \quad (5)$$

Соответствующие диаграммам интегралы обычно содержат ультрафиолетовые (УФ) расходимости, которые обусловлены областью больших импульсов интегрирования (малых расстояний). Эта проблема решается процедурой перенормировки.

1.1.2 Динамические модели

Помимо задач критической статики, в этой работе будут рассмотрены и некоторые модели критической динамики, описывающие динамику равновесных флуктуаций в окрестности критических точек. Эти модели предназначены для описания таких эффектов, как критическое замедление, эффект влияния критических флуктуаций на скорость звука, вязкость, коэффициент теплопроводности и т.д.

Динамические модели строятся на основе статических, при этом одной и той же статической модели (например, ϕ^4) соответствуют различные динамические, в зависимости от того, является ли параметр порядка сохраняющейся величиной или нет, а также с учетом возможной связи динамики параметра порядка с другими "мягкими" модами (межмодовая связь).

Стандартная задача стохастической динамики описывается уравнением:

$$\partial_t \varphi(x) = U(x; \varphi) + \eta(x), \quad \langle \eta(x)\eta(x') \rangle = D(x, x'), \quad x = \{\mathbf{x}, t\}, \quad (6)$$

где η – случайный шум с гауссовой статистикой и заданным парным коррелятором $D(x, x')$, а U – t -локальный функционал, не зависящий от производных

φ по времени. Для несохраняющегося параметра порядка φ он определяется по заданному статическому действию $S^{st}(\varphi)$ соотношением:

$$U(x; \varphi) = \lambda \left[\frac{\delta S^{st}(\varphi)}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \right] \Big|_{\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(x)}, \quad D(x, x') = 2\lambda \delta(x - x'), \quad (7)$$

где введен коэффициент Онзагера λ , а для коррелятора $D(x, x')$ использована модель в виде белого шума. Для сохраняющегося параметра порядка делается замена $\lambda \rightarrow \lambda \Delta$, где Δ – оператор Лапласа.

Формализм Martin-Siggia-Rose позволяет свести стохастическую задачу (6), (7) к квантово-полевой модели удвоенного числа полей $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$ с действием $S(\Phi)$ и производящим функционалом $G(A)$ вида:

$$S(\Phi) = \frac{\varphi' D \varphi'}{2} + \varphi' [-\partial_t \varphi + U(\varphi)], \quad G(A) = \int D\Phi \exp[S(\Phi) + A\Phi]. \quad (8)$$

В ряде задач при построении динамики параметра порядка необходимо учитывать его взаимодействие с другими мягкими модами (обзор различных моделей представлен в [24]). Учет такого взаимодействия производится переходом от (6) к следующему уравнению для многокомпонентного поля $\varphi \equiv \varphi_a$:

$$\partial_t \varphi_a(x) = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S^{st}(\varphi)}{\delta \varphi_b} + \eta_a, \quad (9)$$

$$\langle \eta_a(x) \eta_b(x') \rangle = 2\alpha_{ab} \delta(x - x'), \quad (10)$$

где $\alpha_{ab} = \alpha_{ba}^T$ – коэффициенты Онзагера, а β_{ab} – коэффициенты межмодовой связи со свойствами:

$$\beta_{ab} = -\beta_{ba}^T, \quad \delta \beta_{ab}(\mathbf{x}; \varphi) / \delta \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Стохастической задаче (9), (10) соответствует действие

$$S(\Phi) = \varphi' \alpha \varphi' + \varphi' \left[-\partial_t \varphi + (\alpha + \beta) \frac{\delta S^{st}}{\delta \varphi} \right]. \quad (12)$$

В главе 3 мы вернемся к динамическим моделям и, основываясь на уравнении (12), рассмотрим динамические модели А и Е.

1.2 Процедура перенормировки

Роль флуктуаций при рассмотрении физических систем в критической области сильно зависит от размерности пространства d . Существует критическая размерность d_c такая, что для $d > d_c$ флуктуации несущественны, а для $d < d_c$ они играют важную роль. Во всех рассматриваемых в работе моделях $d_c = 4$ и флуктуации существенны. Рассматривая d как непрерывную переменную, а $\varepsilon = d_c - d$ как формально малый параметр, Вильсон предложил строить теорию критических явлений в виде разложений по ε .

При $\varepsilon \rightarrow 0$ в диаграммах теории возмущений появляются УФ-расходимости, проявляющиеся в виде полюсов по ε , которые устраняются хорошо разработанной процедурой перенормировок. Начальное действие объявляется неренормированным, а входящие в него параметры e_0 – затравочными. Процедура ренормировки состоит в переходе от затравочных параметров и неренормированного поля к ренормированным:

$$e_0 \rightarrow Z_e e, \quad \phi \rightarrow Z_\phi \phi. \quad (13)$$

Константы ренормировки Z_i выбираются так, чтобы в теории возмущений по ренормированному заряду полюса по ε отсутствовали. Выбор констант ренормировок неоднозначен, в используемой в дальнейшем схеме минимальных вычитаний (MS) они имеют вид

$$Z_i = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(i)}(\{g\}) \varepsilon^{-m}, \quad (14)$$

т.е. включают в себя только полюса по ε .

Некоторая неоднозначность процедуры перенормировки сохраняется и в рамках схемы MS. Она проявляется в том, что перенормировка заряда

$$g_0 = \mu^\varepsilon g Z_g(g)$$

сопровождается переходом к безразмерному заряду g , а размерность неренормированного заряда g_0 находит отражение в множителе μ^ε , где μ – “ренормировочная масса” – является произвольным параметром, от которого константы

ренормировки не зависят.

Произвол в значении ренормировочной массы используется для получения РГ-уравнений, которые позволяют обосновать критический скейлинг и вычислять критические показатели в виде ε -разложений. Определяющими элементами РГ-уравнений являются β -функции и РГ-функции γ , которые выражаются через константы ренормировки соотношениями

$$\beta_i(\{g\}) = -\varepsilon \frac{g_i}{1 + \sum_k g_k \partial_{g_k} \ln Z_{g_k}}, \quad \gamma_i(\{g\}) = -\varepsilon \frac{\sum_k g_k \partial_{g_k} \ln Z_i}{1 + \sum_k g_k \partial_{g_k} \ln Z_{g_k}}. \quad (15)$$

Условия $\beta_i(\{g^*\}) = 0$ определяют фиксированную точку ренормгруппы, а величины $\gamma_k(\{g^*\})$ – значения критических индексов. Устойчивость неподвижной точки определяется собственными значениями матрицы M с элементами $M_{ij} = \partial_{g_j} \beta_i(\{g^*\})$. Если все собственные значения положительны, то неподвижная точка стабильна.

Константы ренормировки вычисляются итерационно в виде рядов по ренормированным зарядам, коэффициенты в которых определяются из условия сокращения полюсов в определенном для каждой модели наборе 1-неприводимых функций (что гарантирует отсутствие полюсов в любых функциях).

Учет констант перенормировки можно заменить действием R -операции Боголюбова-Парасюка на диаграммы базовой теории, в которой действие зависит от ренормированных параметров, но положено $Z_i = 1$:

$$\Gamma^R = R\Gamma = (1 - K)R'\Gamma. \quad (16)$$

Здесь Γ – функция, вычисляемая по диаграммам базовой теории, R' – неполная R -операция, устраняющая расходимости в подграфах, а операция $(1 - K)$ устраняет остающуюся поверхностную расходимость (K – операция, выделяющая расходящуюся часть). В терминах R' операции константы ренормировки записываются в виде:

$$Z_i = 1 - KR'\bar{\Gamma}_i. \quad (17)$$

В работе мы будем использовать оба способа учета контрчленов.

1.3 Метод Sector Decomposition расчета диаграмм

Одной из основных технических проблем, возникающих при рассмотрении динамических и статических моделей, является вычисление интегралов большой кратности. Использование метода Монте-Карло в импульсном представлении не позволяет перейти к более высоким порядкам теории возмущений, поскольку точность расчетов значительно снижается. Оказалось, что эффективным методом повышения точности является переход к фейнмановскому представлению и использование метода Sector Decomposition (SD) [29].

В данной работе представлена адаптация метода SD к моделям критической динамики. Начнем со статического случая, а затем покажем, как его можно обобщить на динамический.

Все объяснения будут проиллюстрированы на примерах.

1.3.1 Фейнмановское представление

Метод SD основан на фейнмановском представлении диаграмм. Начнем с представления Фейнмана для статического случая.

Диаграммы теории возмущений имеют вид

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n \int \prod_{i=1}^N E_i^{-1}, \quad (18)$$

где n - число петель, N - номер линии в графе, а $E_i = k_i^2 + \tau$ - “энергия” линии с импульсом k . Этот импульс представляет собой линейную комбинацию импульсов интегрирования. Таким образом, мы можем переписать соотношение (18) в форме:

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n \int \prod_{i=1}^l E_i^{-\lambda_i}, \quad (19)$$

где λ_i - число линий с энергией E_i , а l - количество различных энергий. В итоге, в знаменателе соотношения (19) мы имеем произведение квадратичных форм по импульсам интегрирования. Его можно свести к степени единой квадратичной

формы путем интегрирования по вспомогательным параметрам Фейнмана u_i :

$$E_1^{-\lambda_1} \dots E_n^{-\lambda_l} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^l \lambda_i)}{\prod_{i=1}^l \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_l \frac{\delta\left(\sum_{i=1}^l u_i - 1\right) \prod_{i=1}^l u_i^{\lambda_i-1}}{\left[\sum_{i=1}^l E_i u_i\right]^{\sum_{i=1}^l \lambda_i}}. \quad (20)$$

Интеграл по импульсам от степени квадратичной формы в (20), имеющей вид $\sum_{i=1}^l E_i u_i = v_{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j + \mathbf{a}_i \mathbf{k}_i + \tilde{c}$, вычисляется:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n \frac{1}{(v_{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j + \mathbf{a}_i \mathbf{k}_i + \tilde{c})^\alpha} = \frac{(4\pi)^{-dn/2} \Gamma(\alpha - dn/2) (\det v)^{-d/2}}{\Gamma(\alpha) [\tilde{c} - (v^{-1})_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j]^{\alpha - dn/2}}, \quad (21)$$

где $\alpha = \sum \lambda_i$. Таким образом, задача сводится к интегрированию по фейнмановским параметрам.

В дальнейшем вместо заряда g будет использоваться более удобный заряд u :

$$u = \frac{S_d}{(2\pi)^d} g, \quad S_d \equiv \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad (22)$$

тогда фейнмановское представление для n -петлевой 4-х хвостой диаграммы будет иметь вид

$$J_n^{(4)} = \frac{\Gamma(n\epsilon/2) \Gamma^n(2 - \epsilon/2)}{2^n \prod_i \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_l \frac{\prod_i u_i^{\lambda_i-1} \delta(1 - \sum_{i=1}^l u_i)}{(\det v)^{2-\epsilon/2}}, \quad (23)$$

а для n -петлевой 2-х хвостой диаграммы –

$$J_n^{(2)} = \frac{\Gamma(n\epsilon/2) \Gamma^n(2 - \epsilon/2)}{2^n \prod_i \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_l \frac{C \prod_i u_i^{\lambda_i-1} \delta(1 - \sum_{i=1}^l u_i)}{(\det v)^{3-\epsilon/2}}, \quad (24)$$

где $\det v$ и \tilde{c} определяются соотношениями

$$C = (v_{is}^{-1} b_i b_s - \tilde{c}), \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^l E_i u_i \equiv 1 + \tilde{c} p^2 + 2b_i(\mathbf{p} \mathbf{k}_i) + v_{is}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s), \quad (26)$$

а \mathbf{p} – внешний импульс.

Необходимые для использования фейнмановского представления величины $\det v$

и C можно получать непосредственно по виду диаграммы, минуя импульсное представление, по следующим правилам:

- $\det(v)$ n -петлевой диаграммы равен сумме всевозможных произведений фейнмановских параметров с числом сомножителей, равным числу петель, из которой исключены “запрещенные” произведения. “Запреты” формируются с учетом законов сохранения (законы сохранения импульса в каждой вершине, а также их всевозможные комбинации), имеющих место в данной диаграмме.
- Величина C равна сумме всевозможных произведений фейнмановских параметров с числом сомножителей, на единицу превышающим число петель, с учетом запретов, из которых в данном случае исключены запреты, связанные с законами сохранения в вершинах, содержащих внешние линии.

Для примера рассмотрим построение $\det v$ для двухпетлевой диаграммы:

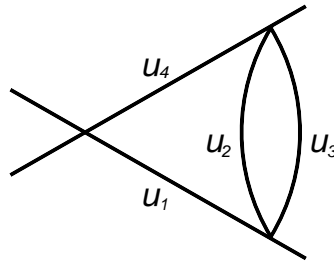


Рис. 1: Двухпетлевая четыреххвостая диаграмма модели ϕ^4 с соответствующими фейнмановскими параметрами на линиях.

Для данной диаграммы n равняется двум и четыре фейнмановских параметра. Сумма всевозможных произведений фейнмановских параметров с числом сомножителей, равным числу петель, выглядит как $u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4$. В этой диаграмме существует несколько запретов: $\{u_1u_4, u_2u_3u_4, u_1u_2u_3\}$. Среди этого набора для нас существенным является только один u_1u_4 . Исходя из вышесказанного, $\det v$ данной диаграммы Рис.1 имеет вид:

$$\det v = u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4. \quad (27)$$

Следует отметить, что фейнмановское представление динамической диаграммы может быть получено путем простых преобразований из статической, имеющей одинаковую топологическую конфигурацию. Это будет подробно описано в Главе 3.

1.3.2 Описание метода Sector Decomposition (SD)

Теперь, когда у нас есть диаграммы в фейнмановском представлении, мы можем использовать метод разложения на сектора. Рассмотрим простую статическую диаграмму Рис.1. Для нее $\det v$ представлен соотношением (27). Тогда фейнмановское представление (23) этой диаграммы примет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \frac{1}{2^2} \Gamma(\varepsilon) \Gamma^2\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathcal{I}, \\ \mathcal{I} &= \left[\prod_{i=1}^4 \int_0^1 du_i \right] \frac{\delta(1 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4)}{(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4)^{2-\varepsilon/2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Размерность пространства d записана в виде $d = 4 - \varepsilon$, как и в последующих разобранных моделях. Знаменатель в соотношении (28) обращается в 0 либо когда u_1 , u_2 и u_3 стремятся к 0, а u_4 идет в 1 (учитывая дельта функцию), либо когда u_1 , u_3 и u_4 стремятся к 0, а u_2 к 1, и наконец, либо когда u_2 , u_3 и u_4 стремятся к 0, а u_1 к 1. Эти особенности в подынтегральном выражении приводят к расходимостям интеграла при $\varepsilon = 0$ и к полюсам по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Метод SD помогает извлекать в явном виде вычеты при этих полюсах. Вся процедура делится на два шага. Во-первых, область интегрирования делится на сектора, где одна из переменных Фейнмана является “основной”, т.е. больше всех оставшихся. После этого в каждом секторе необходимо заменой переменных вернуть область интегрирования к единичному кубу. Эти два шага необходимо повторять, пока особенность подынтегрального выражения не будет обусловлена простой степенью одной из фейнмановских переменных, после чего вычет при полюсе легко вычисляется. Можно показать, что количество повторений в каждом секторе соответствует количеству петель в графе.

Рассмотрим эти шаги для исследуемой диаграммы 1:

I. Первое разделение на сектора и соответствующие замены:

$$\begin{aligned}
& \left[\prod_{i=1}^4 \int_0^1 du_i \right] f(\{u_i\}) = \\
& = \int_0^1 du_1 \int_0^{u_1} du_2 du_3 du_4 f(\{u_i\}) + \int_0^1 du_2 \int_0^{u_2} du_1 du_3 du_4 f(\{u_i\}) + \\
& + \int_0^1 du_3 \int_0^{u_3} du_1 du_2 du_4 f(\{u_i\}) + \int_0^1 du_4 \int_0^{u_4} du_1 du_2 du_3 f(\{u_i\}) = \\
& = \int_0^1 du_1 \prod_{i=2,3,4} d\tilde{u}_i u_1^3 f(u_1, \tilde{u}_2 u_1, \tilde{u}_3 u_1, \tilde{u}_4 u_1) + \\
& + \int_0^1 du_2 \prod_{i=1,3,4} d\tilde{u}_i u_2^3 f(\tilde{u}_1 u_2, u_2, \tilde{u}_3 u_2, \tilde{u}_4 u_2) + \\
& + \int_0^1 du_3 \prod_{i=1,2,4} d\tilde{u}_i u_3^3 f(\tilde{u}_1 u_3, \tilde{u}_2 u_3, u_3, \tilde{u}_4 u_3) + \\
& + \int_0^1 du_4 \prod_{i=1,2,3} d\tilde{u}_i u_4^3 f(\tilde{u}_1 u_4, \tilde{u}_2 u_4, \tilde{u}_3 u_4, u_4) = \\
& = \tilde{\mathcal{I}}_1 + \tilde{\mathcal{I}}_2 + \tilde{\mathcal{I}}_3 + \tilde{\mathcal{I}}_4. \tag{29}
\end{aligned}$$

II. Второе разделение на сектора и соответствующие замены:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \int_0^1 du_4 f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \\
& = \tilde{\mathcal{I}}_{1,2} + \tilde{\mathcal{I}}_{1,3} + \tilde{\mathcal{I}}_{2,1} + \tilde{\mathcal{I}}_{2,3} + \tilde{\mathcal{I}}_{2,4} + \tilde{\mathcal{I}}_{3,1} + \tilde{\mathcal{I}}_{3,2} + \tilde{\mathcal{I}}_{3,4} + \tilde{\mathcal{I}}_{4,2} + \tilde{\mathcal{I}}_{4,3}. \tag{30}
\end{aligned}$$

Данная диаграмма имеет симметрию: $1 \leftrightarrow 4$ and $2 \leftrightarrow 3$. Этот факт ведет к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathcal{I}}_{2,3} = \tilde{\mathcal{I}}_{3,2}, \\
& \tilde{\mathcal{I}}_{1,2} = \tilde{\mathcal{I}}_{1,3} = \tilde{\mathcal{I}}_{4,2} = \tilde{\mathcal{I}}_{4,3}, \\
& \tilde{\mathcal{I}}_{2,1} = \tilde{\mathcal{I}}_{3,1} = \tilde{\mathcal{I}}_{2,4} = \tilde{\mathcal{I}}_{3,4}. \tag{31}
\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем записать результат SD только для этих 4 секторов:

$$\tilde{\mathcal{I}}_{1,2} = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 du_4 \frac{(1 + u_2 + u_2 u_3 + u_2 u_4)^{-\varepsilon}}{u_2^{1-\varepsilon/2} (1 + u_3 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_2 u_3 u_4)^{2-\varepsilon/2}}, \quad (32)$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_{2,3} = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 du_4 \frac{(1 + u_1 u_3 + u_3 + u_4 u_3)^{-\varepsilon}}{u_3^{1-\varepsilon/2} (1 + u_1 + u_1 u_3 + u_4 + u_3 u_4)^{2-\varepsilon/2}}, \quad (33)$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_{2,1} = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 du_4 \frac{(1 + u_1 + u_3 u_1 + u_4 u_1)^{-\varepsilon}}{u_1^{1-\varepsilon/2} (1 + u_3 + u_1 u_3 + u_4 + u_1 u_3 u_4)^{2-\varepsilon/2}}. \quad (34)$$

В соотношениях (32)–(34) полюса теперь обусловлены особенностью по одной из переменных. В общем случае возможны 2 ситуации.

1. Сингулярность имеет вид $u^{-1+n\varepsilon}$, тогда вычисление вычета при полюсе происходит следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} f(u) du &= \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) \pm f(0)) du = \\ &= \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} f(0) du + \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) - f(0)) du = \\ &= \frac{f(0)}{\varepsilon n} + \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) - f(0)) du = \\ &= \frac{f(0)}{\varepsilon n} + \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} \left(\int_0^1 u f'(au) da \right) du. \end{aligned} \quad (35)$$

Введение интегрирования по дополнительному параметру a позволяет произвести явное сокращение особенности в последнем слагаемом, в котором после этого необходимое число членов ε -разложения находятся разложением в ряд подынтегрального выражения.

2. Сингулярность имеет вид $u^{-m+n\varepsilon}$, где $m > 1$. Тогда совершаются следующие преобразования интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{-m+\varepsilon n} f(u) du &= \\ &= \int_0^1 du da u^{-m+\varepsilon n} \frac{(1-a)^{m-1}}{(m-1)!} \partial_a^m f(au) + \frac{\partial_u^{m-1} f(0)}{n\varepsilon} + \frac{\partial_u^1 f(0)}{n\varepsilon - 1} + \dots + \frac{f(0)}{n\varepsilon - m + 1}. \end{aligned} \quad (36)$$

В результате, с помощью метода SD, мы разделили область интеграции на 6 секторов. Но из-за симметрии количество секторов было сокращено до трех. В каждом из секторов были сделаны замены переменных. Разложение позволило

выделить особенности в исходных интегралах и выразить их через интегралы, удобные для численных расчетов.

Основным недостатком метода SD является большое количество секторов в многопетлевых диаграммах. Без учета симметрий для n -петлевой диаграммы это $N \cdot n!$ секторов, где N – число слагаемых в детерминанте, без учета запретов $N = C_k^n$. Учет запретов несколько уменьшает это число, но, тем не менее, число секторов быстро растет с ростом числа петель n . Учитывая симметрию диаграммы, среди секторов можно выделить эквивалентные, в которых подынтегральные выражения совпадают с точностью до замены переменных. Это полезно с точки зрения уменьшения эффективного числа секторов.

Глава 2: Статика

Данная глава посвящена рассмотрению модели ϕ^4 с кубической симметрией.

2.1 Описание модели ϕ^4 с кубической симметрией

При рассмотрении реальных материалов с более или менее сложной структурой необходимо учитывать некоторую анизотропию параметра порядка. Простейшим примером такого материала является ферромагнетик с кубической симметрией. На языке гамильтониана наличие анизотропии в этом случае соответствует включению в него дополнительного члена, инвариантного относительно кубической группы преобразований, в виде $g_2 \sum_{\alpha=1}^n \varphi_{\alpha}^4$, где φ_{α} – n -компонентное поле параметра порядка, а g_2 – константа анизотропной связи.

Рассматриваемая модель является двухзарядной. Для пары зарядов g_1 и g_2 существует 4 варианта значений в неподвижной точке ренормгруппы, которым соответствуют следующие фиксированные точки: гауссова $(0, 0)$, изинговская $(0, g_I^*)$, гайзенберговская $(g_H^*, 0)$ и кубическая (g_1^*, g_2^*) . Таким образом, главный вопрос заключается в том, какой критический режим имеет место в реальных ферромагнетиках. Предыдущие работы показывают, что значение числа компонент поля n существенно влияет на устойчивость неподвижных точек и приводит к конкуренции между гайзенберговской неподвижной точкой и кубической. Поэтому отдельный вопрос в этой модели состоит в определении критического значения $n = n_c$, при котором происходит смена режима.

2.2 Ренормировка модели

Критическое поведение модели ϕ^4 с кубической симметрией описывается следующим действием с двумя константами связи:

$$S = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\varphi_{0\alpha})^2 + m_0^2\varphi_{0\alpha}^2] + \frac{1}{4!} \left[g_{01} T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} + g_{02} T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} \right] \varphi_{0\alpha}\varphi_{0\beta}\varphi_{0\gamma}\varphi_{0\delta} \right\}, \quad (37)$$

где $\varphi_{0\alpha}$ – n -компонентное неренормированное поле, g_{01} и g_{02} – неренормированные константы связи. Тензорным факторам $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ соответствуют $O(n)$ -

инвариантный и кубический вклады в действие. Они имеют вид

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} = \frac{1}{3}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}), \quad (38)$$

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = \delta_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \delta_{\alpha_1\dots\alpha_n} = \begin{cases} 1, & \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (39)$$

и удовлетворяют соотношениям:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} = \frac{n(n+2)}{3}, \quad T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = n, \quad T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = n.$$

Действие (37) положительно определено при условиях: I. $g_{02} > -g_{01}$ для $g_{01} > 0$; II. $g_{02} > -ng_{01}$ для $g_{01} < 0$.

Модель (37) мультипликативно ренормируема. Ренормировка параметров и полей определяется соотношениями:

$$m_0^2 = m^2 Z_{m^2}, \quad g_{01} = g_1 \mu^\varepsilon Z_{g_1}, \quad g_{02} = g_2 \mu^\varepsilon Z_{g_2}, \quad \varphi_0 = \varphi Z_\varphi. \quad (40)$$

В итоге ренормированное действие имеет вид

$$S^R = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [Z_1 (\partial\varphi_\alpha)^2 + Z_2 m^2 \varphi_\alpha^2] + \right. \quad (41)$$

$$\left. + \frac{1}{4!} [Z_3 g_1 \mu^\varepsilon T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} + Z_4 g_2 \mu^\varepsilon T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}] \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma \varphi_\delta \right\}, \quad (42)$$

$$Z_1 = Z_\varphi^2, \quad Z_2 = Z_{m^2} Z_\varphi^2, \quad Z_3 = Z_{g_1} Z_\varphi^4, \quad Z_4 = Z_{g_2} Z_\varphi^4, \quad (43)$$

где μ –ренормировочная масса, g_1 и g_2 – безразмерные константы связи. Константы ренормировки определяются из условия УФ-конечности следующих 1-неприводимых двуххвосток и четыреххвосток:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{(2)} &= \Gamma^{(2)} \delta_{\alpha\beta}, & \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)} &= \Gamma_1^{(4)} T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} + \Gamma_2^{(4)} T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}, \\ \Gamma_1^{(4)} &= \frac{3(T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} - T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)})}{n(n-1)} \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}, & \Gamma_2^{(4)} &= \frac{(n+2)T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} - 3T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}}{n(n-1)} \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Для исследования модели мы используем схему минимальных вычитаний (MS),

в которой константы ренормировки имеют вид

$$Z_i(g_1, g_2, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_i^{(k)}(g_1, g_2) \varepsilon^{-k}. \quad (45)$$

Одним из способов вычисления констант ренормировки является использование R' -операции. С ее помощью константы ренормировки выражаются соотношениями

$$Z_i = 1 - KR'\bar{\Gamma}_i, \quad (46)$$

в которых нормированные функции Грина $\bar{\Gamma}_i$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_1 &= \frac{\partial}{\partial m^2} \Gamma^{(2)} \Big|_{p=0}, & \bar{\Gamma}_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^2 \Gamma^{(2)} \Big|_{p=0}, \\ \bar{\Gamma}_3 &= \frac{1}{g_1 \mu^\varepsilon} \Gamma_1^{(4)} \Big|_{p=0}, & \bar{\Gamma}_4 &= \frac{1}{g_2 \mu^\varepsilon} \Gamma_2^{(4)} \Big|_{p=0}. \end{aligned} \quad (47)$$

Основным преимуществом использования соотношения (46) является то, что контрчлены диаграмм, вычисленные для $O(1)$ симметричной модели, могут быть легко обобщены для любой теории с нетривиальной симметрией благодаря факторизации тензорных структур как, например, это было сделано в работах [30, 31, 32]. Таким образом, исследование этой модели разделяется на две отдельные части: 1. Непосредственно вычисления диаграмм (можно использовать недавно полученный в работе [6] шестипетлевой результат для модели ϕ^4) 2. Учет тензорной структуры диаграмм (такую операцию можно автоматизировать с помощью программ FORM [33] и GraphState [34]).

2.3 Ренормгрупповой анализ в шестипетлевом приближении

Рассмотрим РГ функции γ_φ , γ_{m^2} (аномальные размерности) и функцию β , определяемые как:

$$\beta_i(g_1, g_2, \varepsilon) = \mu \frac{\partial g_i}{\partial \mu} \Big|_{g_{01}, g_{02}} = -g_i \left[\varepsilon - g_1 \frac{\partial Z_{g_i}^{(1)}}{\partial g_1} - g_2 \frac{\partial Z_{g_i}^{(1)}}{\partial g_2} \right], \quad i = 1, 2, \quad (48)$$

$$\gamma_j(g_1, g_2) = \mu \frac{\partial \log Z_j}{\partial \mu} \Big|_{g_{01}, g_{02}} = -g_1 \frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial g_1} - g_2 \frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial g_2}, \quad j = \varphi, m^2, \quad (49)$$

где $Z_i^{(1)}$ – коэффициенты при первом полюсе по ε из (45).

Вычисляем РГ-функции (49 - 48), как ряды по ренормированным константам связи вплоть до шестого порядка:

$$\beta_i = g_i \left[-\varepsilon + \sum_{l=1}^6 \sum_{k=0}^l C_{\beta_i}^{k,(l-k)} g_1^k g_2^{l-k} \right], \quad i = 1, 2, \quad (50)$$

$$\gamma_j = \sum_{l=1}^6 \sum_{k=0}^l C_{\gamma_j}^{k,(l-k)} g_1^k g_2^{l-k}, \quad j = \varphi, m^2. \quad (51)$$

Найденные нами аналитические разложения представлены в [25]. Одной из основных задач является нахождение критических индексов, таких как α , β , γ , η , ν и δ . Они могут быть выражены через $\gamma_{m^2}^* \equiv \gamma_{m^2}(g_1^*, g_2^*)$ и $\gamma_\varphi^* \equiv \gamma_\varphi(g_1^*, g_2^*)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - \frac{D}{2 + \gamma_{m^2}^*}, & \beta &= \frac{D/2 - 1 + \gamma_\varphi^*}{2 + \gamma_{m^2}^*}, & \delta &= \frac{D + 2 - 2\gamma_\varphi^*}{D - 2 + 2\gamma_\varphi^*}, \\ \eta &= 2\gamma_\varphi^*, & \nu &= \frac{1}{2 + \gamma_{m^2}^*}, & \gamma &= \frac{2 - 2\gamma_\varphi^*}{2 + \gamma_{m^2}^*}. \end{aligned} \quad (52)$$

Как можно видеть, критические индексы связаны друг с другом и только два из них являются независимыми. В этой работе нас интересуют индексы η и ν^{-1} .

Вернемся к изучению РГ - функций. Нули β функций

$$\beta_1(g_1^*, g_2^*, \varepsilon) = 0, \quad \beta_2(g_1^*, g_2^*, \varepsilon) = 0 \quad (53)$$

определяют неподвижные точки (g_1^*, g_2^*) , которые управляют критическими режимами системы. Анализ уравнений (53) показывает, что существует четыре фиксированные точки: гауссова $(0, 0)$, изинговская $(0, g_I^*)$, гайзенберговская $(g_H^*, 0)$ и кубическая (g_1^*, g_2^*) . Одним из наиболее важных вопросов является определение устойчивости этих неподвижных точек. Для этого необходимо про-

анализировать собственные значения ω_1, ω_2 следующей матрицы:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_1(g_1, g_2)}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_1(g_1, g_2)}{\partial g_2} \\ \frac{\partial \beta_2(g_1, g_2)}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_2(g_1, g_2)}{\partial g_2} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Собственные значения берутся в точках $g_1 = g_1^*, g_2 = g_2^*$. Случай, когда они оба положительны (фиксированная точка стабильна), описывает критический режим, который имеет место в реальных ферромагнетиках.

Первые две точки всегда нестабильны при произвольных значениях размерности параметра порядка n . Однако последние две точки, соответствующие гайзенберговскому и кубическому режимам, конкурируют между собой и результат зависит от n . Для $n < n_c$, где n_c – некоторое критическое значение числа компонент поля, устойчив критический гайзенберговский режим, а для $n > n_c$ – кубический режим. Рисунок 2 иллюстрирует ситуацию:

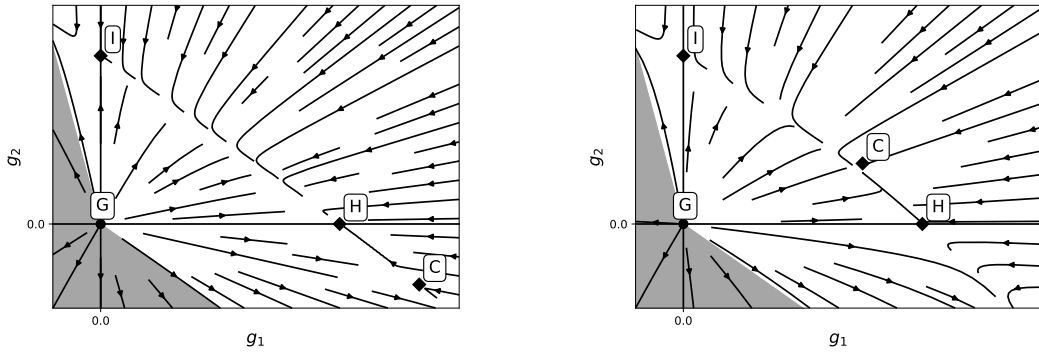


Рис. 2: РГ потоки ренормированных констант связи. Левая картинка соответствует $n < n_c$, правая – $n > n_c$. Символы в прямоугольниках обозначают гауссову, изинговскую, гайзенберговскую и кубическую неподвижные точки.

Итак, истинный режим критического поведения в реальных кубических ферромагнетиках определяется величиной n_c .

Прежде всего, необходимо найти неподвижные точки в виде ε -разложения в шестипетлевом приближении. Нас интересует нетривиальная кубическая точка.

Решая уравнения (53) с помощью итераций по ε , получим:

$$g_1^* = \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon^2 \left(-\frac{106}{27n^3} + \frac{125}{27n^2} - \frac{19}{27n} \right) + \sum_{k=3}^6 C_{g_1}^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^7), \quad (55)$$

$$g_2^* = \frac{\varepsilon(n-4)}{3n} + \varepsilon^2 \left(\frac{424}{81n^3} - \frac{178}{27n^2} + \frac{31}{27n} + \frac{17}{81} \right) + \sum_{k=3}^6 C_{g_2}^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^7), \quad (56)$$

где коэффициенты высшего порядка $C_{g_1}^{(k)}$, $C_{g_2}^{(k)}$ представлены в [25]. Нас интересует физически реализуемый случай, когда $n = 3$. Ниже приведены аналитическое и численные значения координат неподвижной точки для этого случая, представленные в виде ряда по ε :

$$\begin{aligned} g_1^* &= \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{98}{729}\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left[-\frac{28\zeta(3)}{729} - \frac{61975}{708588} \right] \quad (57) \\ &+ \varepsilon^4 \left[\frac{30308\zeta(3)}{177147} + \frac{2\zeta(4)}{729} + \frac{200\zeta(5)}{2187} - \frac{48973747}{344373768} \right] + \\ &+ \varepsilon^5 \left[+\frac{54608659\zeta(3)}{114791256} + \frac{101851\zeta(4)}{708588} - \frac{325\zeta(6)}{39366} - \frac{1519\zeta(7)}{6561} - \right. \\ &\quad \left. -\frac{5375\zeta(3)^2}{59049} - \frac{230560093043}{1338925209984} \right] + \\ &+ \varepsilon^6 \left[\frac{24368284757\zeta(3)}{27894275208} + \frac{597666691\zeta(4)}{1721868840} - \frac{20057900878765}{108452942008704} - \right. \\ &\quad -\frac{1112573461\zeta(5)}{645700815} - \frac{7725253\zeta(6)}{9565938} + \frac{16586384\zeta(7)}{7971615} + \frac{176698\zeta(8)}{13286025} + \\ &\quad +\frac{2911136\zeta(9)}{4782969} - \frac{101024906\zeta(3)^2}{215233605} + \frac{14080\zeta(3)^3}{531441} - \frac{28412\zeta(4)\zeta(3)}{177147} + \\ &\quad \left. +\frac{115696\zeta(5)\zeta(3)}{177147} + \frac{90592\zeta(3,5)}{4428675} \right] + O(\varepsilon^7) = \\ &= 0.33333\varepsilon + 0.13443\varepsilon^2 - 0.13363\varepsilon^3 + 0.16124\varepsilon^4 - 0.43104\varepsilon^5 + 1.3278\varepsilon^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2^* &= -\frac{1}{9}\varepsilon + \frac{118}{2187}\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left[\frac{435439}{2125764} - \frac{260\zeta(3)}{2187} \right] + \\
&+ \varepsilon^4 \left[-\frac{231404\zeta(3)}{531441} - \frac{226\zeta(4)}{2187} + \frac{920\zeta(5)}{2187} + \frac{257911843}{1033121304} \right] + \\
&+ \varepsilon^5 \left[-\frac{291502339\zeta(3)}{344373768} - \frac{692465\zeta(4)}{2125764} + \frac{760450\zeta(5)}{531441} + \frac{22925\zeta(6)}{39366} - \right. \\
&\quad \left. -\frac{31115\zeta(7)}{19683} + \frac{52853\zeta(3)^2}{177147} + \frac{1077861709331}{4016775629952} \right] + \\
&+ \varepsilon^6 \left[-\frac{547951382833\zeta(3)}{418414128120} - \frac{631200319\zeta(4)}{1033121304} + \frac{1732037966\zeta(5)}{645700815} + \right. \\
&\quad + \frac{17543357\zeta(6)}{9565938} - \frac{120541604\zeta(7)}{23914845} - \frac{209656711\zeta(8)}{39858075} + \frac{86923264\zeta(9)}{14348907} + \\
&\quad + \frac{880268036\zeta(3)^2}{645700815} + \frac{436673550255737}{1626794130130560} - \frac{708704\zeta(5)\zeta(3)}{1594323} + \\
&\quad \left. + \frac{12497456\zeta(3,5)}{13286025} + \frac{490496\zeta(3)^3}{1594323} + \frac{1185542\zeta(4)\zeta(3)}{2657205} \right] + O(\varepsilon^7) = \\
&= -0.1111\varepsilon + 0.05396\varepsilon^2 + 0.06193\varepsilon^3 + 0.05059\varepsilon^4 - 0.1884\varepsilon^5 + 0.9522\varepsilon^6,
\end{aligned} \tag{58}$$

где

$$\zeta(3,5) = \sum_{0 < n < m} \frac{1}{n^3 m^5} \simeq 0.037707672985. \tag{59}$$

Рассмотрим теперь собственные значения матрицы (54). Нас интересует собственное значение ω_2 , определяющее значение критической размерности n_c . Когда n переходит в n_c , кубическая неподвижная точка стремится к гайзенберговской, а это означает, что ω_2 стремится к нулю. Опознавая такое поведение ω_2 по низшему порядку теории возмущений, получаем следующее ε -разложение:

$$\omega_2 = \varepsilon \frac{n-4}{3n} + \varepsilon^2 \frac{(n-1)(-848 + 660n + 72n^2 - 19n^3)}{81n^3(n+2)} + \sum_{k=3}^6 C_{\omega_2}^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^7), \tag{60}$$

где коэффициенты $C_{\omega_2}^{(k)}$ представлены в [25] (такая же форма подходит и для ω_1 , коэффициенты $C_{\omega_1}^{(k)}$ см. в [25]). Как мы уже говорили выше, критическое

значение $n = n_c$ определяется условием

$$\omega_2(n_c, \varepsilon) = 0. \quad (61)$$

Решая это уравнение итерационно по ε , получаем:

$$\begin{aligned} n_c = & 4 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \left[\frac{5\zeta(3)}{2} - \frac{5}{12} \right] + \varepsilon^3 \left[\frac{15\zeta(4)}{8} + \frac{5\zeta(3)}{8} - \frac{25\zeta(5)}{3} - \frac{1}{72} \right] + \quad (62) \\ & + \varepsilon^4 \left[\frac{93\zeta(3)}{128} + \frac{15\zeta(4)}{32} - \frac{3155\zeta(5)}{1728} - \frac{125\zeta(6)}{12} + \frac{11515\zeta(7)}{384} - \frac{229\zeta(3)^2}{144} - \frac{1}{384} \right] + \\ & + \varepsilon^5 \left[\frac{1709\zeta(3)}{6912} - \frac{2657\zeta(3,5)}{160} + \frac{279\zeta(4)}{512} + \frac{4879\zeta(5)}{20736} - \frac{21175\zeta(6)}{6912} + \right. \\ & + \frac{182663\zeta(7)}{41472} + \frac{237079\zeta(8)}{2560} - \frac{2554607\zeta(9)}{23328} - \frac{21685\zeta(3)^2}{3456} - \frac{1793\zeta(3)^3}{324} \\ & \left. - \frac{229\zeta(4)\zeta(3)}{96} - \frac{3455\zeta(5)\zeta(3)}{216} + \frac{97}{10368} \right] + O(\varepsilon^6) = \\ & = 4 - 2\varepsilon + 2.588476\varepsilon^2 - 5.874312\varepsilon^3 + 16.82704\varepsilon^4 - 56.62195\varepsilon^5. \end{aligned}$$

2.4 Критические индексы η и ν

Как было упомянуто выше, нас интересуют прежде всего шестипетлевые ε -разложения для критических показателей η и ν из соотношений (52). Они могут быть получены из (51) и ε -разложения для кубической фиксированной точки. Ниже ε -разложения для критических показателей представлены для физически интересного случая $n = 3$ (для произвольного n см. [25]):

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{5}{243}\varepsilon^2 + \frac{4433}{236196}\varepsilon^3 + \varepsilon^4 \left[\frac{2102395}{229582512} - \frac{856}{59049}\zeta(3) \right] + \quad (63) \\ & + \varepsilon^5 \left[-\frac{211933\zeta(3)}{19131876} - \frac{214\zeta(4)}{19683} + \frac{880\zeta(5)}{19683} + \frac{302817233}{223154201664} \right] + \\ & + \varepsilon^6 \left[-\frac{123938827\zeta(3)}{55788550416} - \frac{211933\zeta(4)}{25509168} + \frac{80933\zeta(5)}{3188646} + \frac{1100\zeta(6)}{19683} - \right. \\ & \left. - \frac{80458\zeta(7)}{531441} + \frac{169100\zeta(3)^2}{14348907} - \frac{120071712419}{72301961339136} \right] + O(\varepsilon^7) = \\ & = 0.020576\varepsilon^2 + 0.018768\varepsilon^3 - 0.0082681\varepsilon^4 + 0.022634\varepsilon^5 - 0.065781\varepsilon^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu^{-1} &= 2 - \frac{4}{9}\varepsilon - \frac{383}{2187}\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left[\frac{400}{2187}\zeta(3) - \frac{181229}{2125764} \right] + \\
&+ \varepsilon^4 \left[\frac{52279\zeta(3)}{531441} + \frac{100\zeta(4)}{729} - \frac{3760\zeta(5)}{6561} - \frac{45792931}{2066242608} \right] + \\
&+ \varepsilon^5 \left[\frac{6730303\zeta(3)}{172186884} + \frac{52279\zeta(4)}{708588} - \frac{357650\zeta(5)}{1594323} - \frac{4700\zeta(6)}{6561} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{38710\zeta(7)}{19683} - \frac{20032\zeta(3)^2}{177147} + \frac{18998350495}{2008387814976} \right] + \\
&\varepsilon^6 \left[-\frac{12508116067\zeta(3)}{167365651248} + \frac{6730303\zeta(4)}{229582512} + \frac{21979362510179}{650717652052224} + \right. \\
&\quad + \frac{137705935\zeta(5)}{1549681956} - \frac{1076375\zeta(6)}{3188646} + \frac{10154279\zeta(7)}{19131876} + \frac{94237301\zeta(8)}{15943230} - \\
&\quad - \frac{101478944\zeta(9)}{14348907} - \frac{44681927\zeta(3)^2}{129140163} - \frac{560896\zeta(3)^3}{1594323} - \frac{10016\zeta(4)\zeta(3)}{59049} - \\
&\quad \left. - \frac{1565872\zeta(5)\zeta(3)}{1594323} - \frac{2714888\zeta(3,5)}{2657205} \right] + O(\varepsilon^7) = \\
&= 2 - 0.4444\varepsilon - 0.17513\varepsilon^2 + 0.13460\varepsilon^3 - 0.34969\varepsilon^4 + 0.99461\varepsilon^5 - 3.48637\varepsilon^6.
\end{aligned} \tag{64}$$

Представляет интерес также критический индекс γ , поскольку он может быть измерен в экспериментах и извлечен из решеточных расчетов. Для $n = 3$ его ε -разложение можно записать следующим образом (для произвольного n см. [25]):

$$\begin{aligned}
\gamma = & 1 + \varepsilon \frac{2}{9} + \varepsilon^2 \frac{277}{2187} + \varepsilon^3 \left[-\frac{200\zeta(3)}{2187} + \frac{85931}{1062882} \right] + \\
& + \varepsilon^4 \left[-\frac{87775\zeta(3)}{1062882} - \frac{50\zeta(4)}{729} + \frac{1880\zeta(5)}{6561} + \frac{23261567}{516560652} \right] + \\
& + \varepsilon^5 \left[-\frac{10826597\zeta(3)}{172186884} - \frac{87775\zeta(4)}{1417176} + \frac{346225\zeta(5)}{1594323} + \frac{2350\zeta(6)}{6561} - \right. \\
& \left. - \frac{19355\zeta(7)}{19683} + \frac{10016\zeta(3)^2}{177147} + \frac{2452679419}{125524238436} \right] + \\
& + \varepsilon^6 \left[-\frac{384088139\zeta(3)}{83682825624} - \frac{10826597\zeta(4)}{229582512} + \frac{782936\zeta(3)\zeta(5)}{1594323} - \frac{94237301\zeta(8)}{31886460} + \right. \\
& + \frac{240030707\zeta(5)}{3099363912} + \frac{1913375\zeta(6)}{6377292} - \frac{23980511\zeta(7)}{38263752} + \frac{280448\zeta(3)^3}{1594323} + \\
& + \frac{50739472\zeta(9)}{14348907} + \frac{51810395\zeta(3)^2}{258280326} + \frac{5008\zeta(3)\zeta(4)}{59049} + \\
& \left. + \frac{1357444\zeta(3,5)}{2657205} - \frac{323266891181}{81339706506528} \right] + O(\varepsilon^7) = \\
= & 1 + 0.2222\varepsilon + 0.12666\varepsilon^2 - 0.029080\varepsilon^3 + 0.16865\varepsilon^4 - 0.44336\varepsilon^5 + 1.6059\varepsilon^6.
\end{aligned} \tag{65}$$

Для данной модели существует ряд проверок финального разложения по ε :

- Сравнение с известным пятипетлевым приближением [35]
- Для случая изинговской ($g_1 \rightarrow 0$) и гайзенберговской ($g_2 \rightarrow 0$) неподвижной точек полученные ε -разложения можно сопоставить с их аналогами для $O(n)$ -симметричной модели [6] с $n = 1$ и произвольным n соответственно.
- Модель ϕ^4 с кубической симметрией имеет при $n = 2$ нетривиальную симметрию, которую в терминах поля и заряда можно записать следующим образом:

$$\varphi_1 \rightarrow \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 \rightarrow \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}}, \tag{66}$$

$$g_1 \rightarrow g_1 + \frac{3}{2}g_2, \quad g_2 \rightarrow -g_2. \tag{67}$$

При такой замене структура действия не изменится [36]. Разложения (50) и (51) удовлетворяют этим требованиям симметрии, а кубическая фиксированная точка и изинговская преобразуются друг в друга.

В результате были получены критические индексы η , γ , ν , а также критическое значение числа компонент поля n_c в виде разложения по ε вплоть до 6 порядка. Такие асимптотические ряды должны быть пересуммированы, что будет обсуждаться в главе 4.

Глава 3: Динамика

Данная глава посвящена рассмотрению моделей А и Е критической динамики.

3.1 Динамическая А модель

Данная глава начинается с исследования модели А. Она описывает эффект критического замедления для систем с неконсервативным параметром порядка. Модель А является простейшим представителем динамических моделей. Поэтому адаптацию технических методов статики на динамику удобней всего рассматривать на ее примере.

Несмотря на относительную простоту этой модели, в ее ренормгрупповом анализе долгое время не удавалось продвинуться дальше второго порядка теории возмущений [19]. Затем в работе [18] был представлен результат третьего порядка по ε , но он оказался ошибочным из-за технической погрешности. Также трехпетлевой, но уже верный расчет, был продемонстрирован в работе [3]. Далее долгое время имеющийся технический аппарат не позволял продвинуться в следующий – четвертый – порядок. Лишь спустя почти четверть века в работе [20] был представлен четырехпетлевой численный результат динамического критического индекса z .

В настоящее время появилась новая мотивация в изучении этой динамической модели. Как выяснилось, она описывает не только критическое поведение ферромагнетиков, для которых она традиционно использовалась, но и фазовый переход в мультиферроиках. В статье [4] изучалась динамика в мультиферроическом хиральном антиферромагнетике $MnWO_4$. Также в работе [37] был изучен переход, соответствующий изменению состояния упорядочения в подрешетке $Au-Ag$ в $AuAgZn_2$. Поскольку для развития упорядочения не требуется перенос атомов на большие расстояния, этот сплав можно рассматривать как модель перехода с “неизменным параметром порядка”, т.е. как динамическую модель А. В работе [38] был получен критический динамический индекс $z = 2.17$ скалярной однокомпонентной двумерной модели ϕ^4 с помощью компьютерного моделирования. Таким образом, вычисление критического индекса z с высокой точностью является на сегодняшний день актуальной задачей.

3.1.1 Ренормировка модели

Неренормированное действие А модели критической динамики определяется набором ϕ_0 двух неренормированных $O(n)$ -симметричных n -компонентных полей $\phi_0 \equiv \{\psi_0, \psi'_0\}$ и может быть записано в форме [39]:

$$\begin{aligned} S_0(\phi_0) &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 [-\partial_t \psi_0 + \lambda_0 \delta S_0^{st} / \delta \psi_0] = \\ &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 [-\partial_t \psi_0 + \lambda_0 (\partial^2 \psi_0 - \tau_0 \psi_0 - \frac{1}{3!} g_0 \psi_0^3)], \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$S_0^{st}(\phi_0) = -(\partial \psi_0)^2 / 2 - \tau_0 \psi_0^2 / 2 - \frac{1}{4!} g_0 \psi_0^4. \quad (69)$$

Модель А мультипликативно ренормируема, поэтому после перенормировки параметров и полей ренормированное действие S_R можно представить в виде суммы $S_R = S_B + \Delta S$ базового действия S_B и контрчленов ΔS [39]:

$$S_B = \lambda \psi' \psi' + \psi' [-\partial_t \psi + \lambda (\partial^2 \psi - \tau \psi - \frac{1}{3!} \mu^\varepsilon g \psi^3)], \quad (70)$$

$$S_R = Z_1 \lambda \psi' \psi' + \psi' [-Z_2 \partial_t \psi + \lambda (Z_3 \partial^2 \psi - Z_4 \tau \psi - \frac{1}{3!} Z_5 \mu^\varepsilon g \psi^3)], \quad (71)$$

где

$$\lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g, \quad \psi_0 = \psi Z_\psi, \quad \psi'_0 = \psi' Z_{\psi'}, \quad (72)$$

и

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\lambda Z_{\psi'}^2, & Z_2 &= Z_{\psi'} Z_\psi, & Z_3 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\psi, \\ Z_4 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\tau Z_\psi, & Z_5 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_g Z_\psi^3. \end{aligned} \quad (73)$$

Из мультипликативной ренормируемости моделей (68), (69) следует, что константы ренормировки Z_ψ, Z_τ, Z_g в модели А совпадают со статическими (т.е. в модели (69))

$$Z_\psi = (Z_\psi)_{st}, \quad Z_\tau = (Z_\tau)_{st}, \quad Z_g = (Z_g)_{st}, \quad (74)$$

а также имеет место равенство $Z_{\psi'} Z_\lambda = Z_\psi$ [39]. Это означает, что константы ренормировки Z_3, Z_4, Z_5 эквивалентны чисто статическим и справедливо соотношение

$$Z_1 = Z_2. \quad (75)$$

Таким образом, единственной новой константой ренормировки является Z_λ , которая может быть представлена в виде:

$$Z_\lambda = Z_1^{-1} Z_\psi^2 = Z_2^{-1} Z_\psi^2. \quad (76)$$

Как видно из соотношения (76), мы можем вычислять константу ренормировки Z_λ как из Z_1 , так и из Z_2 . Мы провели расчет константы Z_1 , которая определяется диаграммами один-неприводимой функции Грина $\Gamma_{\psi'\psi'} = \langle \psi'\psi' \rangle_{1-irr}/(2\lambda)$, вычисленной на нулевой внешней частоте ω и импульсе p .

При построении теории возмущений будем использовать константу связи

$$u = \frac{S_d}{(2\pi)^d} g, \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad (77)$$

где S_d – площадь d -мерной сферы единичного радиуса. Разложение ренормированной 1-неприводимой функции Грина имеет вид:

$$\Gamma_{\psi'\psi'}^R|_{\omega=0, p=0} = Z_1(1 + u^2 Z_g^2 (\mu^2/\tau)^\varepsilon Z_\tau^{-\varepsilon} A^{(2)} + u^3 Z_g^3 (\mu^2/\tau)^{3\varepsilon/2} Z_\tau^{-3\varepsilon/2} A^{(3)} + \dots), \quad (78)$$

где величины $A^{(i)}$ определяются суммой соответствующих i -петлевых диаграмм.

Как и в случае модели ϕ^4 с кубической симметрией и динамической модели E, для ренормировки модели мы будем использовать схему минимальных вычитаний (MS) (71), в которой контрчлены содержат только полюса по ε . В частности для искомой константы ренормировки Z_1 имеем

$$Z_1 = 1 + \sum_{n \geq 1} Z_1^{(n)}(u) \varepsilon^{-n}, \quad (79)$$

где коэффициенты $Z_1^{(n)}(u)$ будут найдены в виде рядов по заряду u из условия отсутствия полюсов по ε в функции (78). Следует отметить, что константы перенормировки Z_g и Z_τ в (78) можно взять из статики.

3.1.2 Диаграммная техника и временные версии

Динамическая модель A содержит два типа пропагаторов и один тип вершин, которые в диаграммных обозначениях имеют вид:

$$\langle \psi\psi \rangle = \bullet \text{---} \bullet \quad \langle \psi\psi' \rangle = \bullet \text{---} | \bullet \quad \psi'\psi\psi\psi = | \text{---} |$$

Пропагаторы в частотно–импульсном представлении определяются выражениями:

$$\langle \psi\psi \rangle = \frac{-2\lambda}{|-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)|^2}, \quad (80)$$

$$\langle \psi\psi' \rangle = \frac{1}{-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)}, \quad (81)$$

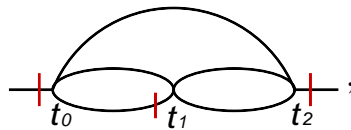
а в импульсно–временном (k, t) представлении имеют вид:

$$\langle \psi(t_1)\psi(t_2) \rangle = (k^2 + \tau)^{-1} \exp[-\lambda(k^2 + \tau)|t_1 - t_2|], \quad (82)$$

$$\langle \psi(t_1)\psi'(t_2) \rangle = \Theta(t_1 - t_2) \exp[-\lambda(k^2 + \tau)(t_1 - t_2)], \quad (83)$$

пропагатор $\langle \psi'(t_1)\psi'(t_2) \rangle$ равен нулю. Каждая вершина сопровождается множителем g .

Используя рассмотренные пропагаторы, мы можем по стандартным правилам построить все необходимые диаграммы для расчета величины Γ_1 . Основное отличие от статического случая состоит в дополнительных интегрированиях по времени (или частоте). Если мы хотим использовать ту же методику расчета, что и в статических моделях (в частности, метод Sector Decomposition), необходимо выполнить в диаграммах интегрирование по времени. Это удастся сделать благодаря простой экспоненциальной зависимости от времени пропагаторов (82). Результат интегрирования можно представить графически, что позволяет максимально автоматизировать процесс вычислений. Проиллюстрируем это на примере трехпетлевой диаграммы

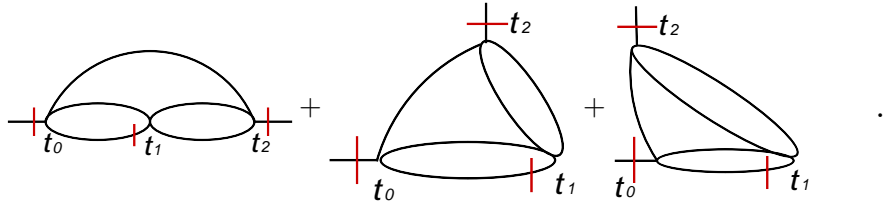


которую рассмотрим в (k, t) представлении на нулевой внешней частоте. Интегрирование удобно выполнять с помощью введения понятия “временных версий”. В силу трансляционной инвариантности пропагаторов (82) по времени, время у одной из вершин (например, t_0) можно считать фиксированным. Об-

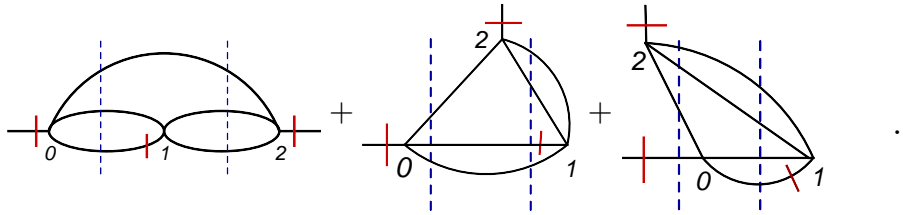
ласть интегрирования по оставшимся временам t_1 и t_2 лимитируется наличием функции $\Theta(t_0 - t_1)$ в пропагаторе $\langle \psi(t_0)\psi'(t_1) \rangle$. Эту область можно разбить на следующие интервалы (временные версии)

$$(t_0 > t_1 > t_2) \quad + \quad (t_0 > t_2 > t_1) \quad + \quad (t_2 > t_0 > t_1).$$

Фиксируя в соответствии с этими неравенствами относительное положение вершин в диаграмме (84) (в порядке убывания слева направо), представляем эту диаграмму в виде суммы трех вкладов:

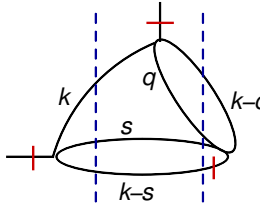


Интегрирование по относительному времени в каждом из временных интервалов легко выполняется, результат можно представить в виде диаграмм, содержащих только интегрирование по импульсам:



Здесь линии без перечеркивания с импульсом k соответствует “статический пропагатор” $1/E_k$, где $E_k = (k^2 + \tau)$, линиям с перечеркиванием соответствует единица, а каждому вертикальному пунктиру соответствует множитель в знаменателе, равный сумме “энергий” E_k линий, которые пересекает пунктир. В

частности, для второй временной версии имеем



$$= \iint dkdqds \frac{1}{(s^2 + \tau)(k^2 + \tau)(q^2 + \tau)((\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + \tau)} \cdot \frac{1}{(k^2 + s^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{s})^2 + 3\tau)(q^2 + s^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{s})^2 + 4\tau)}.$$

Рассмотренный пример показывает одну из дополнительных проблем расчета диаграмм динамических моделей по сравнению со статическими – значительно большее число интегралов. Каждая статическая диаграмма определенной топологии порождает в динамике набор временных версий, все возрастающий с ростом порядка теории возмущений, что приводит к значительному усложнению расчетов. Стоит также отметить, что дополнительные множители в знаменателях динамических диаграмм имеют несколько иную форму, чем в статике, что затрудняет использование наработанных в статике методов расчета делением на сектора.

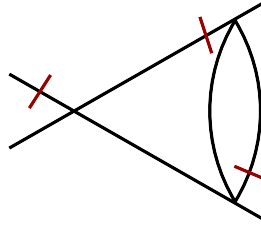
Это является основными причинами того, что расчет динамических моделей до настоящего времени не продвинулся дальше третьего порядка теории возмущений (исключая А модель), в то время как статические модели изучены вплоть до 7 порядка ([6]–6loops, [7]–7loops). Обе указанные проблемы были решены нашей научной группой. Проблема с нетривиальным знаменателем была решена путем адаптации метода разложения по секторам Sector Decomposition к диаграммам критической динамики. А проблема с растущим числом временных версий была в значительной степени преодолена благодаря разработанной схеме сокращения диаграмм Diagram Reduction.

3.1.3 Фейнмановское представление динамических диаграмм

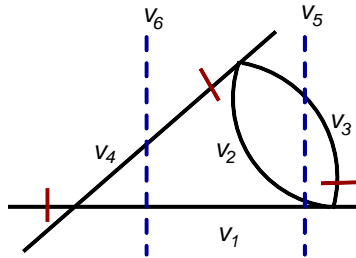
Использование метода Sector Decomposition предполагает переход к фейнмановскому представлению для диаграмм. Как уже отмечалось, подынтегральные выражения для динамических диаграмм имеют более сложную структуру, чем статические. Это связано с тем, что мы рассматриваем не сами диаграммы, а их временные версии, что порождает дополнительные вклады в знаменателе от

сечений.

Для примера рассмотрим двухпетлевую диаграмму динамической Λ модели:



Этот граф содержит только одну временную версию. Проинтегрированная по временам диаграмма имеет вид:



Чтобы отличать от статического случая, на диаграмме параметры Фейнмана обозначены буквами v_i . Они сопоставляются каждой линии без перечеркивания и каждому сечению (линии с перечеркиванием в данном случае не зависят от импульсов – они равны единице). На рисунке мы формально ввели параметры v_3 и v_4 для удобства сопоставления со статическим случаем, в окончательных выражениях они будут полагаться равными нулю.

Зная фейнмановскую запись статической диаграммы с той же топологией, что и рассматриваемая динамическая, можно несложными заменами получить фейнмановское представление и для динамической диаграммы с помощью следующей замены статических параметров u_i на динамические v_j :

$$u_i = v_i + \sum v_j. \quad (84)$$

Здесь суммирование ведется по всем параметрам v_j сечений, пересекающих линии с тем же импульсом, что и линия с параметром v_i .

Рассматриваемая динамическая диаграмма имеет ту же топологию, как и диа-

грамма (1) и, согласно изложенным правилам, замены имеют вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + v_4, & u_2 &= v_2 + v_3, \\ u_3 &= v_5, & u_4 &= v_6. \end{aligned} \quad (85)$$

Подставляя (85) в (27) и (28), получаем следующее фейнмановское представление для динамической диаграммы:

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(2 - \varepsilon/2)^2}{2^2} \int_0^1 dv_{1,2,5,6} \frac{\delta(1 - v_1 - v_2 - 3v_5 - 2v_6)}{(\det v)^{2-\varepsilon/2}}, \\ \det v &= v_1v_2 + 2v_1v_5 + v_2v_5 + v_5^2 + v_1v_6 + 2v_2v_6 + 4v_5v_6 + v_6^2. \end{aligned} \quad (86)$$

Имея интеграл в такой форме, можно использовать для расчета метод Sector Decomposition. Более сложный вид подынтегральных выражений в представлении Фейнмана для динамических диаграмм создает дополнительные проблемы при построении секторов. Нами было показано, что эти сектора можно по определенным правилам строить из статических, при этом общее число секторов возрастает. Таким образом, объем вычислений динамических диаграмм растет не только на этапе формирования временных версий, но и на этапе построения секторов в методе SD для каждой временной версии.

3.1.4 Сокращение диаграмм

Наличие времени в моделях критической динамики значительно усложняет расчет в сравнении со статикой. Интегрирование по времени влечет за собой появление временных версий (которые обсуждались в предыдущем разделе 3.1.2), а также усложняет подынтегральные выражения. В ряде работ [40, 41, 42, 43] использовалась группировка диаграмм, упрощающая ответ, однако общий рецепт такой процедуры не был сформулирован. Ответ на поставленную задачу получен в работе ([26]).

Описание процедуры

В данной работе предлагается метод, основанный на комбинировании диаграмм по определенным правилам, что приводит к построению модифицированных диаграмм, число которых значительно меньше исходного. Эта техника позволяет автоматизировать вычисления и в итоге продвинуться в высшие порядки

теории возмущений для динамических моделей.

Стоит отметить, что предпосылки к существованию универсальной техники сокращения диаграмм видны уже из соотношения (74). На самом деле это равенство является следствием более глобального утверждения: 1-неприводимые статические функции $\langle \psi\psi \rangle_{1-irr|st}$, $\langle \psi\psi\psi\psi \rangle_{1-irr|st}$ и динамические функции $\langle \psi'\psi \rangle_{1-irr}$, $\langle \psi'\psi\psi\psi \rangle_{1-irr}$ на нулевой частоте совпадают между собой:

$$\langle \psi'\psi \rangle_{1-irr|\omega=0} = \langle \psi\psi \rangle_{1-irr|st}, \quad \langle \psi'\psi\psi\psi \rangle_{1-irr|\omega=0} = \langle \psi\psi\psi\psi \rangle_{1-irr|st}. \quad (87)$$

Это означает, что результат суммирования динамических диаграмм должен быть равен сумме статических для каждой пары функций. Рассмотрим пример технической реализации такой процедуры.

Докажем равенство:

$$\frac{1}{2} \left[\text{Diagram} \right]_{\omega=0} = \left[\frac{1}{6} \left[\text{Diagram} \right] \right]_{st}, \quad (88)$$

где множители $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{6}$ определяются коэффициентами симметрии диаграмм. Выполняя интегрирование по времени, напомним левую часть как

$$\frac{1}{2} \left[\text{Diagram} \right]_{\omega=0} = \frac{1}{2} \cdot \left[\text{Diagram} \right]_{0} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{E_2 E_3} \cdot \frac{1}{(E_1 + E_2 + E_3)}.$$

Здесь цифры обозначают порядковые номера импульсов интегрирования, а подынтегральное выражение стоит в правой части формулы. Симметризуем это выражение по импульсам:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{E_2 E_3} \cdot \frac{1}{(E_1 + E_2 + E_3)} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{6} \left(\frac{1}{E_2 E_3} + \frac{1}{E_1 E_2} + \frac{1}{E_1 E_3} \right) \cdot \frac{1}{(E_1 + E_2 + E_3)} = \frac{1}{6} \frac{1}{E_1 E_2 E_3}. \end{aligned} \quad (89)$$

Полученное выражение совпадает с подынтегральным выражением правой ча-

сти (88).

На языке диаграмм процедура симметризации может быть записана в виде:

$$\frac{1}{2} \left[\text{circle with vertical dashed line and red tick on right} \right] = \frac{1}{6} \left(\left[\text{circle with vertical dashed line and red tick on top} \right] + \left[\text{circle with vertical dashed line and red tick on bottom} \right] + \left[\text{circle with vertical dashed line and red tick on left} \right] \right).$$

Общий вид симметризации для произвольных диаграмм можно записать в виде символического уравнения:

$$\left[\text{triangle with vertical dashed line and red tick on top} \right] + \left[\text{triangle with vertical dashed line and red tick on bottom} \right] + \left[\text{triangle with vertical dashed line and red tick on left} \right] = \left[\text{triangle} \right]. \quad (90)$$

Кроме того, та же процедура может быть применена к другому количеству внешних линий:

$$\left[\text{cross with vertical dashed line and red tick on top} \right] + \left[\text{cross with vertical dashed line and red tick on bottom} \right] = \left[\text{cross} \right]. \quad (91)$$

$$\left[\text{fan with vertical dashed line and red tick on top} \right] + \left[\text{fan with vertical dashed line and red tick on bottom} \right] + \left[\text{fan with vertical dashed line and red tick on left} \right] + \left[\text{fan with vertical dashed line and red tick on right} \right] = \left[\text{fan} \right]. \quad (92)$$

Используя это новое правило, рассмотрим более сложный пример суммы трех трехпетлевых диаграмм:

$$J = \left[\text{3-loop with ticks } t_0, t_1, t_2 \text{ and } \omega=0 \right] + \frac{1}{2} \left[\text{3-loop with ticks } t_0, t_1, t_2 \text{ and } \omega=0 \text{ and red tick on top} \right] + \frac{1}{2} \left[\text{3-loop with ticks } t_0, t_1, t_2 \text{ and } \omega=0 \text{ and red tick on bottom} \right]. \quad (93)$$

Подобно предыдущему 2х-петлевому примеру, используем временные версии и выполним симметризацию:

$$J = \frac{1}{2} \left(\left[\text{3-loop with ticks } 0, 1, 2 \text{ and red ticks on top} \right] + \left[\text{3-loop with ticks } 0, 1, 2 \text{ and red ticks on bottom} \right] + \left[\text{3-loop with ticks } 0, 1, 2 \text{ and red ticks on left} \right] \right) + \frac{1}{2} \left(\left[\text{3-loop with ticks } 0, 1, 2 \text{ and red ticks on top and bottom} \right] + \left[\text{3-loop with ticks } 0, 1, 2 \text{ and red ticks on top and left} \right] \right). \quad (94)$$

Первая диаграмма в (93) имеет всего одну временную версию и “соответствует” двум первым графам в уравнении (94); вторая диаграмма в (93) имеет две временные версии и “соответствует” диаграммам 3 и 4 в (94); третья диаграмма имеет одну временную версию и “соответствует” пятому вкладу в (94). Используя упрощающие соотношения (90) - (92), перепишем (94) в виде

$$J = \frac{1}{2} \left[\text{Diagram 1} \right] + \frac{1}{4} \left[\text{Diagram 2} \right] = \frac{1}{4} \left[\text{Diagram 3} \right].$$

Для первых скобок в (94) использовано равенство (90), для вторых – (92) и для последнего перехода – (90). Как видно, результатом суммирования динамических диаграмм (93) оказалась статическая диаграмма.

Рассмотренные два примера показывают, что число исходных динамических подынтегральных выражений можно уменьшить с помощью соотношений (90) - (92). Эту же процедуру можно выполнить и в любом порядке теории возмущений.

Однако нас также интересует одна неприводимая функция Грина $\Gamma_{\psi'\psi'}$. Для этого случая полное приведение к статике невозможно. Но соотношения (90) - (92) продолжают работать, что позволяет значительно сократить количество вкладов и упростить их форму. Рассмотрим сумму двух временных версий, которые являются составляющими динамической диаграммы $\psi'\psi'$:

$$J_1 = \left[\text{Diagram 4} \right] + \left[\text{Diagram 5} \right].$$

Стоит отметить, что значения диаграмм не зависят от нумерации вершин. Таким образом, мы можем сделать симметризацию и используя соотношение (92)

получить:

$$J_1 = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \text{Diagram 5}.$$

В результате видно, что сокращение возможно и в более сложном случае. Итак, рассмотрим более общий случай и опишем все этапы получения результата сокращения диаграмм:

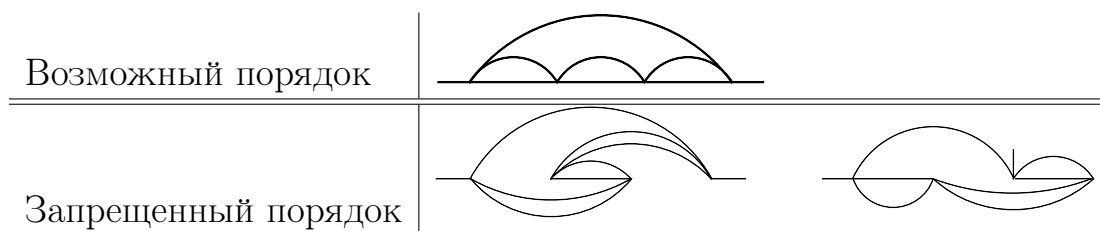
- *Шаг 0.*

Мы рассмотрим следующие две диаграммы, содержащие в совокупности десять временных версий:



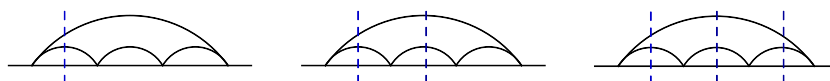
- *Шаг I.*

Нарисуем схемы статической теории так, чтобы вершины с внешними “хвостами” были крайними слева и справа, тогда как другие (внутренние) вершины упорядочены всеми возможными способами. При этом ближайшие вершины должны быть связаны друг с другом.



- *Шаг II.*

На основе диаграмм из шага I нарисует набор диаграмм с пунктирными линиями-сечениями, начиная с левой вершины. Число сечений пробегает все целые значения из интервала $[1, \text{количество вершин}-1]$.



- *Шаг III.*

Во всех линиях, идущих слева к вершине, расположенной между двумя сечениями, размещаем штрихи всеми возможными способами. Если есть 2 одинаковые линии, по которым можно расположить штрихи, то ставим только одну, оставшийся вариант учитывается коэффициентом симметрии.

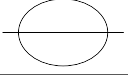
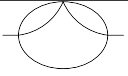
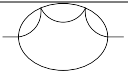
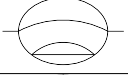
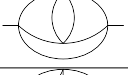



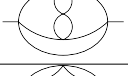
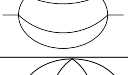
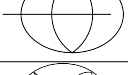

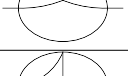
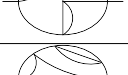
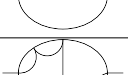
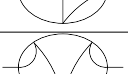
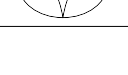


- Итог: сумма десяти «начальных» временных версий рассмотренных двух динамических диаграмм сведена к сумме трех эффективных диаграмм (95).

3.1.5 Результат метода сокращения диаграмм для А модели

В Таб.1 проиллюстрировано различие между начальным числом подынтегральных выражений (столбец VI) и количеством выражений после метода сокращения диаграмм (столбец VII). Уменьшение числа диаграмм существенно уже с 4-петлевого приближения – с 66 до 17, в следующем, пятипетлевом приближении оно еще заметней – с 1025 до 201. Это значительно сократило объем вычислений, выполненных нами в пятом порядке теории возмущений.

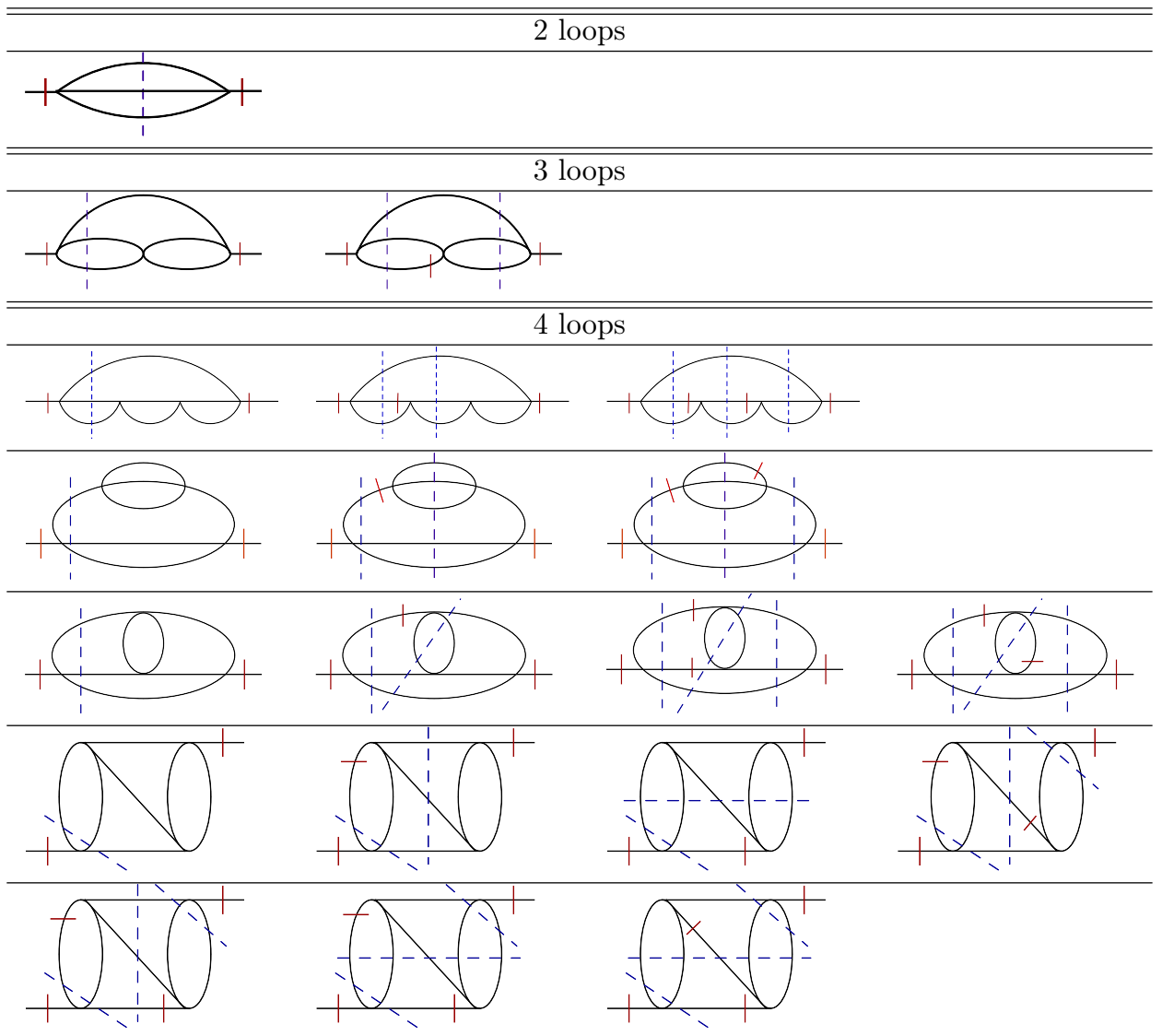
Таблица 1: Сравнение числа эффективных подынтегральных выражений до (столбец VI) и после (столбец VII) редукции диаграмм для всех топологий.

I	II	III Nickel index	IV a(n)	V number of dyn.diag.	VI number of time vers.	VII number of red.diag.
2 loop						
1		e11 e	$(2+n)/3$	1	2	1
				1	2	1
3 loop						
1		e112 22 e	$(8+n)(2+n)/27$	1	2	2
				1	2	2
4 loop						
1		e112 33 e33	$(n^2+6n+20)(2+n)/81$	2	10	3
2		e112 e3 333	$(2+n)^2/9$	2	10	3
3		e123 e23 33	$(22+5n)(2+n)/81$	3	18	4
4		e112 23 33 e	$(22+5n)(2+n)/81$	5	28	7
				12	66	17
5 loop						
1		e112 33 e44 44	$(n^3+8n^2+24n+48)(2+n)/243$	2	15	4
2		e112 33 444 e4	$(8+n)(2+n)^2/81$	3	45	9
3		e123 e23 44 44	$(2+n)(3n^2+22n+56)/243$	3	30	8
4		e112 e3 344 44	$(8+n)(2+n)^2/81$	4	30	8
5		e123 234 34 4 e	$(22+5n)(2+n)/81$	6	90	10
6		e112 34 e34 44	$(2+n)(3n^2+22n+56)/243$	9	90	17
7		e123 e24 34 44	$(n^2+20n+60)(2+n)/243$	12	120	23
8		e112 34 334 4 e	$(n^2+20n+60)(2+n)/243$	21	270	51
9		e112 23 e4 444	$(8+n)(2+n)^2/81$	7	65	19
10		e112 23 44 e44	$(2+n)(3n^2+22n+56)/243$	13	150	29
11		e112 23 34 44 e	$(n^2+20n+60)(2+n)/243$	12	120	23
				92	1025	201

При этом новые эффективные графы имеют более простую форму, чем исходные.

В таблице указаны также индексы Никеля для каждой из статических диаграмм и приведены дополнительные множители $a(n)$, позволяющие переходить от однокомпонентного случая $n = 1$ к модели с произвольным числом компонент.

Таблица 2: Результат редукции диаграмм вплоть до четырехпетлевых



В Таб.2 приведен полный набор редуцированных диаграмм вплоть до четырехпетлевого приближения. Помимо указанного уменьшения числа диаграмм отметим уменьшение в них количества сечений, что упрощает подынтегральные выражения.

Подводя итог, можно сказать, что метод редукции диаграмм имеет два основных преимущества: значительно уменьшается число подлежащих к вычислению интегралов, и, что не менее важно, соответствующие подынтегральные выражения упрощаются.

3.1.6 Критический индекс z

Задача нахождения динамического критического показателя z в А модели сводится к нахождению коэффициентов $A^{(k)}$ в уравнении (78), где k – число петель. Полученные редуцированные диаграммы были рассчитаны с использованием метода разложения на сектора (SD) [26], адаптированного к динамике. Результаты представлены в Таб.10, 11 (Приложении А). Искомые коэффициенты $A^{(k)}$ определяются суммой вкладов диаграмм из Таб.1 с учетом их комбинаторных коэффициентов и множителей $a(n)$. Результат для $A^{(k)}(n = 1)$ в уравнении (78) представлен в Таб.3:

Таблица 3: ε разложение коэффициентов $A^{(k)}$ при $n = 1$ до пятого порядка включительно.

	numerical result
$A^{(2)}$	$1/8 \log[4/3] \varepsilon^{-1} + 0.0416702(4) + 0.0647910(6) \varepsilon + 0.0446045(9) \varepsilon^2$
$A^{(3)}$	$1/8 \log[4/3] \varepsilon^{-2} + 0.1368518(6) \varepsilon^{-1} + 0.2709195(13) + 0.2852955(29) \varepsilon$
$A^{(4)}$	$27/64 \log[4/3] \varepsilon^{-3} + 0.3473579(35) \varepsilon^{-2} + 0.867242(12) \varepsilon^{-1} + 1.297567(30)$
$A^{(5)}$	$27/40 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.77317(4) \varepsilon^{-3} + 2.41421(13) \varepsilon^{-2} + 4.8300(4) \varepsilon^{-1}$

Зная значение $A^{(k)}$ из Таб.3 и константу ренормировки Z_g из статики

$$Z_g = 1 + \frac{8 + ng}{6\varepsilon} + g^2 \left(\frac{(8+n)^2}{36\varepsilon^2} - \frac{14+3n}{24\varepsilon} \right) + g^3 \left(\frac{(8+n)^3}{216\varepsilon^3} - \frac{7(112+38n+3n^2)}{432\varepsilon^2} + \frac{2960+922n+33n^2}{5184\varepsilon} + \frac{\zeta(3)(22+5n)}{54\varepsilon} \right), \quad (96)$$

можно найти Z_1 в виде разложения по заряду u . Стоит заметить, что из Z_1 нужно знать только коэффициенты $Z_1^{(1)}$ при первом полюсе по ε . Напишем в

общем виде:

$$Z_1^{(1)} = \frac{n+2}{3} \left[z_{20}u^2 + (z_{30} + z_{31}n)u^3 + (z_{40} + z_{41}n + z_{42}n^2)u^4 + (z_{50} + z_{51}n + z_{52}n^2 + z_{53}n^3)u^5 \right]. \quad (97)$$

Используя уравнения (96, 97, 78) и Таб.10, 11 (Приложение А), мы можем найти коэффициенты z_{mn} в уравнении(97):

Таблица 4: Численное значение коэффициентов для (97).

z_{20}	-0.0359602590565	z_{42}	0.000167177330411
z_{30}	0.01052554615492731	z_{50}	0.04926(29)
z_{31}	0.0013156932693659138	z_{51}	0.01357(17)
z_{40}	-0.0210863(5)	z_{52}	0.000386(16)
z_{41}	-0.00399345(12)	z_{53}	-0.0000082787

Но основная идея - найти критические показатели с высокой точностью. Для этого мы можем взять аналитический результат для трехпетлевого приближения этой модели:

$$Z_1^{(1)} = -\frac{(2+n)}{24\varepsilon} \log[4/3]u^2 - u^3 \frac{(2+n)(8+n)}{27} \left[-\frac{1}{8\varepsilon^2} \log[4/3] + \frac{1}{96\varepsilon} (\pi^2 - 8Li_2[1/4] + \log[4/3](-6 - 21 \log[3] + 13 \log[4])) \right] + O(u^4). \quad (98)$$

Результат уравнения (98) был получен в работах [19] (2-петли) и [3] (3-петли).

Как известно, константа ренормировки Z_1 определяет RG-функцию:

$$\gamma_1 = \beta(u) \partial_u \log Z_1. \quad (99)$$

Связь между коэффициентами при старших полюсах и коэффициентами при первом полюсе $Z_1^{(1)}$ позволяет представить γ_1 в более простой форме:

$$\gamma_1 = -u \partial_u Z_1^{(1)}. \quad (100)$$

Зная γ_1 , мы можем найти ε -разложение для динамического критического индекса z . Соотношение между ними можно записать как:

$$z = 2 + \gamma_1^* - \eta, \quad (101)$$

где $\gamma_1^* = \gamma_1(u_*)$ – значение γ_1 в фиксированной точке, а η – показатель Фишера. Разложения по ε для u_* и η можно взять из статики

$$u^* = \frac{6\varepsilon}{8+n} + \frac{18(14+3n)\varepsilon^2}{(8+n)^3} + \frac{\varepsilon^3}{(n+8)^5} (-11824.5 - 4045.98n - 350.24n^2 - 24.75n^3) + \frac{\varepsilon^4}{(n+8)^7} (1543836.1 + 822152.n + 181543.n^2 + 21507.4n^3 + 877.912n^4 - 0.625n) , \quad (102)$$

$$\eta = \varepsilon^2 \frac{2+n}{2(8+n)^2} - \varepsilon^3 \frac{(2+n)(n^2 - 272 - 56n)}{8(8+n)^4} - \varepsilon^4 \frac{2+n}{(8+n)^6} (1096.74 + 334.33n + 36.9984n^2 + 7.1875n^3 + 0.15625n^4) + \varepsilon^5 \frac{(2+n)}{(8+n)^8} (222337. + 117828.n + 25396.1n^2 + 2572.12n^3 + 13.8027n^4 - 4.58183n^5 + 0.0486946n^6) . \quad (103)$$

В результате для критического показателя z получаем следующее ε -разложение:

$$z(\varepsilon, n) = 2 + \varepsilon^2 \frac{(2+n)}{2(8+n)^2} (-1 + 6\text{Log}[4/3]) + \varepsilon^3 \frac{(2+n)}{8(8+n)^4} (162.461908017 + 31.9023677877n - 1.27351796946n^2) + \varepsilon^4 \frac{(2+n)}{32(8+n)^6} (-23752.4(16) - 6929.0(8)n - 770.28(13)n^2 - 170.470(6)n^3 - 4.24423766241n^4) + \varepsilon^5 \frac{(2+n)}{128(8+n)^8} (1.986(25)10^7 + 1.038(23)10^7n + 2.15(8)10^6n^2 + 1.92(13)10^5n^3 - 3.8(10)10^3n^4 - 626(29)n^5 + 7.500527164701581n^6) . \quad (104)$$

Приведем также важный частный случай $n = 1$:

$$z(\varepsilon, 1) = 2 + 0.0134461562\varepsilon^2 + 0.0110362802\varepsilon^3 - 0.0055791(4)\varepsilon^4 + 0.01773(31)\varepsilon^5 . \quad (105)$$

Ряд (105) будет пересуммирован в Главе 4.

Для проверки точности полученных результатов было проведено их сравнение с разложением динамического индекса по обратному числу компонент поля n , полученному в главном порядке по $1/n$ при произвольном ε в работе [19]. Во

втором и третьем порядке по ε получается точное согласие с аналитическим ответом (98), в четвертом и пятом порядке согласие также имеет место, в пределах погрешности полученных нами значений. В окончательном ответе (104), для увеличения точности, мы использовали в коэффициентах ε -разложения индекса z точное значение при старшей степени полиномов по n , соответствующее результатам работы [19].

3.2 Динамическая E модель

В этой главе мы рассмотрим еще одну динамическую модель – E модель [24]. Основной целью в исследовании данной модели критической динамики также является нахождение значения критического динамического индекса z , который определяет рост времени релаксации вблизи критической точки. Данная модель является одной из простейших моделей критической динамики, учитывающей межмодовое взаимодействие. Еще одно отличие от предыдущей модели (A-модели) – ее многозарядность. Все эти факторы усложняют анализ E модели, поэтому в данной главе мы ограничимся ренормгрупповым анализом двухпетлевого приближения, а в трехпетлевом приближении приведем результат редукции диаграмм.

Модель E описывает планарный симметричный антиферромагнетик. В этой модели N -компонентное поле параметра порядка φ представляет собой разность намагниченностей двух соседних подрешеток. Величина φ не сохраняется, так как она не связана с какой-либо симметрией системы, в отличие от общей намагниченности m , которая сохраняется при наличии спиновой изотропии. Поле m играет роль дополнительной мягкой моды. Для однокомпонентного поля ($N = 1$) модель E описывает поведение сверхтекучего He^4 вблизи точки фазового перехода.

Основная проблема расчета E модели состоит в наличии нескольких неподвижных точек, в которых индекс z различен. Поэтому первостепенным вопросом является анализ их устойчивости. Результаты предыдущих работ на эту тему [22], [23] противоречат друг другу, и не дают однозначного ответа на поставленный выше вопрос.

Неренормированное действие E модели критической динамики определяется N -компонентными полями ψ, ψ^+ и однокомпонентным полем m . Взаимодействие в системе является $U(N)$ симметричным. Как упоминалось ранее (1.1.2), любая модель стохастической динамики описывается уравнением (12). Характеризу-

ющие модель E коэффициенты Онзагера и межмодовой связи имеют вид:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{0\psi} & 0 \\ \lambda_{0\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{0m}\partial^2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\lambda_{0\psi}g_{3,0}\psi \\ 0 & 0 & -i\lambda_{0\psi}g_{3,0}\psi^+ \\ -i\lambda_{0\psi}g_{3,0}\psi & i\lambda_{0\psi}g_{3,0}\psi^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (106)$$

где λ_{0m} и $\lambda_{0\psi}$ – ненормированные коэффициенты Онзагера.

Соответствующее действие имеет вид:

$$S(\psi) = 2\lambda_{0\psi}\psi'^+\psi' + \psi'^+ [-\partial_t\psi + \lambda_{0\psi}H_\psi + i\lambda_{0\psi}g_{30}\psi H_m] + c.c. - \\ -\lambda_{0m}m'\partial^2 m' + m' \left[-\partial_t m - \lambda_{0m}\partial^2 H_m + i\lambda_{0\psi}g_{30}(\psi^+ H_\psi^+ - \psi H_\psi) \right], \quad (107)$$

где

$$H_\phi = \frac{\delta S^{st}(\psi)}{\delta \psi}, \quad (108)$$

$$S^{st} = -\partial\psi\partial\psi^+ - \frac{g_{10}}{6}(\psi^+\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 + mh_0. \quad (109)$$

В уравнении (107) символ с.с. обозначает комплексное сопряжение.

Подставив (108) и (109) в (107), получим детально расписанное ненормированное действие:

$$S = 2\lambda_{0\psi}\psi'^+\psi' - \lambda_{0m}um'\partial^2 m' \\ + \psi'^+ \{-\partial_t\psi + \lambda_{0\psi}[\partial^2\psi - \tau_0\psi - g_1(\psi^+\psi)\psi/3] + i\lambda g_3\psi[-m + h]\} + \\ + \psi' \{-\partial_t\psi^+ + \lambda[\partial^2\psi^+ - \tau\psi^+ - g_1(\psi^+\psi)\psi^+/3] - i\lambda g_3\psi^+[-m + h]\} \\ + m' \{-\partial_t m - \lambda_{0m}u\partial^2[-m + h] + i\lambda_{0\psi}g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+]\}. \quad (110)$$

3.2.1 Ренормировка модели

Модель является мультипликативно ренормируемой [39], соответствующее ей ренормированное действие имеет вид:

$$\begin{aligned}
S = & 2Z_1\lambda\psi^{+\prime}\psi' - Z_7\lambda um'\partial^2 m' \\
& + \psi^{+\prime}\{-Z_2\partial_t\psi + \lambda[Z_3\partial^2\psi - Z_4\tau\psi - Z_5g_1(\psi^+\psi)\psi/3] + iZ_6\lambda_{0\psi}g_3\psi[-m+h]\} + \\
& + \psi'\{-\partial_t\psi^+ + \lambda_{0\psi}[\partial^2\psi^+ - \tau_0\psi^+ - g_1(\psi^+\psi)\psi^+/3] - i\lambda_{0\psi}g_3\psi^+[-m+h]\} \\
& + m'\{-\partial_t m - Z_8\lambda u\partial^2[-m+h] + iZ_9\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+]\}. \tag{111}
\end{aligned}$$

Константы ренормировки Z_i ($i = 1 \dots 9$) выражаются через константы ренормировки полей

$$\psi'_0 = \psi'Z_{\psi'}, \quad \psi'^+_0 = \psi'^+Z_{\psi'^+}, \quad \psi_0 = \psi Z_{\psi}, \quad m'_0 = m'Z_{m'}, \quad m_0 = mZ_m, \tag{112}$$

и параметров

$$\lambda_0 = \lambda Z_{\lambda}, \quad \tau_0 = \tau Z_{\tau}, \quad g_{1,0} = g_1\mu^{2\varepsilon}Z_{g_1}, \quad u_0 = uZ_u, \quad g_{3,0} = g_3\mu^{\varepsilon}Z_{g_3}, \tag{113}$$

следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= Z_{\lambda}Z_{\psi'}^+Z_{\psi'}, & Z_2 &= Z_{\psi'}^+Z_{\psi}, & Z_3 &= Z_{\lambda}Z_{\psi'}^+Z_{\psi}, \\
Z_4 &= Z_{\lambda}Z_{\tau}Z_{\psi'}^+Z_{\psi}, & Z_5 &= Z_{\lambda}Z_{g_1}Z_{\psi'}^+Z_{\psi}Z_{\psi}^+Z_{\psi}, \\
Z_6 &= Z_{\lambda}Z_{g_3}Z_mZ_{\psi'}^+Z_{\psi}, & Z_7 &= Z_{\lambda}Z_uZ_m^2, \\
Z_8 &= Z_{\lambda}Z_u, & Z_9 &= Z_{\lambda}Z_{g_3}Z_m'Z_{\psi}^+Z_{\psi}. \tag{114}
\end{aligned}$$

Используя интегрирование по частям, удобно привести один из множителей во взаимодействии (111) к виду:

$$m'(\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+) = \partial m'(\psi\partial\psi^+ - \psi^+\partial\psi). \tag{115}$$

Отсюда видно, что на каждый внешний хвост m' 1-неприводимых функций Грина выделяется внешний импульс. Это является причиной того, что в слагаемом $m'\partial_t m$ ренормированного действия (111) отсутствует константа ренормировки, что, в свою очередь, приводит к связи констант ренормировки

$$Z_m Z_{m'} = 1. \tag{116}$$

В работе [39], где используется схема ренормировки MS, получены следующие дополнительные ограничения на константы ренормировки:

$$Z_m = Z_{g_3} Z_\lambda = 1 \quad (117)$$

и показано, что константы ренормировки Z_{g_1} , Z_ψ , Z_τ совпадают со своими статистическими аналогами. Таким образом, в этой динамической модели есть по сравнению со статикой только 3 новые независимые константы ренормировки.

Как и в предыдущих задачах, мы используем стандартную схему ренормировки - Minimal Subtraction (MS). Определяющие константы ренормировки нормированные функции Грина могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_1 &= \frac{\Gamma_{\psi'+\psi'}}{2\lambda} \Big|_{p=0, \omega=0}, & \bar{\Gamma}_5 &= -\frac{3}{2} \frac{\Gamma_{\psi'+\psi(\psi+\psi)}}{\lambda g_1 \mu^{2\varepsilon}} \Big|_{p=0, \omega=0}, \\ \bar{\Gamma}_2 &= \partial_{i\omega} \Gamma_{\psi'+\psi} \Big|_{p=0, \omega=0}, & \bar{\Gamma}_6 &= -\frac{\Gamma_{\psi'+\psi m}}{i \lambda g_3 \mu^{2\varepsilon}} \Big|_{p=0, \omega=0}, \\ \bar{\Gamma}_3 &= -\frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma_{\psi'+\psi}}{\lambda} \Big|_{p=0, \omega=0}, & \bar{\Gamma}_7 &= \frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma_{m'm'}}{2\lambda u} \Big|_{p=0, \omega=0}, \\ \bar{\Gamma}_4 &= -\frac{\Gamma_{\psi'+\psi} - \Gamma_{\psi'+\psi} \Big|_{\tau=0}}{\lambda \tau} \Big|_{p=0, \omega=0}, & \bar{\Gamma}_8 &= -\frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma_{m'm}}{\lambda} \Big|_{p=0, \omega=0}, \\ \bar{\Gamma}_9 &= -\frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma_{m'\psi+\psi}}{i \lambda g_3 \mu^{2\varepsilon}} \Big|_{p=0, \omega=0} + \frac{1}{2} \partial_r^2 \frac{\Gamma_{m'\psi+\psi}}{i \lambda g_3 \mu^{2\varepsilon}} \Big|_{p=0, \omega=0}. \end{aligned} \quad (118)$$

Константы ренормировки Z_i в схеме MS имеют вид:

$$Z_i = 1 + \sum_{n \geq 1} Z_i^{(n)}(u) \varepsilon^{-n}. \quad (119)$$

Для наших целей мы ограничиваемся расчетом константы Z_2 .

3.2.2 Диаграммная техника и схема редукции

Для удобства введем обозначения:

$$\phi = \{\psi, \psi^+, \psi', \psi'^+\}, \quad \tilde{m} = \{m, m'\}. \quad (120)$$

В рассматриваемой модели нет «смешанных» пропагаторов, которые содержат одно поле из набора ϕ и одно поле из набора \tilde{m} , поэтому полная матрица квад-

ратичной формы имеет блочную структуру. Матрица $\phi K \phi$ имеет вид:

$$\phi K \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\omega + \lambda(k^2 + \tau) \\ 0 & 0 & -i\omega + \lambda(k^2 + \tau) & 0 \\ 0 & i\omega + \lambda(k^2 + \tau) & 0 & 0 \\ i\omega + \lambda(k^2 + \tau) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Обратная матрица, определяющая пропагаторы, дается выражением

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2\lambda}{|-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)|^2} & 0 & \frac{1}{-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)} \\ \frac{-2\lambda}{|-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)|^2} & 0 & \frac{1}{-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (122)$$

откуда

$$\langle \psi(t_1) \psi^+(t_2) \rangle = \langle \psi^+(t_1) \psi(t_2) \rangle = \frac{1}{k^2 + \tau} \exp[-\lambda(k^2 + \tau)|t_1 - t_2|], \quad (123)$$

$$\langle \psi(t_1) \psi^{+'}(t_2) \rangle = \langle \psi^+(t_1) \psi' (t_2) \rangle = \Theta(t_1 - t_2) \exp[-\lambda(k^2 + \tau)(t_1 - t_2)]. \quad (124)$$

Соответственно, для квадратичной формы $\tilde{m} K_m \tilde{m}$ имеем

$$K_m = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega + \lambda k^2 \\ -i\omega + \lambda k^2 & -\lambda k^2 \end{pmatrix}, \quad (125)$$

$$K_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda k^2}{(-i\omega + \lambda k^2)^2} & -\frac{i\omega - \lambda k^2}{(-i\omega + \lambda k^2)^2} \\ -\frac{i\omega - \lambda k^2}{(-i\omega + \lambda k^2)^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (126)$$

откуда

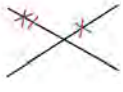

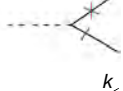
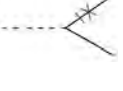
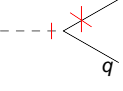
$$\langle m(t_1) m(t_2) \rangle = \exp[-\lambda u(k^2)|t_1 - t_2|], \quad (127)$$

$$\langle m(t_1) m'(t_2) \rangle = \Theta(t_1 - t_2) \exp[-\lambda u(k^2)(t_1 - t_2)]. \quad (128)$$

В Таб.5 приведены диаграммные обозначения для вершин модели (111) с соответствующими вершинными множителями. Все вершины можно разделить на два типа относительно зарядов: “динамические” (с константой взаимодей-

ствия g_3 , определяющей силу межмодовой связи) и “статические” (с константой взаимодействия g_1 , значение которой в неподвижной точке определяется статическим действием (109)).

Таблица 5: вершины E модели

Static:		$\psi'^+\psi^+\psi\psi, \quad \frac{-2\lambda g_1}{3}$		$\psi^+\psi^+\psi'\psi, \quad \frac{-2\lambda g_1}{3}$
Dynamic:		$\psi^+\psi'm, \quad i\lambda g_3$		$\psi'^+\psi m, \quad -i\lambda g_3$
		$\psi^+\psi m', \quad i\lambda g_3(k^2 - q^2)$		

Введенные пропагаторы и вершины определяют стандартную диаграммную технику для рассматриваемой функции Грина. При расчетах возникают те же проблемы, что и в A модели: большое число диаграмм и усложненность по сравнению со статикой подынтегральных выражений. Для проведения расчетов мы используем те же приемы, что и для A модели – редукцию диаграмм и метод Sector Decomposition.

Схема редукции

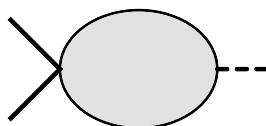
Учитывая, что динамические вершины не дают вклада в статические константы ренормировки, можно ожидать, что в E модели редукция диаграмм окажется даже более эффективной по сравнению с A моделью. Это проявляется в том, что в E модели, помимо равенств для четыреххвостой (статической) вершины, аналогичных соотношениям (90)–(92) в A модели, которые сводят сумму динамических диаграмм к статической, для треххвостой (динамической) вершины справедливо соотношение:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} k \\ q \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \left(\begin{array}{c} k \\ q \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \left(\begin{array}{c} k \\ q \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \\
 & = \frac{k^2 - q^2}{(k^2 + \tau)(q^2 + \tau)} + \frac{1}{k^2 + \tau} - \frac{1}{q^2 + \tau} = 0
 \end{aligned} \tag{129}$$

т.е. определенная сумма вершин обращается в ноль.

Это, в частности, означает, что в теории возмущений мы можем учитывать только временные версии, в которых “внешние линии” графиков являются крайними точками.

По аналогии с моделью А мы также рассмотрим ситуацию, когда у нас есть ненулевое количество внешних хвостов с полями m или m' . Принципиальное отличие этого случая от схемы редукции в А модели состоит в том, что необходимо учитывать оставшуюся часть подграфа (а не только одну вершину). Поэтому мы предполагаем, что рассматривается не сумма вершин, а сумма подграфов, в которых одна внешняя линия является безмассовой, а остальные – массивные:



Проиллюстрируем это на примере двухпетлевых диаграмм. Имеется два разных случая сокращения:

- первый случай:

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \end{array} = 0 \tag{130}$$

- второй случай:

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \end{array} = 0 \tag{131}$$

В обеих ситуациях (130) и (131), сумма диаграмм обращается в ноль из-за различных знаков в вершинах. Такое модифицированное правило редукции также позволяет уменьшить число рассматриваемых интегралов в высших порядках теории возмущений.

Аналогично таблице с иллюстрацией редукции в А модели (Таб.1) в Приложении В представлена таблица для Е модели вплоть до 3-х петлевого приближе-

ния.

3.2.3 Анализ фиксированных точек

С помощью РГ-анализа были найдены фиксированные точки из условия $\beta_i = 0$. После этого определялась устойчивость неподвижных точек. Для этой цели были исследованы собственные значения матрицы первых производных $\Omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k$ (собственные значения должны быть положительными). Следует помнить, что $\{\beta_i\}$ - это полный набор β -функций, а $\{g_k\}$ - это полный набор зарядов ($= \{g_1, g_3, u\}$). Для удобства лучше перейти к другой паре динамических зарядов $\{f, w\}$ вместо $\{g_3, u\}$:

$$f = \frac{g_3^2}{8\pi^2 u}, \quad w = \frac{1}{u}. \quad (132)$$

Для них динамическая β -функция может быть записана в виде:

$$\beta_f = f[-2\varepsilon - \gamma_w + 2\gamma_\lambda], \quad \beta_w = -w\gamma_w. \quad (133)$$

Необходимые диаграммы двухпетлевого приближения вычисляются аналитически, результат для γ_λ и γ_w может быть представлен в виде:

$$\gamma_\lambda = \frac{f}{1+w} - f^2 F(w) - \frac{g_1^2}{18} \left[6 \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 1 \right], \quad (134)$$

$$\gamma_w = f \left[\frac{1}{1+w} - \frac{1}{2} \right] + f^2 [H(w) - F(w)] - \frac{g_1^2}{18} \left[6 \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 1 \right], \quad (135)$$

где

$$H(w) = \frac{1}{4(1+w)} \left[w^2(2+w) \ln \left(\frac{(1+w)^2}{w(2+w)} \right) - w - \frac{1}{2} \right], \quad (136)$$

$$F(w) = \frac{1}{8(1+w)^3} \left[4(1+2w) \ln \left(\frac{(1+w)^2}{(1+2w)} \right) + 54(1+w) \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 8w - 12 \right]. \quad (137)$$

В модели E три фиксированные точки, в которых параметр w принимает значения $w^* = \infty$, $w^* = 0$ и $w^* = const$. Первый случай не интересен, потому что он всегда нестабилен. Точка $w^* = 0$ (“weak scaling fixed point”) стабильна при $n > n_c$, где n - число компонент поля, а точка $w^* = const$ (“dynamic scaling

fixed point”) стабильна при $n < n_c$. Выражения для этих фиксированных точек имеют вид:

$$f^* = \varepsilon + \frac{3}{8} \left[2 \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 1 \right] \varepsilon^2, \quad w^* = 1 + \frac{1}{50} \left[29 - 324 \ln \left(\frac{4}{3} \right) \right] \varepsilon, \quad (138)$$

и

$$w^* = 0 \quad f^* = \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{2}{675} \left[702 \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 167 \right] \varepsilon^2, \quad (139)$$

а величина $n_c(d)$ определяется выражением

$$n_c(d) = 4 - \varepsilon [19 \ln(4/3) - 11/3] + O(\varepsilon^2). \quad (140)$$

Для “dynamic scaling fixed point” (138) величины $\gamma_{\lambda, w}^*$ находятся точно:

$$\gamma_w^* = 0, \quad \gamma_\lambda^* = \varepsilon/2. \quad (141)$$

В результате критический показатель z принимает значение

$$z = 2 - \gamma_\lambda^* = 2 - \varepsilon/2 = \frac{d}{2}. \quad (142)$$

Для фиксированной точки (139)

$$\gamma_\lambda^* = \varepsilon/2 + \frac{\gamma_w^*}{2}, \quad \gamma_w^* = \frac{\varepsilon}{3} + \left[\frac{259}{675} - \frac{52}{25} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \right] \varepsilon^2, \quad (143)$$

и тогда критический индекс z имеет нетривиальную форму:

$$z = 2 - \gamma_\lambda^* = \frac{d}{2} - \frac{\gamma_w^*}{2}. \quad (144)$$

Для $d = 4 - \varepsilon$ индексы ω , связанные с зарядами f и w для неподвижной точки (138), имеют вид:

$$\omega_f = \varepsilon + \left[\frac{103}{200} - \frac{259}{100} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \right] \varepsilon^2 = \varepsilon - 0.230097 \varepsilon^2, \quad (145)$$

$$\omega_w = \frac{\varepsilon}{4} + \left[\frac{347}{800} - \frac{1507}{800} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \right] \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon}{4} - 0.108171 \varepsilon^2, \quad (146)$$

а для неподвижной точки (139) –

$$\omega_f = \varepsilon + \left[\frac{158}{225} - \frac{72}{25} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \right] \varepsilon^2 = \varepsilon - 0.126302\varepsilon^2, \quad (147)$$

$$\omega_w = -\frac{\varepsilon}{3} + \left[\frac{52}{25} \ln \left(\frac{4}{3} \right) - \frac{259}{675} \right] \varepsilon^2 = -\frac{\varepsilon}{3} + 0.214675\varepsilon^2. \quad (148)$$

Первоначально De Dominicis и Peliti [41, 44] обнаружили новую устойчивую фиксированную точку, называемую weak scaling (139). Но они допустили численную ошибку, на которую указал Dohm [22]. Результаты нашей работы согласуются с [22] и подтверждают ошибку в [41, 44].

Как отмечалось в [39], при $d = 3$ существуют две фиксированные точки (142), (144). Двухпетлевой расчет показывает, что динамический режим (142) является ИК-стабильным, но ситуация может измениться при рассмотрении следующих порядков теории возмущений. Это связано с малостью коэффициентов ω_w в ε разложении. Следовательно, следующий порядок теории возмущений может изменить знак ω , тем самым поменять устойчивость. Поэтому актуальной задачей является проведение трехпетлевого расчета. Выполненная в работе редукция трехпетлевых диаграмм, приведшая к значительному уменьшению их количества, может служить основой такого расчета.

Активное развитие E модели поможет продвинуться в изучении родственной, более сложной F модели, которая используется для описания динамики критической перехода от нормальной к сверхтекучей жидкости в He^4 [24, 45].

Глава 4: Процедура пересуммирования

После выполнения многопетлевого расчета и получения интересующей нас величины в виде ε -разложения, ее необходимо пересуммировать, что позволит получить более точные теоретические предсказания. Существует множество вариантов пересуммирования, но в данной работе будет рассмотрена только процедура пересуммирования по конформ-Борелю с учетом асимптотики сильной связи [46]. Ниже кратко описана суть метода.

Рассмотрим функцию $A(g)$, для которой известны первые $N + 1$ коэффициент A_n в разложении

$$A(g) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n, \quad (149)$$

и асимптотика высокого порядка (АВП) коэффициентов A_n :

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c (-a)^n n! n^{b_0}. \quad (150)$$

Тогда конформ-борелевское представление функции $A(g)$ имеет вид:

$$A(g) = \int_0^{\infty} dt \exp^{-t} t^b \left(\frac{gt}{w(gt)} \right)^{\nu} B(w(gt)), \quad (151)$$

где

$$w(x) = \frac{\sqrt{1 + ax} - 1}{\sqrt{1 + ax} + 1}, \quad (152)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n w^n. \quad (153)$$

АВП коэффициентов разложения функции (151) в ряд по g имеет вид (150) с заданными значениями параметров a и b_0 , если параметр b_0 выбрать из условия

$$b = b_0 + 3/2. \quad (154)$$

Приближенное выражение $A^{(N)}(g)$ для функции (151) имеет вид

$$A^{(N)}(g) = \int_0^\infty dt \exp^{-t} t^b \left(\frac{gt}{w(gt)} \right)^\nu \sum_{n=0}^N B_n w^n. \quad (155)$$

Оно получается с учетом $N+1$ первого слагаемого суммы (153). Коэффициенты B_n выбираются из требования, чтобы первые $N+1$ члена разложения функции (151) совпадали с известными коэффициентами A_n из (149). Дополнительный параметр ν в (151), который был впервые введен в статье [46], управляет асимптотикой “сильной связи”¹:

$$A(g) \stackrel{g \rightarrow \infty}{\sim} g^\nu. \quad (156)$$

В обсуждаемой задаче параметр ν неизвестен, поэтому мы будем использовать его для улучшения сходимости процедуры суммирования по мере увеличения числа членов ряда в разложении (149).

Следуя работе [47], проиллюстрируем эффективность этого подхода на примере модельной функции

$$A(g) = \int_0^\infty dx \exp^{-x^2 - gx^4}. \quad (157)$$

Для этой функции все коэффициенты разложения (149) известны, а АВП имеет вид (150) со значениями параметров $a = 4$, $b_0 = -1$. Параметр ν имеет значение $\nu = -1/4$. На Рис. 3 представлено сравнение точного значения $A(1) = 0.6842134279$ функции (157) при $g = 1$ с результатом вычислений по формуле (151) (с учетом различного числа слагаемых - горизонтальная ось) при варьировании параметра ν .

¹следую работе [46], мы используем обозначение ν для параметра сильной связи, которое в этом контексте не встречается одновременно с критическим индексом ν

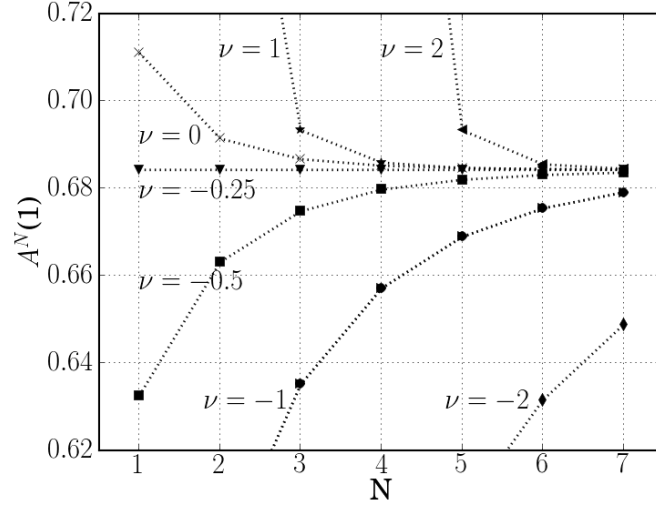


Рис. 3: Значение пересуммированного ряда $A^{(N)}(g)$ функции (157) при $g = 1$, для различных N и ν .

Из рисунка видно, что сходимость процедуры суммирования происходит в определенном диапазоне значений параметра ν , и скорость сходимости заметно уменьшается при удалении этого параметра от «истинного» значения $\nu = -1/4$.

Следует отметить, что для некоторых разложений такая процедура не дает достаточной сходимости, к примеру для критического индекса η в статической модели ϕ^4 . Для улучшения сходимости ряда, введем еще одну дополнительную связь – привязку к точке $\varepsilon = 2$ [48].

Представим исследуемое значение $x(\varepsilon)$ в виде

$$x(\varepsilon) = x_2 + (2 - \varepsilon)A(\varepsilon), \quad (158)$$

где

$$x_2 \equiv x_{\varepsilon=2}, \quad A(\varepsilon) = \frac{x(\varepsilon) - x_2}{2 - \varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon^n, \quad (159)$$

и сделаем пересуммирование ряда (159). Коэффициенты этого ряда связаны с коэффициентами исходного $x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \varepsilon^n$ соотношениями:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{\gamma_2}{2}, \\ \bar{A}_n &= 2A_n - A_{n-1} \quad n > 0, \\ \bar{A}_1 &\equiv 0. \end{aligned} \quad (160)$$

Из (160) следует, что параметры a и b_0 АВП коэффициентов \bar{A}_n и A_n одинаковы.

В работе [21] показано, что параметры a и b_0 в модели А равны $1/3$ и $7/2$ соответственно. Индекс ν для рассматриваемой модели в настоящее время не известен. В отличие от модели ϕ^4 , для которой в [48] была использована методика пересуммирования с учетом привязки к точке $\varepsilon = 2$, точное значение x_2 в нашем случае также не известно. Мы определили параметры ν и x_2 из условия самой быстрой сходимости процедуры суммирования для $\varepsilon = 1$.

Вернемся к критическому индексу η и посмотрим на результат пересуммирования его шестипетлевого разложения с привязкой к точке $\varepsilon = 2$:

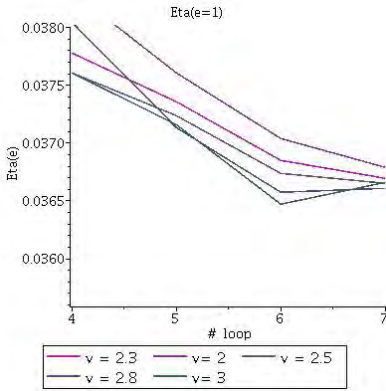


Рис. 4: $\eta_2 = 0.25$
 $\eta_3 = 0.0367$

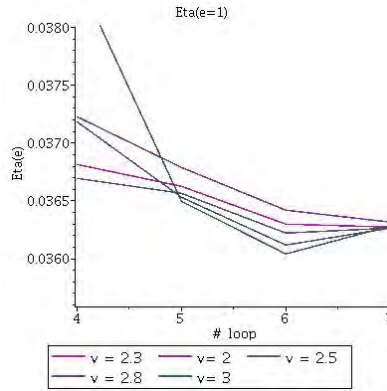


Рис. 5: $\eta_2 = 0.235$
 $\eta_3 = 0.0363$

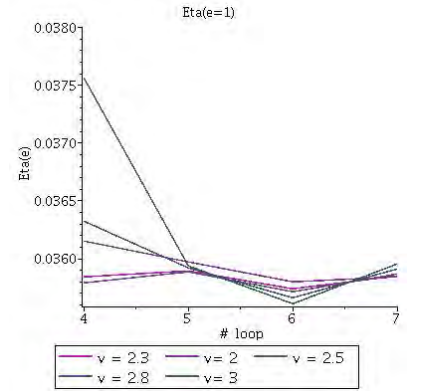


Рис. 6: $\eta_2 = 0.22$
 $\eta_3 = 0.0359$

Хорошо известно, что в двумерном пространстве точное значение η равно $1/4$. Используя модифицированный метод конформ-Бореля, мы получили $\eta_{d=2} = 0.235$ и $\eta_{d=3} = 0.0363$.

4.1 Модель ϕ^4 с кубической симметрией

В результате изучения модели ϕ^4 с кубической симметрией были получены разложения по ε трех критических показателей (γ , η , ν) - (63), (64) и (65). Мы применили к этим показателям технику пересуммирования конформ-Бореля с привязкой к точке $\varepsilon = 2$. Используя исходный ряд (63) для критического показателя η (рассматриваем $n = 3$) и соотношение (158), получаем модифици-

рованный ряд для η :

$$\begin{aligned} \eta = \eta_2 + (2 - \varepsilon) & \left[-\frac{1}{4}\eta_2\varepsilon + \left(0.010288 - \frac{1}{8}\eta_2\right)\varepsilon^2 + \left(0.014528 - \frac{1}{16}\eta_2\right)\varepsilon^3 + \right. \\ & + \left(0.00312995 - \frac{1}{32}\eta_2\right)\varepsilon^4 + \left(0.012882 - \frac{1}{64}\eta_2\right)\varepsilon^5 + \\ & \left. + \left(-0.0264495 - \frac{1}{128}\eta_2\right)\varepsilon^6 \right]. \end{aligned} \quad (161)$$

Объектом пересуммирования рассматривается ряд в квадратных скобках в выражении (161). На Рис. 7-9 представлен результат пересуммированного индекса η для различных значений коэффициента $\eta_2 = \eta_{(d=2)}$.

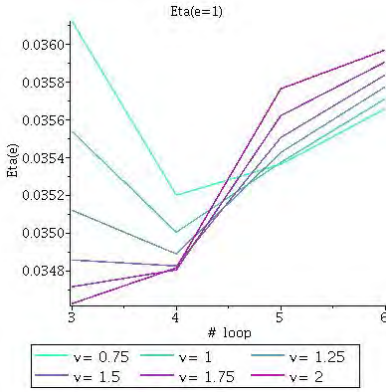


Рис. 7: $\eta_2 = 0.18$
 $\eta = 0.0357$

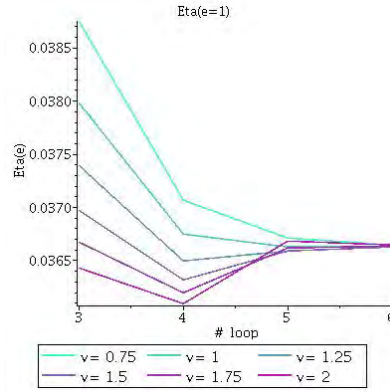


Рис. 8: $\eta_2 = 0.20$, $\eta = 0.0366$

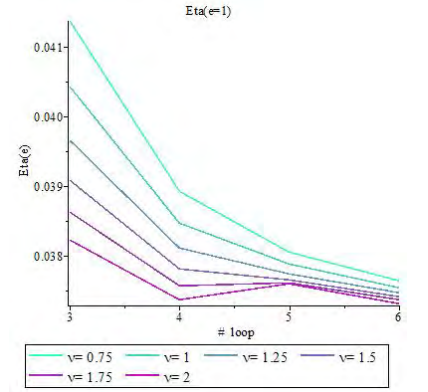


Рис. 9: $\eta_2 = 0.22$, $\eta = 0.0375$

Численные значения пересуммированного критического индекса η представлены в Таблице 9, из которой видно, что сходимость данной величины происходит достаточно быстро.

Таблица 6: Пересуммированное значение η методом модифицированного конформ-Бореля с учетом различного числа членов исходного ряда.

	η_2 eq.(158)	4loops	5loops	6loops
$\eta_{d=3}$	$\eta_2 = 0.20$	0.0365	0.0366	0.0366

Такая же процедура может быть выполнена и для критических индексов γ и ν . Однако ее недостаточно для получения аккуратной сходимости. Используя конформ-борелевское пересуммирование и АВП, можно зафиксировать не две

величины a и b_0 (150), а только одну a . Оставшийся параметр b_0 варьировать так же, как и параметр ν . Детальные вычисления с использованием этого модифицированного метода пересуммирования подробно описаны в статье [25]. В данной работе представляем только окончательный результат для пересуммированных критических индексов η , ν и их сравнение с предшествующими работами других авторов.

Таблица 7: Значение критических индексов η и ν , полученные в результате пересуммирования многопетлевых рядов по ε , в сравнении с результатами трехмерного РГ анализа.

№ of loops	ε expansion			3D RG		
	η	ν	Paper	η	ν	Paper
3				–	0.700	[49]-1984
4	0.034	0.68(3)	[25]-2019	0.0331 0.0332	0.6944 0.6996	[50]-1989 [51]-2000
5	0.0375(5) 0.0374(22) 0.0353(21)	0.6997(24) 0.701(4) 0.686(13)	[52]-1998 [14]-2000 [25]-2019	0.025(10)	0.671(5)	[53]-2000
6	0.036(3)	0.700(8)	[25]-2019	0.0333(26)	0.706(6)	[14]-2000

Как видно из Таблицы 7, результаты пересуммирования в пределах погрешности хорошо согласуются с ранее полученными значениями для критических индексов.

Как обсуждалось ранее в главе 2, оценка критической размерности поля n_c (62) представляет большой интерес, так как именно эта величина определяет истинный режим критического поведения в реальных кубических ферромагнетиках. Предыдущие работы показывают, что значение числа компонент поля n существенно влияет на устойчивость неподвижных точек и приводит к конкуренции между гайзенберговской неподвижной точкой и кубической.

Первые численные оценки n_c , полученные в приближениях низших порядков ε -разложения [8, 9, 10, 11] прогнозировали $n_c > 3$, что говорило бы о нестабильности кубической точки в реальном пространстве. Однако позже, при проведении расчетов более высокого порядка, было показано, что значение n_c становится меньшим трех [50, 35, 12, 13, 53, 51, 14, 54, 55]. Полученное нами шестипетлевое ε -разложение (62) величины n_c было пересуммировано (см. [25]). Полученный

результат приведен в таблице 8 вместе с результатами более ранних работ.

Таблица 8: Критическая размерность n_c .

Число петель	n_c	Paper
1	4	[10]-1974
2	2.333	[10]-1974
3	3.128	[10]-1974
4	2.918	[12]-1997
	2.958	[35]-1995
5	2.87(5)	[14]-2000
	2.91(3)	[25]-2019
6	2.915(3)	[25]-2019

4.2 А модель

Применим процедуру пересуммирования конформ-Бореля (151) - (155) к полученному нами ε -разложению (104) динамического критического индекса $z(n = 1)$. Тогда ряд для z с учетом привязки к значению $z_2 = z(\varepsilon=1)$ выглядит следующим образом:

$$z = -z_2 \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{4} z_2 \varepsilon + (0.00672308 - \frac{1}{8} z_2) \varepsilon^2 + (0.00887968 - \frac{1}{16} z_2) \varepsilon^3 + (0.00164984 - \frac{1}{32} z_2) \varepsilon^4 + (0.00968492 - 0.015625 z_2) \varepsilon^5 \right], \quad (162)$$

где выражение в скобках является объектом пересуммирования.

Параметры a и b_0 были выбраны, согласно [56], равными $a = 1/3$, $b_0 = 3/2$. В работе [57] показано, что эти параметры имеют одинаковые значения и для $\eta(\varepsilon)$ и для величины $z(\varepsilon)$. На рисунках 10 – 15 значения динамического критического индекса z для трехмерного пространства $d = 3$ показаны в результате пересуммирования с различным количеством учитываемых членов разложения ряда $z(\varepsilon)$ и значений параметров ν и z_2 .

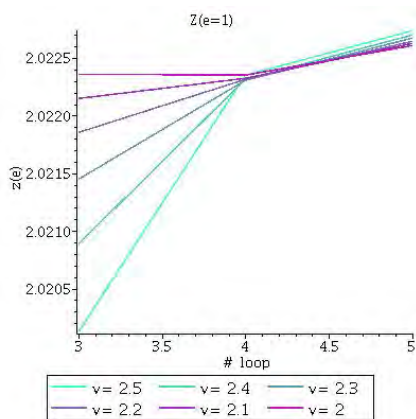


Рис. 10: $z_2 = 2.12$
 $z = 2.0227$

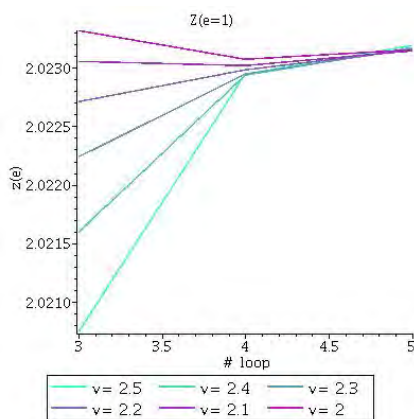


Рис. 11: $z_2 = 2.13$
 $z = 2.0232$

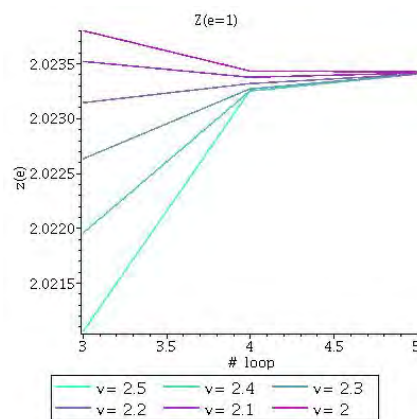


Рис. 12: $z_2 = 2.135$
 $z = 2.0234$

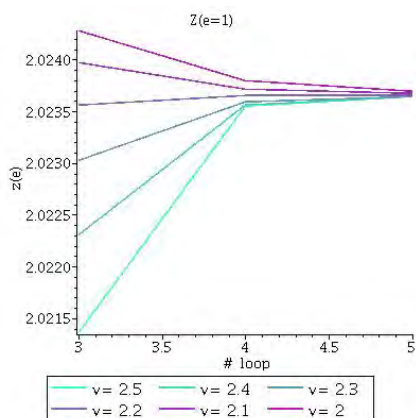


Рис. 13: $z_2 = 2.14$
 $z = 2.0237$

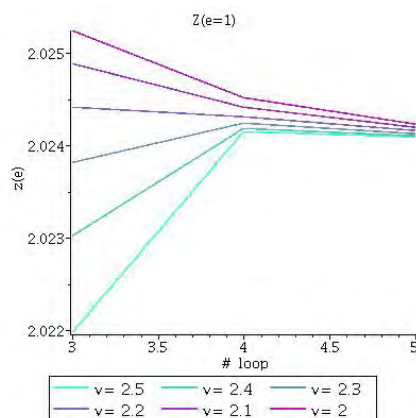


Рис. 14: $z_2 = 2.15$
 $z = 2.0241$

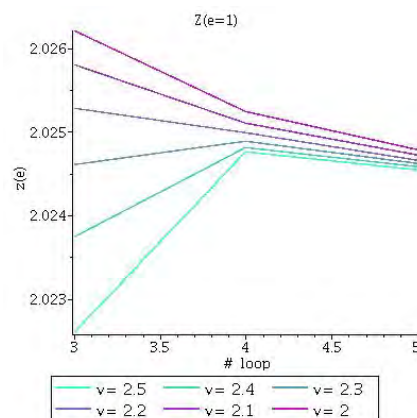


Рис. 15: $z_2 = 2.16$
 $z = 2.0247$

Из сравнения Рис.3 и Рис.10 - 15 видно, что сходимость процедуры пересуммирования по Борелю для $z(\varepsilon)$ очень похожа на рассмотренную ранее модельную функцию (157). Наибольшая скорость сходимости достигается при $\nu = 2.2$ и $z_2 = 2.14$, что дает следующие оценки для динамического показателя $z_{d=3}$:

Таблица 9: Пересуммированное значение z методом модифицированного комформ-Бореля с учетом различного числа членов исходного ряда.

	z_2 eq.(158)	3loops	4 loops	5loops
$z_{d=3}$	$z_2 = 2.14$	2.023566	2.023647	2.023654

Из Рис.10 – 15 следует, что учет параметра сильной связи ν необходим для правильного определения динамического критического индекса z методом комформ-Бореля, поскольку при значении $\nu = 0$, которое использовалось в [21], сходимость очень медленная и для сопоставимого результата необходимо учитывать

еще большее число членов ряда $z(\varepsilon)$.

Таким образом, полученные нами результаты находятся в согласии в пределах погрешности с результатами работы [38], согласно которой при $d = 2$ критический индекс z равняется 2.17 ± 0.03 .

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации, можно сформулировать в следующем виде:

- Развита методика редукции диаграмм, позволяющая значительно сократить объем вычислений в моделях критической динамики. Основной проблемой продвижения в старшие порядки теории возмущений в этих моделях является очень большое увеличение числа диаграмм по сравнению с задачами статики, а также более сложный вид подынтегральных выражений. Методика редукции диаграмм позволяет не только уменьшить число эффективных диаграмм, но и упростить соответствующие им подынтегральные выражения.
- На основе методики редукции диаграмм проведен рекордный пятипетлевой расчет динамического критического индекса z в модели А критической динамики. Данный метод уменьшил число вычисляемых интегралов в четырехпетлевом приближении с 66 до 17, а в пятипетлевом – с 1025 до 201. Такое сокращение позволило рассчитать ε -разложение динамического индекса z вплоть до пятого порядка по ε включительно.
- Произведено обобщение методики редукции диаграмм на модели критической динамики с межмодовой связью. Выполнен двухпетлевой расчет в модели Е, который позволил внести ясность в противоречивые результаты работ предшественников. Проведенная редукция диаграмм в трехпетлевом приближении показала, что если число вычисляемых интегралов в двухпетлевом приближении сокращается примерно в 3 раза (с 52 до 18), то в трехпетлевом – уже примерно в 8 раз (с 4950 до 595).
- Выполнен рекордный шестипетлевой расчет критических индексов η и ν в модели ϕ^4 с кубической симметрией. На основе недавно выполненного аналитического ренормгруппового расчета $O(n)$ -симметричной модели ϕ^4 найдены разложения шестого порядка по ε для индексов с учетом дополнительных тензорных структур, обусловленных симметрией модели. Произведено уточнение критического значения числа n_c компонент поля, которое определяет истинный режим критического поведения в реальных ферромагнетиках с кубической симметрией. Показано, что устойчивой для реальных

ферромагнетиков ($n = 3$) в трехмерном пространстве является кубическая неподвижная точка ренормгруппы.

- Произведено пересуммирование полученных ε -разложений методом конформ-Бореля и вычислены уточненные значения критических показателей в исследованных моделях – статической модели ϕ^4 с кубической симметрией и динамической A модели.

Приложение А

Таблица 10: Вклады диаграмм, определяющих константу ренормировки Z_1 в А модели до четвертого порядка теории возмущений.

индекс Никеля для стат. диагр.	численный результат
2 петли	
e111 e	$1/8 \log[4/3]\varepsilon^{-1} + 0.041670207(4) + 0.0647910(6)\varepsilon + 0.0446045(9)\varepsilon$
3 петли	
e112 22 e	$1/4 \log[4/3]\varepsilon^{-2} + 0.1368518(6)\varepsilon^{-1} + 0.27091943(4) + 0.2852955(29)\varepsilon$
4 петли	
e112 33 e33	$9/64 \log[4/3]\varepsilon^{-3} + 0.1070793(11)\varepsilon^{-2} + 0.2560858(32)\varepsilon^{-1} + 0.358251(6)$
e112 e3 333	$-0.0008517(30)\varepsilon^{-2} - 0.005031(10)\varepsilon^{-1} - 0.017487(15)$
e123 e23 33	$3/32 \log[4/3]\varepsilon^{-3} + 0.0848713(9)\varepsilon^{-2} + 0.2161338(31)\varepsilon^{-1} + 0.377071(5)$
e112 23 33 e	$3/16 \log[4/3]\varepsilon^{-3} + 0.1562589(12)\varepsilon^{-2} + 0.400053(4)\varepsilon^{-1} + 0.579729(8)$

Таблица 11: Вклады диаграмм, определяющих константу ренормировки Z_1 в А модели. Пятый порядок теории возмущений.

индекс Никеля для стат. диагр.	численный результат
e112 33 e44 44	$3/40 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.073163(4)\varepsilon^{-3} + 0.204788(16)\varepsilon^{-2} + 0.35477(5)\varepsilon^{-1}$
e112 33 444 e4	$-0.000666(12)\varepsilon^{-3} - 0.00451(4)\varepsilon^{-2} - 0.01797(12)\varepsilon^{-1}$
e123 e23 44 44	$1/40 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.0315824(25)\varepsilon^{-3} + 0.098616(9)\varepsilon^{-2} + 0.236148(31)\varepsilon^{-1}$
e112 e3 344 44	$-0.001333(25)\varepsilon^{-3} - 0.01160(9)\varepsilon^{-2} - 0.05244(28)\varepsilon^{-1}$
e123 234 34 4 e	$0.0172897(9)\varepsilon^{-2} + 0.076055(4)\varepsilon^{-1}$
e112 34 e34 44	$1/10 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.111931(5)\varepsilon^{-3} + 0.331417(19)\varepsilon^{-2} + 0.67233(6)\varepsilon^{-1}$
e123 e24 34 44	$1/20 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.070358(4)\varepsilon^{-3} + 0.239613(18)\varepsilon^{-2} + 0.61230(6)\varepsilon^{-1}$
e112 34 334 4 e	$3/20 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.182275(8)\varepsilon^{-3} + 0.587323(28)\varepsilon^{-2} + 1.21353(9)\varepsilon^{-1}$
e112 23 e4 444	$-0.001955(21)\varepsilon^{-3} - 0.01250(7)\varepsilon^{-2} - 0.04914(25)\varepsilon^{-1}$
e112 23 44 e44	$7/40 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.188694(8)\varepsilon^{-3} + 0.573681(28)\varepsilon^{-2} + 1.03326(9)\varepsilon^{-1}$
e112 23 34 44 e	$1/10 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.119119(6)\varepsilon^{-3} + 0.390094(23)\varepsilon^{-2} + 0.75114(8)\varepsilon^{-1}$

Приложение В

Таблица 12: Редукция диаграмм в E модели.

индекс Никеля для стат. диагр.	# динамических диаграмм	# временных версий	# редуцированных диаграмм
1 петля			
e11 e	2	2	1
		2	1
2 петли			
e111 e	2	2	2
e112 2 e	10	10	0
e12 e3 33	14	26	8
e12 23 3 e	8	14	8
		52	18
3 петли			
e112 3 e4 44	32	98	0
e12 33 44 5 5 e	20	108	4
e12 23 4 45 5 e	30	132	48
e12 34 35 4 5 e	140	864	130
e12 e3 45 45 5	64	368	33
e112 33 e3	24	44	0
e12 e34 34 4	48	184	1
e12 34 35 e 55	28	196	16
e12 e23 4 44	76	292	0
e12 23 4 e5 55	100	536	109
e12 34 34 5 5 e	36	209	79
e12 e3 34 5 55	104	584	32
e12 e3 34 44	34	114	0
e112 3 34 4 e	38	114	0
e12 e3 333	7	13	4
e1223 44 e4	38	107	0
e12 e3 44 44	16	44	0
e12 34 34 e4	96	352	56
e112 3 e33	12	24	0
e12 23 34 4 e	42	124	28
e112 e3 33	19	17	10
e112 23 3 e	42	72	10
e12 e3 44 55 5	40	195	16
e112 3 44 e4	32	101	0
e123 e23 3	25	58	19
e112 22 e		см. ϕ^4 модель	
		4950	595

Диаграмма с топологией $e112|22|e$ содержит 3 статические вершины и равна диаграмме с такой же топологией из А модели, но с внешними хвостами $\psi'\psi$, а не $\psi'^+\psi$. Более того, по правилам редукции А модельные динамические диаграммы с такими внешними линиями сводятся к чисто статическим диаграммам модели ϕ^4 . Тем самым метод редукции позволил и в Е модели выделить чисто статическую часть.

Приложение С

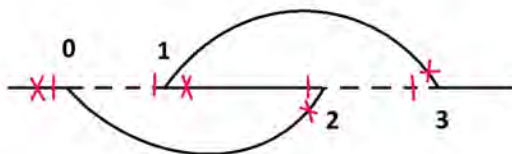
В этом Приложении будет разобран расчет 2-х петлевых диаграмм, соответствующих функции Грина $\Gamma_{\psi^+\psi'}$ модели E.

Номенклатура Никеля

В данной работе для описания динамических диаграмм модели E используется номенклатура Никеля. Так как данная модель содержит не одно, а 6 типов полей, то это должно отображаться в условной записи диаграмм через номенклатуру Никеля. Запишем мнемонические правила для распространения номенклатуры Никеля на динамические диаграммы:

- Нумеруем вершины графа, начиная с 0.
- Рассматриваем вершины в порядке возрастания. Для каждой выписываем вершины, смежные с ней, и чей номер больше, чем у рассматриваемой вершины. Если у вершины есть внешний хвост, то ему соответствует буква 'e'.
- Введем обозначения для полей: $\psi \rightarrow p$, $\psi' \rightarrow P$, $\psi^+ \rightarrow r$, $\psi'^+ \rightarrow R$, $m \rightarrow m$, $m' \rightarrow M$.

Рассмотрим диаграмму



Соответствующая ей номенклатура Никеля записывается в виде:

$$e12|23|3|e| : 0R_mM_pr|rP_pr|mM|0p|$$

Двухпетлевой расчет диаграмм E модели

В двухпетлевом приближении существует 4 вида топологий для данной модели: $e111|e$, $e112|2|e|$, $e12|e3|33|$ и $e12|23|3|e|$. Первая топология образована чисто статическими вершинами, т.е. она полностью соответствует диаграмме A модели с внешними хвостами $\psi'\psi'$. Поэтому начнем рассмотрение с $e112|2|e|$.

Топология $e112|2|e|$

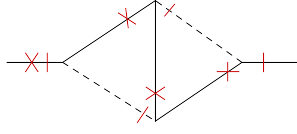
Как говорилось в разделе 3.2, метод редукции диаграмм позволяет полностью убрать данную топологию. Приведем список диаграмм, входящих в эту топологию, и покажем, какая комбинация позволит их полностью сократить.

1. $112|2|e|:0R_pR_rp_pr|mm|0P|$
 $SC = 1 \quad 1 + 4 = 0$
2. $112|2|e|:0P_pr_rP_rp|mm|0R|$
 $SC = 1 \quad 2 + 3 = 0$
3. $e112|2|e|:0P_pR_rp_rp|mm|0R|$
 $SC = 1 \quad 2 + 3 = 0$
4. $e112|2|e|:0R_pr_rP_pr|mm|0P|$
 $SC = 1 \quad 1 + 4 = 0$
5. $e112|2|e|:0P_pr_rp_rp|Mm|0R|$
 $SC = 1 \quad 5 + 6 = 0$
6. $e112|2|e|:0R_pr_rp_pr|Mm|0P|$
 $SC = 1 \quad 5 + 6 = 0$

Топология $e12|23|3|e|$

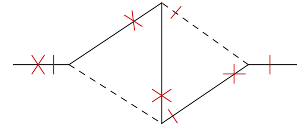
Используя редукцию диаграмм, можно показать, что остаются только временные версии 0123 и 0213. Рассмотрение двухпетлевых диаграмм в $\Gamma_{\psi'+\psi'}$ упрощается еще и тем, что сумма диаграмм при удобной протечке импульса дает тривиальную запись для суммы всех временных версий.

1. $\epsilon_{12|23|3|e|} : 0P_mM_rp|pr_rp|Mm|0R|$ $SC = 1$



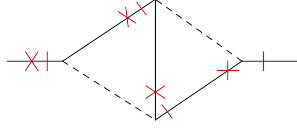
Time versions :
3012 0312
3021 0321
3201 0132

5. $\epsilon_{12|23|3|e|} : 0P_mM_rP|pr_rp|mm|0R|$ $SC = 1$



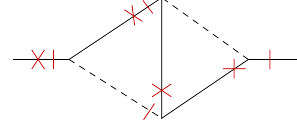
Time versions :
0132 0213
0321 0312
0123 0231
3021 3012

2. $\epsilon_{12|23|3|e|} : 0P_mm_rP|pr_Rp|mm|0R|$ $SC = 1$



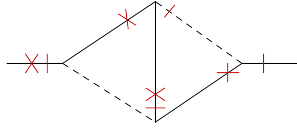
Time versions :
3021 3102
3012 0312
0321 0231

6. $\epsilon_{12|23|3|e|} : 0P_mm_rp|pr_Rp|Mm|0R|$ $SC = 1$



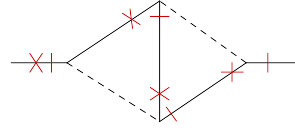
Time versions :
0312 3102
0321 3201
3012 3120
3021 3210

3. $\epsilon_{12|23|3|e|} : 0P_mM_rp|pR_rp|mm|0R|$ $SC = 1$



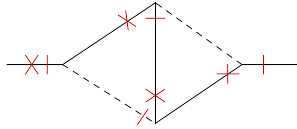
Time versions :
0123 0312
0132 3012

7. $\epsilon_{12|23|3|e|} : 0P_mm_rP|Pr_rp|mm|0R|$ $SC = 1$



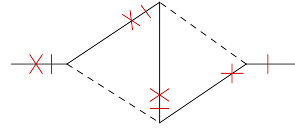
Time versions :
0213 0321
0231 3021

4. $\epsilon_{12|23|3|e|} : 0P_mm_rp|Pr_rp|Mm|0R|$ $SC = 1$



Time versions :
3210 3021
3201 0321

8. $\epsilon_{12|23|3|e|} : 0P_mm_rp|pR_Rp|mm|0R|$ $SC = 1$



Time versions :
3120 3012
3102 0312

Будем отдельно рассматривать сумму временных версий 0123 и 0213.

I группа: временная версия 0213

$$\frac{-2}{(k^2u + k^2 + \tau)(q^2u + q^2 + \tau)((k - q)^2 + q^2 + \tau)((k - q)^2 + uk^2 + uq^2 + \tau)} \quad (163)$$

Введем обозначения: $(-2)\bar{I}$. Запишем фейнмановское представление:

$$\begin{aligned} v_1 &\leftrightarrow ((k - q)^2 + \tau) \\ v_2 &\leftrightarrow (q^2u + q^2 + \tau) \\ v_3 &\leftrightarrow (k^2u + k^2 + \tau) \\ v_4 &\leftrightarrow (k^2u + (k - q)^2 + q^2u + \tau) \end{aligned}$$

Тогда матрица v и соответствующий ей $\det v$ из главы 1 имеют вид:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 + v_3(1 + u) + v_4(1 + u) & -v_4 - v_1 \\ -v_4 - v_1 & v_1 + v_2(1 + u) + v_4(1 + u) \end{pmatrix} \quad (164)$$

$$\det v = 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + 4v_2v_3 + 2v_1v_4 + 4v_2v_4 + 4v_3v_4 + 3v_4^2 \quad (165)$$

Используя метод Sector Decomposition (см. глава 1), разбиваем область интегрирования на сектора и находим результат для каждого из них:

$$\bar{I}_{12} = \frac{1}{12} \left(5 \log[2] - 3 \log[3] + 7(\log[11] - \log[7] - 6\sqrt{3} \tanh^{-1}(\sqrt{3})) + 6\sqrt{3} \tanh^{-1}(2\sqrt{3}) \right) \quad (166)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{12} &= \bar{I}_{13} \\ \bar{I}_{14} &= \frac{1}{24} (16 \log[2] + 3 \log[3] + 15 \log[5] + 7 \log[7] - 22 \log[11]) \\ \bar{I}_2 &= \bar{I}_3 \\ \bar{I}_{31} &= -\frac{9}{4} \log[2] + \frac{3}{4} \log[3] - \frac{5}{8} \log[5] + \frac{7}{8} \log[7] - \frac{1}{8} \log[11] - \\ &\quad - \frac{4\sqrt{3} \tanh^{-1}(\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} \tanh^{-1}(2\sqrt{3})}{8} \end{aligned} \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{32} &= \frac{1}{12} 7 \log[2] - \frac{7 \log[3]}{8} - \frac{7 \log[7]}{12} + \frac{25 \log[5]}{24} \\ \bar{I}_{34} &= \frac{\log[2]}{6} - \frac{5 \log[5]}{8} - \frac{11 \log[11]}{24} + \frac{\log[3]}{4} + \frac{7 \log[7]}{8} \\ \bar{I}_4 &= \frac{7 \log[3]}{8} - \frac{5 \log[5]}{24} - \frac{35 \log[7]}{24} + \frac{11 \log[11]}{12} \end{aligned}$$

Учитывая коэффициенты $\Gamma(\varepsilon)$ и -2 в фейнмановской представлении 1, получаем:

$$\begin{aligned} \sum \bar{I} &= 2\bar{I}_{13} + \bar{I}_{14} + 2(\bar{I}_{31} + \bar{I}_{32} + \bar{I}_{34}) + \bar{I}_4 = \frac{3}{4} \log\left(\frac{3}{4}\right) \\ \Rightarrow (-2) \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4} \sum \bar{I} &= -\frac{3 \log\left(\frac{4}{3}\right)}{8\varepsilon} \end{aligned} \quad (168)$$

С учетом зарядов ответ выглядит как:

$$\Rightarrow (g_3, u) \quad (169)$$

$$-\frac{g_3^4}{\varepsilon 2u(u+1)^2} \left(-u \log(u) + (u+1) \log\left[\frac{(u+1)^2}{u+2}\right] + \log\left[\frac{4}{u+2}\right] \right)$$

$$\Rightarrow (f, w) \quad (170)$$

$$-\frac{f^2 w}{\varepsilon 2(w+1)^2} \left(\frac{1}{w} \log(w) + \frac{(w+1)}{w} \log\left[\frac{(w+1)^2}{(2w+1)w}\right] + \log\left[\frac{4w}{1+2w}\right] \right)$$

II группа: временная версия 0123

$$\frac{2((k-q)^2 - k^2)(q^2 - (k-q)^2)}{(k^2+t)(uk^2+k^2+t)(q^2+t)(uq^2+q^2+t)((k-q)^2+t)(k^2+(k-q)^2+q^2+3t)} \quad (171)$$

Чтобы воспользоваться методом SD, распишем этот интеграл так, чтобы убрать множитель в числителе:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{(k^2+t)(uk^2+k^2+t)(uq^2+q^2+t)(k^2+(k-q)^2+q^2+3t)} - \\ & - \frac{(uk^2+k^2+t)(uq^2+q^2+t)((k-q)^2+t)(k^2+(k-q)^2+q^2+3t)}{2} - \\ & - \frac{(k^2+t)(uk^2+k^2+t)(q^2+t)(uq^2+q^2+t)}{2} = \\ & = 8I^{(1)} - 2I^{(2)} - 2I^{(3)} \end{aligned} \quad (172)$$

- 1 вклад, $I^{(1)}$

$$\begin{aligned} v_1 &\leftrightarrow (k^2+t) \\ v_2 &\leftrightarrow (2k^2 - 2kMq + 2q^2 + 3t) \\ v_3 &\leftrightarrow (k^2+t+k^2u) \\ v_4 &\leftrightarrow (q^2+t+q^2u) \end{aligned}$$

Тогда $\det = (v_1 + 2v_2 + 2v_3)(2v_2 + 2v_4) - v_2^2$

$$I_{12}^{(1)} = \frac{1}{112\varepsilon} - 0.0126349$$

$$I_{14}^{(1)} = 0.0121109 + \frac{1}{12\varepsilon}$$

$$I_2^{(1)} = 0.0147803$$

$$I_{32}^{(1)} = 0.00592873 + \frac{1}{24\varepsilon}$$

$$I_{34}^{(1)} = 0.0156338 + \frac{1}{24\varepsilon}$$

$$I_{41}^{(1)} = 0.0284238$$

$$I_{42}^{(1)} = 0.0123895$$

$$I_{43}^{(1)} = 0.0172003$$

Первый вклад дает:

$$\Rightarrow I^{(1)} \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4}, \quad (173)$$

$$I^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon(u+1)^2} + \frac{3}{2(u+1)^2} - \frac{3 \log(2)}{(u+1)^2} + \frac{3 \log(3)}{2(u+1)^2} - \frac{\log(u+1)}{u(u+1)^2} \quad (174)$$

• 2 вклад, $I^{(2)}$

$$v_1 \leftrightarrow (k^2 + q^2 - 2kqM + t)$$

$$v_2 \leftrightarrow (2k^2 - 2kMq + 2q^2 + 3t)$$

$$v_3 \leftrightarrow (k^2 + t + k^2u)$$

$$v_4 \leftrightarrow (q^2 + t + q^2u)$$

$$\text{Тогда } \det v = (v_1 + 2v_2 + 2v_3)(v_1 + 2v_2 + 2v_4) - (v_2 + v_1)^2$$

$$I_{12}^{(2)} = 0.0251902$$

$$I_{13}^{(2)} = I_{14}^{(2)} = 0.0351295$$

$$I_2^{(2)} = 0.0137288$$

$$I_{31}^{(2)} = 0.0256404$$

$$I_{32}^{(2)} = 0.012085$$

$$I_{34}^{(2)} = 0.0155663$$

Второй вклад дает:

$$\Rightarrow I^{(2)} \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4}, \quad (175)$$

$$\Rightarrow I^{(2)} = \frac{\log\left(\frac{64}{27}\right)}{(u+1)^2} \quad (176)$$

- 3 вклад, $I^{(3)}$

$$v_1 \leftrightarrow (k^2 + t)$$

$$v_2 \leftrightarrow (q^2 + t)$$

$$v_3 \leftrightarrow (k^2 + t + k^2 u)$$

$$v_4 \leftrightarrow (q^2 + t + q^2 u)$$

Тогда $\det = (v_1 + 2v_3)(v_2 + 2v_4)$

$$I_{14}^{(3)} = \frac{0.0449813\varepsilon/2 + 0.0555556}{\varepsilon/2}$$

$$I_{12}^{(3)} = \frac{0.0420155\varepsilon/2 + 0.111111}{\varepsilon/2}$$

$$I_1^{(3)} = I_2^{(3)}$$

$$I_{32}^{(3)} = \frac{0.0362953\varepsilon/2 + 0.0555556}{\varepsilon/2}$$

$$I_{34}^{(3)} = \frac{0.0301344\varepsilon/2 + 0.0277778}{\varepsilon/2}$$

$$I_3^{(3)} = I_4^{(3)}$$

Третий вклад дает:

$$\Rightarrow I^{(3)} \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4}, \quad (177)$$

$$I^{(3)} = \frac{4}{\varepsilon(u+1)^2} + \frac{4}{(u+1)^2} - \frac{4 \log(u+1)}{u(u+1)^2} \quad (178)$$

Итого, $8I^{(1)} - 2I^{(2)} - 2I^{(3)}$:

$$\Rightarrow (8I^{(1)} - 2I^{(2)} - 2I^{(3)}) \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4}, \quad (179)$$

$$8I^{(1)} - 2I^{(2)} - 2I^{(3)} = \frac{4}{(u+1)^2} - 2 \frac{9 \log\left(\frac{4}{3}\right)}{(u+1)^2} \quad (180)$$

С учетом зарядов ответы выглядят как:

$$\Rightarrow (g_3, u) \quad (181)$$

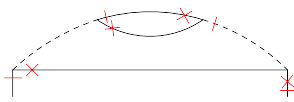
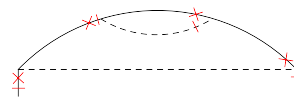
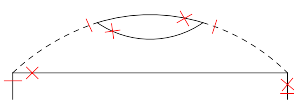
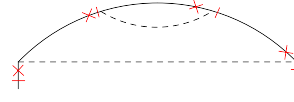
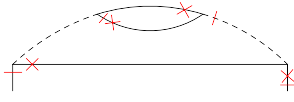
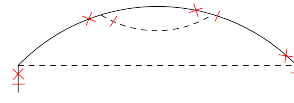
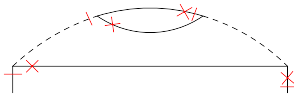
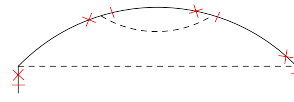
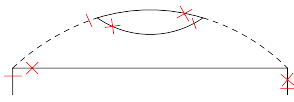
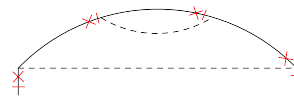
$$g_3^4 \left(\frac{1}{\varepsilon(u+1)^2} - \frac{9 \log\left(\frac{4}{3}\right)}{2\varepsilon(u+1)^2} \right)$$

$$\Rightarrow (f, w) \quad (182)$$

$$f^2 \left(\frac{1}{\varepsilon(w+1)^2} - \frac{9 \log\left(\frac{4}{3}\right)}{2\varepsilon(w+1)^2} \right)$$

Топология $e12|e3|33||$

Проведем аналогичные вычисления для следующей топологии

1. $e12 e3 33 : 0P_{rp_mm} 0R_mM Pr_rp SC = 1$		<i>Time versions :</i> 1320 1032 1302 0132	6. $e12 e3 33 : 0P_{mm_rp} 0R_pR Mm_rp SC = 1$		<i>Time versions :</i> 1320 1032 1302 0132
2. $e12 e3 33 : 0P_{rp_mM} 0R_mM pr_rp SC = 1$		<i>Time versions :</i> 0132 1023 0123 1032 0213 1302	7. $e12 e3 33 : 0P_{mm_rP} 0R_pR mm_rp SC = 1$		<i>Time versions :</i> 1023 0132 1032 0123 1302 0213
3. $e12 e3 33 : 0P_{rp_mm} 0R_mM Rp_pr SC = 1$		<i>Time versions :</i> 1320 1032 1302 0132	8. $e12 e3 33 : 0P_{mm_rP} 0R_pr mM_rp $		<i>Time versions :</i> 0231 0123 0213 1023
4. $e12 e3 33 : 0P_{rp_mM} 0R_mm pR_rp SC = 1$		<i>Time versions :</i> 0231 0123 0213 1023	9. $e12 e3 33 : 0P_{mm_rP} 0R_pr mm_rP SC = 1$		<i>Time versions :</i> 0231 0123 0213 1023
5. $e12 e3 33 : 0P_{rp_mM} 0R_mm pr_rP SC = 1$		<i>Time versions :</i> 0231 0123 0213 1023	10. $e12 e3 33 : 0P_{mm_rp} 0R_pR Rp_mm $		<i>Time versions :</i> 1320 1032 1302 0132

Как видно из рисунка, данную топологию удобно разбить на две группы с учетом расположения безмассовых линий: первая группа – это диаграммы с 1 по 5, вторая группа – диаграммы с 6 по 10.

I группа:

$$4 \frac{k^2 - (k - q)^2}{(k^2 + t)(q^2 + t)(q^2 + q^2 + t)^2(k^2 + (k - q)^2 + q^2 + 3t)} = 4\bar{I} \quad (183)$$

Чтобы воспользоваться методом SD, распишем \bar{I} этот интеграл так, чтобы убрать множитель в числителе:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(q^2+t)(q^2+q^2+t)^2(k^2+(k-q)^2+q^2+3t)} - \frac{1}{(k^2+t)(q^2+t)(q^2+q^2+t)^2} + \\ & + \frac{1}{(q^2+t)(q^2+q^2+t)^2(k^2+(k-q)^2+q^2+3t)} + \frac{1}{(k^2+t)(q^2+q^2+t)^2(k^2+(k-q)^2+q^2+3t)} = \\ & = I^{(1)} - I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)} \end{aligned} \quad (184)$$

Теперь у нас есть 4 отдельных интеграла, требующих вычисления:

- 1 вклад, $I^{(1)}$

$$v_3 \leftrightarrow (2k^2 - 2kMq + 2q^2 + 3), \quad v_2 \leftrightarrow (q^2u + q^2 + 1), \quad v_1 \leftrightarrow (q^2 + 1) \quad (185)$$

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= -\frac{1}{12\varepsilon} - 0.104274 \\ I_2^{(1)} &= -\frac{5}{48\varepsilon} - 0.209929 \\ I_3^{(1)} &= 0.0124075 \end{aligned}$$

Первый вклад дает:

$$I^{(1)} : \quad \frac{3}{32} \left(-\frac{2}{\varepsilon} + 4 - 6 \log(4) + \log(3) \right) \quad (186)$$

- 2 вклад, $I^{(2)}$

$$v_1 (k^2 + t) + v_2 (q^2 + q^2 + t)^2 + v_3 (q^2 + t) \quad (187)$$

$$\begin{aligned} I_1^{(2)} &= 0.274653 \\ I_2^{(2)} &= -0.4086974 \\ I_3^{(2)} &= -0.25225 \end{aligned}$$

Второй вклад дает

$$I^{(2)} : \quad 1 - \log(4) = -0.3862944$$

- 3 вклад, $I^{(3)}$, равен вкладу $I^{(1)}$
- 4 вклад, $I^{(4)}$

$$v_3 \leftrightarrow (2k^2 - 2kMq + 2q^2 + 3), \quad v_1 \leftrightarrow (k^2 + 1), \quad \leftrightarrow v_2 (2q^2 + 1) \quad (188)$$

$$\begin{aligned} I_{12}^{(4)} &= 0.0796134 \\ I_{13}^{(4)} &= 0.0180497 \\ I_{21}^{(4)} &= \frac{1}{6\varepsilon} + 0.0590162 \\ I_{23}^{(4)} &= 0.0229395 + \frac{1}{12\varepsilon} \\ I_3^{(4)} &= 0.0107872 \end{aligned}$$

Четвертый вклад дает:

$$I^{(4)} : \quad \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \log\left(\frac{27}{16}\right) = \frac{1}{8\varepsilon} + 0.190406$$

Итого, $(I^{(1)} - I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)}) :$

$$-\frac{1}{8\varepsilon} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} 3 \log(2) + \frac{9 \log(3)}{16} \quad (189)$$

Надо отметить, что исходное выражение содержит расходимость в подграфе. Используя R' операцию (см. главу 1), учтем соответствующий контрчлен. Вклад, идущий от R' операции, равен:

$$-\frac{1}{4(1+u)^2\varepsilon^2} - \frac{1}{8u(1+u)^2\varepsilon} + \frac{(1+2u) \log[1+u]}{8u^2(1+u)^2\varepsilon} \quad (190)$$

Тогда итоговый ответ для первой группы топологии $e12|e3|33||$ с учетом множителя $\Gamma(\varepsilon) (\Gamma(2 - \varepsilon/2))^2 / 4$ и 4 :

$$-\frac{1}{2(1+u)^2\varepsilon^2} + \frac{u-1}{2u(1+u)^2\varepsilon} - \frac{9}{4(1+u)^2\varepsilon} \log\left[\frac{4}{3}\right] + \frac{(1+2u) \log[1+u]}{2u^2(1+u)^2\varepsilon} \quad (191)$$

Таким образом, для различных пар зарядов ответ имеет вид:

$$\Rightarrow (g_3, u) \quad (192)$$

$$g_3^4 \left(\frac{4}{(1+u)^2 \varepsilon^2} + \frac{2}{(1+u)^2 \varepsilon} - \frac{9}{(1+u)^2 \varepsilon} \log \left[\frac{4}{3} \right] \right)$$

$$\Rightarrow (f, w) \quad (193)$$

$$f^2 \left(\frac{4}{(1+w)^2 \varepsilon^2} + \frac{2}{(1+w)^2 \varepsilon} - \frac{9}{(1+w)^2 \varepsilon} \log \left[\frac{4}{3} \right] \right)$$

II группа

$$\frac{-1}{(k^2 + t)(q^2 u + q^2 + t)^2 (u(k^2 - 2kMq + q^2) + k^2 + q^2 u + t)} = \bar{I} * (-4) \quad (194)$$

Опять перейдем к фейнмановскому представлению:

$$\Rightarrow v_3 \leftrightarrow (u(k^2 - 2kMq + q^2) + k^2 + t + q^2 u)$$

$$v_1 \leftrightarrow (k^2 + t)$$

$$v_2 \leftrightarrow (q^2 u + q^2 + t)$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 + v_3(1+u) & -uv_3 \\ -uv_3 & v_2(1+u) + v_3(2u) \end{pmatrix} \quad (195)$$

$$\det v = v_1 v_2 + uv_1 v_2 + 2uv_1 v_3 + v_2 v_3 + 2uv_2 v_3 + u^2 v_2 v_3 + 2uv_3^2 + u^2 v_3^2 \quad (196)$$

Используя метод SD, считаем вклад каждого сектора по отдельности:

$$I_{12} = \frac{1}{4} \log [11] - \frac{3}{4} \log [2]$$

$$I_{13} = \frac{1}{2} \log [2] + \frac{5}{12} \log [5] - \frac{5}{12} \log [11]$$

$$I_{21} = \frac{1}{6\varepsilon} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \log [11] - \frac{1}{12} \log [2] - \frac{1}{3} \log [3]$$

$$I_{23} = \frac{1}{12\varepsilon} + \frac{1}{24} + \frac{1}{3} \log [3] - \frac{1}{6} \log [2] + \frac{3 \log [7]}{8} - \frac{5 \log [11]}{12}$$

$$I_3 = \frac{5}{12} \log [11] - \frac{5}{12} \log [5] - \frac{3}{8} \log [7] + \frac{3}{8} \log [3]$$

$$\Rightarrow \sum I_i = \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \log \left[\frac{27}{16} \right]$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \sum I_i \frac{1}{4} \Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2 = -\frac{1}{16\varepsilon^2} + \frac{1}{32\varepsilon} - \frac{1}{32\varepsilon} \log \left[\frac{27}{16} \right]$$

В общем виде

$$\begin{aligned} \bar{I} = & -\frac{1}{2(1+u)^3\varepsilon^2} + \frac{1}{4(1+u)^3\varepsilon} + \frac{1}{4u(1+u)^3\varepsilon} [2(1+u) \log[2] + u \log[u] - \\ & - 2 \log \left[\frac{(2+u)}{(1+u)} \right] - u \log [(1+u)^2(2+u)]] \end{aligned} \quad (197)$$

Как и в предыдущем случае, данная диаграмма имеет расходимость в подграфе. Соответствующий вклад от R' операции равен

$$\Rightarrow = \frac{1 - \log[2]}{16\varepsilon} - \frac{1}{8\varepsilon^2} \quad (198)$$

Итоговый ответ для данной группы имеет вид:

$$\Rightarrow (g_3, u) \quad (199)$$

$$\begin{aligned} g_3^4 \left(\frac{8}{(1+u)^3\varepsilon^2} - \frac{2}{(1+u)^3\varepsilon} + \right. \\ \left. + \frac{2}{u(1+u)^3\varepsilon} [2(1+u) \log[2] + 2 \log[1+u] + \right. \\ \left. + u \log[u] - (2+u) \log[2+u]] \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (f, w) \quad (200)$$

$$\begin{aligned} f^2 \left(\frac{8w}{(1+w)^3\varepsilon^2} - \frac{2w}{(1+w)^3\varepsilon} + \right. \\ \left. + \frac{2w^2}{(1+w)^3\varepsilon} \left[\frac{(1+w)}{w} \log[4] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \log[1+w] - \frac{(2w+1)}{w} \log[2w+1] \right] \right) \end{aligned}$$

Используя данные результаты, а также рассмотрев аналогичным образом величины Γ_2 и Γ_7 , приходим к аналитическим результатам, представленным в разделе 3.2.

Список литературы

- [1] Five-loop renormalization group functions of $o(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and ε^5 : (phys. lett. b 272 (1991) 39) / H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde et al. // Physics Letters B. — 1993. — Vol. 319, no. 4. — P. 545.
- [2] Kompaniets M., Panzer E. Renormalization group functions of ϕ^4 theory in the \overline{ms} -scheme to six loops // arXiv preprint arXiv:1606.09210. — 2016.
- [3] Antonov N., Vasil'ev A. Critical dynamics as a field theory // Theoretical and Mathematical Physics. — 1984. — Vol. 60, no. 1. — P. 671–679.
- [4] Critical slowing down near the multiferroic phase transition in $m\text{nwO}_4$ / D. Niermann, C.P. Grams, P. Becker et al. // Physical review letters. — 2015. — Vol. 114, no. 3. — P. 037204.
- [5] Batkovich D., Chetyrkin K., Kompaniets M. Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $o(n)$ -symmetric ϕ^4 model // Nuclear Physics B. — 2016. — Vol. 906. — P. 147–167.
- [6] Kompaniets M., Panzer E. Minimally subtracted six-loop renormalization of $o(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and critical exponents // Physical Review D. — 2017. — Vol. 96, no. 3. — P. 036016.
- [7] Schnetz O. Numbers and functions in quantum field theory // Physical Review D. — 2018. — Vol. 97, no. 8. — P. 085018.
- [8] Aharony A. Critical behavior of anisotropic cubic systems // Physical Review B. — 1973. — Vol. 8, no. 9. — P. 4270.
- [9] Ketley I., Wallace D. A modified epsilon expansion for a hamiltonian with cubic point-group symmetry // Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General. — 1973. — Vol. 6, no. 11. — P. 1667.
- [10] Nelson D., Kosterlitz J., Fisher M. Renormalization-group analysis of bicritical and tetracritical points // Physical Review Letters. — 1974. — Vol. 33, no. 14. — P. 813.

- [11] Brézin E., Le Guillou J., Zinn-Justin J. Discussion of critical phenomena for general n -vector models // *Physical Review B*. — 1974. — Vol. 10, no. 3. — P. 892.
- [12] Shalaev B., Antonenko S., Sokolov A. Five-loop ε for random ising model and marginal spin dimensionality for cubic systems // *Physics Letters A*. — 1997. — Vol. 230, no. 1-2. — P. 105–110.
- [13] Kleinert H., Thoms S., Schulte-Frohlinde V. Stability of a three-dimensional cubic fixed point in the two-coupling-constant φ^4 theory // *Physical review b*. — 1997. — Vol. 56, no. 22. — P. 14428.
- [14] Carmona J., Pelissetto A., Vicari E. n -component ginzburg-landau hamiltonian with cubic anisotropy: A six-loop study // *Physical Review B*. — 2000. — Vol. 61, no. 22. — P. 15136.
- [15] Sokolov A. I. // *Fiz. Tverd. Tela*. — 1977. — Vol. 19. — P. 747. — *Sov. Phys. Solid State* 19 (1977) 433.
- [16] Maier I., Sokolov A. Critical-behaviour of cubic-crystals under structure phase-transitions // *IZVESTIYA AKADEMII NAUK SSSR SERIYA FIZICHESKAYA*. — 1987. — Vol. 51, no. 12. — P. 2103–2106.
- [17] Maier I., Sokolov A. Is a cubic crystal “isotropic” in the critical point? // *Ferroelectrics Lett. Sect.* — 1988. — Vol. 9, no. 4. — P. 95–98.
- [18] De Dominicis C. C. de dominicis, e. brézin, and j. zinn-justin, *phys. rev. b* 12, 4945 (1975) // *Phys. Rev. B*. — 1975. — Vol. 12. — P. 4945.
- [19] Halperin B., Hohenberg P., Ma S. Calculation of dynamic critical properties using wilson’s expansion methods // *Physical Review Letters*. — 1972. — Vol. 29, no. 23. — P. 1548.
- [20] Adzhemyan L., Novikov S., Sladkoff L. Calculation of dynamical exponent in model a of critical dynamics to orrder ε^4 // *Vestnic*. — 2008. — no. 4.
- [21] Nalimov M., Sergeev V., Sladkoff L. Borel resummation of the ε -expansion of the dynamical exponent z in model a of the ϕ^4 $o(n)$ theory // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2009. — Vol. 159, no. 1. — P. 499–508.

- [22] De Dominicis C., Peliti L. Field-theory renormalization and critical dynamics above t_c : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems // *Physical Review B*. — 1978. — Vol. 18, no. 1. — P. 353.
- [23] Peliti L. Renormalization group calculations for critical and tricritical dynamics applied to helium // *Dynamical Critical Phenomena and Related Topics*. — Springer, 1979. — P. 189–209.
- [24] Hohenberg P. C., Halperin B. I. Theory of dynamic critical phenomena // *Reviews of Modern Physics*. — 1977. — Vol. 49, no. 3. — P. 435.
- [25] Six-loop ε expansion study of three-dimensional n-vector model with cubic anisotropy / L.Ts. Adzhemyan, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets et al. // *Nuclear Physics B*. — 2019.
- [26] Diagram reduction in problem of critical dynamics of ferromagnets: 4-loop approximation / L.Ts. Adzhemyan, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets, S.Ye. Vorobyeva // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2018. — Vol. 51, no. 15. — P. 155003.
- [27] Multi-loop calculations of anomalous exponents in the models of critical dynamics / L.Ts. Adzhemyan, M. Dančo, M. Hnatič et al. // *EPJ Web of Conferences / EDP Sciences*. — Vol. 108. — 2016. — P. 02004.
- [28] Vorobyeva S., Ivanova E., Serov V. Borel summation of the dynamic index z in the model a of critical dynamics with an account of the strong coupling asymptotics. — 2018.
- [29] Heinrich G. Sector decomposition // *International Journal of Modern Physics A*. — 2008. — Vol. 23, no. 10. — P. 1457–1486.
- [30] Antonov N., Kompaniets M., Lebedev N. Critical behaviour of the o (n)- ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2013. — Vol. 46, no. 40. — P. 405002.
- [31] Antonov N., Kompaniets M., Lebedev N. Critical behavior of the o (n) ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter: Three-loop approximation // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2017. — Vol. 190, no. 2. — P. 204–216.

- [32] Kalagov G., Kompaniets M., Nalimov M. Renormalization-group investigation of a superconducting $u(r)$ -phase transition using five loops calculations // Nuclear Physics B. — 2016. — Vol. 905. — P. 16–44.
- [33] Vermaseren J. A. M. New features of FORM. — 2000. — Oct. — Website: <https://www.nikhef.nl/~form/>. math-ph/0010025.
- [34] Graphstate-a tool for graph identification and labelling / D. Batkovich, Yu. Kirienko, M. Kompaniets, S. Novikov // arXiv preprint arXiv:1409.8227. — 2014.
- [35] Kleinert H., Schulte-Frohlinde V. Exact five-loop renormalization group functions of θ^4 -theory with $o(n)$ -symmetric and cubic interactions. critical exponents up to ε^5 // Physics Letters B. — 1995. — Vol. 342, no. 1-4. — P. 284–296.
- [36] Wilson K., Fisher M. Critical exponents in 3.99 dimensions // Physical Review Letters. — 1972. — Vol. 28, no. 4. — P. 240.
- [37] Ordering fluctuation dynamics in *auagzn2* / F. Livet, M. Fèvre, G. Beutier, M. Sutton // Physical Review B. — 2015. — Vol. 92, no. 9. — P. 094102.
- [38] Critical dynamical exponent of the two-dimensional scalar ϕ^4 model with local moves / W. Zhong, G.T. Barkema, D. Panja, R.C. Ball // Physical Review E. — 2018. — Vol. 98, no. 6. — P. 062128.
- [39] Vasil'ev A. N. Quantum field renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. — Petersburg Inst. Nucl. Phys., St. Petersburg, 1998. — English transl.: The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
- [40] Siggia E., Halperin B., Hohenberg P. Renormalization-group treatment of the critical dynamics of the binary-fluid and gas-liquid transitions // Physical Review B. — 1976. — Vol. 13, no. 5. — P. 2110.
- [41] De Dominicis C., Peliti L. Field-theory renormalization and critical dynamics above t_c : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems // Physical Review B. — 1978. — Vol. 18, no. 1. — P. 353.

- [42] H-model of critical dynamics: Two-loop calculations of ν functions and critical indices / L.Ts. Adzhemyan, A.N. Vasiliev, Yu.S. Kabrits, M.V. Kompaniets // Theoretical and Mathematical Physics. — 1999. — Vol. 119, no. 1. — P. 454–470.
- [43] Folk R., Moser G. Dynamic critical behavior near the superfluid transition in he^3 - he^4 mixtures in two loop order // Physical review letters. — 2002. — Vol. 89, no. 12. — P. 125301.
- [44] De Dominicis C. C. de dominicis and l. peliti, phys. rev. lett. 38, 505 (1977) // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Vol. 38. — P. 505.
- [45] Influence of hydrodynamic fluctuations on the phase transition in the e and f models of critical dynamics / M. Dančo, M. Hnatich, M.V. Komarova et al. // Theoretical and Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 176, no. 1. — P. 888–897.
- [46] Kazakov D., Tarasov O., Shirkov D. Analytic continuation of the results of perturbation theory for the model $g\varphi^4$ to the region $g \gtrsim 1$ // Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika. — 1979. — Vol. 38, no. 1. — P. 15–25.
- [47] Kompaniets M. Prediction of the higher-order terms based on borel resummation with conformal mapping // arXiv preprint arXiv:1604.04108. — 2016.
- [48] Guida R., Zinn-Justin J. Critical exponents of the n -vector model // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1998. — Vol. 31, no. 40. — P. 8103.
- [49] Maier I., Sokolov A. Critical index of impurity ising-models. — 1984.
- [50] Mayer I., Sokolov A., Shalayev B. Critical exponents for cubic and impure uniaxial crystals: most accurate (?) theoretical values // Ferroelectrics. — 1989. — Vol. 95, no. 1. — P. 93–96.
- [51] Varnashev K. Stability of a cubic fixed point in three dimensions: Critical exponents for generic n // Physical Review B. — 2000. — Vol. 61, no. 21. — P. 14660.
- [52] Mudrov A., Varnashev K. Modified borel summation of divergent series and critical-exponent estimates for an n -vector cubic model in three dimensions

- from five-loop ε expansions // Physical Review E. — 1998. — Vol. 58, no. 5. — P. 5371.
- [53] Pakhnin D., Sokolov A. Five-loop renormalization-group expansions for the three-dimensional n -vector cubic model and critical exponents for impure Ising systems // Physical Review B. — 2000. — Vol. 61, no. 22. — P. 15130.
- [54] Folk R., Holovatch Y., Yavors'kii T. Pseudo- ε expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model // Physical Review B. — 2000. — Vol. 62, no. 18. — P. 12195.
- [55] Kudlis A., Sokolov A. Anisotropy of a cubic ferromagnet at criticality // Physical Review E. — 2016. — Vol. 94, no. 4. — P. 042107.
- [56] Kleinert H., Schulte-Frohlinde V. Critical Properties of ϕ^4 -theories. — World Scientific, 2001.
- [57] Large-order asymptotes for dynamic models / J. Andreanov, J. Honkonen, M. Komarova, M. Nalimov // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2006. — Vol. 39, no. 25. — P. 7815.

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Manuscript copyright

Ivanova Ella

**Multi-loop calculation of critical exponents in
models of critical dynamics and statics**

Specialisation 01.04.02 – theoretical physics

Dissertation is submitted for the degree
of candidate of Physical and Mathematical Sciences

Thesis supervisor:
Adzhemyan Loran Tsolakovich
Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math)

Saint Petersburg – 2019

Contents

Introduction	98
1 Chapter 1: Formulation of the problem. Used methods.	105
1.1 Formalization of the problem	105
1.1.1 Static case	105
1.1.2 Dynamic model	106
1.2 Renormalization procedure	108
1.3 Sector Decomposition	110
1.3.1 Feynman representation	110
1.3.2 Description of the method SD	113
2 Chapter 2: Static case	117
2.1 The description of the ϕ^4 model with the cubic symmetry	117
2.2 Renormalization of the model	117
2.3 Renormalization group analysis in the six-loop approximation	119
2.4 Critical exponents η and ν	124
3 Chapter 3: Dynamic case	127
3.1 Dynamical model A	127
3.1.1 Renormalization of the model	128
3.1.2 Diagram technique and time version	130
3.1.3 Feynman representation for the dynamic diagrams	132
3.1.4 Reduction of the diagrams	134
3.1.5 The result of diagram reduction for the model A	139
3.1.6 Critical exponent z	142
3.2 Dynamic model E	146
3.2.1 Renormalization of the model	147
3.2.2 Diagramm Technique and Reduction Scheme	149
3.2.3 Result	152
4 Chapter 4: Resummation procedure	156
4.1 Model ϕ^4 with the cubic symmetry	159
4.2 Model A	162

Conclusion	165
Appendix A	167
Appendix B	168
Appendix C	170
Bibliography	182

Introduction

Relevance of the topic

This work is focused on the application of modern techniques of calculation of Feynman diagrams for describing the continuous phase transitions and critical phenomena by renormalization group (RG) and ε -expansion approach. The RG method allows one to justify critical scaling as in problems of critical statics (thermodynamics, simultaneous correlation functions), and in describing relaxation processes (critical slowing down). Quantitative scaling characteristics are critical exponents. The renormalization group method allows one to calculate them in the form of ε -expansion (ε is a formally small parameter, which shows the deviation of the dimension of the space d from its critical value d_c). The resulting series is asymptotic and require resummation. For effective Borel resummation, it is necessary to know as many terms of expansion as possible. The complexity of calculating the coefficients of this series increases with the consideration of higher and higher orders of perturbation theory.

The progress that achieved in solving these problems by the end of the 20th century did not allow us to answer a lot of questions from the theory of phase transitions. Promotion to the higher orders of perturbation theory, accompanied by a number of significant difficulties. First of all, a factorial growth of the number of the diagram. And as well as a nontrivial view of the corresponding dynamic integrand expressions that do not allow to use modern methods of numerical calculation of diagrams as in a static. For a long period of time in this area there has been no noticeable progress. And only recently the significant successes were achieved. The development of new analytical methods for calculating Feynman diagrams, as well as numerical calculation algorithms (the Sector Decomposition method) has made it possible to move to the higher orders of perturbation theory. In problems of critical statics, the record fifth order of ε -expansion was obtained in 1993 [1] and hold until 2016 [2]. Calculations of problems of critical dynamics are much more complicated. Until recently, the third order of perturbation theory, obtained in 1984 [3], was the highest achievement.

The study of the models of critical dynamics presented in this thesis - model A

and model E - is undoubtedly interesting: in the article [4] it was recently shown, that model A describes not only the critical behavior of ferromagnets for which it has traditionally been used but also phase transitions in multiferroics, the model E successfully describes the behavior of planar symmetric antiferromagnets. The generalization of recently obtained analytical results for the $O(n)$ -symmetric model ϕ^4 [2] on the model ϕ^4 with the cubic symmetry, makes it possible to receive a number of new results for that model.

The elaboration extent of the topic

The renormalization group (RG) method and ε -expansion have proved to be very successful in the research of problems of critical statics. Currently, the $O(n)$ -symmetric model ϕ^4 has been calculated with six loop accuracy [5, 6, 2], and for the anomalous dimension of the field, the seven-loop result [7] is also known. These works are necessary basis for advancing perturbation theory in the sixth order in the ϕ^4 model with the cubic symmetry. A detailed study of critical exponents in these static models was carried out by many groups: in the works [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] the study was conducted using ε -expansion, and in [15, 16, 17] within real space.

In a contrast to the static case, the study of critical exponents of the dynamic models for a long time could not move beyond the third order of perturbation theory. For example, the percolation theory [3] was studied only up to the second order; a numerical two-loop result was also obtained for the H model [18]. Since model A is the simplest representative of the dynamic models, it was possible to advance a little further, although for a long time it was known only the second order of perturbation theory [19]. Then in [18] a third-order result for ε was presented, but it turned out to be erroneous due to a technical error. Also, a three-loop correct calculation was demonstrated in [3]. The fourth order calculations were impossible due to unavailability of sufficient computational resources. But after nearly a quarter of a century, a four-loop numerical result for the critical exponent z was presented in [20]. And on the basis of the data obtained in [20], the expansion of the critical exponent z was resummed [21].

The investigation of the dynamic model E is of particular interest. The model E is one of the simplest dynamic models that take into account intermode coupling.

The articles [22] and [23] that were published within one year contradicted each other. Both works were carried out in a two-loop approximation; no one was able to advance further than the second order due to a significant increase in the number of diagrams and their complexity.

The main goal of this work is to obtain a highly accurate numerical result for critical exponents in the ϕ^4 model with the cubic symmetry, as well as in A and E model of critical dynamics. The following **tasks** are solved for this:

- 1) Generalization of the multi-loop results of the $O(n)$ -symmetric model ϕ^4 on a static model ϕ^4 with the cubic symmetry.
- 2) Development and application the dynamical diagram reduction method in case of A and model E of critical dynamics.
- 3) Generalization of the “Sector Decomposition” method to the problems of critical dynamics. Calculation the dynamic critical exponents of models A and E using this method.
- 4) Resummation the five-loop ε -expansion of the dynamic critical exponent of the model A and the six-loop ε -expansion of the static critical exponent of the cubic model using the modified conformal-Borel method.

Scientific novelty

The goals and problems of the thesis that were formulated above are new. All the main results of the thesis were obtained for the first time, which is confirmed by their publication in leading domestic and international journals and approbation at the international conferences.

Theoretical and practical significance

The results obtained in the thesis can be used in a wide class of models of critical dynamics, such as models C, F, and H [24], as well as to study models based on the model ϕ^4 , but belonging to another symmetry class.

Methodology and research methods

The methodology of the thesis is based on the use of field-theoretical methods – the method of functional integration, Feynman diagram technique, diagram reduction method, renormalization theory and renormalization group, the numerical calculation of the diagrams by Sector Decomposition method, Borel resummation method

of the divergent series.

The reliability of the results is ensured by proven field-theoretical methods. The results of the research conducted in the thesis, published in leading peer-reviewed journals, were reported at Russian and international conferences. The calculations were also verified by comparison with previously obtained results of other authors.

Thesis statements to be defended

- 1) The Sector Decomposition method, which is an effective way to calculate Feynman diagrams in higher orders of perturbation theory, was adapted with regard to the problems of critical dynamic in work.

- 2) The proposed method for the dynamic diagram reduction is an effective tool in advancing higher orders of perturbation theory in critical dynamic.

- 3) The consideration of higher orders in the ε -expansion allows us to significantly refine the value of critical exponents, both in the static model ϕ^4 with the cubic symmetry and in the dynamic model A.

The approbation of the research

The results of the work were reported and discussed at the following scientific conferences:

- “The XIX International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists - AYSS” (Dubna, Russia, 2015)

- “The International Student Conference “Science and Progress” (Saint Petersburg, Russia, 2015)

- “The XX International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists” (Dubna, Russia, 2016)

- “42nd Conferences of the Middle European Cooperation in Statistical Physics” (Lyon, France, 2017)

- “VI International Conference Models in Quantum Field Theory - MQFT” (Saint Petersburg, Russia, 2018)

- “The Small Triangle Meeting - SMT20” (Pticie, Slovakia, 2018)

Five articles were published in journals, on the topic of the thesis, recommended by the Higher Attestation Commission of the Russian Federation and included in the RSCI, Web of Science and Scopus databases.

- L.Ts. Adzhemyan, M. Danco, M. Hnatic, E.V. Ivanova and M.V. Kompaniets; *Multi-Loop Calculations of Anomalous Exponents in the Models of Critical Dynamics*; EPJ Web of Conferences, Vol. 108, p. 02004, 2016
- S.Y. Vorobyeva, E.V. Ivanova, V.D. Serov; *Borel summation of the dynamic index z in the model A of critical dynamics with an account of the strong coupling asymptotics*; Vestnik SPbU. Physics and Chemistry, Vol. 5(63), iss. 1, p. 13-19, 2018
- L.Ts. Adzhemyan, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets, S.Ye. Vorobyeva; *Diagram reduction in problem of critical dynamics of ferromagnets: 4-loop approximation*; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 51, Num. 15, 2018
- L.Ts. Adzhemyan, S.E. Vorob'eva, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets; *Representation of renormalization group functions by nonsingular integrals in a model of the critical dynamics of ferromagnets: The fourth order of the ε -expansion*; Theoretical and Mathematical Physics, 195:1, p. 584-594, 2018
- L.T. Adzhemyan, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets, A. Kudlis, A.I. Sokolov; *Six-loop ε expansion study of three-dimensional n -vector model with cubic anisotropy*; Nuclear Physics B, Vol 940, p 332-350, 2019

Personal contribution of the author

All the main results were obtained by the applicant personally, or with his direct participation in the inseparable co-authorship.

Thesis structure

The thesis consists of Introduction, four Chapters, Conclusion and three Appendices. The full volume of the thesis is 93 pages. The thesis contains 15 figures, 12 tables and a list of references from 57 titles.

- In the **Introduction** the relevance of the thesis was substantiated, goals were established and scientific novelty of the research was well-argued, the methodology and research methods were described, the degree of elaboration of the research topic was proved, and also the practical significance of the results obtained and presents the scientific provisions for defense were showed.
- **Chapter One** is devoted to the description of the methods used in the next three chapters. This includes a description of the construction of dynamic and static models, a description of the selected procedure for renormalization (Minimal Subtraction) and a description of the numerical method of calculating diagrams Sector Decomposition.
- **In the second chapter** a generalization of six-loop renormalization group results is carried out for $O(n)$ -symmetric ϕ^4 model to the ϕ^4 model with the cubic symmetry. For considered systems in the sixth order of perturbation theory, ε -expansion of critical exponents η, z, ν is obtained. The marginal order parameter dimensionality n_c , which affects on the choice of a stable fixed point (competition between a cubic fixed point and a Heisenberg point), was also analyzed. The material of the **second chapter** is based on the work [25].
- **The third chapter** is devoted to the study of dynamic critical models A and E. First of all, the Sector Decomposition method which was described in the first chapter was generalized to the dynamic case. The scheme of diagram reduction that proposed at this work is also described in detail using the example of the A and the model E. This scheme allowed not only reducing the number of effective diagram, but also simplifying the corresponding integrands. As a result, this allowed us to carry out multi-loop calculations (five-loop for the model A and two loop for the E-model) and to obtain the ε -expansion of the dynamic critical exponent z of model A with an accuracy of ε^5 . The material **of the third chapter** is based on the works [26, 27].
- **In the fourth chapter** a description of the resummation of the obtained asymptotic series by the method of modified conformal-Borel using the strong coupling parameter is given. Using the example of a zero-dimensional theory by comparing with the exact result known in this case, it is shown that the use of the strong coupling parameter significantly improves the convergence of the resummation procedure. This resummation technique was applied to the crit-

ical exponent η for the model with the cubic symmetry, as well as the critical dynamic exponent z for the model A. The material of the **fourth chapter** is based on the works [25, 28].

- The **Conclusion** of the thesis presents the main results and findings. In **Appendix A** the numerical results of the five-loop model A approximation are given. And in **Appendix B** the three loops analysis of the model E is given, taking into account the diagram reduction method.

Chapter 1: Formulation of the problem. Used methods.

1.1 Formalization of the problem

1.1.1 Static case

The thermodynamic problems and the description of the equilibrium structure of matter nearby critical points are usually referred to problems of critical statics. The time dependence does not appear in exploring this class of problems.

We consider the system in d -dimensional Euclidean space, where the set of fields $\Phi = \{\Phi_i(x)\}$ is defined. The value $\exp[S(\Phi)]$ defines the weight of the configuration Φ , where action $S(\Phi)$ is a polynomial by fields Φ in form:

$$S(\Phi) = -\frac{1}{2}\Phi K\Phi + gV(\Phi). \quad (1)$$

The action consists of the quadratic part $\Phi K\Phi$ and the ‘‘interaction’’ $gV(\Phi)$, where g is a coupling constant that determines the interaction, $V(\Phi)$ is a polynomial of Φ , in which the degree is higher than two. A detailed record of the quadratic part has the form

$$-\frac{1}{2}\Phi K\Phi = -\frac{1}{2} \int dx \int dx' \sum_{k,l} \phi_k(x) K_{kl}(x, x') \phi_l(x'). \quad (2)$$

Taking into account the action of the considered model, one can introduce the generating functional of the Green functions.

$$G(A) = \frac{1}{C} \int D\Phi \exp [S(\Phi) + A\Phi], \quad (3)$$

where A is a set of field sources $A = \{A_i\}$, which determines the generating functional of connected functions $W(A) = \ln G(A)$. Applying Legendre transformation $W(A)$ for A , one can obtain the generating functional of 1-irreducible Green functions:

$$\Gamma(\alpha) = W(A) - \alpha A, \quad \alpha = \frac{\delta W(a)}{\delta A}. \quad (4)$$

Quantity G , W , Γ can be found from perturbative theory as expansion by coupling constants. As a result, these quantities are infinite series. The coefficients in such series are depicted using the Feynman diagram technique. The diagrams are compared to integrals over momenta (coordinates). It can be represented as a set of lines and vertices, the lines correspond to the values of $K^{-1}(x, x')$ – the so-called propagators, the vertices are compared with vertex factors

$$V(x_1..x_n) = \delta V(\Phi) / [\delta\Phi(x_1)..\delta\Phi(x_n)] . \quad (5)$$

The integrals which correspond to diagrams usually contain ultraviolet (UV) divergences due to the region of large integration momentum (short distances). Thus, it is necessary to make the regularization of the model. Since this procedure is universal for both static and dynamic problems, we will return to it later.

1.1.2 Dynamic model

In addition to the problems of critical statics, in this thesis, there is a consideration of some models of critical dynamics describing the dynamics of equilibrium fluctuations nearby of critical points. These models are specific to such effects as critical slowing down, the effect of critical fluctuations on the speed of sound, viscosity, thermal conductivity, etc.

Models of critical dynamics are based on static models. And in this, different dynamic models could correspond to the one static model (for example, ϕ^4). It depends on whether the order parameter is conserved or not, as well as consideration the possible link between the dynamic order parameter with other “soft” modes (intermode coupling).

The standard stochastic dynamics problem is described by the equation:

$$\partial_t \varphi(x) = U(x; \varphi) + \eta(x), \quad \langle \eta(x)\eta(x') \rangle = D(x, x'), \quad x = \{\mathbf{x}, t\}, \quad (6)$$

where η is random noise with Gaussian statistics and a given pair correlator $D(x, x')$, and U is a t – local functional, which is not dependent on time derivatives φ . For non-conserved order parameter φ , it is defined using specified static action $S^{st}(\varphi)$

as the following relation:

$$U(x; \varphi) = \lambda \left[\frac{\delta S^{st}(\varphi)}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \right] \Big|_{\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(x)}, \quad D(x, x') = 2\lambda \delta(x - x'), \quad (7)$$

where λ is the Onsager coefficient. It is used the model of white noise for the correlator $D(x, x')$. And it was made the replacement $\lambda \rightarrow \lambda \Delta$ for a conserved order parameter, where Δ is the Laplace operator.

The Martin-Siggia-Rose (MSR) formalism makes it possible to reduce the stochastic problem (6), (7) to the quantum field model with twice number of fields $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$. Then the action $S(\Phi)$ and generating functional $G(A)$ could be presented as:

$$S(\Phi) = \frac{\varphi' D \varphi'}{2} + \varphi' [-\partial_t \varphi + U(\varphi)], \quad G(A) = \int D\Phi \exp[S(\Phi) + A\Phi]. \quad (8)$$

In some problems, when constructing the dynamics of an order parameter, it is necessary to take into account its interaction with other “soft” modes (the overview of various models is presented in [24]). The consideration of interaction is made by passing from (6) to the following equation for the multi-component $\varphi \equiv \varphi_a$:

$$\partial_t \varphi_a(x) = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S^{st}(\varphi)}{\delta \varphi_b} + \eta_a, \quad (9)$$

$$\langle \eta_a(x) \eta_b(x') \rangle = 2\alpha_{ab} \delta(x - x'), \quad (10)$$

where $\alpha_{ab} = \alpha_{ba}^T$ are Onsager coefficients, and β_{ab} are the new coefficients of inter-mode connection with properties:

$$\beta_{ab} = -\beta_{ba}^T, \quad \delta \beta_{ab}(\mathbf{x}; \varphi) / \delta \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (11)$$

The stochastic problem (9), (10) corresponds to the action:

$$S(\Phi) = \varphi' \alpha \varphi' + \varphi' \left[-\partial_t \varphi + (\alpha + \beta) \frac{\delta S^{st}}{\delta \varphi} \right]. \quad (12)$$

In Chapter 3, we will return to dynamic models and, based on eq.(12), consider dynamic models A and E.

1.2 Renormalization procedure

The role of fluctuations in the consideration of physical systems in the critical region is highly dependent on the dimension of the space d . There is a critical dimension d_c : for the case $d > d_c$ fluctuations are insignificant, but for the case $d < d_c$ they play an important role. In all the models considered in the thesis, $d_c = 4$ and fluctuations are significant. Considering d as a continuous variable, and $\varepsilon = d_c - d$ as a formally small parameter, Wilson proposed to build a theory of critical phenomena in the form of ε dilutions.

When $\varepsilon \rightarrow 0$, UV divergences appear in the perturbation theory diagrams as ε poles, which are eliminated by a well-developed renormalization procedure. The initial action is declared to be non-renormalized, and the parameters e_0 that are included in it are bare. The renormalization procedure is to make a transition from the bare parameters and non-renormalized field to the renormalized parameters and field:

$$e_0 \rightarrow Z_e e, \quad \phi \rightarrow Z_\phi \phi. \quad (13)$$

Renormalization constants Z_i are chosen from the condition that ε poles are absent in the perturbation theory for renormalized charge. The choice of renormalization constants is ambiguous. In the following minimal subtraction (MS) scheme, they have a form

$$Z_i = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(i)}(\{g\}) \varepsilon^{-m}, \quad (14)$$

i.e. only ε poles are included.

Some ambiguity of the renormalization procedure is preserved in the framework of the MS scheme. It is reflected in the fact that the renormalization of the charge

$$g_0 = \mu^\varepsilon g Z_g(g)$$

accompanied by a transition to a dimensionless charge g . And the dimension of the non-renormalized charge g_0 is reflected in the factor μ^ε , where μ (the “renormalization mass”) is an arbitrary parameter, from which renormalization constants are

independent.

Arbitrariness in the value of the renormalization mass is used to obtain the RG-equations that allow one to justify critical scaling and calculate critical exponents in the form of ε -expansions. β - functions and the RG-functions γ are a crucial elements of the RG-equations, which are expressed in terms of the renormalization constants by the relations:

$$\beta_i(\{g\}) = -\varepsilon \frac{g_i}{1 + \sum_k g_k \partial_{g_k} \ln Z_{g_k}}, \quad \gamma_i(\{g\}) = -\varepsilon \frac{\sum_k g_k \partial_{g_k} \ln Z_i}{1 + \sum_k g_k \partial_{g_k} \ln Z_{g_k}}. \quad (15)$$

The conditions $\beta_i(\{g^*\}) = 0$ define a fixed points of the renormalization group, and the values of $\gamma_k(\{g^*\})$ - values of critical exponents. The stability of a fixed point is determined by the eigenvalues of the matrix M , where $M_{ij} = \partial_{g_j} \beta_i(\{g^*\})$. If all eigenvalues are positive, then the fixed point is stable.

The renormalization constants are calculated iteratively in the form of renormalized charges expansion, which coefficients are determined from the condition of reducing poles in the set of 1-irreducible functions defined for each model (which guarantees the absence of poles in any functions).

Consideration the renormalization constants can be replaced by Bogolyubov-Parasyuk R -operation on diagrams of the basic theory (in which the action depends on the renormalized parameters, but it is assumed that $Z_i = 1$):

$$\Gamma^R = R\Gamma = (1 - K)R'\Gamma. \quad (16)$$

Γ is a function, which could be calculated from the base theory diagrams; R' is an incomplete R operation eliminating divergences in the subgraphs; the operation $(1 - K)$ eliminates the remaining surface divergence. In terms of R' operation, the renormalization constant are written as:

$$Z_i = 1 - KR'\bar{\Gamma}_i. \quad (17)$$

In this thesis, it will be used both methods of accounting for counterterms.

1.3 Sector Decomposition

One of the main technical problems arising from the consideration of dynamic and static models is that the calculation of finite integrals of high multiplicity. Using the Monte Carlo method does not allow one to advance to higher orders of perturbation theory since the accuracy is greatly reduced. It turned out that an effective method of increasing the accuracy is to use the Feynman representation with the Sector Decomposition method (SD) [29].

This work presents the adaptation of Sector Decomposition method to the model of critical dynamic. First, consider the static case. Second, show how it can be generalized to the dynamic case.

The whole explanation is illustrated with examples.

1.3.1 Feynman representation

Method SD is based on the Feynman representation of the diagram. It is convenient to start from the Feynman representation for static case.

The graphs of perturbation theory correspond to:

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n \int \prod_{i=1}^N E_i^{-1}, \quad (18)$$

where n is the number of loops, N is a number of line in the graph, and $E_i = k_i^2 + \tau$ is an energy of lines with momentum k . This momentum is a linear combination of the momentums of integration. Thus, the eq.(18) can be rewrite as:

$$I_n = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n \int \prod_{i=1}^l E_i^{-\lambda_i}, \quad (19)$$

where λ_i is the number of line with energy E_i and l is the number of different energies. In the denominator of eq.(19) one can find a product of quadratic forms with respect to a momentum of integration. It can be reduced to the degree of a

single quadratic form by integrating over the auxiliary Feynman parameters u_i :

$$E_1^{-\lambda_1} \dots E_n^{-\lambda_l} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^l \lambda_i)}{\prod_{i=1}^l \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 \dots \int_0^1 du_1 \dots du_l \frac{\delta\left(\sum_{i=1}^l u_i - 1\right) \prod_{i=1}^l u_i^{\lambda_i-1}}{[\sum_{i=1}^l E_i u_i]^{\sum_{i=1}^l \lambda_i}}. \quad (20)$$

The momentum integral of the degree of a quadratic form in (20) have a form $\sum_{i=1}^l E_i u_i = v_{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j + \mathbf{a}_i \mathbf{k}_i + \tilde{c}$ and could be calculated as:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_n \frac{1}{(v_{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j + \mathbf{a}_i \mathbf{k}_i + \tilde{c})^\alpha} = \frac{(4\pi)^{-dn/2} \Gamma(\alpha - dn/2) (\det v)^{-d/2}}{\Gamma(\alpha) [\tilde{c} - (v^{-1})_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j]^{\alpha - dn/2}}, \quad (21)$$

where $\alpha = \sum \lambda_i$. Thus, the task reduces to integration by Feynman parameters.

In the future, instead of the charge g , a more convenient charge u is used:

$$u = \frac{S_d}{(2\pi)^d} g, \quad S_d \equiv \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad (22)$$

Therefore the Feynman representation for the n -loops 4-tailed diagram could be written as

$$J_n^{(4)} = \frac{\Gamma(n\epsilon/2) \Gamma^n(2 - \epsilon/2)}{2^n \prod_i \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_l \frac{\prod_i u_i^{\lambda_i-1} \delta(1 - \sum_{i=1}^l u_i)}{(\det v)^{2-\epsilon/2}}, \quad (23)$$

And for n -loops 2-tailed diagram –

$$J_n^{(2)} = \frac{\Gamma(n\epsilon/2) \Gamma^n(2 - \epsilon/2)}{2^n \prod_i \Gamma(\lambda_i)} \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_l \frac{C \prod_i u_i^{\lambda_i-1} \delta(1 - \sum_{i=1}^l u_i)}{(\det v)^{3-\epsilon/2}}, \quad (24)$$

where $\det v$ and \tilde{c} are defined by relations

$$C = (v_{is}^{-1} b_i b_s - \tilde{c}), \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^l E_i u_i \equiv 1 + \tilde{c} p^2 + 2b_i(\mathbf{p} \mathbf{k}_i) + v_{is}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s), \quad (26)$$

where p is an external momentum.

$\det v$ and C values are necessary for using the Feynman representation and could be obtained directly from the form of the diagram, by passing the momentum rep-

resentation, according to the following rules:

- $\det v$ of a n -loops diagram is equal to the sum of all possible products of Feynman parameters with the number of factors equal to the number of loops from which the “forbidden” multiplications are excluded. The “forbidden” terms are formed taking into account the laws of conservation (principle of momentum conservation at each vertex, as well as their various combinations) occurring in this diagram.
- The value C is equal to the sum of all possible combinations of Feynman parameters with the number of factors, one greater than the number of loops, taking into account “forbidden” terms, from which in this case prohibitions associated with conservation principle in vertices containing external lines are excluded.

For example, consider the construction of a $\det v$ for a two-loops diagram:

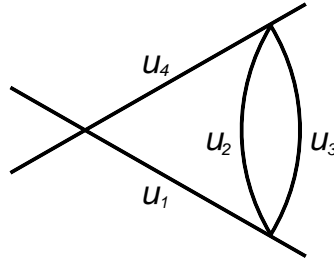


Figure 1: Two-loops four-tailed diagram of the ϕ^4 model with corresponding Feynman parameters on the lines.

For this diagram, n is equal two and there are four Feynman parameters. The sum of the various products of Feynman parameters with the number of factors equal to the number of loops looks like $u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4$. In this diagram there are several “forbidden” terms: $\{u_1u_4, u_2u_3u_4, u_1u_2u_3\}$. Among this set only one u_1u_4 is essential. Based on the foregoing, $\det v$ of this diagram Fig.1 has the form:

$$\det v = u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4. \quad (27)$$

It should be noted, that the Feynman representation of a dynamic diagram can be obtained by simple transformations from a static one with the same topological configuration. This will be described in detail in Chapter 3.

1.3.2 Description of the method SD

Then, the presence Feynman representation for diagrams allows to use Sector Decomposition method. Consider simple static diagram Fig.1. $\det v$ is represented by the relation (27). Then the Feynman representation (23) of the graph takes the form:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \frac{1}{2^2} \Gamma(\varepsilon) \Gamma^2\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathcal{I}, \\ \mathcal{I} &= \left[\prod_{i=1}^4 \int_0^1 du_i \right] \frac{\delta(1 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4)}{(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4)^{2-\varepsilon/2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

The dimension of the space d is written in the form $d = 4 - \varepsilon$, as well as in the following models (Chapter 2 and 3). The denominator in eq.(28) turns to 0 either when u_1, u_2 and u_3 tend to 0, and u_4 goes to 1 (including the delta function), or when u_1, u_3 and u_4 tend to 0, and u_2 to 1, and finally, when u_2, u_3 and u_4 tend to 0, and u_1 to 1. These singularities in the integrand lead to divergences of the integral for $\varepsilon = 0$ and to the poles by $\varepsilon = 0$ for $\varepsilon \rightarrow 0$.

SD method helps to extract residue at these poles in the explicit form. The entire procedure is divided into two simple step. First we need to divide the area of integration into the sectors, where one Feynman variable is “main”, i.e. its magnitude is more than other ones. Then that in each sector it is necessary to return the integration domain to the unit cube by replacing the variables. This two steps one need to make until the singularity of the integrand is determined by the simple degree of one of Feynman variables. Finally the residue at the pole is easily calculated. It can be shown that the number of repeats is equal to the number of loops in the graph.

Consider these steps for the diagram 1:

I. First sectorization and substitution:

$$\begin{aligned}
& \left[\prod_{i=1}^4 \int_0^1 du_i \right] f(\{u_i\}) = \\
& = \int_0^1 du_1 \int_0^{u_1} du_2 du_3 du_4 f(\{u_i\}) + \int_0^1 du_2 \int_0^{u_2} du_1 du_3 du_4 f(\{u_i\}) + \\
& + \int_0^1 du_3 \int_0^{u_3} du_1 du_2 du_4 f(\{u_i\}) + \int_0^1 du_4 \int_0^{u_4} du_1 du_2 du_3 f(\{u_i\}) = \\
& = \int_0^1 du_1 \prod_{i=2,3,4} d\tilde{u}_i u_1^3 f(u_1, \tilde{u}_2 u_1, \tilde{u}_3 u_1, \tilde{u}_4 u_1) + \\
& + \int_0^1 du_2 \prod_{i=1,3,4} d\tilde{u}_i u_2^3 f(\tilde{u}_1 u_2, u_2, \tilde{u}_3 u_2, \tilde{u}_4 u_2) + \\
& + \int_0^1 du_3 \prod_{i=1,2,4} d\tilde{u}_i u_3^3 f(\tilde{u}_1 u_3, \tilde{u}_2 u_3, u_3, \tilde{u}_4 u_3) + \\
& + \int_0^1 du_4 \prod_{i=1,2,3} d\tilde{u}_i u_4^3 f(\tilde{u}_1 u_4, \tilde{u}_2 u_4, \tilde{u}_3 u_4, u_4) = \\
& = \tilde{\mathcal{I}}_1 + \tilde{\mathcal{I}}_2 + \tilde{\mathcal{I}}_3 + \tilde{\mathcal{I}}_4. \tag{29}
\end{aligned}$$

II. Second sectorization and substitution:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \int_0^1 du_4 f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \\
& = \tilde{\mathcal{I}}_{1,2} + \tilde{\mathcal{I}}_{1,3} + \tilde{\mathcal{I}}_{2,1} + \tilde{\mathcal{I}}_{2,3} + \tilde{\mathcal{I}}_{2,4} + \tilde{\mathcal{I}}_{3,1} + \tilde{\mathcal{I}}_{3,2} + \tilde{\mathcal{I}}_{3,4} + \tilde{\mathcal{I}}_{4,2} + \tilde{\mathcal{I}}_{4,3}. \tag{30}
\end{aligned}$$

This diagram has a symmetry: $1 \leftrightarrow 4$ and $2 \leftrightarrow 3$. This fact lead to the following relations:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathcal{I}}_{2,3} = \tilde{\mathcal{I}}_{3,2}, \\
& \tilde{\mathcal{I}}_{1,2} = \tilde{\mathcal{I}}_{1,3} = \tilde{\mathcal{I}}_{4,2} = \tilde{\mathcal{I}}_{4,3}, \\
& \tilde{\mathcal{I}}_{2,1} = \tilde{\mathcal{I}}_{3,1} = \tilde{\mathcal{I}}_{2,4} = \tilde{\mathcal{I}}_{3,4}, \tag{31}
\end{aligned}$$

So we can write the result of the SD only for this 4 sectors:

$$\tilde{\mathcal{I}}_{1,2} = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 du_4 \frac{(1 + u_2 + u_2 u_3 + u_2 u_4)^{-\varepsilon}}{u_2^{1-\varepsilon/2} (1 + u_3 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_2 u_3 u_4)^{2-\varepsilon/2}}, \quad (32)$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_{2,3} = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 du_4 \frac{(1 + u_1 u_3 + u_3 + u_4 u_3)^{-\varepsilon}}{u_3^{1-\varepsilon/2} (1 + u_1 + u_1 u_3 + u_4 + u_3 u_4)^{2-\varepsilon/2}}, \quad (33)$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_{2,1} = \int_0^1 \int_0^1 du_2 du_3 du_4 \frac{(1 + u_1 + u_3 u_1 + u_4 u_1)^{-\varepsilon}}{u_1^{1-\varepsilon/2} (1 + u_3 + u_1 u_3 + u_4 + u_1 u_3 u_4)^{2-\varepsilon/2}}. \quad (34)$$

One can see, that in the eqs.(32)–(34) now the singularity only in one of the variable determines the poles. In the general case, after isolating the features, we may have two situations.

1.If the singularity has the form $u^{-1+n\varepsilon}$, then the calculation of the residue at the pole occurs is as follows:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} f(u) du &= \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) \pm f(0)) du = \\ &= \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} f(0) du + \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) - f(0)) du = \\ &= \frac{f(0)}{\varepsilon n} + \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} (f(u) - f(0)) du = \\ &= \frac{f(0)}{\varepsilon n} + \int_0^1 u^{-1+\varepsilon n} \left(\int_0^1 u f'(au) da \right) du. \end{aligned} \quad (35)$$

Introducing the integration with respect to the additional parameter a allows us to make an explicit reduction of the singularity in the last term. Then, the integrand of the last term is represented as a series of ε . And the required number of members from expansion is selected.

2. Singularity in the form $u^{-m+n\varepsilon}$, where $m > 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{-m+\varepsilon n} f(u) du &= \\ &= \int_0^1 du da u^{-m+\varepsilon n} \frac{(1-a)^{m-1}}{(m-1)!} \partial_a^m f(au) + \frac{\partial_u^{m-1} f(0)}{n\varepsilon} + \frac{\partial_u^1 f(0)}{n\varepsilon-1} + \dots + \frac{f(0)}{n\varepsilon-m+1} \end{aligned} \quad (36)$$

As a result, with the help of SD method, we divided area of integration to the 6

sectors. But due to the symmetry requirements, the number of sectors was reduced to the three. Change of variables were made in each of these sectors. The expansion allowed us to distinguish features in original integrals and express them in terms of integrals convenient for numerical calculations.

The main disadvantage of this method is a large number of sectors in multiloop diagrams. Without symmetry, for an n -loops diagram, the number of sectors is $N \cdot n!$, where N is the number of terms in the determinant, without taking into account the “forbidden” terms – $N = C_k^n$. The accounting “forbidden” terms reduce this number, but all the same, the number of sectors grows rapidly with the growth of n . Taking into account the symmetry of the diagram, we can distinguish equivalent sectors in which the integrands of the expression coincide up to the change of variables. This is useful in terms of reducing the effective number of sectors.

Chapter 2: Static case

This chapter is devoted to the consideration of such statistical models as ϕ^4 with the cubic symmetry.

2.1 The description of the ϕ^4 model with the cubic symmetry

The consideration of real materials with more or less complex structure need to take into account some anisotropy of the order parameter. The simplest example of such material is ferromagnet with the cubic symmetry. In the language of the Hamiltonian this corresponds to the inclusion of an extra term, which is invariant with respect to the cubic group of transformations in form $g_2 \sum_{\alpha=1}^n \varphi_{\alpha}^4$, where φ_{α} is n -component order parameter field and g_2 – anisotropic coupling constant.

The considered model contains two charges. For a pair of charges g_1 and g_2 there are 4 variants of the fixed point of the renormalization group: Gaussian $(0, 0)$, Ising $(0, g_I^*)$, Heisenberg $(g_H^*, 0)$ and cubic (g_1^*, g_2^*) . So the main question is what critical regime takes place in real ferromagnets. Previous works show the value of the number of field components n significantly affects the stability of fixed points and leads to competition between the Heisenberg fixed point and the cubic one. Therefore, it is worthwhile to determine the critical value of $n = n_c$, at which the mode change occurs.

2.2 Renormalization of the model

The critical behavior of the model ϕ^4 with the cubic symmetry is described by the following action with two coupling constants:

$$S = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\varphi_{0\alpha})^2 + m_0^2\varphi_{0\alpha}^2] + \frac{1}{4!} \left[g_{01}T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} + g_{02}T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} \right] \varphi_{0\alpha}\varphi_{0\beta}\varphi_{0\gamma}\varphi_{0\delta} \right\}, \quad (37)$$

where $\varphi_{0\alpha}$ is n -component unrenormalized field, g_{01} and g_{02} are unrenormalized coupling constants. The tensor factors $T^{(1)}$ and $T^{(2)}$ display the $O(n)$ -invariant and

cubic terms in the action respectively. Represent them in the following form:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} = \frac{1}{3}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}), \quad (38)$$

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = \delta_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \delta_{\alpha_1\dots\alpha_n} = \begin{cases} 1, & \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (39)$$

$T^{(1)}$ and $T^{(2)}$ satisfy the relations:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} = \frac{n(n+2)}{3}, \quad T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = n, \quad T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = n.$$

The action (37) is positively defined under conditions: I. $g_{02} > -g_{01}$ for $g_{01} > 0$; II. $g_{02} > -ng_{01}$ for $g_{01} < 0$.

This model is multiplicatively renormalizable. Renormalization of parameters and fields is determined by the relations:

$$m_0^2 = m^2 Z_{m^2}, \quad g_{01} = g_1 \mu^\varepsilon Z_{g_1}, \quad g_{02} = g_2 \mu^\varepsilon Z_{g_2}, \quad \varphi_0 = \varphi Z_\varphi. \quad (40)$$

As a result, the renormalized action has the form:

$$S^R = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [Z_1 (\partial\varphi_\alpha)^2 + Z_2 m^2 \varphi_\alpha^2] + \right. \quad (41)$$

$$\left. + \frac{1}{4!} [Z_3 g_1 \mu^\varepsilon T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} + Z_4 g_2 \mu^\varepsilon T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}] \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma \varphi_\delta \right\}, \quad (42)$$

$$Z_1 = Z_\varphi^2, \quad Z_2 = Z_{m^2} Z_\varphi^2, \quad Z_3 = Z_{g_1} Z_\varphi^4, \quad Z_4 = Z_{g_2} Z_\varphi^4, \quad (43)$$

where μ is renormalization mass, g_1 and g_2 dimensionless coupling constants. Renormalization constants are determined from the condition of the UV finite of the following two and four points one-irreducible Green functions:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)} = \Gamma^{(2)} \delta_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)} = \Gamma_1^{(4)} T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} + \Gamma_2^{(4)} T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}, \quad (44)$$

$$\Gamma_1^{(4)} = \frac{3(T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} - T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)})}{n(n-1)} \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}, \quad \Gamma_2^{(4)} = \frac{(n+2)T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} - 3T_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}}{n(n-1)} \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}.$$

For investigation this model we use the Minimal Subtraction (MS) scheme where

the renormalization constants are represented as:

$$Z_i(g_1, g_2, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_i^{(k)}(g_1, g_2) \varepsilon^{-k}. \quad (45)$$

One of the way to calculate renormalization constants is use the R' operation. With its help, renormalization constants are expressed by the relations:

$$Z_i = 1 + KR'\bar{\Gamma}_i, \quad (46)$$

The normalized Green functions $\bar{\Gamma}_i$ are determined by the expressions:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_1 &= \frac{\partial}{\partial m^2} \Gamma^{(2)} \Big|_{p=0}, & \bar{\Gamma}_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^2 \Gamma^{(2)} \Big|_{p=0}, \\ \bar{\Gamma}_3 &= \frac{1}{g_1 \mu^\varepsilon} \Gamma_1^{(4)} \Big|_{p=0}, & \bar{\Gamma}_4 &= \frac{1}{g_2 \mu^\varepsilon} \Gamma_2^{(4)} \Big|_{p=0}. \end{aligned} \quad (47)$$

The main advantage of using relation (46) is that the counterterms of the diagrams computed for O(1)-symmetric model can be easily generalized to any theory with non-trivial symmetry due to the factorization of the tensor structures. For instance, it was made in work [30, 31, 32]. Thus, the reseach of this model is divided into two separate parts: 1.directly the account of diagrams (one can use six loop result for ψ^4 model that was obtained in the work [6]) and 2. account of their tensor structure (such an operation can be automated by programs FORM [33] and GraphState [34]).

2.3 Renormalization group analysis in the six-loop approximation

Let's consider the RG functions γ_φ , γ_{m^2} (anomalous dimensions) and β function, which could be defined as

$$\beta_i(g_1, g_2, \varepsilon) = \mu \frac{\partial g_i}{\partial \mu} \Big|_{g_{01}, g_{02}} = -g_i \left[\varepsilon - g_1 \frac{\partial Z_{g_i}^{(1)}}{\partial g_1} - g_2 \frac{\partial Z_{g_i}^{(1)}}{\partial g_2} \right], \quad i = 1, 2, \quad (48)$$

$$\gamma_j(g_1, g_2) = \mu \frac{\partial \log Z_j}{\partial \mu} \Big|_{g_{01}, g_{02}} = -g_1 \frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial g_1} - g_2 \frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial g_2}, \quad j = \varphi, m^2, \quad (49)$$

where $Z_i^{(1)}$ are coefficients at first pole by ε from (45).

One calculate this RG functions eq.(49 - 48) as series by renormalized coupling constants up to the sixth order:

$$\beta_i = g_i \left[-\varepsilon + \sum_{l=1}^6 \sum_{k=0}^l C_{\beta_i}^{k,(l-k)} g_1^k g_2^{l-k} \right], \quad i = 1, 2, \quad (50)$$

$$\gamma_j = \sum_{l=1}^6 \sum_{k=0}^l C_{\gamma_j}^{k,(l-k)} g_1^k g_2^{l-k}, \quad j = \varphi, m^2. \quad (51)$$

This expansions are found analytically and presented in our work [25]. One of the main tasks is to find critical exponents such as α , β , γ , η , ν and δ . They can be expressed due to $\gamma_{m^2}^* \equiv \gamma_{m^2}(g_1^*, g_2^*)$ and $\gamma_\varphi^* \equiv \gamma_\varphi(g_1^*, g_2^*)$ in the following way:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - \frac{D}{2 + \gamma_{m^2}^*}, & \beta &= \frac{D/2 - 1 + \gamma_\varphi^*}{2 + \gamma_{m^2}^*}, & \delta &= \frac{D + 2 - 2\gamma_\varphi^*}{D - 2 + 2\gamma_\varphi^*}, \\ \eta &= 2\gamma_\varphi^*, & \nu &= \frac{1}{2 + \gamma_{m^2}^*}, & \gamma &= \frac{2 - 2\gamma_\varphi^*}{2 + \gamma_{m^2}^*}. \end{aligned} \quad (52)$$

As one can see this critical exponents are connected to each other. Only two of them are independent. In this work the critical exponents η and ν^{-1} are objects of our interest.

Let's return to the study of the RG function. Zeroes of β functions

$$\beta_1(g_1^*, g_2^*, \varepsilon) = 0, \quad \beta_2(g_1^*, g_2^*, \varepsilon) = 0 \quad (53)$$

define fixed points (g_1^*, g_2^*) , which control the critical regimes of the system. The analysis of eqs.(53) shows that there are four fixed points: Gaussian $(0, 0)$, Ising $(0, g_I^*)$, Heisenberg $(g_H^*, 0)$ and cubic (g_1^*, g_2^*) . One of the most important question is the determination of the stability of these fixed points. For that purpose one needs to analyze the eigenvalues ω_1, ω_2 of the following matrix:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_1(g_1, g_2)}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_1(g_1, g_2)}{\partial g_2} \\ \frac{\partial \beta_2(g_1, g_2)}{\partial g_1} & \frac{\partial \beta_2(g_1, g_2)}{\partial g_2} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

The eigenvalues are taken at $g_1 = g_1^*, g_2 = g_2^*$. The case when both of them are

positive (the fixed point is stable), describes critical regime which takes place in real ferromagnets.

First two points are always unstable for arbitrary values of order parameter dimensionality n . However the the last two of them , which corresponding to the Heisenberg and cubic modes, compete depending on n . For $n < n_c$, where n_c is marginal order parameter dimensionality, the Heisenberg critical regime is stable while for $n > n_c$ – the cubic case. Fig. 2 illustrates the situation.

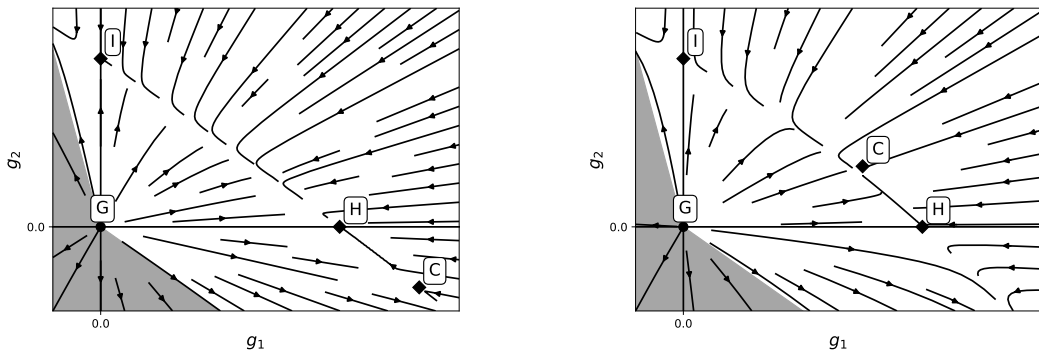


Figure 2: RG flows of renormalized coupling constants. The left picture corresponds to $n < n_c$, the right one – to $n > n_c$. Symbols in boxes mark Gaussian, Ising, Heisenberg and cubic fixed points.

So, the true regime of the critical behavior in real cubic ferromagnets is determined by the value of n_c .

First of all, we need to find fixed points as ε -expansion in the six loop approximation. We are interested in the non-trivial cubic fixed point. One can solving the eq.(53) using ε iterations and obtain:

$$g_1^* = \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon^2 \left(-\frac{106}{27n^3} + \frac{125}{27n^2} - \frac{19}{27n} \right) + \sum_{k=3}^6 C_{g_1}^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^7), \quad (55)$$

$$g_2^* = \frac{\varepsilon(n-4)}{3n} + \varepsilon^2 \left(\frac{424}{81n^3} - \frac{178}{27n^2} + \frac{31}{27n} + \frac{17}{81} \right) + \sum_{k=3}^6 C_{g_2}^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^7), \quad (56)$$

where higher-order coefficients $C_{g_1}^{(k)}$, $C_{g_2}^{(k)}$ are presented in [25]. We are interested in the physically realizable case, when $n = 3$. Below the analytical and numerical

value of a fixed point in this case are presented, as a series by ε .

$$\begin{aligned}
g_1^* &= \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{98}{729}\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left[-\frac{28\zeta(3)}{729} - \frac{61975}{708588} \right] \\
&+ \varepsilon^4 \left[\frac{30308\zeta(3)}{177147} + \frac{2\zeta(4)}{729} + \frac{200\zeta(5)}{2187} - \frac{48973747}{344373768} \right] + \\
&+ \varepsilon^5 \left[+\frac{54608659\zeta(3)}{114791256} + \frac{101851\zeta(4)}{708588} - \frac{325\zeta(6)}{39366} - \frac{1519\zeta(7)}{6561} - \right. \\
&\quad \left. -\frac{5375\zeta(3)^2}{59049} - \frac{230560093043}{1338925209984} \right] + \\
&+ \varepsilon^6 \left[\frac{24368284757\zeta(3)}{27894275208} + \frac{597666691\zeta(4)}{1721868840} - \frac{20057900878765}{108452942008704} - \right. \\
&\quad -\frac{1112573461\zeta(5)}{645700815} - \frac{7725253\zeta(6)}{9565938} + \frac{16586384\zeta(7)}{7971615} + \frac{176698\zeta(8)}{13286025} + \\
&\quad +\frac{2911136\zeta(9)}{4782969} - \frac{101024906\zeta(3)^2}{215233605} + \frac{14080\zeta(3)^3}{531441} - \frac{28412\zeta(4)\zeta(3)}{177147} + \\
&\quad \left. +\frac{115696\zeta(5)\zeta(3)}{177147} + \frac{90592\zeta(3,5)}{4428675} \right] + O(\varepsilon^7) = \\
&= 0.33333\varepsilon + 0.13443\varepsilon^2 - 0.13363\varepsilon^3 + 0.16124\varepsilon^4 - 0.43104\varepsilon^5 + 1.3278\varepsilon^6,
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
g_2^* &= -\frac{1}{9}\varepsilon + \frac{118}{2187}\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left[\frac{435439}{2125764} - \frac{260\zeta(3)}{2187} \right] + \\
&+ \varepsilon^4 \left[-\frac{231404\zeta(3)}{531441} - \frac{226\zeta(4)}{2187} + \frac{920\zeta(5)}{2187} + \frac{257911843}{1033121304} \right] + \\
&+ \varepsilon^5 \left[-\frac{291502339\zeta(3)}{344373768} - \frac{692465\zeta(4)}{2125764} + \frac{760450\zeta(5)}{531441} + \frac{22925\zeta(6)}{39366} - \right. \\
&\quad \left. -\frac{31115\zeta(7)}{19683} + \frac{52853\zeta(3)^2}{177147} + \frac{1077861709331}{4016775629952} \right] + \\
&+ \varepsilon^6 \left[-\frac{547951382833\zeta(3)}{418414128120} - \frac{631200319\zeta(4)}{1033121304} + \frac{1732037966\zeta(5)}{645700815} + \right. \\
&\quad +\frac{17543357\zeta(6)}{9565938} - \frac{120541604\zeta(7)}{23914845} - \frac{209656711\zeta(8)}{39858075} + \frac{86923264\zeta(9)}{14348907} + \\
&\quad +\frac{880268036\zeta(3)^2}{645700815} + \frac{436673550255737}{1626794130130560} - \frac{708704\zeta(5)\zeta(3)}{1594323} + \\
&\quad \left. +\frac{12497456\zeta(3,5)}{13286025} + \frac{490496\zeta(3)^3}{1594323} + \frac{1185542\zeta(4)\zeta(3)}{2657205} \right] + O(\varepsilon^7) = \\
&= -0.1111\varepsilon + 0.05396\varepsilon^2 + 0.06193\varepsilon^3 + 0.05059\varepsilon^4 - 0.1884\varepsilon^5 + 0.9522\varepsilon^6,
\end{aligned} \tag{58}$$

where

$$\zeta(3, 5) = \sum_{0 < n < m} \frac{1}{n^3 m^5} \simeq 0.037707672985. \quad (59)$$

Consider the eigenvalues of matrix (54). We are interested only in ω_2 , which determines the value of the critical dimension n_c . When n goes to n_c the cubic fixed point tends to Heisenberg fixed point (this means that ω_2 goes to zero). Identifying this behavior of ω_2 by the lowest order of perturbation theory, we obtain the following ε -expansion:

$$\omega_2 = \varepsilon \frac{n-4}{3n} + \varepsilon^2 \frac{(n-1)(-848 + 660n + 72n^2 - 19n^3)}{81n^3(n+2)} + \sum_{k=3}^6 C_{\omega_2}^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^7), \quad (60)$$

where coefficients $C_{\omega_2}^{(k)}$ are presented in [25] (the same form is suitable for ω_1 , coefficients $C_{\omega_1}^{(k)}$ are presented in [25]). As we said above the critical value of $n = n_c$ is determined by the condition:

$$\omega_2(n_c, \varepsilon) = 0. \quad (61)$$

Solving it iteratively by ε we receive:

$$\begin{aligned} n_c = & 4 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \left[\frac{5\zeta(3)}{2} - \frac{5}{12} \right] + \varepsilon^3 \left[\frac{15\zeta(4)}{8} + \frac{5\zeta(3)}{8} - \frac{25\zeta(5)}{3} - \frac{1}{72} \right] + \quad (62) \\ & + \varepsilon^4 \left[\frac{93\zeta(3)}{128} + \frac{15\zeta(4)}{32} - \frac{3155\zeta(5)}{1728} - \frac{125\zeta(6)}{12} + \frac{11515\zeta(7)}{384} - \frac{229\zeta(3)^2}{144} - \frac{1}{384} \right] + \\ & + \varepsilon^5 \left[\frac{1709\zeta(3)}{6912} - \frac{2657\zeta(3,5)}{160} + \frac{279\zeta(4)}{512} + \frac{4879\zeta(5)}{20736} - \frac{21175\zeta(6)}{6912} + \right. \\ & + \frac{182663\zeta(7)}{41472} + \frac{237079\zeta(8)}{2560} - \frac{2554607\zeta(9)}{23328} - \frac{21685\zeta(3)^2}{3456} - \frac{1793\zeta(3)^3}{324} \\ & \left. - \frac{229\zeta(4)\zeta(3)}{96} - \frac{3455\zeta(5)\zeta(3)}{216} + \frac{97}{10368} \right] + O(\varepsilon^6) = \\ = & 4 - 2\varepsilon + 2.588476\varepsilon^2 - 5.874312\varepsilon^3 + 16.82704\varepsilon^4 - 56.62195\varepsilon^5. \end{aligned}$$

2.4 Critical exponents η and ν

As it was mentioned above, we are interested in six-loop ε -expansions only for critical exponents η and ν^{-1} from relations (52). The ε -expansion for this value can be obtain from the eq.(51) and ε -expansions for the cubic fixed point. Below ε -expansions for the critical exponents are presented for physically interesting case $n = 3$ (for arbitrary n see [25]):

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{5}{243}\varepsilon^2 + \frac{4433}{236196}\varepsilon^3 + \varepsilon^4 \left[\frac{2102395}{229582512} - \frac{856}{59049}\zeta(3) \right] + \\
&+ \varepsilon^5 \left[-\frac{211933\zeta(3)}{19131876} - \frac{214\zeta(4)}{19683} + \frac{880\zeta(5)}{19683} + \frac{302817233}{223154201664} \right] + \\
&+ \varepsilon^6 \left[-\frac{123938827\zeta(3)}{55788550416} - \frac{211933\zeta(4)}{25509168} + \frac{80933\zeta(5)}{3188646} + \frac{1100\zeta(6)}{19683} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{80458\zeta(7)}{531441} + \frac{169100\zeta(3)^2}{14348907} - \frac{120071712419}{72301961339136} \right] + O(\varepsilon^7) = \\
&= 0.020576\varepsilon^2 + 0.018768\varepsilon^3 - 0.0082681\varepsilon^4 + 0.022634\varepsilon^5 - 0.065781\varepsilon^6,
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
\nu^{-1} &= 2 - \frac{4}{9}\varepsilon - \frac{383}{2187}\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left[\frac{400}{2187}\zeta(3) - \frac{181229}{2125764} \right] + \\
&+ \varepsilon^4 \left[\frac{52279\zeta(3)}{531441} + \frac{100\zeta(4)}{729} - \frac{3760\zeta(5)}{6561} - \frac{45792931}{2066242608} \right] + \\
&+ \varepsilon^5 \left[\frac{6730303\zeta(3)}{172186884} + \frac{52279\zeta(4)}{708588} - \frac{357650\zeta(5)}{1594323} - \frac{4700\zeta(6)}{6561} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{38710\zeta(7)}{19683} - \frac{20032\zeta(3)^2}{177147} + \frac{18998350495}{2008387814976} \right] + \\
&\varepsilon^6 \left[-\frac{12508116067\zeta(3)}{167365651248} + \frac{6730303\zeta(4)}{229582512} + \frac{21979362510179}{650717652052224} + \right. \\
&\quad + \frac{137705935\zeta(5)}{1549681956} - \frac{1076375\zeta(6)}{3188646} + \frac{10154279\zeta(7)}{19131876} + \frac{94237301\zeta(8)}{15943230} - \\
&\quad - \frac{101478944\zeta(9)}{14348907} - \frac{44681927\zeta(3)^2}{129140163} - \frac{560896\zeta(3)^3}{1594323} - \frac{10016\zeta(4)\zeta(3)}{59049} - \\
&\quad \left. - \frac{1565872\zeta(5)\zeta(3)}{1594323} - \frac{2714888\zeta(3,5)}{2657205} \right] + O(\varepsilon^7) = \\
&= 2 - 0.4444\varepsilon - 0.17513\varepsilon^2 + 0.13460\varepsilon^3 - 0.34969\varepsilon^4 + 0.99461\varepsilon^5 - 3.48637\varepsilon^6.
\end{aligned} \tag{64}$$

Moreover, it is necessary to find the critical exponent γ , because it can be measured in experiments and extracted from lattice calculations. For $n = 3$ this expansion

can be written in a following form (for arbitrary n – in [25]):

$$\begin{aligned}
\gamma = & 1 + \varepsilon \frac{2}{9} + \varepsilon^2 \frac{277}{2187} + \varepsilon^3 \left[-\frac{200\zeta(3)}{2187} + \frac{85931}{1062882} \right] + \\
& + \varepsilon^4 \left[-\frac{87775\zeta(3)}{1062882} - \frac{50\zeta(4)}{729} + \frac{1880\zeta(5)}{6561} + \frac{23261567}{516560652} \right] + \\
& + \varepsilon^5 \left[-\frac{10826597\zeta(3)}{172186884} - \frac{87775\zeta(4)}{1417176} + \frac{346225\zeta(5)}{1594323} + \frac{2350\zeta(6)}{6561} - \right. \\
& \left. - \frac{19355\zeta(7)}{19683} + \frac{10016\zeta(3)^2}{177147} + \frac{2452679419}{125524238436} \right] + \\
& + \varepsilon^6 \left[-\frac{384088139\zeta(3)}{83682825624} - \frac{10826597\zeta(4)}{229582512} + \frac{782936\zeta(3)\zeta(5)}{1594323} - \frac{94237301\zeta(8)}{31886460} + \right. \\
& + \frac{240030707\zeta(5)}{3099363912} + \frac{1913375\zeta(6)}{6377292} - \frac{23980511\zeta(7)}{38263752} + \frac{280448\zeta(3)^3}{1594323} + \\
& + \frac{50739472\zeta(9)}{14348907} + \frac{51810395\zeta(3)^2}{258280326} + \frac{5008\zeta(3)\zeta(4)}{59049} + \\
& \left. + \frac{1357444\zeta(3,5)}{2657205} - \frac{323266891181}{81339706506528} \right] + O(\varepsilon^7) = \\
= & 1 + 0.2222\varepsilon + 0.12666\varepsilon^2 - 0.029080\varepsilon^3 + 0.16865\varepsilon^4 - 0.44336\varepsilon^5 + 1.6059\varepsilon^6 .
\end{aligned} \tag{65}$$

For this model, there are a number of tests for our final ε -expansion:

- Comparison with the known five-loop approximation [35]
- For the case of Ising ($g_1 \rightarrow 0$) and Heisenberg ($g_2 \rightarrow 0$) fixed points, the resulting ε -expansion can be compared with their counterparts for the $O(n)$ symmetric model [6] for $n = 1$ and arbitrary n , respectively.
- The ϕ^4 model with the cubic symmetry has nontrivial symmetry for $n = 2$, which in terms of the field and charge can be written as following:

$$\varphi_1 \rightarrow \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 \rightarrow \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}}, \tag{66}$$

$$g_1 \rightarrow g_1 + \frac{3}{2}g_2, \quad g_2 \rightarrow -g_2. \tag{67}$$

Using such a substitution, the structure of the action will not change [36]. The expansions (50) and (51) satisfy this symmetry requirement. The cubic fixed point and the Ising one are transformed into each other.

As a result, the critical exponents η , γ , ν and marginal order parameter dimension-

ality n_c were obtained as ε -expansion up to 6 orders. Such asymptotic series can be resummed, which will be discussed in chapter 4.

Chapter 3: Dynamic case

This chapter is devoted to the consideration of such statistical models of critical dynamics as the model A and the model E.

3.1 Dynamical model A

This chapter begins with a study of model A. It describes the critical slowdown effect for systems with a non-conservative order parameter. Model A is the simplest dynamic model. Therefore, it is most convenient to consider the adaptation of the technical method from static on its.

Despite the relative simplicity of this model, for a long time it was known only the second order of perturbation theory [19]. Then in [18] a third-order result for ε was presented, but it turned out to be erroneous due to a technical error. Also, a three-loop correct calculation was demonstrated in [3]. The fourth order calculations were impossible due to unavailability of sufficient computational resources. But after nearly a quarter of a century, a four-loop numerical result for the critical exponent z was presented in [20].

Currently, a new motivation has emerged in the study of this dynamic model. As it turned out, it describes not only the critical behavior of ferromagnets, for which it has traditionally been used, but also phase transition in multiferroics. In the article [4] the dynamics in the multiferroic chiral antiferromagnet $MnWO_4$ was studied. Also at the article [37] the transition which correspond to the change in the ordering state in the sublattice $Au - Ag$ into $AuAgZn_2$ was studied. Since the development of ordering does not require the transfer of atoms over long distances, this alloy can be considered as a model of transition with a “non-conservation order parameter”, i.e. as a dynamic model A. Also, in the work [38], a critical dynamic exponent $z = 2.17$ of a scalar one-component two-dimensional model ϕ^4 was obtained using computer simulation. As can be seen, the theoretical calculation of the critical exponent z with high accuracy is an urgent task today.

3.1.1 Renormalization of the model

The unrenormalized action of the model A of critical dynamics is determined by the set of fields ϕ_0 of two non-renormalized $O(n)$ -symmetric n component fields $\phi_0 \equiv \{\psi_0, \psi'_0\}$ and can be written in form [39]:

$$\begin{aligned} S_0(\phi_0) &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 [-\partial_t \psi_0 + \lambda_0 \delta S_0^{st} / \delta \psi_0] = \\ &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 [-\partial_t \psi_0 + \lambda_0 (\partial^2 \psi_0 - \tau_0 \psi_0 - \frac{1}{3!} g_0 \psi_0^3)], \end{aligned} \quad (68)$$

where

$$S_0^{st}(\phi_0) = -(\partial \psi_0)^2 / 2 - \tau_0 \psi_0^2 / 2 - \frac{1}{4!} g_0 \psi_0^4. \quad (69)$$

Model A is multiplicatively renormalizable, so after renormalization of parameters and fields the renormalized action S_R can be represented as the sum $S_R = S_B + \Delta S$ of basic action S_B and counterterms ΔS [39]:

$$S_B = \lambda \psi' \psi' + \psi' [-\partial_t \psi + \lambda (\partial^2 \psi - \tau \psi - \frac{1}{3!} \mu^\varepsilon g \psi^3)], \quad (70)$$

$$S_R = Z_1 \lambda \psi' \psi' + \psi' [-Z_2 \partial_t \psi + \lambda (Z_3 \partial^2 \psi - Z_4 \tau \psi - \frac{1}{3!} Z_5 \mu^\varepsilon g \psi^3)], \quad (71)$$

where

$$\lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g, \quad \psi_0 = \psi Z_\psi, \quad \psi'_0 = \psi' Z_{\psi'}, \quad (72)$$

and

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\lambda Z_{\psi'}^2, \quad Z_2 = Z_{\psi'} Z_\psi, \quad Z_3 = Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\psi, \\ Z_4 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\tau Z_\psi, \quad Z_5 = Z_{\psi'} Z_\lambda Z_g Z_\psi^3. \end{aligned} \quad (73)$$

Moreover, the fact that follows from the multiplicative renormalizability of the models (107), (69) is that the renormalization constants Z_ψ, Z_τ, Z_g in this model coincide with the static ones (i.e. of the model eq.(69))

$$Z_\psi = (Z_\psi)_{st}, \quad Z_\tau = (Z_\tau)_{st}, \quad Z_g = (Z_g)_{st}, \quad (74)$$

and the ratio $Z_{\psi'} Z_\lambda = Z_\psi$ is satisfied [39]. This means that the renormalization constants Z_3, Z_4, Z_5 are purely equivalent to the static one and the following relation

is fulfilled

$$Z_1 = Z_2. \quad (75)$$

Thereby, the only new renormalization constant is Z_λ , which can be represented in a form:

$$Z_\lambda = Z_1^{-1} Z_\psi^2 = Z_2^{-1} Z_\psi^2. \quad (76)$$

As one can see from the eq.(76) the result for Z_λ can be receive from Z_1 or Z_2 . We calculated the constant Z_1 , which is determined by the diagrams of the one-irreducible Green function $\Gamma_{\psi'\psi'} = \langle \psi'\psi' \rangle_{1-irr} / (2\lambda)$ on the zero external frequency ω and the momentum p .

Then use the coupling constant for constructing a perturbation theory

$$u = \frac{S_d}{(2\pi)^d} g, \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad (77)$$

where S_d is the area of the d -dimensional unit sphere. As we mentioned in chapter 1 1, the expansion for the renormalized one-irreductable Green function has the form:

$$\Gamma_{\psi'\psi'}^R |_{\omega=0, p=0} = Z_1 (1 + u^2 Z_g^2 (\mu^2/\tau)^\varepsilon Z_\tau^{-\varepsilon} A^{(2)} + u^3 Z_g^3 (\mu^2/\tau)^{3\varepsilon/2} Z_\tau^{-3\varepsilon/2} A^{(3)} + \dots), \quad (78)$$

where $A^{(i)}$ is determined by the sum of the corresponding i -loop diagrams.

As in the case of the ϕ^4 model with the cubic symmetry and for dynamic model E, the minimal subtraction scheme (MS) is used for renormalization of the model (71), in which the counterterms contain the only pole by ε . In particular, the required renormalization constant Z_1 can be presented as

$$Z_1 = 1 + \sum_{n \geq 1} Z_1^{(n)}(u) \varepsilon^{-n}, \quad (79)$$

where the coefficients $Z_1^{(n)}(u)$ could be found in the form of series by charge u from the condition of the absence of poles by ε in a function (78). It should be noticed, that the renormalization constants Z_g and Z_τ in (78) can be taken from the static case.

3.1.2 Diagram technique and time version

Dynamic model A contains two types of propagators and one type of vertices, which in the diagram notation has a form:

$$\langle \psi\psi \rangle = \bullet \text{---} \bullet \quad \langle \psi\psi' \rangle = \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \quad \psi'\psi\psi\psi = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$$

Propagators in frequency–momentum representation are determined by the expressions

$$\langle \psi\psi \rangle = \frac{-2\lambda}{|-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)|^2}, \quad (80)$$

$$\langle \psi\psi' \rangle = \frac{1}{-i\omega + \lambda(k^2 + \tau)}, \quad (81)$$

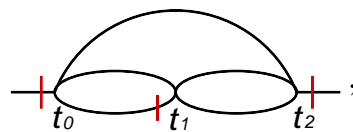
and in time–momentum representation they have a form:

$$\langle \psi(t_1)\psi(t_2) \rangle = (k^2 + \tau)^{-1} \exp[-\lambda(k^2 + \tau)|t_1 - t_2|], \quad (82)$$

$$\langle \psi(t_1)\psi'(t_2) \rangle = \Theta(t_1 - t_2) \exp[-\lambda(k^2 + \tau)(t_1 - t_2)], \quad (83)$$

Propagator $\langle \psi'(t_1)\psi'(t_2) \rangle$ is equal to zero. Each vertex is accompanied by a multiplier g .

Using discussed propagators one can construct all necessary graphs for calculation Γ_1 according to standard rules. The main difference from the static case is additional integration by time (or frequency). For using the same calculation technique like in a static model (in particular, the Sector Decomposition method), it is necessary to take the time variable intergation in a diagram. This can be done due to the simple exponential dependence from time in the propagators (82). The result of integration can be represented graphically, which allows one to automate the calculation process as much as possible. We illustrate this using three–loop diagram

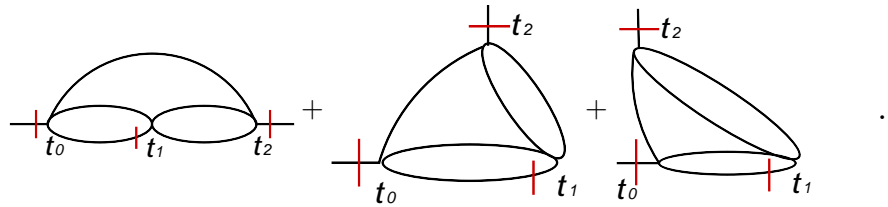


which we consider in the (k, t) representation at the zero external frequency. It is convenient to make integration using the introduction the concept of “time versions”. Due to the translational invariance of the propagators eq.(82) over time, the time

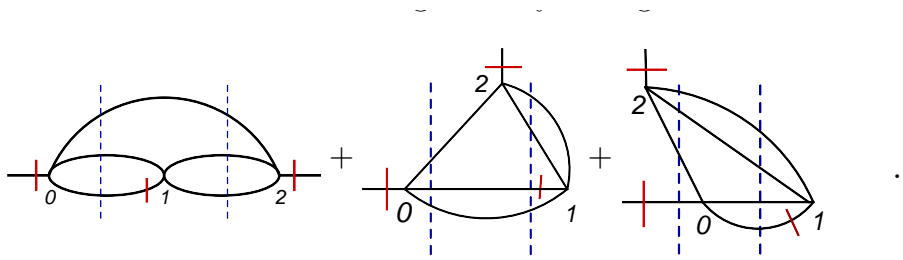
at one of the vertices (for example, t_0) can be considered to be fixed. The area of integration over the remaining times t_1 and t_2 is limited by the presence of the function $\Theta(t_0 - t_1)$ in the propagator $\langle \psi(t_0)\psi'(t_1) \rangle$. This area can be divided into the following regions (time versions)

$$(t_0 > t_1 > t_2) \quad + \quad (t_0 > t_2 > t_1) \quad + \quad (t_2 > t_0 > t_1).$$

In accordance with these inequalities, the relative position of the vertices in the diagram (84) (in decreasing order from left to right) was fixed. We represent this diagram as a sum of three contributions:

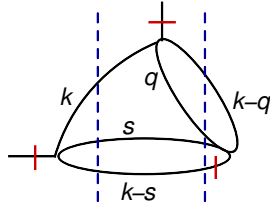


Integration over relative time in each of the time intervals is easily performed. The result can be represented in the form of diagrams containing only integration over momentum:



The lines without any hatch with a momentum k correspond to the “static propagator” $1/E_k$, where $E_k = (k^2 + \tau)$. The lines with a hatch correspond to 1. Dashed lines correspond to a factor in the denominator, which is equal to the sum of the “energies” E_k lines that cross dashed lines. In particular, for the second time version

we have



$$= \iint d\mathbf{k}d\mathbf{q}ds \frac{1}{(s^2 + \tau)(k^2 + \tau)(q^2 + \tau)((\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + \tau)} \cdot \frac{1}{(k^2 + s^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{s})^2 + 3\tau)(q^2 + s^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{s})^2 + 4\tau)}.$$

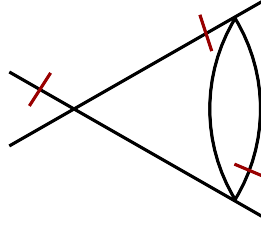
That example shows us one of the problems of calculation in the critical dynamic models compared with static – significantly larger number of integrals. All static diagram with specific topology gives us a set of time version in dynamic. Which increases with the order of perturbation theory, and that fact leads to a significant complication of calculations. It is worth noting, that extra part in the denominator in such integral has a different form than the static part, which makes it difficult to use the same approach as static methods of calculation by dividing into sectors.

It is the main reason why dynamic models are calculated not higher than third order perturbation theory (except model A), while in static model one advanced up to 7 loops ([6]–6loops, [7]–7loops). All these problems are solved by our scientific group. The problem with a nontrivial denominator was solved by adaption of Sector Decomposition method to the diagrams of critical dynamic. And the problem with the growing number of time versions was largely overcome due to the developed Diagrams Reduction Scheme.

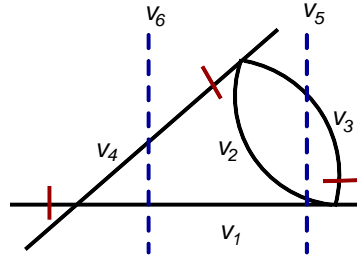
3.1.3 Feynman representation for the dynamic diagrams

The calculation by Sector Decomposition method involves using the Feynman representation for diagrams. As already noted, integrands for dynamic diagrams have a more complex structure than static ones. This is due to the fact that we do not consider the diagrams by themselves, but their time versions, which gives an additional contributions to the denominator from the dotted lines.

For example, consider 2 loops diagram from the dynamic model A:



This graph has only one time version. The result of integration over time of the diagram has the form:



To distinguish the static Feynman representation from the dynamic, Feynman parameters are denoted by the letters v_i on the dynamic diagram. They are mapped to each line without a hatch and to each dashed line (in this case lines with hatch do not depend on momentum, they are equal to one). In the figure, the parameters v_3 and v_4 were formally entered for the convenience of comparison with the static case, but they will be assumed to be zero in the final expressions.

Taking into account the Feynman notation for the static diagram with the same topology as considered dynamic, one can easily get a Feynman representation for the dynamic diagram using the following replacement of static parameters u_i for dynamic v_j :

$$u_i = v_i + \sum v_j. \quad (84)$$

Here, the summation is carried out over all parameters of v_j of the dropped lines that intersect lines with the same momentum as the line with the parameter v_i .

Considered dynamic diagram has the same topology as the diagram presented on Fig.1. And according to the set rules, the replacements are:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + v_4, & u_2 &= v_2 + v_3, \\ u_3 &= v_5, & u_4 &= v_6. \end{aligned} \quad (85)$$

Substituting (85) into (27) and (28), one can get the following Feynman represen-

tation for the dynamic diagram:

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(2 - \varepsilon/2)^2}{2^2} \int_0^1 dv_{1,2,5,6} \frac{\delta(1 - v_1 - v_2 - 3v_5 - 2v_6)}{(\det v)^{2-\varepsilon/2}}, \\ \det v &= v_1v_2 + 2v_1v_5 + v_2v_5 + v_5^2 + v_1v_6 + 2v_2v_6 + 4v_5v_6 + v_6^2. \end{aligned} \quad (86)$$

For integral in such form, one can apply the Sector Decomposition method for following calculation. A more complex form of integrand expressions in the Feynman representation for dynamic diagrams creates additional problems in the construction of sectors. We have shown that these sectors can be built from static ones according to certain rules, and the total number of sectors increases. Thus, the amount of computation of dynamic diagrams is growing not only at the stage of formation of time versions, but also at the stage of building sectors in the SD method for each time version.

3.1.4 Reduction of the diagrams

The presence of time in models of critical dynamics complicates the calculation in comparison with the statics. Integration over time entails the appearance of time versions (which were discussed in the previous section 3.1.2) and also complicates the integrands. In a number of papers [40, 41, 42, 43] a grouping of diagrams was used to simplify the answer, but a general recipe for such a procedure was not formulated. The answer to that problem was received in our work [26].

Description of procedure

In this thesis we propose a procedure, based on a combination of diagrams according to certain rules, which leads to the construction of the modified diagrams, the number of which is much smaller than the original. This technique allows one to automate the calculations and eventually move to higher orders of perturbation theory for dynamic models.

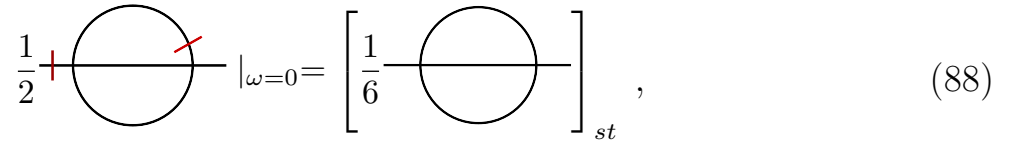
It is worth noting that this possibility of reducing the diagrams is already visible from relations (74). In fact, these equalities (74) are a consequence of a more global statement: 1-irreducible static functions $\langle \psi\psi \rangle_{1-irr|st}$, $\langle \psi\psi\psi\psi \rangle_{1-irr|st}$ and dynamic

functions $\langle \psi' \psi \rangle_{1-irr}$, $\langle \psi' \psi \psi \psi \rangle_{1-irr}$ at zero frequency coincide respectively:

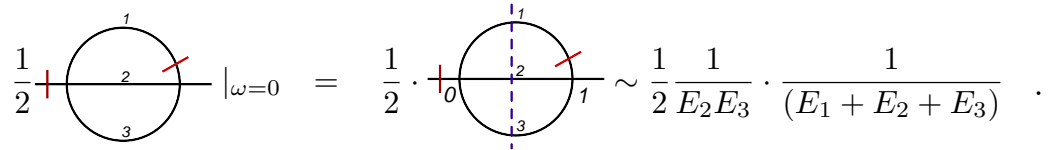
$$\langle \psi' \psi \rangle_{1-irr}|_{\omega=0} = \langle \psi \psi \rangle_{1-irr}|_{st}, \quad \langle \psi' \psi \psi \psi \rangle_{1-irr}|_{\omega=0} = \langle \psi \psi \psi \psi \rangle_{1-irr}|_{st}. \quad (87)$$

It means that the summation result of dynamical diagrams must be equal to the sum of the static diagrams for each pair of functions. Consider the technical realization of such a procedure.

Let us prove the equality:

$$\frac{1}{2} \left[\text{Diagram} \right]_{\omega=0} = \left[\frac{1}{6} \text{Diagram} \right]_{st}, \quad (88)$$


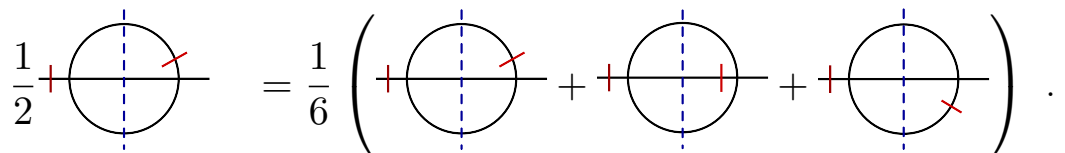
where $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{6}$ are symmetry coefficients of diagrams. Performing integration over time, the left-hand side could be written as

$$\frac{1}{2} \left[\text{Diagram} \right]_{\omega=0} = \frac{1}{2} \cdot \left[\text{Diagram} \right]_{0} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{E_2 E_3} \cdot \frac{1}{(E_1 + E_2 + E_3)}.$$


Here the numbers denote the sequence numbers of the integration momentum, and the integrand stands on the right-hand side of the formula. Symmetrization of this expression with respect to the momenta of integration gives:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{E_2 E_3} \cdot \frac{1}{(E_1 + E_2 + E_3)} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{6} \left(\frac{1}{E_2 E_3} + \frac{1}{E_1 E_2} + \frac{1}{E_1 E_3} \right) \cdot \frac{1}{(E_1 + E_2 + E_3)} = \frac{1}{6} \frac{1}{E_1 E_2 E_3}. \end{aligned} \quad (89)$$

The resulting expression coincides with the integrand of the right side (88). In the diagram language, the symmetrization procedure can be written as:

$$\frac{1}{2} \left[\text{Diagram} \right] = \frac{1}{6} \left(\left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] + \left[\text{Diagram} \right] \right).$$


The general form of symmetrization for arbitrary diagrams can be written in the form of a symbolic equation:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} . \quad (90)$$

Moreover the same procedure can be applied to another number of output lines:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} . \quad (91)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \\ | \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \\ | \\ \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} . \quad (92)$$

Using this new rule, let's consider a more complicated example: the sum of three three-loop diagrams:

$$J = \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} |_{\omega=0} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} |_{\omega=0} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} |_{\omega=0} . \quad (93)$$

Similar to the previous “two-loop” example, using time versions and performing symmetrization:

$$J = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \int_1^2 \int_0^1 + \int_0^2 \int_1^2 \int_0^1 + \int_0^2 \int_1^2 \int_0^1 \right) + \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \int_1^2 \int_0^1 + \int_0^2 \int_1^2 \int_0^1 \right) . \quad (94)$$

The first diagram in (93) has one time version and “corresponds” to two first graphs in eq.(94); the second diagram in (93) has two time versions and “corresponds” to diagrams 3 and 4 in (94); the third diagram has one time version and “corresponds” to the fifth contribution in (94). Using relations-simplification (90)-(92) one can

rewrite (94) as

$$J = \frac{1}{2} \left[\text{Diagram 1} \right] + \frac{1}{4} \left[\text{Diagram 2} \right] = \frac{1}{4} \left[\text{Diagram 3} \right].$$

For the first brackets in eq.(94) we used the relation (90), for the second one – eq.(92) and for the last transition – eq.(90). Therefore, the result of the summation of the dynamic diagrams (93) turned out to be a static diagram.

The considered two examples show that the number of original dynamical integrands can be reduced using the rules (90)-(92). The same procedure can be performed in any order of perturbation theory.

However, we also interested in one-irreducible Green function $\Gamma_{\psi'\psi'}$. For this case the complete reduction to static is impossible. But, eqs.(90)-(92) are still valid, which can significantly reduce the number of contributions and simplify their form. Consider the sum of two time versions, which are the part of the dynamic diagram $\psi'\psi'$:

$$J_1 = \left[\text{Diagram 4} \right] + \left[\text{Diagram 5} \right].$$

It is worth to noticed, that the values of the diagrams do not depend on the numbering of the vertices. So making symmetrization and using the relation (92) one can get:

$$J_1 = \frac{1}{2} \left(\left[\text{Diagram 6} \right] + \left[\text{Diagram 7} \right] + \left[\text{Diagram 8} \right] + \left[\text{Diagram 9} \right] \right) = \frac{1}{2} \left[\text{Diagram 10} \right].$$

As a result, one can see that the reduction is possible even in the more complicated case.

So consider the more general case and describe all steps in obtaining the result of the reduction:

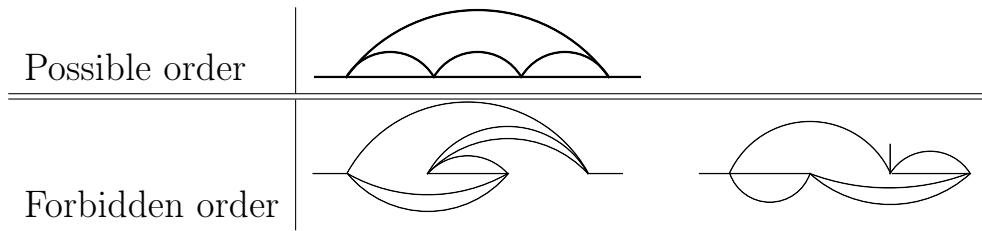
- *Step 0.*

Examine the following two diagrams, containing in total ten time versions:



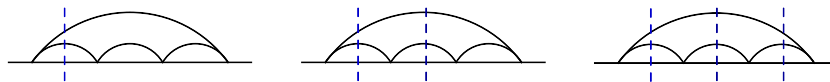
- *Step I.*

Draw the diagrams of the static theory so that vertices with external legs are extreme left and right, while other (internal) vertices ordered in all possible ways. At the same time, the nearest vertices should be connected with each other.



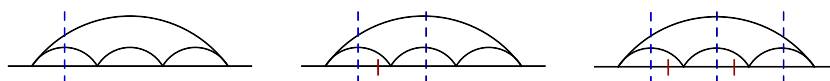
- *Step II.*

On basis of the diagrams from Step I, draw a set of diagrams with dashed lines starting from the left vertex. The number of dashed lines run through all integer values from the interval $[1, \text{the number of vertices} - 1]$.



- *Step III.*

For all lines coming from the left to the vertex located between the two sections, we arrange the hatches in all possible ways. If there are two similar lines, on which it is possible to arrange hatches, then we put only one, the remaining variant is taken into account by the symmetry coefficient.

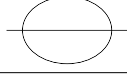




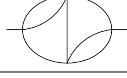
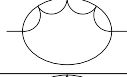

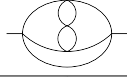

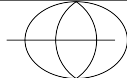
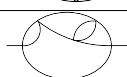



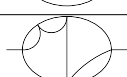
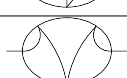


- Result: The sum of ten “original” time versions of that two considered dynamical diagrams has been reduced to the sum of three effective diagrams (95).

3.1.5 The result of diagram reduction for the model A

In the Tab.1 we illustrate the difference between the initial number in integrate (column VI) and the number of expressions after diagram reduction method (column VII). Reducing the number of diagrams is significant for the 4-loop approximation - from 66 to 17. In the next, five-loops approximation, it is even more noticeable - from 1025 to 201. This significantly reduced the amount of calculations we performed in the fifth order of perturbation theory.

Table 1: Comparison of the number of effective integrand expressions before (column VI) and after (column VII) reduction of diagrams for all topologies.

I	II	III Nickel index	IV a(n)	V number of dyn.diag.	VI number of time vers.	VII number of red.diag.
2 loop						
1		e111 e	$(2+n)/3$	1 1	2 2	1 1
3 loop						
1		e112 22 e	$(8+n)(2+n)/27$	1 1	2 2	2 2
4 loop						
1		e112 33 e33	$(n^2+6n+20)(2+n)/81$	2	10	3
2		e112 e3 333	$(2+n)^2/9$	2	10	3
3		e123 e23 33	$(22+5n)(2+n)/81$	3	18	4
4		e112 23 33 e	$(22+5n)(2+n)/81$	5 12	28 66	7 17
5 loop						
1		e112 33 e44 44	$(n^3+8n^2+24n+48)(2+n)/243$	2	15	4
2		e112 33 444 e4	$(8+n)(2+n)^2/81$	3	45	9
3		e123 e23 44 44	$(2+n)(3n^2+22n+56)/243$	3	30	8
4		e112 e3 344 44	$(8+n)(2+n)^2/81$	4	30	8
5		e123 234 34 4 e	$(22+5n)(2+n)/81$	6	90	10
6		e112 34 e34 44	$(2+n)(3n^2+22n+56)/243$	9	90	17
7		e123 e24 34 44	$(n^2+20n+60)(2+n)/243$	12	120	23
8		e112 34 334 4 e	$(n^2+20n+60)(2+n)/243$	21	270	51
9		e112 23 e4 444	$(8+n)(2+n)^2/81$	7	65	19
10		e112 23 44 e44	$(2+n)(3n^2+22n+56)/243$	13	150	29
11		e112 23 34 44 e	$(n^2+20n+60)(2+n)/243$	12 92	120 1025	23 201

Moreover, the new effective graphs have a simpler form than the original ones.

The table also contains Nickel indices for each of the static diagrams and additional

3.1.6 Critical exponent z

The problem of finding a critical exponent z in the model A has been reduced to obtaining coefficients $A^{(k)}$ in the eq.(78), where k is a number of loops. Eventually the diagrams were calculated using the Sector Decomposition [26] method adapted for dynamics. The results are presented in Tab.10, 11 in the Appendix A. The sum of the contributions of the diagrams from the Tab.1 with their combinatorial coefficients and the factors $a(n)$ is defined coefficients $A^{(k)}$. The result for $A^{(k)}(n = 1)$ in the eq.(78) are presented in the Tab.3:

Table 3: ε -expansion of coefficients $A^{(k)}$ for $n = 1$ up to five order.

	numerical result
$A^{(2)}$	$1/8 \log[4/3] \varepsilon^{-1} + 0.0416702(4) + 0.0647910(6) \varepsilon + 0.0446045(9) \varepsilon^2$
$A^{(3)}$	$1/8 \log[4/3] \varepsilon^{-2} + 0.1368518(6) \varepsilon^{-1} + 0.2709195(13) + 0.2852955(29)\varepsilon$
$A^{(4)}$	$27/64 \log[4/3] \varepsilon^{-3} + 0.3473579(35) \varepsilon^{-2} + 0.867242(12)\varepsilon^{-1} + 1.297567(30)$
$A^{(5)}$	$27/40 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.77317(4) \varepsilon^{-3} + 2.41421(13) \varepsilon^{-2} + 4.8300(4) \varepsilon^{-1}$

Knowing the value of $A^{(k)}$ from the Tab.3 and the renormalization constant Z_g from static

$$Z_g = 1 + \frac{8+n}{6} \frac{g}{\varepsilon} + g^2 \left(\frac{(8+n)^2}{36\varepsilon^2} - \frac{14+3n}{24\varepsilon} \right) + g^3 \left(\frac{(8+n)^3}{216\varepsilon^3} - \frac{7(112+38n+3n^2)}{432\varepsilon^2} + \frac{2960+922n+33n^2}{5184\varepsilon} + \frac{\zeta(3)(22+5n)}{54\varepsilon} \right), \quad (96)$$

one can find Z_1 in a form of u -expansion. It is worth noting that it is necessary to know only coefficients $Z_1^{(1)}$ at the first pole by ε in the Z_1 . The general form is

$$Z_1^{(1)} = \frac{n+2}{3} \left[z_{20}u^2 + (z_{30} + z_{31}n)u^3 + (z_{40} + z_{41}n + z_{42}n^2)u^4 + (z_{50} + z_{51}n + z_{52}n^2 + z_{53}n^3)u^5 \right]. \quad (97)$$

So using eqs.(96, 97, 78) and Tab.10, 11 (Appendix A) one can find coefficients z_{mn} in the eq.(97):

Table 4: Numerical coefficients for eq.(97).

z_{20}	-0.0359602590565	z_{42}	0.000167177330411
z_{30}	0.01052554615492731	z_{50}	0.04926(29)
z_{31}	0.0013156932693659138	z_{51}	0.01357(17)
z_{40}	-0.0210863(5)	z_{52}	0.000386(16)
z_{41}	-0.00399345(12)	z_{53}	-0.0000082787

But the main idea is to find critical exponents with high accuracy. For that purpose the analytical result for three-loop approximation of this model can be used:

$$Z_1^{(1)} = -\frac{(2+n)}{24\varepsilon} \log[4/3]u^2 - u^3 \frac{(2+n)(8+n)}{27} \left[-\frac{1}{8\varepsilon^2} \log[4/3] + \right. \\ \left. + \frac{1}{96\varepsilon} (\pi^2 - 8Li_2[1/4] + \log[4/3](-6 - 21 \log[3] + 13 \log[4])) \right] + O(u^4). \quad (98)$$

The result of eq.(98) was received in the papers [19] (two-loop) and [3] (three-loop). As is known, the renormalization constant Z_1 defines the RG functions:

$$\gamma_1 = \beta(u) \partial_u \log Z_1. \quad (99)$$

However, the relationship between the coefficients at the highest poles with the coefficients at the first pole $Z_1^{(1)}$ and eq.(119) allows to represent γ_1 in a simpler form:

$$\gamma_1 = -u \partial_u Z_1^{(1)}. \quad (100)$$

Knowing the γ_1 one can find ε -expansion for the dynamic critical exponent z . The ratio between them can be written as:

$$z = 2 + \gamma_1^* - \eta, \quad (101)$$

where $\gamma_1^* = \gamma_1(u_*)$ is the value γ_1 in the fixed point and η is Fisher-exponent. The

ε -expansion for u_* and η can be taken from the static:

$$u^* = \frac{6\varepsilon}{8+n} + \frac{18(14+3n)\varepsilon^2}{(8+n)^3} + \frac{\varepsilon^3}{(n+8)^5} (-11824.5 - 4045.98n - 350.24n^2 - 24.75n^3) + \frac{\varepsilon^4}{(n+8)^7} (1543836.1 + 822152.n + 181543.n^2 + 21507.4n^3 + 877.912n^4 - 0.625n) , \quad (102)$$

$$\eta = \varepsilon^2 \frac{2+n}{2(8+n)^2} - \varepsilon^3 \frac{(2+n)(n^2 - 272 - 56n)}{8(8+n)^4} - \varepsilon^4 \frac{2+n}{(8+n)^6} (1096.74 + 334.33n + 36.9984n^2 + 7.1875n^3 + 0.15625n^4) + \varepsilon^5 \frac{(2+n)}{(8+n)^8} (222337. + 117828.n + 25396.1n^2 + 2572.12n^3 + 13.8027n^4 - 4.58183n^5 + 0.0486946n^6) . \quad (103)$$

As a result the critical exponent z looks like:

$$z(\varepsilon, n) = 2 + \varepsilon^2 \frac{(2+n)}{2(8+n)^2} (-1 + 6\text{Log}[4/3]) + \varepsilon^3 \frac{(2+n)}{8(8+n)^4} (162.461908017 + 31.9023677877n - 1.27351796946n^2) + \varepsilon^4 \frac{(2+n)}{32(8+n)^6} (-23752.4(16) - 6929.0(8)n - 770.28(13)n^2 - 170.470(6)n^3 - 4.24423766241n^4) + \varepsilon^5 \frac{(2+n)}{128(8+n)^8} (1.986(25)10^7 + 1.038(23)10^7n + 2.15(8)10^6n^2 + 1.92(13)10^5n^3 - 3.8(10)10^3n^4 - 626(29)n^5 + 7.500527164701581n^6) . \quad (104)$$

We also give an important special case $n = 1$:

$$z(\varepsilon, 1) = 2 + 0.0134461562\varepsilon^2 + 0.0110362802\varepsilon^3 - 0.0055791(4)\varepsilon^4 + 0.01773(31)\varepsilon^5 . \quad (105)$$

The series (105) will be resummed in a Chapter 4.

The eq.(104) is written for $n = 1$ to show the growth of orders relative to each other. Such asymptotic series can be resummed, which will be discussed in Chapter 4.

To verify the accuracy of the obtained results, they were compared with the expan-

sion of the dynamic exponent by the inverse number of field components n , that was obtained in the main order of $1/n$ for an arbitrary ε in [19]. In the second and third order by ε , exact agreement with the analytical answer (98) is obtained; in the fourth and fifth order, agreement also takes place, within the error of our values. In order to increase the accuracy in the final answer (104), we used the exact value for the highest degree of polynomials along n (corresponding to the results of [19]) in the coefficients of ε -expansion of z .

3.2 Dynamic model E

In this chapter we consider one more dynamical model - model E [24]. The main goal is to find critical dynamical exponent z , which determines the growth of the relaxation time near the critical point. This model is one of the simplest models of critical dynamics, which take into account the intermode interaction. Another difference from the previous model (model A) is its multiply charged. All these factors complicate the analysis of the model E, so the research of this model is limited by two-loop approximation.

Model E describes a planar symmetric antiferromagnet. The N component field of the order parameter φ is the difference between the magnetizations of the two sublattices. This quantity φ is not conserved, because it is not associated with any symmetry. Unlike the total magnetization m , which is preserved in the presence of spin isotropy. The m field plays the role of an additional soft mode. If we consider the model E for one component $N = 1$ field, it describes the behavior of superfluid He^4 near the phase transition.

The main problem of calculation such model is that there are several charge, which lead to various fixed points with the different exponent z . That is why the first question to be solved is which of these points is stable. The previous results [22], [23] contradict each other, so it impossible to unambiguously answer this question.

The unrenormalized action of the model E of critical dynamics is determined by the N -component fields ψ, ψ^+ and the one-component field m . The interaction in the system is $U(N)$ symmetric. As mentioned earlier (1.1.2), any model of stochastic dynamics could be described by the eq.(12). The Onsager and intermode coupling coefficients, which characterize the model E, have a form:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{0\psi} & 0 \\ \lambda_{0\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{0m}\partial^2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\lambda_{0\psi}g_{3,0}\psi \\ 0 & 0 & -i\lambda_{0\psi}g_{3,0}\psi^+ \\ -i\lambda_{0\psi}g_{3,0}\psi & i\lambda_{0\psi}g_{3,0}\psi^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (106)$$

where λ_{0m} and $\lambda_{0\psi}$ are non-renormalized Onsager coefficients.

The corresponding action has a form:

$$S(\psi) = 2\lambda_{0\psi}\psi'^+\psi' + \psi'^+ [-\partial_t\psi + \lambda_{0\psi}H_\psi + i\lambda_{0\psi}g_{30}\psi H_m] + c.c. - \lambda_{0m}m'\partial^2m' + m' \left[-\partial_t m - \lambda_{0m}\partial^2 H_m + i\lambda_{0\psi}g_{30}(\psi^+ H_\psi^+ - \psi H_\psi) \right], \quad (107)$$

where

$$H_\phi = \frac{\delta S^{st}(\psi)}{\delta\psi}, \quad (108)$$

$$S^{st} = -\partial\psi\partial\psi^+ - \frac{g_{10}}{6}(\psi^+\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 + mh_0. \quad (109)$$

In eq.(107), the symbol c.c. denotes complex conjugation.

Substituting eq.(108) and eq.(109) into eq.(107), one can obtain a detailed non-renormalized action:

$$\begin{aligned} S = & 2\lambda_{0\psi}\psi'^+\psi' - \lambda_{0m}um'\partial^2m' \\ & + \psi'^+\{-\partial_t\psi + \lambda_{0\psi}[\partial^2\psi - \tau_0\psi - g_1(\psi^+\psi)\psi/3] + i\lambda g_3\psi[-m+h]\} + \\ & + \psi'\{-\partial_t\psi^+ + \lambda[\partial^2\psi^+ - \tau\psi^+ - g_1(\psi^+\psi)\psi^+/3] - i\lambda g_3\psi^+[-m+h]\} \\ & + m'\{-\partial_t m - \lambda_{0m}u\partial^2[-m+h] + i\lambda_{0\psi}g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+]\}. \end{aligned} \quad (110)$$

3.2.1 Renormalization of the model

The model E is multiplicatively renormalizable [39]. So the corresponding renormalized actions can be written as:

$$\begin{aligned} S = & 2Z_1\lambda\psi'^+\psi' - Z_7\lambda um'\partial^2m' \\ & + \psi'^+\{-Z_2\partial_t\psi + \lambda[Z_3\partial^2\psi - Z_4\tau\psi - Z_5g_1(\psi^+\psi)\psi/3] + iZ_6\lambda_{0\psi}g_3\psi[-m+h]\} + \\ & + \psi'\{-\partial_t\psi^+ + \lambda_{0\psi}[Z_3\partial^2\psi^+ - \tau_0\psi^+ - g_1(\psi^+\psi)\psi^+/3] - i\lambda_{0\psi}g_3\psi^+[-m+h]\} \\ & + m'\{-\partial_t m - Z_8\lambda u\partial^2[-m+h] + iZ_9\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+]\}. \end{aligned} \quad (111)$$

Renormalization constants Z_i ($i = 1 \cdots 9$) are expressed in terms of the renormalization of fields

$$\psi'_0 = \psi'Z_{\psi'}, \quad \psi'^+_0 = \psi'^+Z_{\psi'^+}, \quad \psi_0 = \psi Z_\psi, \quad m'_0 = m'Z_{m'}, \quad m_0 = mZ_m, \quad (112)$$

and parameters

$$\lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad g_{1,0} = g_1 \mu^{2\varepsilon} Z_{g_1}, \quad u_0 = u Z_u, \quad g_{3,0} = g_3 \mu^\varepsilon Z_{g_3}, \quad (113)$$

using following relations:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\lambda Z_{\psi'}^+ Z_{\psi'}, & Z_2 &= Z_{\psi'}^+ Z_\psi, & Z_3 &= Z_\lambda Z_{\psi'}^+ Z_\psi, \\ Z_4 &= Z_\lambda Z_\tau Z_{\psi'}^+ Z_\psi, & Z_5 &= Z_\lambda Z_{g_1} Z_{\psi'}^+ Z_\psi Z_\psi^+ Z_\psi, \\ Z_6 &= Z_\lambda Z_{g_3} Z_m Z_{\psi'}^+ Z_\psi, & Z_7 &= Z_\lambda Z_u Z_m^2, \\ Z_8 &= Z_\lambda Z_u, & Z_9 &= Z_\lambda Z_{g_3} Z_m' Z_\psi^+ Z_\psi. \end{aligned} \quad (114)$$

Using the integration by part, it is better to transform one of the factors in the interaction (111) to the form:

$$m'(\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+) = \partial m'(\psi \partial \psi^+ - \psi^+ \partial \psi). \quad (115)$$

It can be noted that an external momentum is allocated to each external line m' of one-irreducible Green functions. Therefore, in the term $m' \partial_t m$ in eq.(111) there is no renormalization constant. That can be stated as

$$Z_m Z_{m'} = 1. \quad (116)$$

Also, in the work [39], where the MS renormalization scheme is used, the following additional restrictions on the renormalization constants were obtained:

$$Z_m = Z_{g_3} Z_\lambda = 1. \quad (117)$$

Moreover, the renormalization constants Z_{g_1} , Z_ψ , Z_τ coincide with their statistical counterparts. Thus, in this dynamic model there are only 3 new independent renormalization constants.

As in the previous problems, we use the standard renormalization scheme - Minimal Subtraction (MS). Normalized Green functions, that define the renormalization constants, can be presented in a following form:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_1 &= \frac{\Gamma^{\psi'+\psi'}}{2\lambda} \Big|_{p=0,\omega=0}, & \bar{\Gamma}_5 &= -\frac{3\Gamma^{\psi'+\psi(\psi+\psi)}}{2\lambda g_1 \mu^{2\varepsilon}} \Big|_{p=0,\omega=0}, \\
\bar{\Gamma}_2 &= \partial_{i\omega} \Gamma^{\psi'+\psi} \Big|_{p=0,\omega=0}, & \bar{\Gamma}_6 &= -\frac{\Gamma^{\psi'+\psi m}}{i\lambda g_3 \mu^{2\varepsilon}} \Big|_{p=0,\omega=0}, \\
\bar{\Gamma}_3 &= -\frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma^{\psi'+\psi}}{\lambda} \Big|_{p=0,\omega=0}, & \bar{\Gamma}_7 &= \frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma^{m'm'}}{2\lambda u} \Big|_{p=0,\omega=0}, \\
\bar{\Gamma}_4 &= -\frac{\Gamma^{\psi'+\psi} - \Gamma^{\psi'+\psi} \Big|_{\tau=0}}{\lambda \tau} \Big|_{p=0,\omega=0}, & \bar{\Gamma}_8 &= -\frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma^{m'm}}{\lambda} \Big|_{p=0,\omega=0},
\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_9 = -\frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma^{m'\psi+\psi}}{i\lambda g_3 \mu^{2\varepsilon}} \Big|_{p=0,\omega=0} + \frac{1}{2} \partial_r^2 \frac{\Gamma^{m'\psi+\psi}}{i\lambda g_3 \mu^{2\varepsilon}} \Big|_{p=0,\omega=0}. \quad (118)$$

The renormalization constants Z_i in the MS scheme have a form:

$$Z_i = 1 + \sum_{n \geq 1} Z_i^{(n)}(u) \varepsilon^{-n}. \quad (119)$$

For our purposes, further investigation of model E can be limited by calculating the constant Z_2 .

3.2.2 Diagramm Technique and Reduction Scheme

For convinience we introduce the notation:

$$\phi = \{\psi, \psi^+, \psi', \psi'^+\}, \quad \tilde{m} = \{m, m'\}. \quad (120)$$

In this model we do not have any ‘‘mixed’’ propagators, which contain one field from ϕ and one field from \tilde{m} , therefore, the full quadratic matrix has a block structure. Then the matrix $\phi K \phi$ has a form:

$$\phi K \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\omega + \lambda(k^2 + \tau) \\ 0 & 0 & -i\omega + \lambda(k^2 + \tau) & 0 \\ 0 & i\omega + \lambda(k^2 + \tau) & 0 & 0 \\ i\omega + \lambda(k^2 + \tau) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (121)$$

The inverse matrix that defines the propagators is given by the expression

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2\lambda}{|-i\omega+\lambda(k^2+\tau)|^2} & 0 & \frac{1}{-i\omega+\lambda(k^2+\tau)} \\ \frac{-2\lambda}{|-i\omega+\lambda(k^2+\tau)|^2} & 0 & \frac{1}{-i\omega+\lambda(k^2+\tau)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-i\omega+\lambda(k^2+\tau)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{-i\omega+\lambda(k^2+\tau)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (122)$$

which suggests

$$\langle \psi(t_1)\psi^+(t_2) \rangle = \langle \psi^+(t_1)\psi(t_2) \rangle = \frac{1}{k^2 + \tau} \exp[-\lambda(k^2 + \tau)|t_1 - t_2|], \quad (123)$$

$$\langle \psi(t_1)\psi^{+'}(t_2) \rangle = \langle \psi^+(t_1)\psi'(t_2) \rangle = \Theta(t_1 - t_2) \exp[-\lambda(k^2 + \tau)(t_1 - t_2)]. \quad (124)$$

Accordingly, the quadratic form $\tilde{m}K_m\tilde{m}$ looks like

$$K_m = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega + \lambda k^2 \\ -i\omega + \lambda k^2 & -\lambda k^2 \end{pmatrix}, \quad (125)$$

$$K_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda k^2}{(-i\omega + \lambda k^2)^2} & -\frac{i\omega - \lambda k^2}{(-i\omega + \lambda k^2)^2} \\ -\frac{i\omega - \lambda k^2}{(-i\omega + \lambda k^2)^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (126)$$

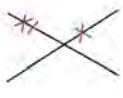

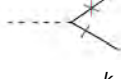
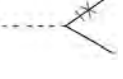
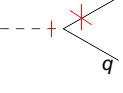
which suggests

$$\langle m(t_1)m(t_2) \rangle = \exp[-\lambda u(k^2)|t_1 - t_2|], \quad (127)$$

$$\langle m(t_1)m'(t_2) \rangle = \Theta(t_1 - t_2) \exp[-\lambda u(k^2)(t_1 - t_2)]. \quad (128)$$

Tab.5 gives diagram notation for model vertices (111) with corresponding vertex factors. All vertices can be divided into two types with respect to charges: “dynamic” (the vertex with an interaction constant g_3 , determining the intermodal coupling strength) and “static” (the vertex with an interaction constant g_1 , whose value at a fixed point is determined by a static action (109)).

Table 5: vertex of the model E

Static:		$\psi'^+\psi^+\psi\psi,$	$\frac{-2\lambda g_1}{3}$		$\psi^+\psi^+\psi'\psi,$	$\frac{-2\lambda g_1}{3}$
Dynamic:		$\psi^+\psi'm,$	$i\lambda g_3$		$\psi^+\psi m,$	$-i\lambda g_3$
		$\psi^+\psi m',$	$i\lambda g_3(k^2 - q^2)$			

The introduced propagators and vertices define the standard diagram technique for considered Green function. In calculations, the same problems arise as in the model A: a large number of diagrams and complexity of the integrands compared with the static case. For calculations, we use the same techniques as for the model A – the diagram reduction method and the Sector Decomposition method.

Reduction Scheme

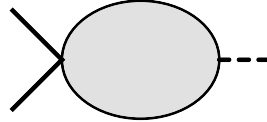
Taking into account that dynamic vertices do not contribute to static renormalization constants, it can be expected that the diagram reduction in the model E will be even more efficient compared to the model A. This is manifested in the fact that in the model E, in addition to the equalities for the four-tail (static) vertices, are similar to the relations (90) - (92) in A models, which reduce the sum of dynamic diagrams to static, the following relation for three-tailed (dynamic) vertices of model E is performed:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \text{---} \times \\ \diagup \\ q \end{array} + \begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \text{---} \times \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \text{---} \times \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} = \\
 & = \frac{k^2 - q^2}{(k^2 + \tau)(q^2 + \tau)} + \frac{1}{k^2 + \tau} - \frac{1}{q^2 + \tau} = 0
 \end{aligned} \tag{129}$$

i.e. a certain sum of vertices vanishes.

It means that in the high order of perturbation theory in model E one can consider only time version where “output lines” of the graphs are extreme points.

By analogy with model A, we also consider the situation when we have a non-zero number of output lines with m or m' fields. The principal difference of this case from the reduction scheme in the model A is that it is necessary to take into account the remaining part of the subgraph (not just one vertex). Therefore, we assume that it is not the sum of the vertices that are considered, but the sum of the subgraphs in which one external line is massless and the others are massive:



Consider the diagrams—illustration from 2 loops. For such subgraphs there are two different cases:

- the first case:

$$\begin{array}{c} \text{diagram 1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 2} \end{array} = 0 \quad (130)$$

- the second case:

$$\begin{array}{c} \text{diagram 1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 2} \end{array} = 0 \quad (131)$$

In both cases eqs.(130–131), the sum of the diagrams vanishes due to different signs at the vertices. Moreover, such a modified reduction rule makes it possible to reduce the number of considered integrals in the high orders of perturbation theory.

It is interesting consider the same table, like (the Tab.1), for comparing the number of integrals before reduction and after. The reduction–table is presented in the Appendix B.

3.2.3 Result

Using RG–analysis, fixed points were found from the condition $\beta_i = 0$. Then the stability of fixed points were determined. For this goal the eigenvalues of the matrix of the first derivatives $\Omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k$ was investigated (the eigenvalues must be positive). It need to noticed, $\{\beta_i\}$ is a full set of β -functions, and $\{g_k\}$ is a full set

of charges ($= \{g_1, g_3 u\}$). For convenience, it is better to move on to another pair of dynamical charges $\{f, w\}$ instead of $\{g_3, u\}$:

$$f = \frac{g_3^2}{8\pi^2 u} \quad w = \frac{1}{u}. \quad (132)$$

For them the dynamic β -function can be written in form:

$$\beta_f = f[-2\varepsilon - \gamma_w + 2\gamma_\lambda], \quad \beta_w = -w\gamma_w. \quad (133)$$

The necessary two-loop approximation diagrams are calculated analytically. The two loops result for γ_λ and γ_w can be presented as:

$$\gamma_\lambda = \frac{f}{1+w} - f^2 F(w) - \frac{g_1^2}{18} \left[6 \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 1 \right], \quad (134)$$

$$\gamma_w = f \left[\frac{1}{1+w} - \frac{1}{2} \right] + f^2 [H(w) - F(w)] - \frac{g_1^2}{18} \left[6 \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 1 \right], \quad (135)$$

where

$$H(w) = \frac{1}{4(1+w)} \left[w^2(2+w) \ln \left(\frac{(1+w)^2}{w(2+w)} \right) - w - \frac{1}{2} \right], \quad (136)$$

$$F(w) = \frac{1}{8(1+w)^3} \left[4(1+2w) \ln \left(\frac{(1+w)^2}{(1+2w)} \right) + 54(1+w) \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 8w - 12 \right]. \quad (137)$$

In the E-model there are three fixed points: $w^* = \infty$, $w^* = 0$ and $w^* = \text{const}$. The first point is not interesting, because it is always unstable. The “weak scaling fixed point” ($w^* = 0$) is stable for $n > n_c$, where n is number of fields component. And for $n < n_c$ “dynamic scaling fixed point” ($w^* = \text{const}$) is stable. So the expressions for fixed points are:

$$f^* = \varepsilon + \frac{3}{8} \left[2 \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 1 \right] \varepsilon^2, \quad w^* = 1 + \frac{1}{50} \left[29 - 324 \ln \left(\frac{4}{3} \right) \right] \varepsilon, \quad (138)$$

and

$$w^* = 0 \quad f^* = \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{2}{675} \left[702 \ln \left(\frac{4}{3} \right) - 167 \right] \varepsilon^2, \quad (139)$$

and the value of $n_c(d)$ is determined by the expression

$$n_c(d) = 4 - \varepsilon[19 \ln(4/3) - 11/3] + O(\varepsilon^2). \quad (140)$$

For the dynamic scaling fixed point eq.(138) the values $\gamma_{\lambda,w}^*$ are exactly:

$$\gamma_w^* = 0, \quad \gamma_\lambda^* = \varepsilon/2. \quad (141)$$

As a result, the critical exponent z takes the value

$$z = 2 - \gamma_\lambda^* = 2 - \varepsilon/2 = \frac{d}{2}. \quad (142)$$

For the fixed point eq.(139)

$$\gamma_\lambda^* = \varepsilon/2 + \frac{\gamma_w^*}{2}, \quad \gamma_w^* = \frac{\varepsilon}{3} + \left[\frac{259}{675} - \frac{52}{25} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \right] \varepsilon^2, \quad (143)$$

and then the critical exponent z has a non-trivial form:

$$z = 2 - \gamma_\lambda^* = \frac{d}{2} - \frac{\gamma_w^*}{2}. \quad (144)$$

For $d = 4 - 2\varepsilon$ the exponents ω , which are associated with the charges f and w , for the fixed point eq.(138) have a form:

$$\omega_f = \varepsilon + \left[\frac{103}{200} - \frac{259}{100} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \right] \varepsilon^2 = \varepsilon - 0.230097\varepsilon^2, \quad (145)$$

$$\omega_w = \frac{\varepsilon}{4} + \left[\frac{347}{800} - \frac{1507}{800} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \right] \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon}{4} - 0.108171\varepsilon^2. \quad (146)$$

And for fixed point (139) –

$$\omega_f = \varepsilon + \left[\frac{158}{225} - \frac{72}{25} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \right] \varepsilon^2 = \varepsilon - 0.126302\varepsilon^2, \quad (147)$$

$$\omega_w = -\frac{\varepsilon}{3} + \left[\frac{52}{25} \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{259}{675} \right] \varepsilon^2 = -\frac{\varepsilon}{3} + 0.214675\varepsilon^2. \quad (148)$$

Originally the new fixed point called weak scaling (139) was discovered by De Dominicis and Peliti [41, 44]. But they made a numerical mistake, which was pointed out by Dohm [22]. The results of this paper are consistent with [22] and confirm

the error of [41, 44].

As mentioned in the book [39], there are two (142), (144) fixed points for d equal 3. The two loops consideration shows that the dynamical regime (142) is IR-stable, but the situation may change when considering the next orders of perturbation theory. This is due to the smallness of the coefficients of the ω_w in ε -expansion. Therefore, next order of perturbation theory can change a sign of ω and modify stability. That is why analysis of three loops are of interest. The diagram reduction of three-loop diagrams performed in this paper, which led to a significant decrease in their number, can serve as the basis for such a calculation.

Moreover the active development of the model E also helps to advance the study of a related, more complex model F, which is used to describe the critical dynamics of the transition from normal to superfluid in He^4 [24, 45].

Chapter 4: Resummation procedure

After making the multi-loop calculation and receiving the quantity of interest in a form of ε -expansion, it is necessary to resummed it, which provides more reliable theoretical predictions. There are many options for resumming. But in this thesis we consider only Borel resummation, taking into account the asymptotic behavior of strong coupling [46]. Below the resummation procedure will be briefly described.

Let there be a function $A(g)$, for which the first $N + 1$ coefficients A_n are known in the expansion

$$A(g) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n, \quad (149)$$

and the high-order asymptotics (HOA) of the coefficients A_n :

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c (-a)^n n! n^{b_0}. \quad (150)$$

Then the conformal-Borel representation of the function $A(g)$ has the form:

$$A(g) = \int_0^{\infty} dt \exp^{-t} t^b \left(\frac{gt}{w(gt)} \right)^{\nu} B(w(gt)), \quad (151)$$

where

$$w(x) = \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sqrt{1+ax} + 1}, \quad (152)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n w^n. \quad (153)$$

HOA the expansion coefficients of the function (151) in a series over g has the form (150) with the specified values of the a and b_0 parameters, the parameter b_0 is chosen from the condition

$$b = b_0 + 3/2. \quad (154)$$

Approximate expression $A^{(N)}(g)$ for the function (151) have a form

$$A^{(N)}(g) = \int_0^\infty dt \exp^{-t} t^b \left(\frac{gt}{w(gt)} \right)^\nu \sum_{n=0}^N B_n w^n. \quad (155)$$

And it is obtained by taking into account $N + 1$ first terms of the sum (153). The coefficients B_n are selected from the requirement that the first $N + 1$ members of the expansion of the function (151) match the known coefficients of A_n in (149). The additional parameter ν in (151), first introduced in [46], controls the asymptotics of the “strong coupling”¹:

$$A(g) \stackrel{g \rightarrow \infty}{\sim} g^\nu. \quad (156)$$

In the problem under discussion, the parameter ν is not known and is used to improve the convergence of the summation procedure as number of series members in the expansion increases (149).

Following the work [47], the effectiveness of this approach using the example of model A function could be illustrated:

$$A(g) = \int_0^\infty dx \exp^{-x^2 - gx^4}. \quad (157)$$

For this function, all coefficients of the expansion (149) are known, and the HOA has the form (150) with $a = 4$, $b_0 = -1$. The parameter ν has the value $-1/4$. At the Fig.3 the comparison of the exact value $A(1) = 0.6842134279$ of the function (157) at $g = 1$ with the result of the calculation by the formula (151) (with allowance for the different number of terms – horizontal axis) is presented for the different values the parameter ν .

¹following the work [46], we use the notation ν for the parameter of the “strong coupling”, which in this context does not simultaneously occur with the critical index ν

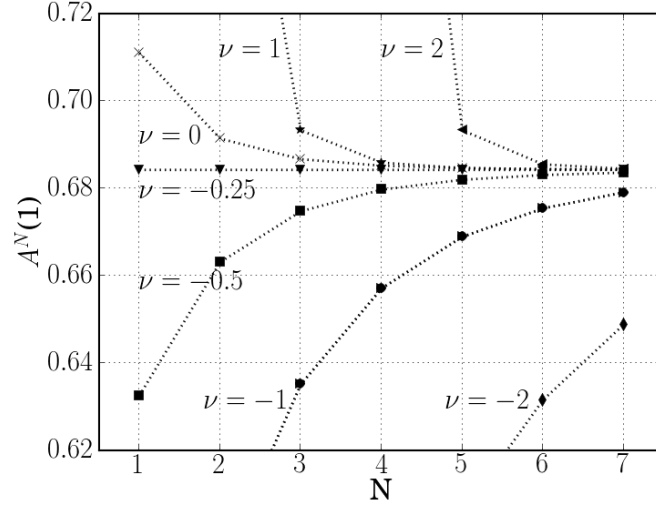


Figure 3: The value of the resummed series $A^{(N)}(g)$ of the function (157) for $g = 1$, for the different N and ν .

The figure shows that the convergence of the summation procedure takes place in a certain range of the parameter values ν , and the convergence rate noticeably decreases as this parameter moves away from the “true” value of the parameter $\nu = -1/4$.

It should be noted that for some expansions such a procedure does not give sufficient convergence, for example, for the critical index η in the ϕ^4 static model. To improve the convergence of the series, we introduce another additional condition: free boundary condition at $\varepsilon = 2$ [48].

The investigated value $x(\varepsilon)$ could be written in the form

$$x(\varepsilon) = x_2 + (2 - \varepsilon)A(\varepsilon), \quad (158)$$

where

$$x_2 \equiv x_{\varepsilon=2}, \quad A(\varepsilon) = \frac{x(\varepsilon) - x_2}{2 - \varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon^n, \quad (159)$$

and make resummation of the series (159). The coefficients of this series are related

to the coefficients of original series $x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \varepsilon^n$ by relations

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{\gamma_2}{2}, \\ \bar{A}_n &= 2A_n - A_{n-1} \quad n > 0, \\ \bar{A}_1 &\equiv 0. \end{aligned} \tag{160}$$

From eq.(160) it follows that the parameters a and b_0 of the HOA of the coefficients \bar{A}_n and A_n are the same.

In the work [21] it is shown that the parameters a and b_0 of the model A are equal $1/3$ and $7/2$ respectively. The index ν for the considered model is not currently known. Unlike the ϕ^4 model, for which the resummation technique was used in [48] with a free boundary condition at $\varepsilon = 2$, in our case the exact value of x_2 is also not known. The parameters ν and x_2 were determined from the condition of the fastest convergence of the summation procedure for $\varepsilon = 1$.

Let us return to the critical exponent η and look at the result of the resummation of its six-loop expansion with a free boundary condition at $\varepsilon = 2$:

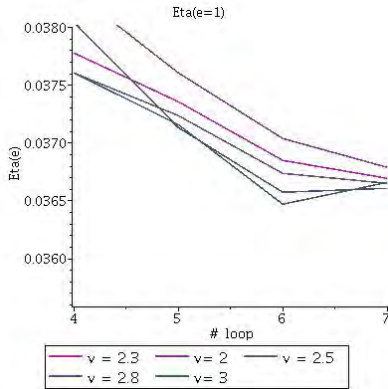


Figure 4: $\eta_2 = 0.25$
 $\eta_3 = 0.0367$

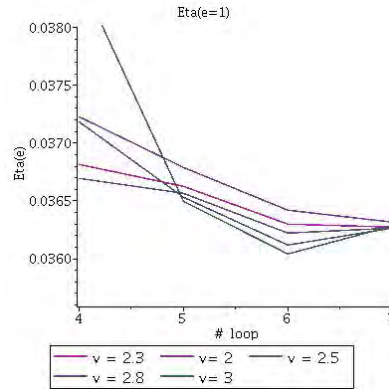


Figure 5: $\eta_2 = 0.235$
 $\eta_3 = 0.0363$

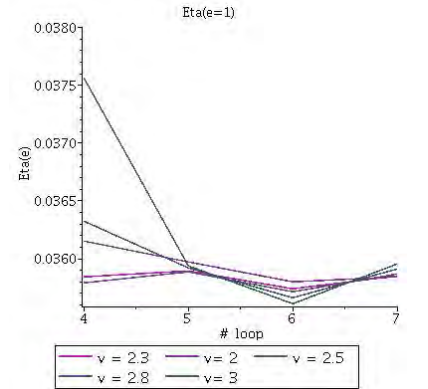


Figure 6: $\eta_2 = 0.22$
 $\eta_3 = 0.0359$

It is well known that in two-dimensional space the exact value of η is equal $1/4$. Using modified conformal-Borel we received $\eta_{d=2} = 0.235$ and $\eta_{d=3} = 0.0363$.

4.1 Model ϕ^4 with the cubic symmetry

As a result of the study of the model ϕ^4 with the cubic symmetry the ε - expansions of three critical exponents (γ , η , ν) were obtained (63), (64) and (65). We apply the

resummation technique , such as conformal–Borel with a free boundary condition at $\varepsilon = 2$, to them. Then using original series for this critical exponent η (consider $n = 3$) and the relation (158), a modified series for η is obtained in form:

$$\begin{aligned} \eta = \eta_2 + (2 - \varepsilon) & \left[-\frac{1}{4}\eta_2\varepsilon + \left(0.010288 - \frac{1}{8}\eta_2\right)\varepsilon^2 + \left(0.014528 - \frac{1}{16}\eta_2\right)\varepsilon^3 + \right. \\ & + \left(0.00312995 - \frac{1}{32}\eta_2\right)\varepsilon^4 + \left(0.012882 - \frac{1}{64}\eta_2\right)\varepsilon^5 + \\ & \left. + \left(-0.0264495 - \frac{1}{128}\eta_2\right)\varepsilon^6 \right]. \end{aligned} \quad (161)$$

The series in square brackets in the eq. (161) is considered as the resummation object. In the Fig. 7 - 9 the result for resummed exponent η for different coefficient $\eta_2 = \eta_{(d=2)}$ is presented.

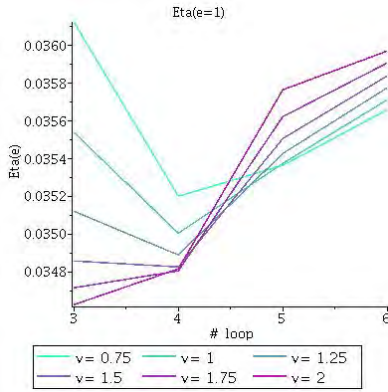


Figure 7: $\eta_2 = 0.18$
 $\eta = 0.0357$

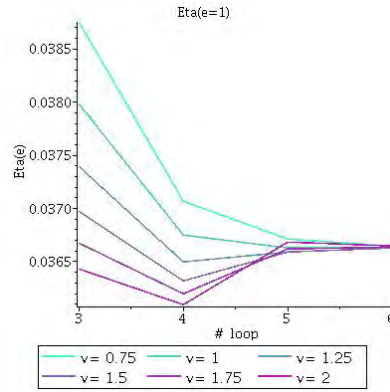


Figure 8: $\eta_2 = 0.20$,
 $\eta = 0.0366$

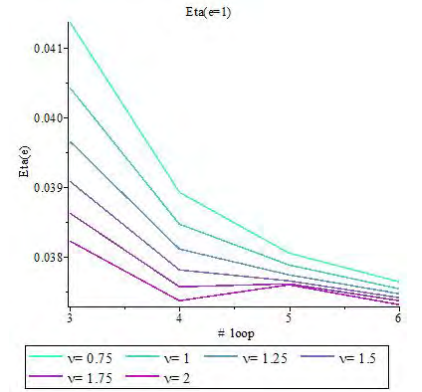


Figure 9: $\eta_2 = 0.22$,
 $\eta = 0.0375$

The numerical values of the resummed critical exponent η are presented in the Table 9. It can be seen that the convergence of the value η occurs fairly quickly.

Table 6: Resummed value of η using the modified conformal–Borel method taking into account the different number of terms of original series.

	η_2 eq.(158)	4loops	5loops	6loops
$\eta_{d=3}$	$\eta_2 = 0.20$	0.0365	0.0366	0.0366

The same procedure can be made for exponents for the critical exponents γ and ν . However, it is not enough to get an accurate convergence. Using the conformal–Borel resummation one can take from the HOA only one parameter a instead of two

a , b_0 (150). The remaining parameter b_0 can be varied, as the parameter ν . A detailed calculation of this resummation technique is described in the article [25]. In this paper, we present only the final result for resummed critical exponents η , ν and their comparison with previous works by other authors.

Table 7: The values of the critical exponents η and ν , obtained as a result of resummation of multiloop series by ε , in comparison with the results of the three-dimensional RG analysis.

№ of loops	ε expansion			3D RG		
	η	ν	Paper	η	ν	Paper
3				–	0.700	[49]-1984
4	0.034	0.68(3)	[25]-2019	0.0331	0.6944	[50]-1989
				0.0332	0.6996	[51]-2000
5	0.0375(5)	0.6997(24)	[52]-1998	0.025(10)	0.671(5)	[53]-2000
	0.0374(22)	0.701(4)	[14]-2000			
	0.0353(21)	0.686(13)	[25]-2019			
6	0.036(3)	0.700(8)	[25]-2019	0.0333(26)	0.706(6)	[14]-2000

As can be seen from the Tab.7, the results of resummation agree within the margin of error with the previously obtained values for critical exponents.

As discussed earlier in chapter 2, estimation of the marginal order parameter dimensionality n_c (62) is relevant, since it determines the true regime of critical behavior in real cubic ferromagnets. Previous studies show that the value of the number of components of the field n significantly affects the stability of fixed points and leads to competition between the Heisenberg fixed point and the cubic fixed point.

The first numerical estimates of n_c obtained in lower order approximations within the framework of the ε -expansion [8, 9, 10, 11] predicted $n_c > 3$, which would indicate the instability of the cubic point in the real space. However, in the later works [50, 35, 12, 13, 53, 51, 14, 54, 55], where it was performed calculations of a higher order, it was shown that the value of n_c becomes lower than three. The six-loop ε -expansion (62) of n_c obtained by us was resummed (see [25]). The result is shown in the Tab.8 with the results of earlier works.

Table 8: the marginal order parameter dimensionality n_c .

Number of loops	n_c	Paper
1	4	[10]-1974
2	2.333	[10]-1974
3	3.128	[10]-1974
4	2.918	[12]-1997
	2.958	[35]-1995
5	2.87(5)	[14]-2000
	2.91(3)	[25]-2019
6	2.915(3)	[25]-2019

4.2 Model A

Let us apply the modified conformal-Borel resummation procedure eqs.(151) - (155) to the ε -expansion eq.(104) of the dynamic critical exponent $z(n = 1)$. Then the series for z with with boundary condition at $z_2 = z_{(\varepsilon=1)}$ looks like:

$$z = -z_2 \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{4} z_2 \varepsilon + (0.00672308 - \frac{1}{8} z_2) \varepsilon^2 + (0.00887968 - \frac{1}{16} z_2) \varepsilon^3 + (0.00164984 - \frac{1}{32} z_2) \varepsilon^4 + (0.00968492 - 0.015625 z_2) \varepsilon^5 \right], \quad (162)$$

where the expression in the square brackets is an object of the resummation.

The parameters $a = 1/3$ and $b_0 = 3/2$ were chosen, according to [56]. The work [57] shows that these parameters have the same values for both $\eta(\varepsilon)$ and $z(\varepsilon)$. In the figures 10 - 15, the values of the dynamic critical exponent z for the three-dimensional space $d = 3$ are shown as a result of resummation procedure with a different number of accounted terms of the expansion $z(\varepsilon)$ and values of the parameters ν and z_2 .

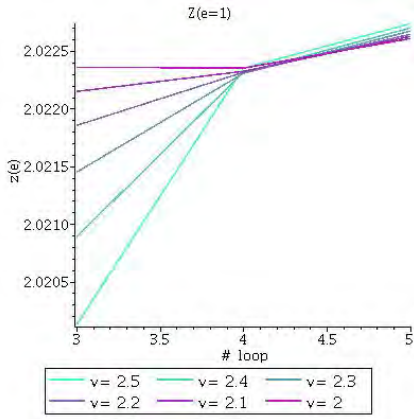


Figure 10: $z_2 = 2.12$
 $z = 2.0227$

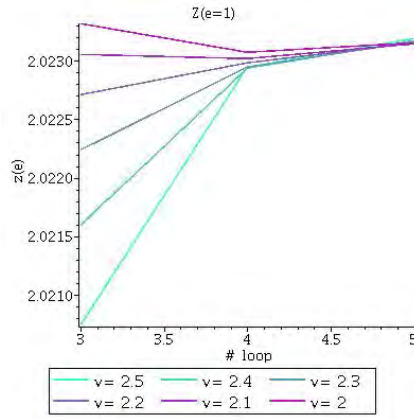


Figure 11: $z_2 = 2.13$
 $z = 2.0232$

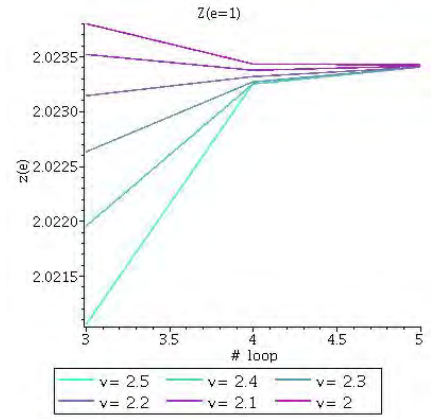


Figure 12: $z_2 = 2.135$
 $z = 2.0234$

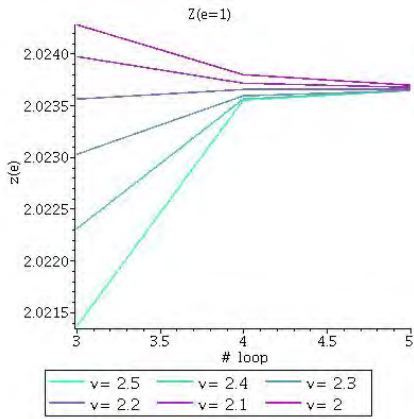


Figure 13: $z_2 = 2.14$
 $z = 2.0237$

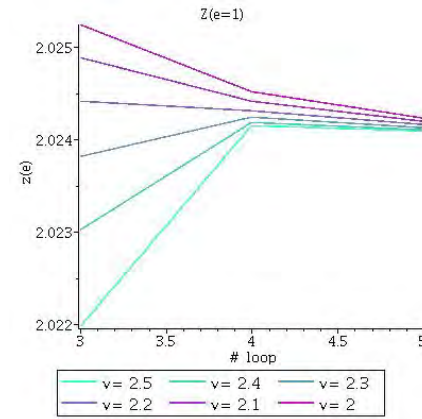


Figure 14: $z_2 = 2.15$
 $z = 2.0241$

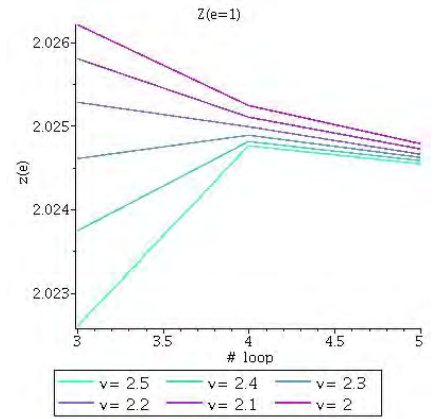


Figure 15: $z_2 = 2.16$
 $z = 2.0247$

From comparison Fig. 3 and Fig. 10 - 15 one can see that the convergence of the Borel resummation procedure for $z(\varepsilon)$ is quite similar to the considered model-function (157). The highest rate of convergence is achieved when the value ν is equal to 2.2 and z_2 is equal 2.14, which gives the following estimates for the dynamic exponent $z_{d=3}$:

Table 9: Resummed value of z using the modified conformal-Borel method taking into account the different number of terms of original series.

	z_2 eq.(158)	3loops	4 loops	5loops
$z_{d=3}$	$z_2 = 2.14$	2.023566	2.023647	2.023654

Moreover, from the Figs.10 - 15 it follows that taking into account the strong coupling parameter ν is necessary for the correct determination of the dynamic critical

exponent z by the method of conformal–Borel resummation, because with the value of $\nu = 0$, which was used in [21], the convergence will be very slow and it is necessary to take into account an even greater number of terms of $z(\varepsilon)$ expansion for a comparable result.

Thus, our results are in agreement in the margin of error with the results of [38], where the critical exponent z is equal 2.17 ± 0.03 .

Conclusion

The main results obtained in the thesis can be formulated as follows:

- The diagram reduction method has been developed, which makes it possible to significantly reduce computation in models of critical dynamics. The main problem of promotion to higher orders of perturbation theory in these models is that the number of diagrams are greatly increasing in comparison with static problems. As well as there is a more complex form of integrand expressions. The diagram reduction method allows not only reducing the number of effective diagrams but also simplifying the corresponding integrands.
- On the basis of the diagram reduction method, a record five-loop calculation of the dynamic critical exponent z in model A of critical dynamics was carried out. This method reduced the number of calculated integrals in the four-loop approximation from 66 to 17, and in the five-loop – from 1025 to 201. This reduction made it possible to calculate ε -expansion of the dynamic exponent z up to the fifth order by ε .
- A generalization of the diagram reduction method on the model of critical dynamics with intermode coupling is made. A two-loop calculation was performed in model E. This made it possible to clarify the contradictory results of the work of the predecessors. The reduction of the diagrams in the three-loop approximation showed that the number of calculated integrals in the two-loop approximation declined from 52 to 18, and in the three-loop declined from 4950 to 595.
- A record six-loop calculation of the critical exponents η and ν in the ϕ^4 model with the cubic symmetry is performed. On the basis of the recently performed analytical renormalization group calculation of the $O(n)$ - symmetric model ϕ^4 , sixth order ε -expansions of exponents are found taking into account additional tensor structures due to the symmetry requirements of the models. The critical value of the number n_c field components has been refined, which determines the true mode of critical behavior in real ferromagnets with the cubic symmetry. It is shown that the cubic fixed point of the renormalization group is stable for real ferromagnets ($n = 3$) in three-dimensional space.

- The resummation of the obtained ε -expansions by the conformal–Borel method is performed and the refined values of the critical exponents in the studied models are calculated — the static ϕ^4 model with the cubic symmetry and the dynamic model A.

Appendix A

Table 10: The numerical value of all topologies up to the fourth order for the Z_1 in the form of ε expansion.

Nickel index for stat. diagr.	numerical result
2 loop	
e111 e	$1/8 \log[4/3]\varepsilon^{-1} + 0.041670207(4) + 0.0647910(6)\varepsilon + 0.0446045(9)\varepsilon$
3 loop	
e112 22 e	$1/4 \log[4/3]\varepsilon^{-2} + 0.1368518(6)\varepsilon^{-1} + 0.27091943(4) + 0.2852955(29)\varepsilon$
4 loop	
e112 33 e33	$9/64 \log[4/3]\varepsilon^{-3} + 0.1070793(11)\varepsilon^{-2} + 0.2560858(32)\varepsilon^{-1} + 0.358251(6)$
e112 e3 333	$-0.0008517(30)\varepsilon^{-2} - 0.005031(10)\varepsilon^{-1} - 0.017487(15)$
e123 e23 33	$3/32 \log[4/3]\varepsilon^{-3} + 0.0848713(9)\varepsilon^{-2} + 0.2161338(31)\varepsilon^{-1} + 0.377071(5)$
e112 23 33 e	$3/16 \log[4/3]\varepsilon^{-3} + 0.1562589(12)\varepsilon^{-2} + 0.400053(4)\varepsilon^{-1} + 0.579729(8)$

Table 11: The numerical value of all fifth order topologies for Z_1 in the form of ε expansion.

Nickel index for stat. diagr.	numerical result
e112 33 e44 44	$3/40 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.073163(4)\varepsilon^{-3} + 0.204788(16)\varepsilon^{-2} + 0.35477(5)\varepsilon^{-1}$
e112 33 444 e4	$-0.000666(12)\varepsilon^{-3} - 0.00451(4)\varepsilon^{-2} - 0.01797(12)\varepsilon^{-1}$
e123 e23 44 44	$1/40 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.0315824(25)\varepsilon^{-3} + 0.098616(9)\varepsilon^{-2} + 0.236148(31)\varepsilon^{-1}$
e112 e3 344 44	$-0.001333(25)\varepsilon^{-3} - 0.01160(9)\varepsilon^{-2} - 0.05244(28)\varepsilon^{-1}$
e123 234 34 4 e	$0.0172897(9)\varepsilon^{-2} + 0.076055(4)\varepsilon^{-1}$
e112 34 e34 44	$1/10 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.111931(5)\varepsilon^{-3} + 0.331417(19)\varepsilon^{-2} + 0.67233(6)\varepsilon^{-1}$
e123 e24 34 44	$1/20 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.070358(4)\varepsilon^{-3} + 0.239613(18)\varepsilon^{-2} + 0.61230(6)\varepsilon^{-1}$
e112 34 334 4 e	$3/20 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.182275(8)\varepsilon^{-3} + 0.587323(28)\varepsilon^{-2} + 1.21353(9)\varepsilon^{-1}$
e112 23 e4 444	$-0.001955(21)\varepsilon^{-3} - 0.01250(7)\varepsilon^{-2} - 0.04914(25)\varepsilon^{-1}$
e112 23 44 e44	$7/40 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.188694(8)\varepsilon^{-3} + 0.573681(28)\varepsilon^{-2} + 1.03326(9)\varepsilon^{-1}$
e112 23 34 44 e	$1/10 \log[4/3] \varepsilon^{-4} + 0.119119(6)\varepsilon^{-3} + 0.390094(23)\varepsilon^{-2} + 0.75114(8)\varepsilon^{-1}$

Appendix B

Table 12: Diagram reduction of model E.

Nickel index for stat.diagr.	# dynamical diagram	# time version	N ^o # reduced diagram
1 loops			
e11 e	2	2	1
		2	1
2 loops			
e111 e	2	2	2
e112 2 e	10	10	0
e12 e3 33	14	26	8
e12 23 3 e	8	14	8
		52	18
3 loops			
e112 3 e4 44	32	98	0
e12 33 44 5 5 e	20	108	4
e12 23 4 45 5 e	30	132	48
e12 34 35 4 5 e	140	864	130
e12 e3 45 45 5	64	368	33
e112 33 e3	24	44	0
e12 e34 34 4	48	184	1
e12 34 35 e 55	28	196	16
e12 e23 4 44	76	292	0
e12 23 4 e5 55	100	536	109
e12 34 34 5 5 e	36	209	79
e12 e3 34 5 55	104	584	32
e12 e3 34 44	34	114	0
e112 3 34 4 e	38	114	0
e12 e3 333	7	13	4
e1223 44 e4	38	107	0
e12 e3 44 44	16	44	0
e12 34 34 e4	96	352	56
e112 3 e33	12	24	0
e12 23 34 4 e	42	124	28
e112 e3 33	19	17	10
e112 23 3 e	42	72	10
e12 e3 44 55 5	40	195	16
e112 3 44 e4	32	101	0
e123 e23 3	25	58	19
e112 22 e	see ϕ^4 model		
		4950	595

The diagrams with topology $e_{112|22|e}$ contains 3 static vertices and is equal to a diagram with the same topology from model A, but with external lines $\psi'\psi$ (for model E external lines are $\psi'^+\psi$). Moreover, according to the rules of diagram reduction applying to the model A, dynamic diagrams with such external lines are reduced to purely static diagrams of the model ϕ^4 . Thus, the reduction method allowed us to select a purely static part of the model E.

Appendix C

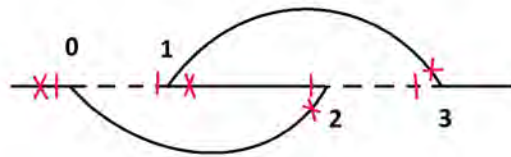
In this Appendix, the calculation of 2 loop diagrams corresponding to the Green function $\Gamma_{\psi'+\psi'}$ of model E. will be analyzed.

Nickel Nomenclature

In this thesis, Nickel's nomenclature is used to describe the dynamic diagrams of the model E. Since this model contains not one, but 6 types of fields, this should be displayed in the conditional graph record through the Nickel nomenclature. We write the mnemonic rules for extending the Nickel nomenclature to the dynamical case:

- Number the vertices of the graph starting from 0.
- Consider the vertices in ascending order. For each vertex we write out vertices adjacent to it, and whose number is greater than that of the considered vertex. If the top has an outer tail, then the letter 'e' corresponds to it.
- Introduce the notation for the fields:: $\psi \rightarrow p$, $\psi' \rightarrow P$, $\psi^+ \rightarrow r$, $\psi'^+ \rightarrow R$, $m \rightarrow m$, $m' \rightarrow M$.

Consider a graph:



The corresponding Nickel nomenclature is written as:

$$e12|23|3|e| : 0R_mM_pr|rP_pr|mM|0p|$$

.

Two-loop calculation of E-model diagrams

In the two-loop approximation, there are 4 types of topologies for this model: $e111|e$, $e112|2|e|$, $e12|e3|33|$ and $e12|23|3|e|$. The first topology is formed by purely static vertices, i.e. it completely corresponds to the diagram of the model A with external tails $\psi'\psi'$. Therefore, we will begin consideration from topology $e112|2|e|$.

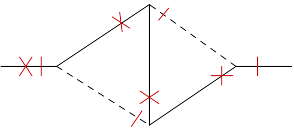
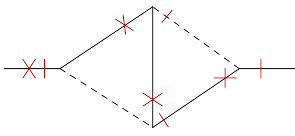
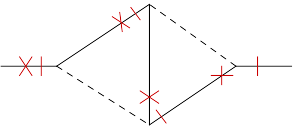
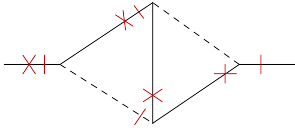
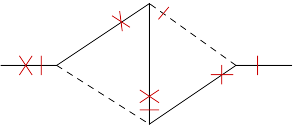
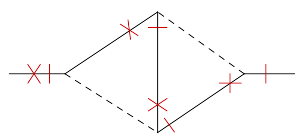
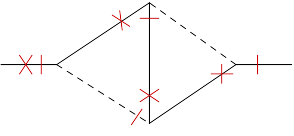
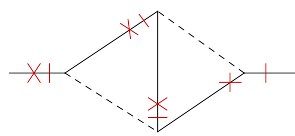
Topology $e112|2|e|$

As mentioned in the section 3.2, the diagram reduction method allows to completely remove this topology. We give a list of the diagrams included in this topology and show which combination will vanished.

1. $112|2|e|:0R_pR_rp_pr|mm|0P|$
 $SC = 1 \quad 1 + 4 = 0$
2. $112|2|e|:0P_pr_rP_rp|mm|0R|$
 $SC = 1 \quad 2 + 3 = 0$
3. $e112|2|e|:0P_pR_rp_rp|mm|0R|$
 $SC = 1 \quad 2 + 3 = 0$
4. $e112|2|e|:0R_pr_rP_pr|mm|0P|$
 $SC = 1 \quad 1 + 4 = 0$
5. $e112|2|e|:0P_pr_rp_rp|Mm|0R|$
 $SC = 1 \quad 5 + 6 = 0$
6. $e112|2|e|:0R_pr_rp_pr|Mm|0P|$
 $SC = 1 \quad 5 + 6 = 0$

Topology $e12|23|3|e|$

Using diagram reduction, it can be shown that only time versions 0123 and 0213 remain. Consideration of two-loop diagrams in $\Gamma_{\psi'+\psi'}$ is simplified by the fact that the sum of the diagrams, when conveniently writing momentum, gives a trivial record for the sum of all the time versions.

<p>1. $e12 23 3 e : 0P_mM_rP pr_rp Mm 0R$ $SC = 1$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Time versions :</i> 3012 0312 3021 0321 3201 0132</p>	<p>5 $e12 23 3 e : 0P_mM_rP pr_rp mm 0R$ $SC = 1$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Time versions :</i> 0132 0213 0321 0312 0123 0231 3021 3012</p>
<p>2. $e12 23 3 e : 0P_mm_rP pr_Rp mm 0R$ $SC = 1$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Time versions :</i> 3021 3102 3012 0312 0321 0231</p>	<p>6. $e12 23 3 e : 0P_mm_rP pr_Rp Mm 0R$ $SC = 1$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Time versions :</i> 0312 3102 0321 3201 3012 3120 3021 3210</p>
<p>3. $e12 23 3 e : 0P_mM_rP pR_rp mm 0R$ $SC = 1$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Time versions :</i> 0123 0312 0132 3012</p>	<p>7. $e12 23 3 e : 0P_mm_rP Pr_rp mm 0R$ $SC = 1$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Time versions :</i> 0213 0321 0231 3021</p>
<p>4. $e12 23 3 e : 0P_mm_rP Pr_rp Mm 0R$ $SC = 1$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Time versions :</i> 3210 3021 3201 0321</p>	<p>8. $e12 23 3 e : 0P_mm_rP pR_Rp mm 0R$ $SC = 1$</p>  <p style="text-align: right;"><i>Time versions :</i> 3120 3012 3102 0312</p>

Consider separately the sum of temporary versions 0123 and 0213.

Group I: time version 0213

$$\frac{-2}{(k^2u + k^2 + \tau)(q^2u + q^2 + \tau)((k - q)^2 + q^2 + \tau)((k - q)^2 + uk^2 + uq^2 + \tau)} \quad (163)$$

We introduce the notation: $(-2)\bar{I}$. And one can write the Feynman representation:

$$\begin{aligned} v_1 &\leftrightarrow ((k - q)^2 + \tau) \\ v_2 &\leftrightarrow (q^2u + q^2 + \tau) \\ v_3 &\leftrightarrow (k^2u + k^2 + \tau) \\ v_4 &\leftrightarrow (k^2u + (k - q)^2 + q^2u + \tau) \end{aligned}$$

Then the matrix v and corresponding $\det v$ from chapter 1 have a form:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 + v_3(1 + u) + v_4(1 + u) & -v_4 - v_1 \\ -v_4 - v_1 & v_1 + v_2(1 + u) + v_4(1 + u) \end{pmatrix} \quad (164)$$

$$\det v = 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + 4v_2v_3 + 2v_1v_4 + 4v_2v_4 + 4v_3v_4 + 3v_4^2 \quad (165)$$

Using the Sector Decomposition method (see. Chapter 1), we divide the area of integration into sectors and find the result for each of them:

$$\bar{I}_{12} = \frac{1}{12} \left(5 \log[2] - 3 \log[3] + 7(\log[11] - \log[7] - 6\sqrt{3} \tanh^{-1}(\sqrt{3})) + 6\sqrt{3} \tanh^{-1}(2\sqrt{3}) \right) \quad (166)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{12} &= \bar{I}_{13} \\ \bar{I}_{14} &= \frac{1}{24} (16 \log[2] + 3 \log[3] + 15 \log[5] + 7 \log[7] - 22 \log[11]) \\ \bar{I}_2 &= \bar{I}_3 \\ \bar{I}_{31} &= -\frac{9}{4} \log[2] + \frac{3}{4} \log[3] - \frac{5}{8} \log[5] + \frac{7}{8} \log[7] - \frac{1}{8} \log[11] - \\ &\quad - \frac{4\sqrt{3} \tanh^{-1}(\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} \tanh^{-1}(2\sqrt{3})}{8} \end{aligned} \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{32} &= \frac{1}{12} 7 \log[2] - \frac{7 \log[3]}{8} - \frac{7 \log[7]}{12} + \frac{25 \log[5]}{24} \\ \bar{I}_{34} &= \frac{\log[2]}{6} - \frac{5 \log[5]}{8} - \frac{11 \log[11]}{24} + \frac{\log[3]}{4} + \frac{7 \log[7]}{8} \\ \bar{I}_4 &= \frac{7 \log[3]}{8} - \frac{5 \log[5]}{24} - \frac{35 \log[7]}{24} + \frac{11 \log[11]}{12} \end{aligned}$$

Taking into account coefficients $\Gamma(\varepsilon)$ and -2 in the Feynman representation Chapter 1, we get:

$$\begin{aligned} \sum \bar{I} &= 2\bar{I}_{13} + \bar{I}_{14} + 2(\bar{I}_{31} + \bar{I}_{32} + \bar{I}_{34}) + \bar{I}_4 = \frac{3}{4} \log\left(\frac{3}{4}\right) \\ \Rightarrow (-2) \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4} \sum \bar{I} &= -\frac{3 \log\left(\frac{4}{3}\right)}{8\varepsilon} \end{aligned} \quad (168)$$

The answer looks like:

$$\Rightarrow (g_3, u) \quad (169)$$

$$-\frac{g_3^4}{\varepsilon 2u(u+1)^2} \left(-u \log(u) + (u+1) \log\left[\frac{(u+1)^2}{u+2}\right] + \log\left[\frac{4}{u+2}\right] \right)$$

$$\Rightarrow (f, w) \quad (170)$$

$$-\frac{f^2 w}{\varepsilon 2(w+1)^2} \left(\frac{1}{w} \log(w) + \frac{(w+1)}{w} \log\left[\frac{(w+1)^2}{(2w+1)w}\right] + \log\left[\frac{4w}{1+2w}\right] \right)$$

Group II: time version 0123

$$\frac{2((k-q)^2 - k^2)(q^2 - (k-q)^2)}{(k^2 + t)(uk^2 + k^2 + t)(q^2 + t)(uq^2 + q^2 + t)((k-q)^2 + t)(k^2 + (k-q)^2 + q^2 + 3t)} \quad (171)$$

To use the method SD, we write this integral so as to remove the multiplier in the numerator:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{(k^2 + t)(uk^2 + k^2 + t)(uq^2 + q^2 + t)(k^2 + (k-q)^2 + q^2 + 3t)} \\ & - \frac{2}{(uk^2 + k^2 + t)(uq^2 + q^2 + t)((k-q)^2 + t)(k^2 + (k-q)^2 + q^2 + 3t)} \\ & - \frac{(k^2 + t)(uk^2 + k^2 + t)(q^2 + t)(uq^2 + q^2 + t)}{2} = \\ & = 8I^{(1)} - 2I^{(2)} - 2I^{(3)} \end{aligned} \quad (172)$$

- 1 contribution $I^{(1)}$

$$\begin{aligned} v_1 & \leftrightarrow (k^2 + t) \\ v_2 & \leftrightarrow (2k^2 - 2kMq + 2q^2 + 3t) \\ v_3 & \leftrightarrow (k^2 + t + k^2u) \\ v_4 & \leftrightarrow (q^2 + t + q^2u) \end{aligned}$$

$$\text{Then det} = (v_1 + 2v_2 + 2v_3)(2v_2 + 2v_4) - v_2^2$$

$$I_{12}^{(1)} = \frac{1}{112\varepsilon} - 0.0126349$$

$$I_{14}^{(1)} = 0.0121109 + \frac{1}{12\varepsilon}$$

$$I_2^{(1)} = 0.0147803$$

$$I_{32}^{(1)} = 0.00592873 + \frac{1}{24\varepsilon}$$

$$I_{34}^{(1)} = 0.0156338 + \frac{1}{24\varepsilon}$$

$$I_{41}^{(1)} = 0.0284238$$

$$I_{42}^{(1)} = 0.0123895$$

$$I_{43}^{(1)} = 0.0172003$$

First contribution gives:

$$\Rightarrow I^{(1)} \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4}, \quad (173)$$

$$I^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon(u+1)^2} + \frac{3}{2(u+1)^2} - \frac{3 \log(2)}{(u+1)^2} + \frac{3 \log(3)}{2(u+1)^2} - \frac{\log(u+1)}{u(u+1)^2} \quad (174)$$

• 2 contribution, $I^{(2)}$

$$v_1 \leftrightarrow (k^2 + q^2 - 2kqM + t)$$

$$v_2 \leftrightarrow (2k^2 - 2kMq + 2q^2 + 3t)$$

$$v_3 \leftrightarrow (k^2 + t + k^2u)$$

$$v_4 \leftrightarrow (q^2 + t + q^2u)$$

Then $\det v = (v_1 + 2v_2 + 2v_3)(v_1 + 2v_2 + 2v_4) - (v_2 + v_1)^2$

$$I_{12}^{(2)} = 0.0251902$$

$$I_{13}^{(2)} = I_{14}^{(2)} = 0.0351295$$

$$I_2^{(2)} = 0.0137288$$

$$I_{31}^{(2)} = 0.0256404$$

$$I_{32}^{(2)} = 0.012085$$

$$I_{34}^{(2)} = 0.0155663$$

Second contribution gives:

$$\Rightarrow I^{(2)} \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4}, \quad (175)$$

$$\Rightarrow I^{(2)} = \frac{\log\left(\frac{64}{27}\right)}{(u+1)^2} \quad (176)$$

- 3 contribution, $I^{(3)}$

$$v_1 \leftrightarrow (k^2 + t)$$

$$v_2 \leftrightarrow (q^2 + t)$$

$$v_3 \leftrightarrow (k^2 + t + k^2 u)$$

$$v_4 \leftrightarrow (q^2 + t + q^2 u)$$

Then $\det = (v_1 + 2v_3)(v_2 + 2v_4)$

$$I_{14}^{(3)} = \frac{0.0449813\varepsilon/2 + 0.0555556}{\varepsilon/2}$$

$$I_{12}^{(3)} = \frac{0.0420155\varepsilon/2 + 0.111111}{\varepsilon/2}$$

$$I_1^{(3)} = I_2^{(3)}$$

$$I_{32}^{(3)} = \frac{0.0362953\varepsilon/2 + 0.0555556}{\varepsilon/2}$$

$$I_{34}^{(3)} = \frac{0.0301344\varepsilon/2 + 0.0277778}{\varepsilon/2}$$

$$I_3^{(3)} = I_4^{(3)}$$

Third contribution gives:

$$\Rightarrow I^{(3)} \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4}, \quad (177)$$

$$I^{(3)} = \frac{4}{\varepsilon(u+1)^2} + \frac{4}{(u+1)^2} - \frac{4 \log(u+1)}{u(u+1)^2} \quad (178)$$

The result, $8I^{(1)} - 2I^{(2)} - 2I^{(3)}$:

$$\Rightarrow (8I^{(1)} - 2I^{(2)} - 2I^{(3)}) \frac{\Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2}{4}, \quad (179)$$

$$8I^{(1)} - 2I^{(2)} - 2I^{(3)} = \frac{4}{(u+1)^2} - 2 \frac{9 \log\left(\frac{4}{3}\right)}{(u+1)^2} \quad (180)$$

Given the charges, the answers look like:

$$\Rightarrow (g_3, u) \quad (181)$$

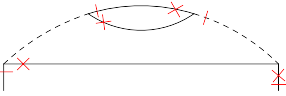
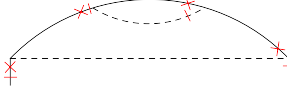

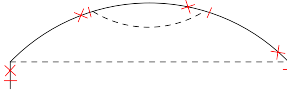
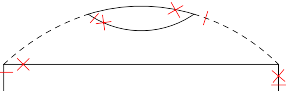
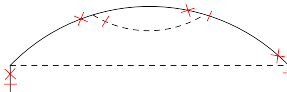
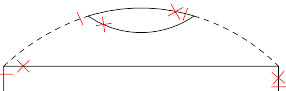
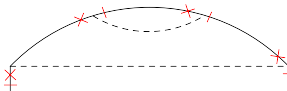
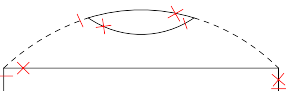
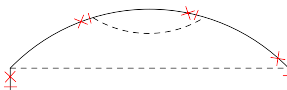
$$g_3^4 \left(\frac{1}{\varepsilon(u+1)^2} - \frac{9 \log\left(\frac{4}{3}\right)}{2\varepsilon(u+1)^2} \right)$$

$$\Rightarrow (f, w) \quad (182)$$

$$f^2 \left(\frac{1}{\varepsilon(w+1)^2} - \frac{9 \log\left(\frac{4}{3}\right)}{2\varepsilon(w+1)^2} \right)$$

Topology $e12|e3|33||$

We will perform similar calculations for the following topology.

1. $e12 e3 33 : 0P_{rp}mm 0R_mM Pr_{rp} $ $SC = 1$		<i>Time versions :</i> 1320 1032 1302 0132	6. $e12 e3 33 : 0P_{mm}rp 0R_pR Mm_{rp} $ $SC = 1$		<i>Time versions :</i> 1320 1032 1302 0132
2. $e12 e3 33 : 0P_{rp}mM 0R_mM pr_{rp} $ $SC = 1$		<i>Time versions :</i> 0132 1023 0123 1032 0213 1302	7. $e12 e3 33 : 0P_{mm}rP 0R_pR mm_{rp} $ $SC = 1$		<i>Time versions :</i> 1023 0132 1032 0123 1302 0213
3. $e12 e3 33 : 0P_{rp}mm 0R_mM Rp_{pr} $ $SC = 1$		<i>Time versions :</i> 1320 1032 1302 0132	8. $e12 e3 33 : 0P_{mm}rP 0R_{pr} mM_{rp} $		<i>Time versions :</i> 0231 0123 0213 1023
4. $e12 e3 33 : 0P_{rp}mM 0R_{mm} pR_{rp} $ $SC = 1$		<i>Time versions :</i> 0231 0123 0213 1023	9. $e12 e3 33 : 0P_{mm}rP 0R_{pr} mm_{rp} $ $SC = 1$		<i>Time versions :</i> 0231 0123 0213 1023
5. $e12 e3 33 : 0P_{rp}mM 0R_{mm} pr_{rp} $ $SC = 1$		<i>Time versions :</i> 0231 0123 0213 1023	10. $e12 e3 33 : 0P_{mm}rp 0R_pR Rp_{mm} $		<i>Time versions :</i> 1320 1032 1302 0132

As can be seen from the figure, this topology can be conveniently divided into two groups, taking into account the arrangement of massless lines: the first group is diagrams 1 through 5, the second group is diagrams 6 through 10.

I group:

$$4 \frac{k^2 - (k - q)^2}{(k^2 + t)(q^2 + t)(q^2 + q^2 + t)^2(k^2 + (k - q)^2 + q^2 + 3t)} = 4\bar{I} \quad (183)$$

To use the SD method, let's write \bar{I} this integral so as to remove the multiplier in the numerator:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(q^2+t)(q^2+q^2+t)^2(k^2+(k-q)^2+q^2+3t)} - \frac{1}{(k^2+t)(q^2+t)(q^2+q^2+t)^2} + \\ & + \frac{1}{(q^2+t)(q^2+q^2+t)^2(k^2+(k-q)^2+q^2+3t)} + \frac{1}{(k^2+t)(q^2+q^2+t)^2(k^2+(k-q)^2+q^2+3t)} = \\ & = I^{(1)} - I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)} \end{aligned} \quad (184)$$

Now we have 4 separate integrals requiring computation:

- 1 contribution, $I^{(1)}$

$$v_3 \leftrightarrow (2k^2 - 2kMq + 2q^2 + 3), \quad v_2 \leftrightarrow (q^2u + q^2 + 1), \quad v_1 \leftrightarrow (q^2 + 1) \quad (185)$$

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= -\frac{1}{12\varepsilon} - 0.104274 \\ I_2^{(1)} &= -\frac{5}{48\varepsilon} - 0.209929 \\ I_3^{(1)} &= 0.0124075 \end{aligned}$$

First contribution gives:

$$I^{(1)} : \quad \frac{3}{32} \left(-\frac{2}{\varepsilon} + 4 - 6 \log(4) + \log(3) \right) \quad (186)$$

- 2 contribution, $I^{(2)}$

$$v_1(k^2+t) + v_2(q^2+q^2+t)^2 + v_3(q^2+t) \quad (187)$$

$$\begin{aligned} I_1^{(2)} &= 0.274653 \\ I_2^{(2)} &= -0.4086974 \\ I_3^{(2)} &= -0.25225 \end{aligned}$$

Second contribution gives

$$I^{(2)} : \quad 1 - \log(4) = -0.3862944$$

- 3 contribution, $I^{(3)}$, is equal to contribution $I^{(1)}$
- 4 contribution, $I^{(4)}$

$$v_3 \leftrightarrow (2k^2 - 2kMq + 2q^2 + 3), \quad v_1 \leftrightarrow (k^2 + 1), \quad \leftrightarrow v_2 (2q^2 + 1) \quad (188)$$

$$\begin{aligned} I_{12}^{(4)} &= 0.0796134 \\ I_{13}^{(4)} &= 0.0180497 \\ I_{21}^{(4)} &= \frac{1}{6\varepsilon} + 0.0590162 \\ I_{23}^{(4)} &= 0.0229395 + \frac{1}{12\varepsilon} \\ I_3^{(4)} &= 0.0107872 \end{aligned}$$

Fourth contribution gives:

$$I^{(4)} : \quad \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \log\left(\frac{27}{16}\right) = \frac{1}{8\varepsilon} + 0.190406$$

Result, $(I^{(1)} - I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)}) :$

$$-\frac{1}{8\varepsilon} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} 3 \log(2) + \frac{9 \log(3)}{16} \quad (189)$$

It should be noted that the original expression contains divergence in the subgraph. Using the R' operation (see Chapter 1), take into account the corresponding counterterm. The contribution from the R' operation is:

$$-\frac{1}{4(1+u)^2\varepsilon^2} - \frac{1}{8u(1+u)^2\varepsilon} + \frac{(1+2u) \log[1+u]}{8u^2(1+u)^2\varepsilon} \quad (190)$$

Then the final answer for the first group of topology is $e12|e3|33||$, taking into account the factor $\Gamma(\varepsilon) (\Gamma(2 - \varepsilon/2))^2 / 4$ and 4 :

$$-\frac{1}{2(1+u)^2\varepsilon^2} + \frac{u-1}{2u(1+u)^2\varepsilon} - \frac{9}{4(1+u)^2\varepsilon} \log\left[\frac{4}{3}\right] + \frac{(1+2u) \log[1+u]}{2u^2(1+u)^2\varepsilon} \quad (191)$$

Thus, for different pairs of charges, the answer is:

$$\Rightarrow (g_3, u) \quad (192)$$

$$g_3^4 \left(\frac{4}{(1+u)^2 \varepsilon^2} + \frac{2}{(1+u)^2 \varepsilon} - \frac{9}{(1+u)^2 \varepsilon} \log \left[\frac{4}{3} \right] \right)$$

$$\Rightarrow (f, w) \quad (193)$$

$$f^2 \left(\frac{4}{(1+w)^2 \varepsilon^2} + \frac{2}{(1+w)^2 \varepsilon} - \frac{9}{(1+w)^2 \varepsilon} \log \left[\frac{4}{3} \right] \right)$$

II group

$$\frac{-1}{(k^2 + t)(q^2 u + q^2 + t)^2 (u(k^2 - 2kMq + q^2) + k^2 + q^2 u + t)} = \bar{I} * (-4) \quad (194)$$

Again, we turn to the representation of the Feynman:

$$\Rightarrow v_3 \leftrightarrow (u(k^2 - 2kMq + q^2) + k^2 + t + q^2 u)$$

$$v_1 \leftrightarrow (k^2 + t)$$

$$v_2 \leftrightarrow (q^2 u + q^2 + t)$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 + v_3(1+u) & -uv_3 \\ -uv_3 & v_2(1+u) + v_3(2u) \end{pmatrix} \quad (195)$$

$$\det v = v_1 v_2 + uv_1 v_2 + 2uv_1 v_3 + v_2 v_3 + 2uv_2 v_3 + u^2 v_2 v_3 + 2uv_3^2 + u^2 v_3^2 \quad (196)$$

Using the SD method, we calculate the contribution of each sector separately:

$$I_{12} = \frac{1}{4} \log [11] - \frac{3}{4} \log [2]$$

$$I_{13} = \frac{1}{2} \log [2] + \frac{5}{12} \log [5] - \frac{5}{12} \log [11]$$

$$I_{21} = \frac{1}{6\varepsilon} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \log [11] - \frac{1}{12} \log [2] - \frac{1}{3} \log [3]$$

$$I_{23} = \frac{1}{12\varepsilon} + \frac{1}{24} + \frac{1}{3} \log [3] - \frac{1}{6} \log [2] + \frac{3 \log [7]}{8} - \frac{5 \log [11]}{12}$$

$$I_3 = \frac{5}{12} \log [11] - \frac{5}{12} \log [5] - \frac{3}{8} \log [7] + \frac{3}{8} \log [3]$$

$$\Rightarrow \sum I_i = \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \log \left[\frac{27}{16} \right]$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \sum I_i \frac{1}{4} \Gamma[\varepsilon] (\Gamma[2 - \varepsilon/2])^2 = -\frac{1}{16\varepsilon^2} + \frac{1}{32\varepsilon} - \frac{1}{32\varepsilon} \log \left[\frac{27}{16} \right]$$

In general

$$\begin{aligned} \bar{I} = & -\frac{1}{2(1+u)^3\varepsilon^2} + \frac{1}{4(1+u)^3\varepsilon} + \frac{1}{4u(1+u)^3\varepsilon} [2(1+u) \log[2] + u \log[u] - \\ & -2 \log \left[\frac{(2+u)}{(1+u)} \right] - u \log [(1+u)^2(2+u)]] \end{aligned} \quad (197)$$

As in the previous case, this diagram has divergence in the subgraph. The corresponding contribution from the R' operation is equal to

$$\Rightarrow = \frac{1 - \log[2]}{16\varepsilon} - \frac{1}{8\varepsilon^2} \quad (198)$$

The final answer for this group is:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (g_3, u) & \quad (199) \\ & g_3^4 \left(\frac{8}{(1+u)^3\varepsilon^2} - \frac{2}{(1+u)^3\varepsilon} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{u(1+u)^3\varepsilon} [2(1+u) \log[2] + 2 \log[1+u] + \right. \\ & \quad \left. + u \log[u] - (2+u) \log[2+u]] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f, w) & \quad (200) \\ & f^2 \left(\frac{8w}{(1+w)^3\varepsilon^2} - \frac{2w}{(1+w)^3\varepsilon} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2w^2}{(1+w)^3\varepsilon} \left[\frac{(1+w)}{w} \log[4] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 \log[1+w] - \frac{(2w+1)}{w} \log[2w+1] \right] \right) \end{aligned}$$

Using these results, and also considering in a similar way the values of Γ_2 and Γ_7 , we obtain the analytical results presented in section 3.2.

References

- [1] Five-loop renormalization group functions of $o(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and ε^5 : (phys. lett. b 272 (1991) 39) / H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde et al. // Physics Letters B. — 1993. — Vol. 319, no. 4. — P. 545.
- [2] Kompaniets M., Panzer E. Renormalization group functions of ϕ^4 theory in the $\overline{\text{ms}}$ -scheme to six loops // arXiv preprint arXiv:1606.09210. — 2016.
- [3] Antonov N., Vasil'ev A. Critical dynamics as a field theory // Theoretical and Mathematical Physics. — 1984. — Vol. 60, no. 1. — P. 671–679.
- [4] Critical slowing down near the multiferroic phase transition in mnwo_4 / D. Niermann, C.P. Grams, P. Becker et al. // Physical review letters. — 2015. — Vol. 114, no. 3. — P. 037204.
- [5] Batkovich D., Chetyrkin K., Kompaniets M. Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $o(n)$ -symmetric ϕ^4 model // Nuclear Physics B. — 2016. — Vol. 906. — P. 147–167.
- [6] Kompaniets M., Panzer E. Minimally subtracted six-loop renormalization of $o(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and critical exponents // Physical Review D. — 2017. — Vol. 96, no. 3. — P. 036016.
- [7] Schnetz O. Numbers and functions in quantum field theory // Physical Review D. — 2018. — Vol. 97, no. 8. — P. 085018.
- [8] Aharony A. Critical behavior of anisotropic cubic systems // Physical Review B. — 1973. — Vol. 8, no. 9. — P. 4270.
- [9] Ketley I., Wallace D. A modified epsilon expansion for a hamiltonian with cubic point-group symmetry // Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General. — 1973. — Vol. 6, no. 11. — P. 1667.
- [10] Nelson D., Kosterlitz J., Fisher M. Renormalization-group analysis of bicritical and tetracritical points // Physical Review Letters. — 1974. — Vol. 33, no. 14. — P. 813.

- [11] Brézin E., Le Guillou J., Zinn-Justin J. Discussion of critical phenomena for general n -vector models // *Physical Review B*. — 1974. — Vol. 10, no. 3. — P. 892.
- [12] Shalaev B., Antonenko S., Sokolov A. Five-loop ε for random ising model and marginal spin dimensionality for cubic systems // *Physics Letters A*. — 1997. — Vol. 230, no. 1-2. — P. 105–110.
- [13] Kleinert H., Thoms S., Schulte-Frohlinde V. Stability of a three-dimensional cubic fixed point in the two-coupling-constant φ^4 theory // *Physical review b*. — 1997. — Vol. 56, no. 22. — P. 14428.
- [14] Carmona J., Pelissetto A., Vicari E. n -component ginzburg-landau hamiltonian with cubic anisotropy: A six-loop study // *Physical Review B*. — 2000. — Vol. 61, no. 22. — P. 15136.
- [15] Sokolov A. I. // *Fiz. Tverd. Tela*. — 1977. — Vol. 19. — P. 747. — *Sov. Phys. Solid State* 19 (1977) 433.
- [16] Maier I., Sokolov A. Critical-behaviour of cubic-crystals under structure phase-transitions // *IZVESTIYA AKADEMII NAUK SSSR SERIYA FIZICHESKAYA*. — 1987. — Vol. 51, no. 12. — P. 2103–2106.
- [17] Maier I., Sokolov A. Is a cubic crystal “isotropic” in the critical point? // *Ferroelectrics Lett. Sect.* — 1988. — Vol. 9, no. 4. — P. 95–98.
- [18] De Dominicis C. C. de dominicis, e. brézin, and j. zinn-justin, *phys. rev. b* 12, 4945 (1975) // *Phys. Rev. B*. — 1975. — Vol. 12. — P. 4945.
- [19] Halperin B., Hohenberg P., Ma S. Calculation of dynamic critical properties using wilson’s expansion methods // *Physical Review Letters*. — 1972. — Vol. 29, no. 23. — P. 1548.
- [20] Adzhemyan L., Novikov S., Sladkoff L. Calculation of dynamical exponent in model a of critical dynamics to orrder ε^4 // *Vestnic*. — 2008. — no. 4.
- [21] Nalimov M., Sergeev V., Sladkoff L. Borel resummation of the ε -expansion of the dynamical exponent z in model a of the ϕ^4 $o(n)$ theory // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2009. — Vol. 159, no. 1. — P. 499–508.

- [22] De Dominicis C., Peliti L. Field-theory renormalization and critical dynamics above t_c : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems // *Physical Review B*. — 1978. — Vol. 18, no. 1. — P. 353.
- [23] Peliti L. Renormalization group calculations for critical and tricritical dynamics applied to helium // *Dynamical Critical Phenomena and Related Topics*. — Springer, 1979. — P. 189–209.
- [24] Hohenberg P. C., Halperin B. I. Theory of dynamic critical phenomena // *Reviews of Modern Physics*. — 1977. — Vol. 49, no. 3. — P. 435.
- [25] Six-loop ε expansion study of three-dimensional n-vector model with cubic anisotropy / L.Ts. Adzhemyan, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets et al. // *Nuclear Physics B*. — 2019.
- [26] Diagram reduction in problem of critical dynamics of ferromagnets: 4-loop approximation / L.Ts. Adzhemyan, E.V. Ivanova, M.V. Kompaniets, S.Ye. Vorobyeva // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2018. — Vol. 51, no. 15. — P. 155003.
- [27] Multi-loop calculations of anomalous exponents in the models of critical dynamics / L.Ts. Adzhemyan, M. Dančo, M. Hnatič et al. // *EPJ Web of Conferences / EDP Sciences*. — Vol. 108. — 2016. — P. 02004.
- [28] Vorobyeva S., Ivanova E., Serov V. Borel summation of the dynamic index z in the model a of critical dynamics with an account of the strong coupling asymptotics. — 2018.
- [29] Heinrich G. Sector decomposition // *International Journal of Modern Physics A*. — 2008. — Vol. 23, no. 10. — P. 1457–1486.
- [30] Antonov N., Kompaniets M., Lebedev N. Critical behaviour of the o (n)- ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2013. — Vol. 46, no. 40. — P. 405002.
- [31] Antonov N., Kompaniets M., Lebedev N. Critical behavior of the o (n) ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter: Three-loop approximation // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2017. — Vol. 190, no. 2. — P. 204–216.

- [32] Kalagov G., Kompaniets M., Nalimov M. Renormalization-group investigation of a superconducting $u(r)$ -phase transition using five loops calculations // Nuclear Physics B. — 2016. — Vol. 905. — P. 16–44.
- [33] Vermaseren J. A. M. New features of FORM. — 2000. — Oct. — Website: <https://www.nikhef.nl/~form/>. math-ph/0010025.
- [34] Graphstate-a tool for graph identification and labelling / D. Batkovich, Yu. Kirienko, M. Kompaniets, S. Novikov // arXiv preprint arXiv:1409.8227. — 2014.
- [35] Kleinert H., Schulte-Frohlinde V. Exact five-loop renormalization group functions of θ^4 -theory with $o(n)$ -symmetric and cubic interactions. critical exponents up to ε^5 // Physics Letters B. — 1995. — Vol. 342, no. 1-4. — P. 284–296.
- [36] Wilson K., Fisher M. Critical exponents in 3.99 dimensions // Physical Review Letters. — 1972. — Vol. 28, no. 4. — P. 240.
- [37] Ordering fluctuation dynamics in *auagzn2* / F. Livet, M. Fèvre, G. Beutier, M. Sutton // Physical Review B. — 2015. — Vol. 92, no. 9. — P. 094102.
- [38] Critical dynamical exponent of the two-dimensional scalar ϕ^4 model with local moves / W. Zhong, G.T. Barkema, D. Panja, R.C. Ball // Physical Review E. — 2018. — Vol. 98, no. 6. — P. 062128.
- [39] Vasil'ev A. N. Quantum field renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. — Petersburg Inst. Nucl. Phys., St. Petersburg, 1998. — English transl.: The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
- [40] Siggia E., Halperin B., Hohenberg P. Renormalization-group treatment of the critical dynamics of the binary-fluid and gas-liquid transitions // Physical Review B. — 1976. — Vol. 13, no. 5. — P. 2110.
- [41] De Dominicis C., Peliti L. Field-theory renormalization and critical dynamics above t_c : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems // Physical Review B. — 1978. — Vol. 18, no. 1. — P. 353.

- [42] H-model of critical dynamics: Two-loop calculations of ν functions and critical indices / L.Ts. Adzhemyan, A.N. Vasiliev, Yu.S. Kabrits, M.V. Kompaniets // Theoretical and Mathematical Physics. — 1999. — Vol. 119, no. 1. — P. 454–470.
- [43] Folk R., Moser G. Dynamic critical behavior near the superfluid transition in he^3 - he^4 mixtures in two loop order // Physical review letters. — 2002. — Vol. 89, no. 12. — P. 125301.
- [44] De Dominicis C. C. de dominicis and l. peliti, phys. rev. lett. 38, 505 (1977) // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Vol. 38. — P. 505.
- [45] Influence of hydrodynamic fluctuations on the phase transition in the e and f models of critical dynamics / M. Dančo, M. Hnatich, M.V. Komarova et al. // Theoretical and Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 176, no. 1. — P. 888–897.
- [46] Kazakov D., Tarasov O., Shirkov D. Analytic continuation of the results of perturbation theory for the model $g\varphi^4$ to the region $g \gtrsim 1$ // Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika. — 1979. — Vol. 38, no. 1. — P. 15–25.
- [47] Kompaniets M. Prediction of the higher-order terms based on borel resummation with conformal mapping // arXiv preprint arXiv:1604.04108. — 2016.
- [48] Guida R., Zinn-Justin J. Critical exponents of the n -vector model // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1998. — Vol. 31, no. 40. — P. 8103.
- [49] Maier I., Sokolov A. Critical index of impurity ising-models. — 1984.
- [50] Mayer I., Sokolov A., Shalayev B. Critical exponents for cubic and impure uniaxial crystals: most accurate (?) theoretical values // Ferroelectrics. — 1989. — Vol. 95, no. 1. — P. 93–96.
- [51] Varnashev K. Stability of a cubic fixed point in three dimensions: Critical exponents for generic n // Physical Review B. — 2000. — Vol. 61, no. 21. — P. 14660.
- [52] Mudrov A., Varnashev K. Modified borel summation of divergent series and critical-exponent estimates for an n -vector cubic model in three dimensions

- from five-loop ε expansions // Physical Review E. — 1998. — Vol. 58, no. 5. — P. 5371.
- [53] Pakhnin D., Sokolov A. Five-loop renormalization-group expansions for the three-dimensional n -vector cubic model and critical exponents for impure Ising systems // Physical Review B. — 2000. — Vol. 61, no. 22. — P. 15130.
- [54] Folk R., Holovatch Y., Yavors'kii T. Pseudo- ε expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model // Physical Review B. — 2000. — Vol. 62, no. 18. — P. 12195.
- [55] Kudlis A., Sokolov A. Anisotropy of a cubic ferromagnet at criticality // Physical Review E. — 2016. — Vol. 94, no. 4. — P. 042107.
- [56] Kleinert H., Schulte-Frohlinde V. Critical Properties of ϕ^4 -theories. — World Scientific, 2001.
- [57] Large-order asymptotes for dynamic models / J. Andreanov, J. Honkonen, M. Komarova, M. Nalimov // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2006. — Vol. 39, no. 25. — P. 7815.