САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

АКСЕНОВА Елена Валентиновна

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И РАССЕЯНИЯ ВОЛН В ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант –
доктор физико-математических наук,
профессор РОМАНОВ В.П.

Санкт-Петербург 2008

Оглавление

Введение

По своим физическим свойствам жидкие кристаллы (ЖК) являются уникальными объектами — они занимают промежуточное положение между жидкостями и кристаллическими твердыми телами. С одной стороны, они обладают ориентационной упорядоченностью, с другой — флуктуации в них аномально велики. Наличие ориентационной упорядоченности обусловлено тем, что составляющие жидкий кристалл молекулы сильно вытянуты, при этом различные ориентации длинных осей молекул оказываются энергетически неэквивалентными. Таковы одноосные и двухосные нематики. В смектических жидких кристаллах (СЖК) помимо ориентационной упорядоченности имеет место одномерная пространственная упорядоченность — систему можно рассматривать как совокупность плоских жидких слоев, отделенных друг от друга правильными промежутками.

Необычная пространственная структура ЖК приводит к эффектам, которых нет в других системах. К ним относятся аномальная оптическая активность, наличие нескольких точек фазовых переходов первого и второго рода, высокая чувствительностью к внешним полям. Жидкие кристаллы проявляют необычное гидродинамическое поведение, вызванное наличием нескольких коэффициентов вязкости и коэффициентов ориентационной упругости. Они могут образовывать свободно подвешенные пленки толщиной несколько молекулярных диаметров.

Актуальность. В настоящее время жидкие кристаллы являются объектом интенсивного изучения как экспериментального, так и теоретического. Уникальность свойств ЖК обуславливает их широкое практическое применение. Благодаря необычным оптическим свойствам их используют в средствах отображения информации (дисплеи и жидкокристаллические индикаторы), в различного рода измерительных приборах, в системах записи, хранения и передачи информации. Поэтому теоретический анализ корреляционных функций, распространения и рассеяния света в жидких кристаллах стал особенно актуальным как для описания оптических свойств, так и для создания новых устройств на ЖК.

Целью настоящей работы является последовательное описание корреляционных функций и исследование вопросов, относящихся к теории распространения и рассеяния волн в жидких кристаллах. Эта проблема включает в себя описание распространения света с учетом эффектов отклонения от геометрической оптики, изучение поля точечного источника в анизотропных средах, развитие теории рассеяния света как однократного, так и многократного, расчет пространственных корреляционных функций флуктуирующих величин, исследование когерентных эффектов и временны́х корреляций многократного рассеяния.

Очень малая теплота ориентационного плавления приводит к тому, что в жидких кристаллах очень велики флуктуации ориентации. Хорошо разработанный теоретический аппарат для исследования сильноразвитых флуктуаций касается в основном пространственно однородных в среднем систем [1–4]. В то же время для физических приложений особенно в последнее время представляют интерес среды, имеющие регулярную пространственную структуру. К ним относятся в частности, некоторые типы ЖК — холестерические и смектические, тонкие пленки смектиков A, C и C*.

Описание флуктуаций в таких средах обычно опирается на наличие малых параметров, которые позволяют свести решение задачи к флуктуациям в однородной среде. Это относится к случаям, когда радиус корреляции флуктуаций много меньше характерного масштаба изменения свойств среды. К противоположному случаю относятся смектические жидкие кристаллы. Здесь радиус корреляции много больше периода смектических слоев, имеющего порядок молекулярного размера. В этом случае задача сводится к исследованию флуктуаций в некоторой эффективно однородной анизотропной среде [5].

Промежуточная ситуация существует для холестерических жидких кристаллов (ХЖК) или твист-ячеек с нематическими жидкими кристаллами (НЖК). Здесь период структуры значительно больше молекулярных размеров. Шаг спирали в ХЖК имеет порядок длины волны видимого света, в твист-ячейках НЖК — порядка толщины ячейки. В то же время радиус корреляции в таких системах реально ограничивается либо внешним полем, либо периодом структуры, либо размером образца.

Изучение флуктуаций директора в ЖК позволяет получить важную информацию о строении и свойствах среды. ЖК очень чувствительны ко внешним полям и изменениям температуры. Это делает их интересным объектом как для экспериментального, так и для теоретического исследования. Для описания флуктуаций используют разные методы. Одним из основных является гауссова теория флуктуаций. В рамках этой теории изучается корреляционная функция [5–8], а также эффект Фредерикса — ориентационный фазовый переход под действием электрического или магнитного поля. Распределение директора в ХЖК при переходе Фредерикса получено в работе [9]. В работах [5, 6] был изучен случай ХЖК с мелкомасштабной периодичностью. Малость шага спирали по сравнению с длиной волны флуктуаций позволяет производить усреднение по большому числу периодов и применять методы теории Флоке. Случай ЖК, обладающих крупномасштабной периодичностью, изучен слабо. Методы теории Флоке здесь уже неэффективны. В работе [10] показано, что некоторые свойства ХЖК с плавной периодичностью могут быть описаны с точки зрения НЖК, которые являются “предельными” ХЖК с бесконечно большим шагом спирали. Однако такой подход не всегда эффективен. Так, в НЖК радиус корреляций бесконечен даже вдали от критической точки, а наличие периодической структуры ХЖК позволяет ограничить этот радиус. Поэтому для решения проблем, связанных с плавно меняющимися свойствами системы, представляется эффективным использовать метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ).

Кроме гауссовой теории для описания флуктуаций применяют и статистическую теорию. Это позволяет описывать поведение директора вблизи точек фазовых переходов. В работе [11] с помощью теории среднего поля описан фазовый переход из изотропной фазы в упорядоченную фазу ХЖК, при этом были учтены пространственные корреляции молекул. Новое направление изучения флуктуаций директора — численное моделирование [12, 13]. Оно дает возможность прямого изучения флуктуаций директора. Поскольку на практике изучение флуктуаций возможно лишь по результатам экспериментов по рассеянию света.

Проблема расчета корреляционной функции осложняется, если считать систему ограниченной. Учет границ и энергии сцепления в расчете корреляционной функции проводился различными методами: разложением по собственным функциям [14,15], при помощи интегрирования по траекториям [14, 16], методом самосопряженных операторов [17, 18].

В первой главе методом ВКБ [19] исследован случай коротковолновых флуктуирующих мод и детально проанализировано поведение флуктуаций в окрестности точек поворота, где приближение ВКБ становится неприменимым. Окрестности точек поворота изучены при помощи построения эталонного уравнения. Проблема анализа точек поворота встречается также в теории распространения волн, например, вблизи каустик [20] или при изучении трансформации мод [21], а также в теории упругости, например, для балки Тимошенко [22].

Холестерические и смектические жидкие кристаллы представляют собой трехмерные среды с одномерной периодичностью. Как известно [4, 23, 24], в телах с одномерной упорядоченностью средний квадрат флуктуационного смещения расходится логарифмически с ростом размеров образца. Так в смектических жидких кристаллах корреляционная функция, описывающая периодичность смектических слоев, ведет себя как $r^{-\eta}$, где показатель η мал и положителен. Такое алгебраическое убывание пространственных корреляций означает, что структурный фактор рентгеновского рассеяния ведет себя по степенному закону, а не имеет вид дельта-функции [25,26]. Анизотропия, связанная с таким поведением, впервые наблюдалась в СЖК Алс-Нильсеном и др. [27]. Затем она была подтверждена для различных термотропных [28–30] и лиотропных [31–33] ламеллярных фаз. Таким же образов ведут себя блок-сополимеры с ламеллярной структурой [34].

Хотя логарифмическая расходимость среднего квадрата флуктуаций хорошо известна благодаря рентгеновским измерениям, влияние границ не было изучено достаточно подробно. Граничные условия особенно важны для смектических мембран — свободно подвешенных смектических пленок. В таких пленках смектические слои выстраиваются параллельно двум границам пленка–воздух. Слои имеют очень высокую степень однородности, что позволяет изучать монодоменные образцы различной толщины. При этом площадь поверхности достигает тысяч мм^2, а толщина может изменяться от тысяч слоев (десятки микрон) до двух слоев (порядка 5 нанометров). Такой широкий диапазон позволяет экспериментально изучать характер расходимости среднего квадрата флуктуаций. В первой главе рассмотрено влияние границ на явление неустойчивости Ландау–Пайерлса в смектических системах конечного размера.

В последние годы большой интерес проявляется к исследованию оптических свойств самых разнообразных систем со сложной структурой. Прежде всего это касается фотонных кристаллов [35,36] и жидкокристаллических соединений [37–40]. Интерес к этим объектам обусловлен их широким практическим применением в системах отображения и передачи информации [37, 38]. Центральной проблемой с точки зрения оптических свойств здесь является исследование распространения света в структурах с одномерной, двумерной и трехмерной периодичностью. В частности, изучаются задачи дифракции света на фотонных кристаллах и киральных периодических средах [40]. При решении этих задач широко используется аналогия с задачей дифракции рентгеновских лучей в кристаллах и тонких слоистых структурах. Другой круг задач связан с исследованием запрещенных зон и волновых каналов, описание которых аналогично эффекту туннелирования в квантовой механике и теории распространения акустических и электромагнитных волн в средах с плавно меняющимися свойствами [41, 42].

Одной из основных особенностей жидких кристаллов являются их необычные оптические свойства. Это прежде всего анизотропия, как одноосная, так и двухосная, очень большая оптическая активность, селективное отражение света, необычно сильное рассеяние света и т.д. [43]. Большой интерес с оптической точки зрения представляют одномерно-периодические жидкие кристаллы. К ним относятся, прежде всего, холестерические жидкие кристаллы. Эти жидкие кристаллы являются локально одноосными, причем оптическая ось равномерно вращается вдоль оси холестерика, образуя спиральную (геликоидальную) структуру. Проблема распространения электромагнитных волн в киральных средах исследуется достаточно давно [44]. Разработаны эффективные численные методы для расчета распространения волн в киральных жидких кристаллах [45, 46] и твист-ячейках [47]. Точное решение получено для случая распространения света вдоль оси спирали [43, 48]. Как и при исследовании тепловых флуктуаций, при изучении распространения электромагнитных волн в киральных системах существует два подхода в зависимости от соотношения между длиной волны и шагом спирали жидкого кристалла. Когда длина волны больше или порядка шага спирали, используются дифракционные методы, основанные на теории Флоке [40, 49–54]. В противоположном случае большого по сравнению с длиной волны шага спирали используются либо численные методы [45–47], которые нашли широкое применение, прежде всего, как теоретическая база для разнообразных компьютерных программ, либо аналитический метод ВКБ. Для задачи распространения электромагнитных волны в локально изотропных средах метод ВКБ применялся в работах [55, 56], а для геликоидальных жидких кристаллов в [57]. В случае геликоидальных систем усложняющим фактором является наличие оптической анизотропии. Фактически, эти объекты представляют собой одноосные кристаллы с периодически меняющимся в пространстве направлением оптической оси.

Метод ВКБ позволяет описывать волновые процессы в приближении геометрической оптики. Однако в плавно меняющихся структурах существуют области, где методы геометрической оптики и вместе с ними метод ВКБ неприменимы — это так называемые окрестности точек поворота. В этих областях может происходить поворот лучей, трансформация мод, образование волновых каналов, просачивание через запрещенные зоны [20, 41, 58–61]. С такими проблемами в физике волновых явлений сталкиваются уже давно. К ним относится проблема распространения звука в океане, где за счет изменения состава и температуры с глубиной меняются упругие свойства среды и формируются волновые каналы [41, 58]. Подобная проблема возникает при распространении электромагнитных волн в плазме и, прежде всего, в ионосфере, где плавно меняется показатель преломления среды [21, 42]. Подобная проблема возникает и в жидких кристаллах. В частности, в работах [62–64] экспериментально исследовались неоднородности структуры жидких кристаллов, возникающие за счет внешних полей. При изучении этих структур применялись оптические методы, в частности, анализировалась окрестность точки полного внутреннего отражения, которая с точки зрения метода ВКБ является точкой поворота. В геликоидальных структурах окрестность точки поворота изучалась в работах [65, 66].

Во второй главе исследуется распространение электромагнитных волн в геликоидальных жидких кристаллах с большим шагом спирали. В рамках геометрической оптики обсуждаются траектории лучей и образование запрещенных зон. Описывается эффект заворота необыкновенного луча. Подробно анализируются окрестности точек поворота. Изучается распространение предельного луча, отвечающего случаю очень узких запрещенных зон. В этом случае исследуются интерференционные эффекты в окрестности точки поворота, эффекты эллиптичности и эффект трансформации мод. Последовательно описано прохождение волн через запрещенные зоны — эффект просачивания.

В последнее время повышенное внимание уделяется задачам нахождения функции Грина в системах со сложной структурой [67–71]. Таких, как анизотропные среды [72–74], слоистые периодические среды [75–77], гироэлектрические хиральные среды [78], сверхрешетки [79]. Для одномерно периодических сред эта проблема рассматривалась в работах [67, 68]. Сложность здесь состоит в том, что, в отличие от однородных изотропных и анизотропных сред, функция Грина в периодических системах зависит не только от разности пространственных координат, но и от их абсолютных значений. Для слабонеоднородной среды с мелкомасштабной периодичностью функция Грина была рассмотрена в работе [68].

Одним из эффективных методов исследования жидкокристаллических систем является метод светорассеяния. При этом возникает целый ряд физических задач, решению которых до сих пор уделялось сравнительно мало внимания. Одной из таких задач является описание рассеяния света в средах с плавно меняющейся регулярной структурой. Обычно при рассмотрении рассеяния света предполагается, что среда является пространственно однородной или описание флуктуаций и распространения волн в неоднородных средах опирается на малые параметры, которые позволяют свести решение задачи к некоторой эффективной однородной среде. Для однородных систем известны нормальные волны и поле точечного источника (функция Грина электромагнитного поля), а также достаточно просто вычисляется пространственная корреляционная функция тепловых флуктуаций диэлектрической проницаемости, на которых происходит рассеяние света. Условие пространственной однородности системы позволяет, перейдя к пространственному спектру Фурье флуктуаций, получить для интенсивности рассеянного света достаточно простые выражения в замкнутой форме.

Задача усложняется, если пространственная однородность среды существенно нарушается. При этом возникают сразу несколько проблем: описание структуры падающего поля (нормальных волн в среде), вычисление функции Грина электромагнитного поля и расчет корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости.

В четвертой главе предложена общая схема расчета интенсивности рассеяния света для слоистых систем. Это позволило получить явные выражения для угловой и поляризационной зависимости интенсивности однократного рассеяния света в ХЖК для случая, когда шаг спирали значительно больше длины световой волны. Результаты приведены в виде удобном для сравнения с экспериментом.

Одним из интенсивно развивающихся разделов физической оптики является изучение процессов многократного рассеяния света [80–87]. Интерес к этой проблеме особенно возрос в связи с практическим применением методов теории переноса излучения для анализа структуры самых разнообразных неоднородных диэлектрических сред, включая биологические объекты [88].

Одним из направлений исследований является изучение временны́х корреляционных функций многократно рассеянного света [89–101]. Использование временны́х корреляционных функций для определения размеров рассеивателей в сильнонеоднородной среде и особенно использование этих функций для анализа и визуализации макроскопических неоднородностей потребовали более корректного описания этих функций в режиме многократного рассеяния [102,103]. Прежде всего, это касается более четкого выхода за рамки диффузионного приближения [104], поскольку оно формируется на расстояниях порядка транспортной длины от границы, а временны́е корреляции формируются вблизи границы. Другой проблемой является построение решения в широком интервале времен, а не только в области начального хода и, наконец, поскольку любые реальные рассеиватели сравнимы с длиной световой волны, необходимо более детально учитывать анизотропию индикатрисы однократного рассеяния, а не только средний косинус угла рассеяния.

Учет ограниченности среды в проблемах многократного рассеяния имеет принципиальное значение. В частности, при описании корреляционной функции это связано с тем, что временны́е корреляции формируются главным образом в приграничном слое толщиной порядка транспортной длины. В рамках диффузионного приближения учет влияния границы, начиная с работы [105], проводился методом зеркальных отображений. При этом положение границы определяется с помощью интерполяционной длины Милна, полученной из точного решения задачи рассеяния системой точечных рассеивателей, занимающих полупространство [106]. Для такой системы решение Милна было обобщено в рамках метода Винера–Хопфа [107] в работах [108–110] для описания когерентного обратного рассеяния. В работе [111] был проведен сравнительный анализ точного решения для изотропных рассеивателей и решения, полученного методом зеркальных отображений. Было показано, что точное и приближенное решения практически совпадают при выборе зеркальной границы согласованным методом, основанном на балансе энергии падающего и рассеянного излучения. В работе [112] проблема многократного рассеяния от полупространства решалась в пределе сильно вытянутой вперед индикатрисы.

Особое место в изучении переноса излучения занимает исследование когерентных и интерференционных эффектов в силу их чувствительности к особенностям структуры неоднородных сред [82, 113–115]. Одним из наиболее исследованных является эффект когерентного обратного рассеяния, который представляет собой оптический аналог Андерсоновского эффекта слабой локализации [116, 117]. Он состоит в существовании узкого пика в угловой зависимости интенсивности многократного рассеяния света в окрестности рассеяния строго назад.

Детальное экспериментальное исследование этого эффекта проводилось для самых разнообразных суспензий, твердых диэлектриков, биологических объектов, неупорядоченных жидких кристаллов и т.д. [116–120]. Также изучалось усиление обратного рассеяния в материалах с анизотропным коэффициентом диффузии [121]. В последнее время большое внимание уделяется средам, обладающим анизотропией. В работах [122, 123] изучалось многократное рассеяние для систем с вызванной внешним полем слабой анизотропией. Системы с анизотропными рассеивателями рассмотрены в работе [124]. Расчеты проводились в приближении слабого рассеяния, когда длина экстинкции значительно больше длины световой волны. В работах [125–128] изучалось многократное рассеяние в ориентированных нематических жидких кристаллах (НЖК). В частности, исследовалось влияние анизотропии на коэффициент диффузии. Удалось рассчитать коэффициент диффузии света и транспортную длину. В работе [129] рассмотрено влияние анизотропии среды на диффузию скалярных волн.

В работе [130] в рамках метода Винера–Хопфа было получено решение для анизотропного однократного рассеяния для когерентного обратного рассеяния в P_1-приближении. В этой работе рассматривалось скалярное поле в предположении, что многократное рассеяние полностью деполяризует падающий свет и поляризационные эффекты можно не учитывать. Однако когерентные эффекты в жидких кристаллах [131] сильно зависят от поляризации падающего и рассеянного света.

В работах [132–136] были получены точные решения для многократного рэлеевского рассеяния электромагнитного поля. В работах [132, 133] векторное уравнение переноса было решено для рассеяния строго назад, с учетом интерференционной составляющей, а в работе [134] были рассчитаны угловые зависимости пика обратного рассеяния с учетом поляризации. В работах [135, 136] также для случая рэлеевских рассеивателей была решена задача для временно́й корреляционной функции.

Недавно были получены экспериментальные данные, подтверждающие наличие пика когерентного обратного рассеяния в ориентированных жидких кристаллах. В работах [137, 138] проводились измерения эффекта когерентного обратного рассеяния в нематической фазе жидкого кристалла во внешнем магнитном поле. Был обнаружен пик обратного рассеяния, ширина которого оказалась на несколько порядков уже, чем, например, для суспензий латексов. Пик обратного рассеяния представлял собой эллиптический конус. Детального теоретического описания этого эффекта до сих не проводилось. Трудности вызваны тем, что, с одной стороны, НЖК — это одноосная среда со значительной оптической анизотропией. С другой стороны, в этих системах очень велики тепловые флуктуации ориентации, описание которых значительно сложнее, чем флуктуаций скалярных величин таких, как плотность или концентрация.

Диссертация построена следующим образом.

Первая глава посвящена изучению статистических свойств ЖК. Приводятся общие сведения о ЖК. Рассмотрена корреляционная функция флуктуаций директора в НЖК. Построен спектр флуктуаций в неограниченном ХЖК, изучены точки поворота. При помощи векторного аналога ВКБ метода исследованы коротковолновые флуктуации. Построена корреляционная функция флуктуаций директора. Исследованы флуктуации в окрестности точек поворота. Изучены две проблемы: построение решений в окрестности точки поворота и проблема сшивания решений при проходе через точку поворота. Изучено влияние точек поворота на корреляционную функцию. Изучено явление неустойчивости Ландау–Пайерлса в СЖК для различных типов граничных условий. Рассмотрено влияние поверхностной энергии на характер неустойчивости.

Во второй главе изучено распространение света в геликоидальных жидких кристаллах с шагом спирали значительно большим длины световой волны. Изучаются запрещенные зоны, волновые каналы, эффекты заворота луча и просачивания.

В третьей главе рассматривается задача о поле точечного источника. Приводятся выражения для функции Грина НЖК. Рассматривается скалярная функция Грина в средах с одномерной крупномасштабной периодичностью. Рассматривается функция Грина электромагнитного поля в ХЖК с большим шагом спирали.

В четвертой главе изучается однократное рассеяние в слоистых средах. Предложена схема расчета на основе метода Кирхгофа. Рассчитана интенсивность рассеяния ячейкой ХЖК.

В пятой главе рассмотрен эффект когерентного обратного рассеяния в упорядоченных нематических жидких кристаллах.

Шестая глава посвящена проблемам многократного рассеяния в сильно неоднородных средах. Изучены временны́е корреляционные функции для систем анизотропных рассеивателей.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В холестерических жидких кристаллах с большим шагом спирали удается построить в замкнутой форме корреляционную функцию коротковолновых флуктуаций директора. В спектре коротковолновых флуктуаций существуют точки поворота, в окрестностях которых имеет место эффект трансформации флуктуационных мод.

2. Неустойчивость Ландау–Пайерлса в смектических жидких кристаллах зависит от типа граничных условий. В случае слабого поверхностного сцепления свободно подвешенная пленка остается стабильной при любом поперечном размере и теряет стабильность с ростом продольного размера.

3. Распространение электромагнитных волн в одноосных киральных жидких кристаллах с большим по сравнению с длиной волны шагом спирали мож-

но описать с помощью векторного метода ВКБ. В геликоидальных жидких кристаллах существуют эффекты заворота и прохождения необыкновенных волн через запрещенную зону (просачивание). Эти эффекты удобно описывать с помощью метода эталонного уравнения, который позволяет проанализировать окрестности точек поворота и запрещенные зоны. Рассчитанные угловые зависимости интенсивностей лучей, претерпевших внутреннюю рефракцию и прошедших через запрещенную зону, совпадают с экспериментальными.

4. Для функции Грина скалярного волнового уравнения в безграничной одномерно периодической среде с крупномасштабными неоднородностями поверхность волновых векторов имеет разрыв, а поверхность лучевых векторов — излом. Ограничение на направления волновых векторов связано с образованием плоского волнового канала. Асимптотика функции Грина в дальней зоне внутри волнового канала отличается от асимптотики вне волнового канала.

5. Функция Грина для электромагнитного поля в геликоидальных жидких кристаллах с большим по сравнению с длиной световой волны шагом спирали содержит слагаемые, отвечающие обыкновенной и необыкновенной волнам. Для необыкновенной волны на поверхности волновых векторов существует запрещенная зона, которая соответствует условию поворота луча и образованию плоского волнового канала.

6. Метод Кирхгофа позволяет получить расчетные формулы для интенсивности однократного рассеяния света в геликоидальных жидких кристаллах с большим по сравнению с длиной световой волны шагом спирали в виде, удобном для сравнения теории с экспериментом. Интенсивность однократного рассеяния в геликоидальных жидких кристаллах немонотонно зависит от

размеров системы.

7. Уравнение Бете–Солпитера, учитывающее вклады лестничных и циклических диаграмм, позволяет описать многократное рассеяния света на флуктуациях директора в нематических жидких кристаллах во внешнем магнитном поле. Диффузионное приближение позволяет получить аналитические выражения для угловой и поляризационной зависимостей интенсивности когерентного обратного рассеяния. Конус обратного рассеяния имеет эллиптическую форму. Когерентный вклад для перекрестных поляризаций отсутствует.

8. Метод Винера–Хопфа позволяет решить обобщенное уравнение Милна для скалярного и электромагнитного полей с учетом анизотропии рассеивателей в P_1-приближении. Деполяризация рассеянного излучения при больших значениях анизотропии может менять знак. Решение уравнения Бете–Солпитера для временно́й корреляционной функции может быть построено в виде ряда по полиномам Лежандра. Для скалярного поля найденное решение для временно́й корреляционной функции находится в хорошем согласии с известными экспериментальными данными.

Достоверность полученных результатов обоснована тем, что методы решения рассмотренных проблем базируются на современных теоретических методах и подходах к описанию структуры жидких кристаллов и электродинамики анизотропных сред. Решение рассмотренных в диссертации задач выполнено многократно апробированными методами математической физики. В частности, использованы метод функций Грина, метод Кирхгофа, векторный аналог метода ВКБ, современные методы анализа окрестностей точек поворота, метод Винера–Хопфа. Анализ корреляционных функций флуктуаций директора выполнен в рамках континуальной теории упругости жидких кристаллов с широким применением асимптотических и вычислительных методов. Влияние флуктуаций в конечных системах на стабильность жидких кристаллов исследовано с использованием современных методов статистической физики. Достоверность полученных теоретических результатов контролировалась совпадением с известными предельными случаями. Теоретически предсказанные эффекты заворота и просачивания необыкновенного луча получили экспериментальное подтверждение в ходе экспериментов, условия которых были сформулированы автором. Построенное теоретическое описание эффекта когерентного обратного рассеяния в нематических жидких кристаллах находится в хорошем согласии с известными экспериментальными данными. Все вышеперечисленное в совокупности свидетельствует о достоверности полученных результатов и сделанных на их основании выводов.

Материалы диссертации докладывались на Международных семинарах "Day on Diffraction'99" (Санкт-Петербург), "Day on Diffraction'2000" (Санкт-Петербург), "Day on Diffraction'2001" (Санкт-Петербург), "Фоковские чтения: Современные проблемы физики" (Санкт-Петербург, 2008 г.) и Международных конференциях "Physics of Liquid Matter: Modern Problems" (Киев, 2001 г.), 19th International Liquid Crystal Conference (Edinburgh, United Kingdom, 2002), 11th International Topical Meeting on Optics of Liquid Crystals (Clearwater Beach, Florida, USA, 2005), "Days on Diffraction'2006" (Санкт-Петербург), 21st International Liquid Crystal Conference (Keystone, Colorado, USA, 2006), 9th European Conference on Liquid Crystals (Lisbon, Portugal, 2007).

Основные результаты диссертации достаточно полно отражены в следующих публикациях:

1. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Green's function of wave field

in media with one-dimensional large-scale periodicity. Physical Review E, 1999, V. 59, No. 1, P. 1184–1192.

2. *Кузьмин В.Л., Аксенова Е.В.* Временны́е корреляции многократно рассеянного света в ограниченной системе с анизотропной индикатрисой однократного рассеяния, Оптика и спектроскопия, 1999, Т. 87, № 3, С. 461–469.

3. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Green's function of electromagnetic field in cholesteric liquid crystals with large-scale periodicity, Proceedings of the International Seminar "Day on Diffraction", 1999, P. 7–15.

4. *Кузьмин В.Л., Романов В.П., Аксенова Е.В., Рунова Т.Л.* Исследование временно́й корреляционной функции рассеянного света в ограниченных сильнонеоднородных средах, Оптика и спектроскопия, 2000, Т. 89, № 6, С. 1022–1031.

5. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Waveguide propagation of light in cholesterics with large pitch, Molecular Crystals and Liquid Crystals, 2001, V. 359, P. 351–364.

6. *Аксенова Е.В., Вальков А.Ю., Романов В.П.* Особенности оптических свойств геликоидальных жидких кристаллов с большим шагом спирали, Оптика и спектроскопия, 2001, Т. 91, № 6, С. 1030–1042.

7. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* WKB method in the problem of thermal fluctuations in anisotropic media with one-dimensional periodicity, Proceedings of the International Seminar "Day on Diffraction-2001", Saint Petersburg, Russia, 2001, P. 7–17.

8. *Kuzmin V.L., Romanov V.P., Aksenova E.V.* Multiple scattering temporal correlation function in a half space with finite-size heterogeneities, Physical

Review E, 2002, V. 65, No. 1, 016601.

9. *Кузьмин В.Л., Романов В.П., Аксенова Е.В.* Временна́я корреляционная функция многократного рассеяния света и когерентное обратное рассеяние в ограниченной среде, Оптика и спектроскопия, 2002, Т. 92, № 3, С. 475–486.

10. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Optical properties and fluctuations in liquid crystals with one-dimensional large-scale periodicity, in Wave Scattering in Complex Media: From Theory to Applications, edited by van Tiggelen B.A. and Skipetrov S.E., Kluwer Academic Publishers, NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry, Dordrecht, 2003, V. 107, P. 519–534.

11. *Кузьмин В.Л., Аксенова Е.В.* Обобщенное решение Милна для корреляционных эффектов многократного рассеяния света с учетом поляризации, ЖЭТФ, 2003, Т. 123, № 5, С. 929–945.

12. *Аксенова Е.В., Вальков А.Ю., Романов В.П.* Рассеяние света в холестерических жидких кристаллах с большим шагом спирали, ЖЭТФ, 2004, Т. 125, № 1, С. 72–102.

13. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Calculation of correlation function of the director fluctuations in cholesteric liquid crystals by WKB method, Journal of Mathematical Physics, 2004, V. 45, No. 6, P. 2420–2446.

14. *Аксенова Е.В., Вальков А.Ю., Каретников А.А., Ковшик А.П., Романов В.П., Рюмцев Е.И.* Особенности рефракции необыкновенного луча в геликоидальной среде с большим шагом спирали, ЖЭТФ, 2004, Т. 126, № 5, С. 1109–1122.

15. *Aksenova E.V., Karetnikov A.A., Kovshik A.P., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Return back of the extraordinary beam for oblique inci-

dence in helical liquid crystals with large pitch, Europhysics Letters, 2005, V. 69, No. 1, P. 68–74.

16. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Scattering of light in cholesteric liquid crystals with large pitch, Physical Review E, 2005, V. 71, No. 5, 051702.

17. *Аксенова Е.В., Крюков Е.В., Романов В.П.* Распространение света в геликоидальной среде с крупномасштабной периодичностью, Оптика и спектроскопия, 2006, Т. 101, № 6, С. 1006–1017.

18. *Aksenova E.V., Kryukov E.V., Romanov V.P.* Light propagation in helicoidal media with large periodicity, Proceedings of the International Conference "Days On Diffraction", St.Petersburg, Russia, May 30 – June 2, 2006, P. 7–16.

19. *Аксенова Е.В., Крюков Е.В., Романов В.П.* Особенности распространения света в киральных средах, ЖЭТФ, 2007, Т. 132, № 6, С. 1435–1453.

20. *Aksenova E.V., Karetnikov A.A., Kovshik A.P., Kryukov E.V., Romanov V.P.* Light propagation in chiral media with large pitch, Journal of the Optical Society of America A, 2008, V. 25, No. 3, P. 600–608.

21. *Аксенова Е.В., Вальков А.Ю., Романов В.П.* Распространение и рассеяние света в слоистых средах, Оптика и спектроскопия, 2008, Т. 104, № 3, С. 440–473.

22. *Аксенова Е.В., Каретников А.А., Ковшик А.П., Крюков Е.В., Романов В.П.* Прохождение света через запрещенную зону в киральных средах, Оптика и спектроскопия, 2008, Т. 104, № 6, С. 1001–1012.

23. *Aksenova E.V.* Propagation and scattering of light in helical liquid crystals with large pitch, Molecular Crystals and Liquid Crystals, 2008, V. 495, P. 1/[353]–29/[381].

24. *Aksenova E.V., Kryukov E.V., Romanov V.P.* Propagation of light in chiral media with large pitch, Molecular Crystals and Liquid Crystals, 2008, V. 495, P. 30/[382]–50/[402].

25. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Green's function of electromagnetic field in cholesteric liquid crystals with large-scale periodicity, Booklet of abstracts, International Seminar "Day on Diffraction'99", Saint Petersburg, Russia, 1999, P. 47.

26. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Structure of forbidden zones in problems of wave propagation in media with large-scale periodicity, Booklet of abstracts, International Seminar "Day on Diffraction'2000", Saint Petersburg, Russia, 2000, P. 13.

27. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* WKB method in the problem of thermal fluctuations in anisotropic media with one-dimensional periodicity, Booklet of abstracts, International Seminar "Day on Diffraction'2001", Saint Petersburg, Russia, 2001, P. 39.

28. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Propagation of electromagnetic waves and fluctuations in liquid crystals with one-dimensional large-scale periodicity, Book of abstracts, International Conference "Physics of Liquid Matter: Modern Problems", Kyiv, 2001, P. 138.

29. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Optical and statistical properties of cholesteric liquid crystals with the large pitch, Book of abstracts, 19th International Liquid Crystal Conference, Edinburgh, United Kingdom, 30 June – 5 July, 2002, P91.

30. *Aksenova E.V., Val'kov A.Yu.* Landau-Peierls instability in smectic-A films: new aspects, Book of abstracts, 19th International Liquid Crystal Conference, Edinburgh, United Kingdom, 30 June – 5 July, 2002, P384.

31. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Propagation and scattering of light in twist-cells of liquid crystals with large pitch, Book of abstracts, 11th International Topical Meeting on Optics of Liquid Crystals, October 2–7, 2005, Clearwater Beach, Florida, USA, P. 102.

32. *Aksenova E.V., Kryukov E.V., Romanov V.P.* Light propagation in helicoidal media with large periodicity, Booklet of abstracts, International Conference "Days on Diffraction", St.Petersburg, Russia, May 30 – June 2, 2006, P. 86.

33. *Aksenova E.* Scattering of light in helical liquid crystals with large pitch, Book of abstracts, 21st International Liquid Crystal Conference, July 2–7, 2006, Keystone, Colorado, USA, P. 533.

34. *Aksenova E., Kryukov E., Romanov V.* Light propagation in helical media with large periodicity in the turning point vicinity, Book of abstracts, 21st International Liquid Crystal Conference, July 2–7, 2006, Keystone, Colorado, USA, P. 534.

35. *Aksenova E.* Propagation and scattering of light in helical liquid crystals with large pitch, Book of abstracts, 9th European Conference on Liquid Crystal, July 2–6, 2007, Lisbon, Portugal, PJ1, P. 325.

36. *Aksenova E., Kryukov E., Romanov V.* Light propagation in helical liquid crystals with the large pitch in the turning point vicinity, Book of abstracts, 9th European Conference on Liquid Crystal, July 2–6, 2007, Lisbon, Portugal, PJ2, P. 326.

Глава 1.

Флуктуации в жидких кристаллах

Наличие ориентационной упорядоченности в жидких кристаллах обусловлено тем, что составляющие жидкий кристалл молекулы сильно вытянуты. При этом теплота ориентационного плавления очень мала, а флуктуации ориентации очень велики. Эти флуктуации оказывают значительное влияние на физические свойства ЖК. Поскольку ЖК со сложной пространственной структурой интенсивно применяются в современных устройствах отображения информации, проблема учета тепловых флуктуаций и построения пространственной корреляционной функции становится актуальной. В этой главе мы исследуем корреляционные функции флуктуаций директора в холестерических и смектических жидких кристаллах. А также изучим вопросы устойчивости жидкокристаллической фазы в зависимости от размеров образца.

1.1. Флуктуации директора в нематических жидких кристаллах

Отличительной особенностью нематических жидких кристаллов является наличие в широком интервале температур ориентационной упорядоченности. Однородная ориентация системы создается либо с помощью ориентирующих стенок кюветы, либо за счет внешнего поля. Мы будем рассматривать НЖК во внешнем магнитном поле. Ориентация в жидком кристалле описывается с помощью единичного вектора директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Мы будем использовать стандартную континуальную модель [43]. В рамках этой модели при описании упругих свойств ЖК в ограниченных ячейках обычно учитываются вклады в свободную энергию трех типов

$$F = F_b + F_f + F_s. \tag{1.1}$$

Здесь F_b — упругая энергия жидкого кристалла, F_f — вклад внешнего поля, F_s — поверхностная энергия. Для НЖК упругая энергия — это энергия Франка

$$F_b = \frac{1}{2}\int_V d\mathbf{r}\{K_{11}(\operatorname{div}\mathbf{n})^2 + K_{22}(\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n})^2 + K_{33}(\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n})^2\}. \tag{1.2}$$

Здесь K_{ll}, $l = 1, 2, 3$ — модули Франка, V — занимаемый жидким кристаллом объем. Член F_f для магнитного поля имеет вид

$$F_f = -\frac{1}{2}\chi_a \int_V d\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_0)^2, \tag{1.3}$$

где $\chi_a = \chi_\parallel - \chi_\perp$ — анизотропия магнитной восприимчивости, $\mathbf{H}_0$ — напряженность постоянного внешнего магнитного поля. Для определенности будем полагать $\chi_a > 0$. Поверхностная энергия F_s зависит от ориентации директора на поверхностях. В этом разделе мы будем считать образец достаточно большим, так что можно пренебречь энергией взаимодействия с поверхностью по сравнению с объемной частью.

В состоянии равновесия, соответствующему минимуму энергии (1.1), вектор директора постоянен, $\mathbf{n} = \mathbf{n}^0$, и в случае $\chi_a > 0$ он направлен вдоль магнитного поля, $\mathbf{n}^0 \parallel \mathbf{H}_0$. Нас будут интересовать флуктуации директора, $\delta\mathbf{n}$. Представим вектор директора в виде

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^0 + \delta\mathbf{n}. \tag{1.4}$$

Поскольку $|\mathbf{n}| = |\mathbf{n}^0| = 1$, в линейном приближении $\delta\mathbf{n}$ перпендикулярно $\mathbf{n}^0$, то есть, $\delta\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}^0 = 0$. Разложим флуктуации директора в спектр Фурье. Будем использовать преобразование Фурье вида

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \delta\mathbf{n}(\mathbf{q}), \tag{1.5}$$

где

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \delta\mathbf{n}(\mathbf{r}). \tag{1.6}$$

Вообще говоря, выражение (1.5) справедливо, если объем системы достаточно велик.

Вектор $\delta\mathbf{n}(\mathbf{q})$ удобно представить в виде

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{q}) = \delta n_1(\mathbf{q})\mathbf{a}_1(\mathbf{q}) + \delta n_2(\mathbf{q})\mathbf{a}_2(\mathbf{q}), \tag{1.7}$$

где для каждого $\mathbf{q}$ введены единичные векторы:

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{q}) \parallel \mathbf{q} - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}^0)\mathbf{n}^0, \quad \mathbf{a}_2(\mathbf{q}) \parallel \mathbf{n}^0 \times \mathbf{q}.$$

Заметим, что $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ ортогональны $\mathbf{n}^0$. Тогда средний квадрат флуктуаций $\langle|\delta n_l(\mathbf{q})|^2\rangle$ можно найти, используя формулу (1.1). Поскольку вероятность флуктуаций $w \sim \exp[-\delta F/k_B T]$, где δF — квадратичный по $\delta\mathbf{n}$ вклад в свободную энергию, связанный с флуктуациями директора, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, имеем [4, 43]

$$\langle|\delta n_l(\mathbf{q})|^2\rangle = \frac{k_B T}{K_{ll}[q^2 - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}^0)^2] + K_{33}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}^0)^2 + \chi_a H_0^2}, \quad l = 1, 2, \tag{1.8}$$

где угловые скобки $\langle\ldots\rangle$ обозначают статистическое усреднение. Заметим, что векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ выбирались таким образом, что

$$\langle\delta n_1(\mathbf{q})\delta n_2^*(\mathbf{q})\rangle = 0,$$

Здесь “$*$” обозначает комплексное сопряжение. При отсутствии внешнего поля флуктуации директора расходятся как $1/q^2$ при $q \to 0$, а радиус корреляции флуктуаций неограниченно возрастает. Наличие внешнего поля делает эти флуктуации конечными, а роль радиуса корреляции в данном случае играет магнитная длина когерентности $\xi_H = \sqrt{K_{33}/(\chi_a H_0^2)}$.

1.2. Корреляционная функция флуктуаций директора в холестерических жидких кристаллах

Холестерические жидкие кристаллы состоят из киральных молекул, то есть, отличающихся от своего зеркального отражения. Отсутствие зеркальной симметрии приводит к следующему виду свободной энергии Франка [43]

$$F_b = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\left\{K_{11}(\operatorname{div}\mathbf{n})^2 + K_{22}[(\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n}) + q_0]^2 + K_{33}(\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n})^2\right\}. \quad (1.9)$$

Мы будем рассматривать неограниченный ХЖК при отсутствии внешних полей. В этом случае энергия (1.9) совпадает с полной свободной энергией (1.1). Минимуму этой энергии отвечает спиральное распределение директора. Рассмотрим ХЖК с осью холестерической спирали, направленной вдоль оси z. Равновесный вектор директора $\mathbf{n}^0$ в такой системе вращается по геликоидальному образцу

$$\mathbf{n}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{n}^0(z) = (\cos\xi,\, \sin\xi,\, 0), \quad (1.10)$$

где $\xi = q_0 z + \phi_0$, ϕ_0 — начальная фаза, $P = 2\pi/q_0$ — шаг холестерической спирали.

Нас будет интересовать корреляционная функция флуктуаций директора

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}_{2\perp}, z_1, z_2) = \langle \delta n_\alpha(\mathbf{r}_{1\perp}, z_1)\delta n_\beta(\mathbf{r}_{2\perp}, z_2)\rangle\,, \quad (1.11)$$

где $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$. Рассмотрим квадратичный по флуктуациям $\delta\mathbf{n}$ вклад в свободную энергию

$$\delta F = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\left\{K_{11}(\operatorname{div}\delta\mathbf{n})^2 + K_{22}(\mathbf{n}^0\cdot(\operatorname{rot}\delta\mathbf{n}))^2 + \right.$$
$$\left. + K_{33}[(\delta\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{n}^0 + (\mathbf{n}^0\cdot\nabla)\delta\mathbf{n})]^2\right\}. \quad (1.12)$$

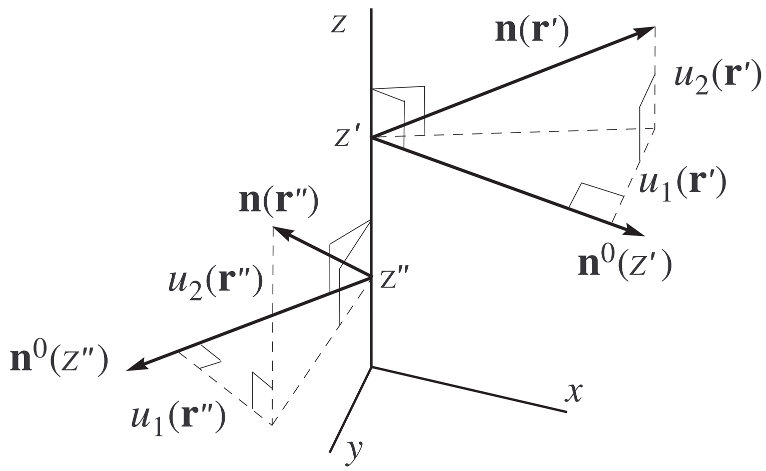


Рис. 1.1 Моды $u_{1,2}$ флуктуаций директора в холестерическом жидком кристалле

При получении этого уравнения мы учли, что согласно (1.10) $\operatorname{div}\mathbf{n}^0 = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{n}^0 = -q_0\mathbf{n}^0$. Поскольку $\delta\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}^0 = 0$, вектор $\delta\mathbf{n} = (\delta n_x, \delta n_y, \delta n_z)$ можно параметризовать с помощью двух величин u_1 и u_2

$$\delta n_x = -u_1\sin\xi, \quad \delta n_y = u_1\cos\xi, \quad \delta n_z = u_2. \tag{1.13}$$

Мода u_1 определяет флуктуации директора в плоскости xy, а u_2 — флуктуации вдоль оси z (Рис. 1.1). В векторной записи

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r})\mathbf{h}^{(1)}(z) + u_2(\mathbf{r})\mathbf{h}^{(2)}, \tag{1.14}$$

где

$$\mathbf{h}^{(1)}(z) = \mathbf{h}^{(2)}\times\mathbf{n}^0(z)\,, \quad \mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{e}_z. \tag{1.15}$$

Подставляя (1.13) в уравнение (1.12), имеем

$$\delta F = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\,\big\{K_{11}(-\sin\xi\,\partial_x u_1 + \cos\xi\,\partial_y u_1 + \partial_z u_2)^2 +$$
$$+ K_{22}[\cos\xi\,(\partial_y u_2 - \partial_z(u_1\cos\xi\,)) - \sin\xi\,(\partial_z(u_1\sin\xi\,) + \partial_x u_2)]^2 +$$
$$+ K_{33}[(u_2 q_0\sin\xi\, + \cos\xi\,\partial_x(u_1\sin\xi\,) + \sin\xi\,\partial_y(u_1\sin\xi\,))^2 + (u_2 q_0\cos\xi +$$
$$+ \cos\xi\,\partial_x(u_1\cos\xi\,) + \sin\xi\,\partial_y(u_1\cos\xi\,))^2 + (\cos\xi\,\partial_x u_2 + \sin\xi\,\partial_y u_2)^2]\big\}\,, \tag{1.16}$$

где $\partial_{\alpha} \equiv \partial/\partial\alpha$, $\alpha = x, y, z$.

Мы будем исследовать поведение корреляционной функции

$$g_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \langle u_k(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}_1) \rangle, \tag{1.17}$$

где $k, l = 1, 2$. Из (1.14) получаем связь корреляционной функции флуктуаций директора $\hat{G}$ с корреляционной функцией скалярных величин $\hat{g}$

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\perp, z_1, z_2) = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl}(\mathbf{r}_\perp, z_1, z_2) h_\alpha^{(k)}(z_1) h_\beta^{(l)}(z_2). \tag{1.18}$$

Учитывая, что ХЖК в плоскости, ортогональной оси z, является в среднем пространственно однородным, удобно выполнить двумерное преобразование Фурье по переменным x и y

$$f(\mathbf{q}_\perp, z) = \int d\mathbf{r}_\perp f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp}, \tag{1.19}$$

где $\mathbf{q}_\perp = (q_x, q_y)$. Тогда энергия искажения (1.16) имеет вид

$$\delta F = \frac{1}{4\pi^2} \int d\mathbf{q}_\perp \, \delta F(\mathbf{q}_\perp), \tag{1.20}$$

где

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{q}_\perp) = \frac{1}{2} \int dz \Big\{ K_{11} \left| \partial_z u_2 + i(-\sin\xi \, q_x + \cos\xi \, q_y) u_1 \right|^2 + \\ + K_{22} \left| -\partial_z u_1 + i u_2 (\cos\xi \, q_y - \sin\xi \, q_x) \right|^2 + \\ + K_{33} \left[\left| u_2 q_0 + i(\cos\xi \, q_x + \sin\xi \, q_y) u_1 \right|^2 + |u_2|^2 (\cos\xi \, q_x + \sin\xi \, q_y)^2 \right] \Big\}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Величину $\delta F(\mathbf{q}_\perp)$ представим в виде квадратичной формы

$$\delta F(\mathbf{q}_\perp) = \frac{1}{2} \int dz \left(\mathbf{u}^*(\mathbf{q}_\perp, z) \hat{A}(\mathbf{q}_\perp, z) \mathbf{u}(\mathbf{q}_\perp, z) \right). \tag{1.22}$$

Здесь

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

— двумерный вектор. Матрица $\hat{A}$ представляет собой дифференциальный оператор второго порядка.

Для удобства выберем оси координат x и y так, чтобы направление оси x совпадало с направлением вектора $\mathbf{q}_\perp$, то есть $q_x = q_\perp$, $q_y = 0$. Тогда матрица $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A} = K_{11}\begin{pmatrix} q_\perp^2 \sin^2\xi & iq_\perp \sin\xi\,\partial_z \\ iq_\perp\partial_z \sin\xi & -\partial_z^{\,2} \end{pmatrix} + K_{22}\begin{pmatrix} -\partial_z^{\,2} & -iq_\perp\partial_z \sin\xi \\ -iq_\perp \sin\xi\,\partial_z & q_\perp^2 \sin^2\xi \end{pmatrix} + \\ + K_{33}\begin{pmatrix} q_\perp^2 \cos^2\xi & -iq_0 q_\perp \cos\xi \\ iq_0 q_\perp \cos\xi & q_\perp^2 \cos^2\xi + q_0^2 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где $\partial_z^{\,2} \equiv \partial^{\,2}/\partial z^2$. Вычисление корреляционной функции сводится к обращению матрицы $\hat{A}$, что эквивалентно решению уравнения

$$\hat{A}(\mathbf{q}_\perp, z)\hat{g}(\mathbf{q}_\perp, z, z_1) = k_B T\delta(z - z_1)\hat{I}, \quad (1.24)$$

где $\delta(z - z_1)$ — дельта-функция, $\hat{I}$ — единичная матрица.

Для однозначной разрешимости уравнение (1.24) должно быть дополнено граничными условиями. В безграничном ХЖК в качестве таких условий можно использовать принцип ослабления корреляций на бесконечности, то есть, условие $\hat{g}(\mathbf{q}_\perp, z, z_1) \to 0$ при $z \to \pm\infty$.

Уравнение (1.24) вместе с условием убывания при $z \to \pm\infty$ представляет собой уравнение на функцию Грина. Заметим, что при $z \neq z_1$ уравнение (1.24) становится однородным. Прежде всего, мы решим однородные уравнения при $z > z_1$ и $z < z_1$. Затем, используя условия непрерывности функции и скачка производной, построим функцию Грина.

Система однородных уравнений имеет вид

$$-\begin{pmatrix} K_{22} & 0 \\ 0 & K_{11} \end{pmatrix} \frac{d^2\mathbf{u}(\xi)}{d\xi^2} + i\tilde{\Omega}(K_{11} - K_{22}) \sin\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d\mathbf{u}(\xi)}{d\xi} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^2(K_{11}\sin^2\xi + K_{33}\cos^2\xi) & -i\tilde{\Omega}\cos\xi\,(K_{22} + K_{33}) \\ i\tilde{\Omega}\cos\xi\,(K_{11} + K_{33}) & \tilde{\Omega}^2(K_{22}\sin^2\xi + K_{33}\cos^2\xi) + K_{33} \end{pmatrix} \mathbf{u}(\xi) = 0, \tag{1.25}$$

где введен безразмерный параметр

$$\tilde{\Omega} = q_\perp / q_0.$$

Уравнение (1.25) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Эта система имеет четыре линейно независимых решения. С учетом граничных условий для $\hat{g}$, составим из четырех линейно независимых решений уравнения (1.25) две матрицы $\hat{u}_1(\xi)$ и $\hat{u}_2(\xi)$, такие что $\hat{u}_1(\xi) \to \hat{0}$ при $\xi \to +\infty$, а $\hat{u}_2(\xi) \to \hat{0}$ при $\xi \to -\infty$.

Будем искать функцию Грина в виде

$$\hat{g}(\xi, \xi_1) = \begin{cases} \hat{u}_1(\xi)\hat{v}_1(\xi_1) & \text{при} \quad \xi > \xi_1 \\ \hat{u}_2(\xi)\hat{v}_2(\xi_1) & \text{при} \quad \xi < \xi_1 \end{cases}, \tag{1.26}$$

где $\hat{v}_1$ и $\hat{v}_2$ матрицы размера 2×2, которые могут зависеть только от ξ_1. Для нахождения восьми элементов этих матриц воспользуемся условиями на функцию Грина в окрестности точки $\xi = \xi_1$. Эти условия представляют собой непрерывность самой функции и скачок ее первой производной такой, чтобы удовлетворить уравнению (1.24)

$$\begin{gathered} \hat{g}(\xi_1 + 0, \xi_1) = \hat{g}(\xi_1 - 0, \xi_1), \\ \hat{K}\left[\left.\frac{d\hat{g}}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1-0} - \left.\frac{d\hat{g}}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1+0} \right] = \frac{k_B T}{q_0}\hat{I}, \end{gathered} \tag{1.27}$$

где

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} K_{22} & 0 \\ 0 & K_{11} \end{pmatrix}.$$

Подставляя (1.26) в (1.27), получаем систему восьми уравнений на элементы матриц $\hat{v}_{1,2}$

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(\xi_1)\hat{v}_1(\xi_1) &= \hat{u}_2(\xi_1)\hat{v}_2(\xi_1),\\ \hat{u}_1'(\xi_1)\hat{v}_1(\xi_1) - \hat{u}_2'(\xi_1)\hat{v}_2(\xi_1) &= -k_B T q_0^{-1}\hat{K}^{-1}.\end{aligned} \tag{1.28}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{v}_1 &= \hat{u}_1^{-1}(\hat{u}_2'\hat{u}_2^{-1} - \hat{u}_1'\hat{u}_1^{-1})^{-1}k_B T q_0^{-1}\hat{K}^{-1}\\ \hat{v}_2 &= \hat{u}_2^{-1}(\hat{u}_2'\hat{u}_2^{-1} - \hat{u}_1'\hat{u}_1^{-1})^{-1}k_B T q_0^{-1}\hat{K}^{-1}.\end{aligned} \tag{1.29}$$

Подставляя (1.29) в (1.26), окончательно получаем для функции Грина

$$\hat{g}(\xi,\xi_1) = \begin{cases} \hat{u}_1(\xi)\hat{u}_1^{-1}(\xi_1)(\hat{u}_2'\hat{u}_2^{-1} - \hat{u}_1'\hat{u}_1^{-1})^{-1}(\xi_1)k_B T q_0^{-1}\hat{K}^{-1} & \text{при} \quad \xi \geq \xi_1 \\ \hat{u}_2(\xi)\hat{u}_2^{-1}(\xi_1)(\hat{u}_2'\hat{u}_2^{-1} - \hat{u}_1'\hat{u}_1^{-1})^{-1}(\xi_1)k_B T q_0^{-1}\hat{K}^{-1} & \text{при} \quad \xi < \xi_1 \end{cases}. \tag{1.30}$$

Отметим, что выбор матриц $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ неоднозначен. Но эта неоднозначность компенсируется матрицами $\hat{v}_1$ и $\hat{v}_2$.

Данная схема построения функции Грина при помощи решений однородного уравнения является общей и не требует введения малых параметров.

1.2.1. Спектр флуктуаций директора

Уравнение (1.25) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Общая структура решения системы (1.25) удовлетворяет теореме Флоке [139], согласно которой решение имеет вид произведения двух матричных функций от z, z_1: экспоненциальной и периодической с периодом $2\pi/q_0$. Для нахождения показателей экспонент и Фурье-гармоник периодической функции обычно используется стандартная для уравнений типа Хилла [140] схема получения бесконечной системы трехчленных рекуррентных соотношений. Применительно к изучению флуктуаций директора в ХЖК подробный анализ проблемы на основе такого подхода был проведен в работе [5]. В этой работе в предположении

$q_\perp/q_0 \ll 1$, когда с ростом номеров гармоник Фурье их вклады быстро убывают, были найдены низшие гармоники трехмерного спектра Фурье корреляционной функции $\hat{g}$. С физической точки зрения предел $q_\perp/q_0 \to 0$ соответствует “смектико-подобному” ХЖК, что и подтверждается результатом [5]: главный вклад в корреляционную функцию $\hat{g}(\mathbf{q}_\perp, q_z) \sim (q_z^2 + c_0 q_\perp^4)^{-1}$, где c_0 — постоянная. Представляет интерес исследовать противоположный предел “нематико-подобного” ХЖК, когда $q_0/q_\perp \to 0$. Такая ситуация соответствует ХЖК с большим шагом спирали по сравнению с длиной волны флуктуации. Проблема с точки зрения обычного подхода [5] здесь состоит в том, что вклад в корреляционную функцию вносит широкий спектр гармоник. В такой ситуации методы типа теории Флоке не эффективны, и представляются более перспективными методы типа ВКБ по большому параметру $\tilde{\Omega} \gg 1$.

Решения однородной системы уравнений (1.25) построим методом ВКБ. Для этого удобно систему (1.25) свести к системе четырех уравнений первого порядка. Введем вектор:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{i\tilde{\Omega}} \frac{d}{d\xi} \mathbf{u}. \tag{1.31}$$

Тогда система (1.25) принимает вид

$$\frac{d}{d\xi} \mathbf{\Psi} = \left(i\tilde{\Omega}\hat{B} + \hat{C} \right) \mathbf{\Psi}. \tag{1.32}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \tag{1.33}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & b_2 & b_4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = -(K_{11}\sin^2\xi + K_{33}\cos^2\xi)/K_{22}, \quad b_2 = -(K_{22}\sin^2\xi + K_{33}\cos^2\xi)/K_{11}$$
$$b_3 = (K_{11}/K_{22} - 1)\sin\xi\,, \quad b_4 = (1 - K_{22}/K_{11})\sin\xi\,,$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(K_{22}+K_{33})K_{22}^{-1}\cos\xi & 0 & 0 \\ (K_{11}+K_{33}){K_{11}}^{-1}\cos\xi & -iK_{33}K_{11}^{-1}\tilde{\Omega}^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что в качестве начального условия задано значение вектора $\mathbf{\Psi}$ при $\xi = \xi_0$. Тогда решение системы (1.32) можно записать в виде

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \hat{M}(\xi, \xi_0)\mathbf{\Psi}(\xi_0), \tag{1.34}$$

где $\hat{M}(\xi, \xi_0)$ — матрица эволюции этой системы и $\hat{M}(\xi_0, \xi_0) = \hat{I}$. В Приложении 1 мы построим матрицу эволюции, учитывая члены первого и второго порядка по параметру $\tilde{\Omega}^{-1}$.

Воспользуемся формулой (П1.17), полученной для матрицы эволюции в Приложении 1. Тогда для вектора $\mathbf{\Psi}$ имеем

$$\mathbf{\Psi}(\xi) \approx \hat{U}(\xi)\times$$
$$\times\, \widehat{\mathrm{diag}}\left\{\exp\left[\int_{\xi_0}^{\xi}\left(i\tilde{\Omega}\lambda_l(\xi') - \left(\hat{U}^{-1}(\xi')\hat{U}'(\xi') - \hat{U}^{-1}(\xi')\hat{C}(\xi')\hat{U}(\xi')\right)_{ll}\right)d\xi'\right]\right\}\times$$
$$\times\, \hat{U}^{-1}(\xi_0)\mathbf{\Psi}(\xi_0), \tag{1.35}$$

где λ_l, $l = 1, \ldots 4$ — собственные значения матрицы $\hat{B}$, столбцы матрицы $\hat{U}$ — собственные векторы матрицы $\hat{B}$. Как показано в Приложении 1, выражение (1.35) применимо при выполнении условия

$$\left|(\lambda_m - \lambda_l)^{-1}(\hat{U}^{-1}\partial_\xi\hat{U} - \hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U})_{lm}\right| \ll \tilde{\Omega}, \quad l \neq m. \tag{1.36}$$

Следствием (1.36) является неприменимость метода при вырождении или сближении собственных значений матрицы $\hat{B}(\xi)$. В этом случае могут возникнуть трудности с приведением матрицы $\hat{B}$ к диагональному виду.

Решение уравнения (1.32) в форме (1.35) можно рассматривать как линейную комбинацию четырех линейно независимых векторов, представляющих собой столбцы матрицы эволюции $\hat{M}(\xi, \xi_0)$, с четырьмя коэффициентами, представляющими собой элементы вектора $\mathbf{\Psi}(\xi_0)$. В дальнейшем нам будет удобнее использовать вместо $\hat{M}(\xi, \xi_0)$ матрицу $\hat{M}(\xi, \xi_0)\hat{U}(\xi_0)$, а вместо $\mathbf{\Psi}(\xi_0)$ вектор $\hat{U}^{-1}(\xi_0)\mathbf{\Psi}(\xi_0)$.

1.2.2. Вычисление корреляционной функции

Для построения функции Грина нам нужны решения $\mathbf{u}$, которые представляют собой первые две компоненты решения $\mathbf{\Psi}(\xi)$. Столбцами матриц $\hat{u}_{1,2}(\xi)$ будут вектора, компонентами которых являются первые два элемента столбцов матрицы $\hat{M}(\xi, \xi_0)\hat{U}(\xi_0)$ или линейные комбинации этих векторов.

Для построения функции Грина, то есть, корреляционной функции в явном виде мы сначала найдем матрицу эволюции. Для этого нам понадобятся собственные значения и собственные векторы матрицы $\hat{B}$. Собственные значения определяются из соотношения

$$\det(\hat{B} - \lambda_l \hat{I}) = 0, \quad l = 1, \ldots 4, \tag{1.37}$$

которое представляет собой биквадратное уравнение. Решение этого уравнения дает

$$\begin{aligned} &\lambda_l = i\mu_l, \quad l = 1, \ldots 4, \\ &\mu_l = \sqrt{\sin^2 \xi + \frac{K_{33}}{K_{ll}} \cos^2 \xi}, \quad l = 1, 2, \\ &\mu_3 = -\mu_1, \quad \mu_4 = -\mu_2, \end{aligned} \tag{1.38}$$

Собственные векторы $\boldsymbol{\psi}_l$ удовлетворяют соотношению $\hat{B}\boldsymbol{\psi}_l = i\mu_l\boldsymbol{\psi}_l$. Найдем эти векторы и составим из них матрицу $\hat{U} = (\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3, \boldsymbol{\psi}_4)$

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} -i\sin\xi\,\mu_1^{-1} & 1 & i\sin\xi\,\mu_1^{-1} & -1 \\ -1 & -i\sin\xi\,\mu_2^{-1} & -1 & -i\sin\xi\,\mu_2^{-1} \\ \sin\xi & i\mu_2 & \sin\xi & i\mu_2 \\ -i\mu_1 & \sin\xi & i\mu_1 & -\sin\xi \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

При выборе векторов $\boldsymbol{\psi}_l$ имеется произвол, связанный с нормировочными множителями. Но можно показать, что решение (1.35) не зависит от выбора нормировок собственных векторов. Далее найдем матрицу $\hat{U}^{-1}$

$$\hat{U}^{-1} = \frac{-1}{2K_{33}\cos^2\xi} \begin{pmatrix} iK_{11}\mu_1\sin\xi & K_{22}\mu_2^2 & K_{22}\sin\xi & -iK_{11}\mu_1 \\ -K_{11}\mu_1^2 & iK_{22}\mu_2\sin\xi & iK_{22}\mu_2 & K_{11}\sin\xi \\ -iK_{11}\mu_1\sin\xi & K_{22}\mu_2^2 & K_{22}\sin\xi & iK_{11}\mu_1 \\ K_{11}\mu_1^2 & iK_{22}\mu_2\sin\xi & iK_{22}\mu_2 & -K_{11}\sin\xi \end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

Пренебрежем в матрице $\hat{C}$ членом порядка $1/\tilde{\Omega}$, поскольку он имеет более высокий порядок малости, чем приближение (1.35). Получим

$$\left(\hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}\right)_{ll} = \frac{(K_{11}-K_{22})\sin\xi}{2K_{33}\cos\xi}(-1)^{l+1}, \quad l = 1,..4. \tag{1.41}$$

Найдем диагональные элементы матрицы $\hat{U}^{-1}\partial_\xi\hat{U}$ и представим их в виде, удобном для дальнейших вычислений

$$\left(\hat{U}^{-1}\frac{d\hat{U}}{d\xi}\right)_{ll} = \frac{1}{2}\frac{(\cos\xi\,/\mu_l)'}{\cos\xi\,/\mu_l} + \frac{1}{2}\frac{(\cos\xi\,)'}{\cos\xi} - \frac{K_{11}-K_{22}}{2K_{33}}\frac{(\cos\xi\,)'}{\cos\xi}(-1)^{l+1},\ l{=}1,..4. \tag{1.42}$$

Вычитая (1.42) из (1.41) и интегрируя, получим

$$\int_{\xi_0}^{\xi}\left(\hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U} - \hat{U}^{-1}\frac{d\hat{U}}{d\xi'}\right)_{ll} d\xi' = -\frac{1}{2}\ln\frac{\mu_l(\xi_0)|\cos\xi\,|}{\mu_l(\xi)|\cos\xi_0|} - \frac{1}{2}\ln\frac{|\cos\xi\,|}{|\cos\xi_0|}. \tag{1.43}$$

Таким образом, найдены все выражения, стоящие в уравнении (1.35), и можно записать матрицу эволюции

$$\hat{M}(\xi,\xi_0) = \hat{U}(\xi)\frac{|\cos\xi_0|}{|\cos\xi\,|}\widehat{\mathrm{diag}}\left\{\sqrt{\frac{\mu_l(\xi)}{\mu_l(\xi_0)}}\exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi}\tilde{\Omega}\mu_l d\xi'\right)\right\}\hat{U}^{-1}(\xi_0). \tag{1.44}$$

Далее для нахождения корреляционной функции мы построим матрицы $\hat{u}_1(\xi)$ и $\hat{u}_2(\xi)$. Выбирая решения (1.34) для вектора $\mathbf{\Psi}(\xi)$, имеющие требуемое поведение на бесконечности, получаем

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_1(\xi) &= \begin{pmatrix} -i\sin\xi\,\mu_1^{-1} & 1 \\ -1 & -i\sin\xi\,\mu_2^{-1} \end{pmatrix} \exp(\hat{\Phi}_-) \\
\hat{u}_2(\xi) &= \begin{pmatrix} i\sin\xi\,\mu_1^{-1} & -1 \\ -1 & -i\sin\xi\,\mu_2^{-1} \end{pmatrix} \exp(\hat{\Phi}_+),
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

где

$$
\exp(\hat{\Phi}_\pm) = \frac{|\cos\xi_0|}{|\cos\xi\,|}\widehat{\mathrm{diag}}\left\{\sqrt{\frac{\mu_l(\xi)}{\mu_l(\xi_0)}}\exp\left(\pm\tilde{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi}\mu_l d\xi'\right)\right\}, \quad l = 1, 2. \tag{1.46}
$$

Нетрудно убедиться, что условия $\hat{u}_1(\xi) \to \hat{0}$ при $\xi \to +\infty$ и $\hat{u}_2(\xi) \to \hat{0}$ при $\xi \to -\infty$ выполняются при таком выборе матриц $\hat{u}_{1,2}(\xi)$. Подставим матрицы $\hat{u}_{1,2}(\xi)$ из (1.45) в выражение для корреляционной функции (1.30). Пренебрегая во внеэкспоненциальных множителях членами порядка $1/\tilde{\Omega}$, получим

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\xi,\xi_1) = {} & \frac{k_B T}{2q_\perp K_{33}\cos\xi_1\cos\xi}\times \\
& \times \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(\xi-\xi_1)\sin\xi & \mathrm{sign}(\xi-\xi_1) i\mu_2(\xi) \\ -i\mu_1(\xi) & \sin\xi \end{pmatrix} \times \\
& \times \hat{\Psi}(\xi,\xi_1) \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(\xi_1-\xi)\sin\xi_1 & i\mu_1(\xi_1) \\ \mathrm{sign}(\xi_1-\xi) i\mu_2(\xi_1) & -\sin\xi_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

где

$$
\hat{\Psi}(\xi,\xi_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\exp\left(-\tilde{\Omega}\left|\int_{\xi}^{\xi_1}\mu_1(\xi')d\xi'\right|\right)}{\sqrt{\mu_1(\xi)\mu_1(\xi_1)}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\exp\left(-\tilde{\Omega}\left|\int_{\xi}^{\xi_1}\mu_2(\xi')d\xi'\right|\right)}{\sqrt{\mu_2(\xi)\mu_2(\xi_1)}} \end{pmatrix}.
$$

Формула (1.47) имеет простую структуру. Она составлена из диагональной матрицы и двух матриц, которые поворачивают систему координат в точках ξ и ξ_1.

Функцию $\hat{g}$ удобно разбить на две части, связанные с двумя модами μ_1 и μ_2. Имеем

$$\hat{g}(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \frac{k_B T}{2q_\perp K_{33} \cos\xi(z_1)\cos\xi(z_2)} \times \\ \times \sum_{j=1}^{2} \exp\left[-q_\perp \left|\int_{z_1}^{z_2} \mu_j(z)dz\right|\right] \hat{W}^{(j)}(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2), \quad (1.48)$$

где

$$\hat{W}^{(1)}(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \\ = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin\xi(z_1)\sin\xi(z_2)}{\sqrt{\mu_1(z_1)\mu_1(z_2)}} & i\,\mathrm{sign}(z_1 - z_2)\sin\xi(z_1)\dfrac{\sqrt{\mu_1(z_2)}}{\sqrt{\mu_1(z_1)}} \\ i\,\mathrm{sign}(z_1 - z_2)\sin\xi(z_2)\dfrac{\sqrt{\mu_1(z_1)}}{\sqrt{\mu_1(z_2)}} & \sqrt{\mu_1(z_1)\mu_1(z_2)} \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

$$\hat{W}^{(2)}(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \\ = -\begin{pmatrix} -\sqrt{\mu_2(z_1)\mu_2(z_2)} & i\,\mathrm{sign}(z_1 - z_2)\sin\xi(z_2)\dfrac{\sqrt{\mu_2(z_1)}}{\sqrt{\mu_2(z_2)}} \\ i\,\mathrm{sign}(z_1 - z_2)\sin\xi(z_1)\dfrac{\sqrt{\mu_2(z_2)}}{\sqrt{\mu_2(z_1)}} & \dfrac{\sin\xi(z_1)\sin\xi(z_2)}{\sqrt{\mu_2(z_1)\mu_2(z_2)}} \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Можно записать $\cos\xi = \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{q}_\perp / q_\perp$ и $\sin\xi = \sqrt{q_\perp^2 - (\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{q}_\perp)^2}/q_\perp$ в виде, не зависящем от выбора осей координат x и y. Матрицы $\hat{W}^{(j)}(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2)$ можно представить в виде

$$W_{kl}^{(j)}(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \ell_k^{(j)}(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2)\ell_l^{(j)*}(\mathbf{q}_\perp, z_2, z_1), \quad (1.51)$$

где

$$\boldsymbol{\ell}^{(1)}(\mathbf{q}_\perp, z, z') = \left(i\,\mathrm{sign}(z - z')\frac{\sin\xi(z)}{\sqrt{\mu_1(z)}},\ \sqrt{\mu_1(z)}\right), \\ \boldsymbol{\ell}^{(2)}(\mathbf{q}_\perp, z, z') = \left(\sqrt{\mu_2(z)},\ -i\,\mathrm{sign}(z - z')\frac{\sin\xi(z)}{\sqrt{\mu_2(z)}}\right). \quad (1.52)$$

Из формул (1.15), (1.18), (1.48)–(1.52), выполнив суммирование по k и l в (1.18) получаем итоговое выражение для корреляционной функции флуктуаций директора

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \frac{k_B T}{2q_\perp K_{33}\cos\xi(z_1)\cos\xi(z_2)} \sum_{j=1}^{2} \exp\left(-q_\perp \left|\int_{z_1}^{z_2} \mu_j(z)dz\right|\right) \times \\ \times f_\alpha^{(j)}(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) f_\beta^{(j)*}(\mathbf{q}_\perp, z_2, z_1), \quad (1.53)$$

где $\mathbf{f}^{(j)}(\mathbf{q}_\perp, z, z') = \sum_{k=1,2} \ell_k^{(j)}(\mathbf{q}_\perp, z, z')\mathbf{h}^{(k)}(z)$. В используемой нами системе координат вектора $\mathbf{f}^{(j)}$ имеют вид

$$\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{q}_\perp, z, z') = \mu_1^{-\frac{1}{2}}(z)\left(-i\,\mathrm{sign}(z-z')\sin^2\xi(z), \frac{i}{2}\,\mathrm{sign}(z-z')\sin 2\xi(z), \mu_1(z)\right),$$
$$\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{q}_\perp, z, z') = \sqrt{\mu_2(z)}\left(-\sin\xi(z),\ \cos\xi(z),\ -i\,\mathrm{sign}(z-z')\frac{\sin\xi(z)}{\mu_2(z)}\right). \quad (1.54)$$

Отметим, в частности, что

$$\mathbf{f}^{(j)}(\mathbf{q}_\perp, z, z')\cdot\mathbf{n}^0(z) = 0, \quad |\mathbf{f}^{(j)}(\mathbf{q}_\perp, z, z')|^2 = \mu_j(z) + \frac{\sin^2\xi(z)}{\mu_j(z)}\,.$$

На рисунках 1.2 и 1.3 показаны компоненты g_{11} и g_{12} корреляционной функции, выраженные в относительных единицах. Рисунки получены в результате численных расчетов по формулам (1.48)–(1.50). Величина g_{12} является чисто мнимой. На рисунке 1.3 показана мнимая часть g_{12}. В обоих случаях корреляции спадают экспоненциально с увеличением расстояния $|\xi - \xi_1|$. Обратим также внимание на рост корреляций при $\xi = \xi_1$ по мере приближения ξ к $\pi/2$. При подходе к точке $\xi = \pi/2$ поверхности начинают изгибаться, что свидетельствует о подходе к области, где метод ВКБ не работает и формула (1.48) уже не применима. Далее этот вопрос будет обсуждаться подробно.

Сравним выражение (1.47) с корреляционной матрицей, полученной в работах [5, 6] для случая $q_\perp \ll q_0$. Для простоты рассмотрим одноконстантное

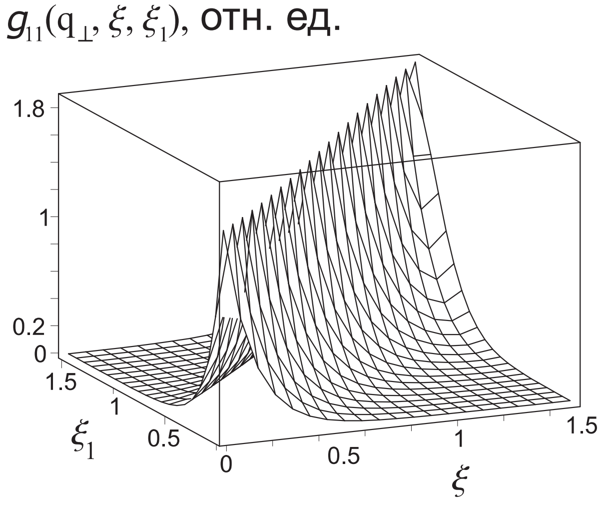


Рис. 1.2

Компонента корреляционной функции ХЖК $g_{11}(\mathbf{q}_\perp, \xi, \xi_1)$, выраженная в относительных единицах, в зависимости от координат двух точек ξ и ξ_1. Расчет по формуле (1.48) при следующих значениях параметров: $\tilde{\Omega} = 5.0$, $K_{11} = 5.0 \times 10^{-6}$ дин, $K_{22} = 3.0 \times 10^{-6}$ дин, $K_{33} = 7.0 \times 10^{-6}$ дин

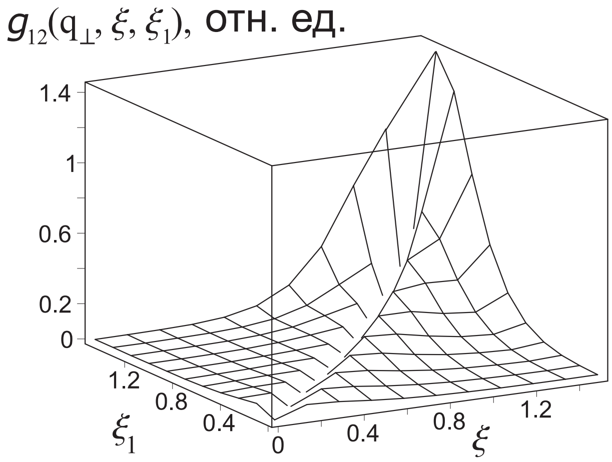


Рис. 1.3

Компонента корреляционной функции ХЖК $g_{12}(\mathbf{q}_\perp, \xi, \xi_1)$, выраженная в относительных единицах, в зависимости от координат двух точек ξ и ξ_1 при тех же значениях параметров, что и на Рис. 1.2

приближение, когда модули Франка равны $K_{11} = K_{22} = K_{33} = \overline{K}$. Нас будет интересовать зависимость от волнового вектора $q_\perp$. Выделим зависимость от

$q_\perp$ в компонентах корреляционной матрицы $\hat{g}$

$$g_{kl}(\mathbf{q}_\perp, z, z_1) \sim \frac{1}{q_\perp} \exp(-q_\perp |z - z_1|). \tag{1.55}$$

Фурье-образы элементов корреляционной матрицы в случае $q_\perp \ll q_0$ имеют вид (см. [6])

$$\begin{gathered} g_{11}^{(L)}(\mathbf{q}_\perp, q_z) = \frac{2q_0^2 k_B T}{\overline{K}(2q_0^2 q_z^2 + q_\perp^2 q_z^2 + q_\perp^4)}, \\ g_{22}^{(L)}(\mathbf{q}_\perp, q_z) = \frac{k_B T}{\overline{K}(q_0^2 + q_\perp^2 + q_z^2)}, \\ g_{12}^{(L)} = g_{21}^{(L)} = 0. \end{gathered} \tag{1.56}$$

Видно, что флуктуации в плоскости перпендикулярной оси спирали, $g_{11}^{(L)}$, имеют характер, аналогичный флуктуациям директора в смектике–А. В то время как флуктуации вдоль оси спирали, $g_{22}^{(L)}$, имеют такой же характер, как в нематике, но при этом ограничены шагом холестерической спирали. Перейдем в $(\mathbf{q}_\perp, z)$-представление и рассмотрим лишь зависимость от $q_\perp$. Получим

$$\begin{gathered} g_{11}^{(L)}(\mathbf{q}_\perp, z - z_1) \sim \frac{q_0^2}{q_\perp^2 \sqrt{2q_0^2 + q_\perp^2}} \exp\left(-\frac{q_\perp^2 |z - z_1|}{\sqrt{2q_0^2 + q_\perp^2}}\right), \\ g_{22}^{(L)}(\mathbf{q}_\perp, z - z_1) \sim \frac{1}{\sqrt{q_0^2 + q_\perp^2}} \exp(-\sqrt{q_0^2 + q_\perp^2} |z - z_1|). \end{gathered} \tag{1.57}$$

Выражения (1.56) были получены путем усреднения по многим шагам спирали. Поэтому моды u_1 и u_2 не коррелируют (недиагональные элементы корреляционной матрицы равны нулю), в отличие от нашего ответа, учитывающего почти локальные флуктуации. Хотя выражения (1.57) применимы лишь при $q_\perp \ll q_0$, мы рассмотрим их в области $q_\perp \gg q_0$ и сравним с ответом (1.55) для $\hat{g}$. Это позволит нам оценить поведение флуктуационных мод с разной длиной волны. При $q_\perp \gg q_0$ для $g_{kk}^{(L)}$ имеем

$$\begin{gathered} g_{11}^{(L)}(\mathbf{q}_\perp, z - z_1) \sim \frac{q_0^2}{q_\perp^3} \exp(-q_\perp |z - z_1|), \\ g_{22}^{(L)}(\mathbf{q}_\perp, z - z_1) \sim \frac{1}{q_\perp} \exp(-q_\perp |z - z_1|). \end{gathered} \tag{1.58}$$

Первая мода, $g_{11}^{(L)}$, отвечающая флуктуациям в плоскости, перпендикулярной оси холестерика, не совпадает с g_{11}, хотя экспоненциальные множители имеют одинаковый характер. Вторая мода, $g_{22}^{(L)}$, отвечающая флуктуациям вдоль оси спирали, в точности совпадает с ответом для g_{22}. Это позволяет предположить, что полученное выражение для g_{22} в случае $q_\perp \gg q_0$ допускает плавное сшивание с $g_{22}^{(L)}$ в случае $q_\perp \ll q_0$. Первая мода оказывается более чувствительной к шагу спирали и ее поведение сильно отличается для разных длин волн флуктуаций.

Проанализируем поведение выражения (1.47) при $q_0 \to 0$. Этот предельный переход соответствует переходу к нематическому жидкому кристаллу. Если положить $q_0 = 0$, то формула (1.47) примет вид

$$\hat{g}(\mathbf{q}_\perp, z - z_1) = \frac{k_B T}{2q_\perp K_{33}\cos^2\phi_0}\begin{pmatrix} \mathrm{sign}(z-z_1)\sin\phi_0 & i\,\mathrm{sign}(z-z_1)\nu_2 \\ -i\nu_1 & \sin\phi_0 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-q_\perp \nu_1 |z-z_1|}}{\nu_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{e^{-q_\perp \nu_2 |z-z_1|}}{\nu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{sign}(z_1 - z)\sin\phi_0 & i\nu_1 \\ i\,\mathrm{sign}(z_1-z)\nu_2 & -\sin\phi_0 \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

где

$$\nu_l = \sqrt{\sin^2\phi_0 + \frac{K_{33}}{K_{ll}}\cos^2\phi_0}, \quad l = 1, 2.$$

Если по переменной $(z - z_1)$ выполнить преобразование Фурье, то получим

$$\hat{g}(\mathbf{q}_\perp, q_z) =$$
$$= \frac{k_B T}{(K_{33}q_\perp^2\cos^2\phi_0 + K_{11}(q_\perp^2\sin^2\phi_0 + q_z^2))(K_{33}q_\perp^2\cos^2\phi_0 + K_{22}(q_\perp^2\sin^2\phi_0 + q_z^2))} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} (K_{33}\cos^2\phi_0 + K_{22}\sin^2\phi_0)q_\perp^2 + K_{11}q_z^2 & q_\perp q_z \sin\phi_0(K_{11} - K_{22}) \\ q_\perp q_z \sin\phi_0 (K_{11} - K_{22}) & (K_{33}\cos^2\phi_0 + K_{11}\sin^2\phi_0)q_\perp^2 + K_{22}q_z^2 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

Если перейти в систему координат, где $\mathbf{n}^0 \parallel \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{q}_\perp$ направлено вдоль оси x, то матрица $\hat{g}$ становится диагональной, и формула (1.60) переходит в известную формулу для корреляционной функции НЖК (1.8):

$$g_{lj}(\mathbf{q}) = \langle |\delta n_l(\mathbf{q})|^2 \rangle \delta_{lj}.$$

Обратим внимание, что в формуле (1.59) при $\phi_0 \to \pi/2$ возникает неопределенность, которая легко раскрывается и приводит к конечному выражению при $\phi_0 = \pi/2$. Причем в окрестности этой точки функция не имеет никаких особенностей.

В отличие от нематика, формула (1.47) теряет смысл, если $\cos\xi = 0$ хотя бы в одной из двух точек ξ или ξ_1, или если точка ξ_*, где $\cos\xi_* = 0$, лежит между ξ и ξ_1. В этом случае собственные значения матрицы $\hat{B}$ начинают совпадать. Формула (1.36) показывает, что в случае сближения значений λ_l и λ_m может нарушаться условие применимости метода ВКБ.

1.2.3. Окрестность точки поворота

Из выражений (1.38) видно, что при $\xi = \pi/2$ собственные значения попарно совпадают: $\mu_1 = \mu_2 = 1$, а $\mu_3 = \mu_4 = -1$. То есть, в окрестности точки $\xi = \pi/2$ метод ВКБ не справедлив. Здесь, в отличие от НЖК, необходимо проводить отдельный анализ для окрестности точки $\xi = \pi/2$. Причина состоит в том, что мы не можем совершать предельный переход $q_0 \to 0$, а затем изучать окрестность точки $\xi = \pi/2$, поскольку при $q_0 = 0$ мы приходим к НЖК, для которого угол ξ будет постоянным во всем объеме. Таким образом, проблема окрестности точки $\xi = \pi/2$ характерна только для геликоидальных систем. Анализ окрестности точки $\xi = \pi/2$ аналогичен подходу, используемому для исследования точек поворота при решении задач методом ВКБ. Совпадение собственных значений происходит во всех точках вида $\xi = \pi/2 + m\pi$, где m — целое. В силу периодичности системы, достаточно провести детальный анализ окрестности одной из этих точек, например, $\xi = \pi/2$.

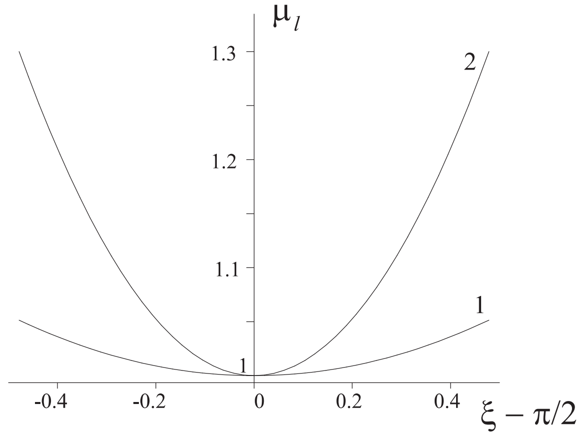


Рис. 1.4 Поведение μ_1 (кривая 1) и μ_2 (кривая 2) в окрестности точки $\xi = \pi/2$

Сначала оценим область применимости метода ВКБ. Для этого разложим μ_l в ряд в окрестности точки $\xi = \pi/2$

$$\begin{aligned} &\mu_l \approx 1 - \frac{1}{2}C_l(\xi - \pi/2)^2, \quad l = 1, 2, \\ &\mu_3 = -\mu_1, \quad \mu_4 = -\mu_2, \end{aligned} \tag{1.61}$$

где $C_l = 1 - K_{33}/K_{ll}$. На рисунке 1.4 схематически показано поведение значений μ_1 и μ_2 в окрестности точки поворота. Заметим, что значения μ_1 и μ_2, не пересекаются, а лишь соприкасаются. Для матричного элемента V_{12}, рассмотренного в Приложении 1, в окрестности точки $\xi = \pi/2$ можно получить оценку

$$V_{12} \sim (\xi - \pi/2)^{-3} \left(1 + O((\xi - \pi/2)^2)\right).$$

Тогда условие применимости метода ВКБ имеет вид

$$\tilde{\Omega}|(\xi - \pi/2)|^3 \gg 1. \tag{1.62}$$

Это означает, что выражение (1.47) применимо лишь в тех случаях, когда $\tilde{\Omega}|(\xi - \pi/2)|^3 \gg 1$, $\tilde{\Omega}|(\xi_1 - \pi/2)|^3 \gg 1$ и между точками ξ и ξ_1 нет точек, в которых μ_l совпадают, то есть, точек, в которых $\cos\xi = 0$.

Анализ поведения корреляционной функции в окрестности точки поворота представляет достаточно сложную математическую проблему. Далее мы рассмотрим два случая: 1) одна из точек или обе точки ξ, ξ_1 попадают в окрестность точки $\cos\xi = 0$; 2) точки ξ и ξ_1 лежат в областях, где применим метод ВКБ, но между этими точками лежит точка, в которой $\cos\xi = 0$. Для построения решения в обоих случаях нужно построить решение уравнения (1.32) в окрестности точки вырождения $\cos\xi = 0$.

Проблема описания точек поворота хорошо изучена для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. В этом случае эталонное уравнение имеет второй порядок и, как правило, легко решается. В нашем случае мы имеем дело с системой четырех дифференциальных уравнений первого порядка. В общем случае эталонное уравнение имело бы четвертый порядок. Однако в нашей задаче собственные значения совпадают попарно, а не все четыре сразу. Поэтому мы придем к двум эталонным уравнениям второго порядка. Построим решение в окрестности точки поворота, следуя методу, разработанному в работах [61, 141–143]. В данном случае удобнее решать уравнение непосредственно для $\mathbf{\Psi}$, а не для матрицы эволюции $\hat{M}$. Разложим уравнение (1.32) в ряд в окрестности точки $\xi = \pi/2$

$$\Big[i\hat{B}(\pi/2) + \frac{i}{2}\hat{B}''(\pi/2)(\xi-\pi/2)^2 + \frac{i}{24}\hat{B}^{IV}(\pi/2)(\xi-\pi/2)^4 + \\ + \frac{1}{\tilde{\Omega}}\hat{C}'(\pi/2)(\xi-\pi/2) + \ldots\Big]\mathbf{\Psi}(\xi) = \frac{1}{\tilde{\Omega}}\frac{d\mathbf{\Psi}}{d\xi}. \quad (1.63)$$

Если уравнение (1.63) решать методом итераций, то здесь возникает трудность, связанная с наличием двух малых параметров $1/\tilde{\Omega}$ и $(\xi - \pi/2)$. Для решения этой проблемы вводят новую “растянутую” переменную τ

$$\tau = \tilde{\Omega}^{1/3}(\xi - \pi/2),$$

которая согласуется с условием применимости метода ВКБ (1.62). Имеем

$$\Big[i\hat{B}(\pi/2)+\frac{i}{2}\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2\hat{B}''(\pi/2)+ \\ +\tilde{\Omega}^{-4/3}\left(\frac{i}{24}\tau^4\hat{B}^{IV}(\pi/2)+\tau\hat{C}'(\pi/2)\right)+\dots\Big]\mathbf{\Psi}(\tau)=\tilde{\Omega}^{-2/3}\frac{d\mathbf{\Psi}}{d\tau}. \quad (1.64)$$

Теперь все члены уравнения представляют собой ряд по параметру $\tilde{\Omega}^{-2/3}$, хотя τ уже не является малым параметром. Решение этого уравнения, отвечающее μ_1 и μ_2, будем искать в виде

$$\mathbf{\Psi}_1(\tau)=\exp\left(-\tilde{\Omega}^{2/3}\mu_1(\pi/2)\tau\right)\left(\mathbf{\Psi}_1^{(0)}(\tau)+\tilde{\Omega}^{-2/3}\mathbf{\Psi}_1^{(1)}(\tau)+\tilde{\Omega}^{-4/3}\mathbf{\Psi}_1^{(2)}(\tau)+\dots\right), \quad (1.65)$$

где $\mu_1(\pi/2)=\mu_2(\pi/2)=1$. Подстановка (1.65) в уравнение (1.64) в нулевом приближении приводит к уравнению на собственный вектор

$$\hat{B}(\pi/2)\mathbf{\Psi}_1^{(0)}=i\mu_1(\pi/2)\mathbf{\Psi}_1^{(0)}. \quad (1.66)$$

Откуда

$$\mathbf{\Psi}_1^{(0)}=\boldsymbol{\chi}_1\beta(\tau), \quad (1.67)$$

где $\boldsymbol{\chi}_1$ — собственный вектор, $\boldsymbol{\chi}_1=(1,-i,i,1)^T$, а $\beta(\tau)$ — произвольная функция τ.

В первом приближении имеем

$$\left[\hat{B}(\pi/2)-i\mu_1(\pi/2)\hat{I}\right]\mathbf{\Psi}_1^{(1)}=\left[-i\beta'(\tau)\hat{I}-\frac{1}{2}\tau^2\beta(\tau)\hat{B}''(\pi/2)\right]\boldsymbol{\chi}_1\equiv\mathbf{R}^{(1)}, \quad (1.68)$$

где $\mathbf{R}^{(1)}$ — четырехкомпонентный вектор. Определитель системы четырех уравнений (1.68) равен нулю, в силу того, что $i\mu_1$ есть собственное значение матрицы $\hat{B}$. Условие разрешимости таких систем состоит в том, что правая часть уравнения (1.68) должна быть ортогональна присоединенному вектору $\boldsymbol{\chi}_2$, который находится из условия

$$\left[\hat{B}(\pi/2)-i\mu_1(\pi/2)\hat{I}\right]\boldsymbol{\chi}_2=\boldsymbol{\chi}_1. \quad (1.69)$$

В качестве решения этого уравнения можно взять

$$\boldsymbol{\chi}_2 = \left(0,\, \frac{K_{11}+K_{22}}{K_{11}-K_{22}},\, 1,\, \frac{2iK_{22}}{K_{11}-K_{22}}\right)^T. \tag{1.70}$$

Обратим внимание, что при таком выборе $\boldsymbol{\chi}_1 \cdot \boldsymbol{\chi}_2 = 0$. Нетрудно убедиться, что условие разрешимости $\mathbf{R}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\chi}_2 = 0$ выполняется автоматически и не приводит ни к каким условиям на функцию $\beta(\tau)$. Поэтому для нахождения функции $\beta(\tau)$ следует учитывать условие разрешимости второго приближения.

Предварительно необходимо найти вектор $\boldsymbol{\Psi}_1^{(1)}$. Будем искать его в виде линейной комбинации двух собственных векторов $\boldsymbol{\chi}_1$ и $\boldsymbol{\chi}_3$ и соответствующих им присоединенных векторов $\boldsymbol{\chi}_2$ и $\boldsymbol{\chi}_4$. Здесь $\boldsymbol{\chi}_3$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $i\mu_3(\pi/2)$,

$$\boldsymbol{\chi}_3 = (-1,\, -i,\, i,\, -1)^T, \tag{1.71}$$

$$\boldsymbol{\chi}_4 = \left(0,\, -\frac{K_{11}+K_{22}}{K_{11}-K_{22}},\, -1,\, \frac{2iK_{22}}{K_{11}-K_{22}}\right)^T. \tag{1.72}$$

Вектора $\boldsymbol{\chi}_l$, $l = 1, \ldots 4$ образуют базис. Если представить $\mathbf{R}^{(1)}$ в виде $\mathbf{R}^{(1)} = \sum_{l=1}^{4} d_l(\tau)\boldsymbol{\chi}_l$, то условие разрешимости имеет вид $(\hat{P}_\chi^{-1}\mathbf{R}^{(1)})_2 = d_2(\tau) = 0$, где

$$\hat{P}_\chi = (\boldsymbol{\chi}_1,\, \boldsymbol{\chi}_2,\, \boldsymbol{\chi}_3,\, \boldsymbol{\chi}_4). \tag{1.73}$$

Ищем $\boldsymbol{\Psi}_1^{(1)}$ в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{\chi}_l$, $l = 1, \ldots 4$

$$\boldsymbol{\Psi}_1^{(1)} = \sum_{l=1}^{4} a_l(\tau)\boldsymbol{\chi}_l. \tag{1.74}$$

Далее будем считать, что $a_1 = 0$. Это можно сделать, так как $\boldsymbol{\Psi}_1^{(0)}$ уже содержит вектор $\boldsymbol{\chi}_1$, и поправка a_1 связана с нормировкой вектора $\boldsymbol{\Psi}_1$, которую мы можем выбирать произвольно.

Подставим $\boldsymbol{\Psi}_1^{(1)}$ в виде (1.74) в первое приближение (1.68). Применим к правой и левой частям получившегося уравнения $\hat{P}_\chi^{-1}$. Получим систему четырех уравнений, связывающую три коэффициента a_2, a_3 и a_4. Второе из получившихся уравнений и есть условие разрешимости первого приближения. Это уравнение представляет собой очевидное тождество, поэтому мы рассмотрим три оставшихся уравнения

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -i\beta' + i\beta\tau^2 \frac{(K_{11}+K_{22}-2K_{33})(K_{11}+K_{22})}{8K_{11}K_{22}} \\
-2ia_3 + a_4 &= i\beta\tau^2 \frac{(K_{11}+K_{22}-2K_{33})(K_{11}+K_{22})}{8K_{11}K_{22}} \\
-2ia_4 &= \beta\tau^2 \frac{(K_{11}+K_{22}-2K_{33})(K_{11}-K_{22})}{4K_{11}K_{22}}.
\end{aligned} \tag{1.75}
$$

Решая эту систему, получим

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -i\beta' + i\beta\tau^2 \frac{(K_{11}+K_{22}-2K_{33})(K_{11}+K_{22})}{8K_{11}K_{22}} \\
a_3 &= -\beta\tau^2 \frac{K_{11}+K_{22}-2K_{33}}{8K_{11}} \\
a_4 &= i\beta\tau^2 \frac{(K_{11}+K_{22}-2K_{33})(K_{11}-K_{22})}{8K_{11}K_{22}}.
\end{aligned} \tag{1.76}
$$

Запишем уравнение второго приближения

$$
\begin{aligned}
&\left[\hat{B}(\pi/2) - i\mu_1(\pi/2)\hat{I}\right] \mathbf{\Psi}_1^{(2)} = \\
&= -i\mathbf{\Psi}_1^{(1)\prime} - \frac{1}{2}\tau^2 \hat{B}''(\pi/2)\mathbf{\Psi}_1^{(1)} + \left(i\tau\hat{C}'(\pi/2) - \frac{1}{24}\tau^4\hat{B}^{IV}(\pi/2)\right)\mathbf{\Psi}_1^{(0)} \equiv \mathbf{R}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{1.77}
$$

Условие разрешимости второго приближения имеет такой же вид, как и для уравнения первого приближения $(\hat{P}_\chi^{-1}\mathbf{R}^{(2)})_2 = 0$. Подставляя в это условие выражения для $\mathbf{\Psi}_1^{(0)}$ и $\mathbf{\Psi}_1^{(1)}$, получим

$$
\begin{aligned}
&- ia_2' - \frac{1}{2}\tau^2 \left[\hat{P}_\chi^{-1}\hat{B}''(\pi/2)\sum_{l=2}^{4} a_l \boldsymbol{\chi}_l\right]_2 + \\
&\qquad + \beta(\tau)\left[\hat{P}_\chi^{-1}\left(i\tau\hat{C}'(\pi/2) - \frac{1}{24}\tau^4\hat{B}^{IV}(\pi/2)\right)\boldsymbol{\chi}_1\right]_2 = 0.
\end{aligned} \tag{1.78}
$$

Вычислим коэффициенты этого уравнения и воспользуемся выражениями (1.76) для a_l. Получим

$$
\beta''(\tau) - \beta'(\tau)\tau^2\frac{1}{2}(C_1+C_2) - \beta(\tau)\left[\frac{1}{2}(C_1+C_2)\tau - \frac{1}{4}C_1C_2\tau^4\right] = 0. \tag{1.79}
$$

Обычно $K_{22} < K_{11} < K_{33}$. Поэтому далее будем считать, что $C_1 < 0$, $C_2 < 0$ и $C_1 > C_2$. Эти условия мы примем просто для определенности. Они не накладывают никаких ограничений на общность получаемых результатов. Тогда решение уравнения (1.79) можно записать в виде

$$\beta(\tau) = \left[F_1 K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right) + F_2 K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right)\right] \times \\ \times \sqrt{\tau} \exp\left[\frac{1}{12}(C_1 + C_2)\tau^3\right], \quad (1.80)$$

где $F_{1,2}$ — произвольные константы, $K_{1/6}(a)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. Решение уравнения (1.79) можно было бы представить в виде линейной комбинации других функций Бесселя. Выбор $K_{1/6}(a)$ будет в дальнейшем удобен при сшивании решений внутри и вне окрестности точки поворота.

Заметим, что в окрестности точки $\tau = 0$ решение (1.80) не имеет особенностей типа полюса. Таким образом, в нулевом приближении решение $\boldsymbol{\Psi}_1(\tau)$ имеет вид

$$\boldsymbol{\Psi}_1(\tau) = \exp\left[-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau + \frac{1}{12}(C_1 + C_2)\tau^3\right]\sqrt{\tau}\times \\ \times \left[F_1 K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right) + F_2 K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right)\right]\boldsymbol{\chi}_1. \quad (1.81)$$

Пока на переменную τ у нас было лишь ограничение, связанное с разложением уравнения (1.32) в ряд Тейлора по переменной ξ в окрестности $\pi/2$. Это дает условие $|\xi - \pi/2| \ll 1$ или для переменной τ: $|\tau| \ll \tilde{\Omega}^{1/3}$. Условие применимости ВКБ решения для переменной ξ имело вид $|\xi - \pi/2| \gg \tilde{\Omega}^{-1/3}$. Для переменной τ это условие имеет вид $|\tau| \gg 1$. Таким образом, видно, что имеются области $1 \ll |\tau| \ll \tilde{\Omega}^{1/3}$, в которых справедливо как ВКБ решение, так и решение в окрестности точки поворота (рисунок 1.5). В этих областях оба решения должны совпадать. Поэтому мы напишем оба решения в этих областях и приравняем их. Это и даст нам формулы связи.

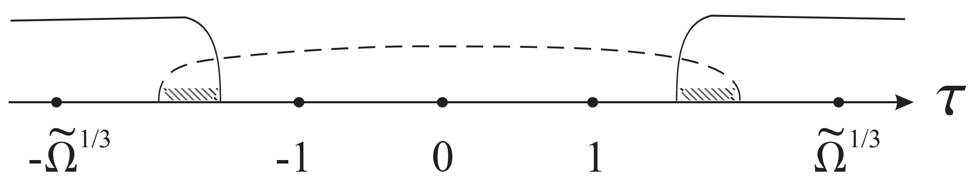


Рис. 1.5

Области применимости ВКБ решения и решения в окрестности точки поворота для переменной τ. Сплошными линиями показаны области применимости ВКБ решения. Пунктиром показана окрестность точки поворота. При $1 \ll |\tau| \ll \tilde{\Omega}^{1/3}$ применимы оба решения (заштрихованные области)

Сначала запишем ВКБ решение в областях $1 \ll |\tau| \ll \tilde{\Omega}^{1/3}$. Из решения (1.34), где $\hat{M}(\xi, \xi_0)$ имеет вид (1.44), отберем два решения, отвечающие μ_1 и μ_2. Для этого достаточно положить третью и четвертую компоненты вектора $\hat{U}^{-1}(\xi_0)\mathbf{\Psi}(\xi_0)$ равными нулю. Далее разложим все величины, зависящие от ξ, в ряд в окрестности точки $\xi = \pi/2$ ($\tau = 0$). В результате получим решение, справедливое в требуемых областях,

$$\mathbf{\Psi}(\tau) = B_1\mathbf{\Phi}_1(\tau) + B_2\mathbf{\Phi}_2(\tau), \tag{1.82}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_1(\tau) &= \exp\left[-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau + \frac{1}{6}C_1\tau^3\right]\frac{\sqrt{i}\tilde{\Omega}^{1/3}}{|\tau|}\left(1 - \frac{1}{4}C_1\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2\right)\times \\
&\times\left(-i[1 + \frac{1}{2}(C_1 - 1)\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2],\, -1,\, 1 - \frac{1}{2}\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2,\, -i[1 - \frac{1}{2}C_1\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2]\right)^T, \\
\mathbf{\Phi}_2(\tau) &= \exp\left[-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau + \frac{1}{6}C_2\tau^3\right]\frac{\sqrt{i}\tilde{\Omega}^{1/3}}{|\tau|}\left(1 - \frac{1}{4}C_2\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2\right)\times \\
&\times\left(1,\, -i[1 + \frac{1}{2}(C_2 - 1)\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2],\, i[1 - \frac{1}{2}C_2\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2],\, 1 - \frac{1}{2}\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2\right)^T.
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Обратим внимание, что коэффициенты B_1 и B_2 при $\tau > 0$ и $\tau < 0$ могут быть различными, так как области применимости решения ВКБ, $|\tau| \gg 1$, не пересекаются. В дальнейшем коэффициенты B_1 и B_2 при $\tau > 0$ и $\tau < 0$ мы будем обозначать как $B_l^{(+)}$ и $B_l^{(-)}$, $l = 1, 2$.

Рассмотрим теперь решение (1.81), справедливое в окрестности точки поворота, при $|\tau| \gg 1$. Для этого найдем его асимптотики при $\tau \to \pm\infty$. Ограничимся нулевым приближением. Фактически проблема состоит в отыскании асимптотик функции Бесселя $K_{1/6}(a)$. При $a \to \infty$ асимптотика функции Бесселя имеет вид [140]

$$K_{1/6}(a) \to \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{-a}. \tag{1.84}$$

Эта формула справедлива при условии $|\arg a| < 3\pi/2$, которое выполняется для второго слагаемого в (1.81) при $\tau \to +\infty$. Эту же асимптотику можно использовать и для первого слагаемого, но при $\tau \to -\infty$, поскольку при этом $\tau = |\tau| e^{i\pi}$, и аргумент всего выражения оказывается равным нулю. Имеем

$$\begin{gathered} K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right) \underset{\tau \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{|\tau|^3 (C_1 - C_2)}} \exp\left[-\frac{1}{12}(C_1 - C_2)|\tau|^3\right], \\ K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right) \underset{\tau \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{\tau^3 (C_1 - C_2)}} \exp\left[-\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right]. \end{gathered} \tag{1.85}$$

Для получения двух оставшихся асимптотик воспользуемся соотношением [140]

$$K_\nu(a e^{im\pi}) = e^{-im\pi\nu} K_\nu(a) - i\pi \frac{\sin(m\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} I_\nu(a), \tag{1.86}$$

где m — целое число, $I_\nu(a)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, которая имеет асимптотику вида $I_\nu(a) \underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} e^a / \sqrt{2\pi a}$. Полагая $m = -3$, получим асимптотику первого слагаемого, а при $m = 3$ — второго. Таким образом имеем

$$\begin{gathered} K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right) \underset{\tau \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2i\sqrt{6\pi}}{\sqrt{\tau^3 (C_1 - C_2)}} \exp\left[\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right], \\ K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right) \underset{\tau \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{-2i\sqrt{6\pi}}{\sqrt{|\tau|^3 (C_1 - C_2)}} \exp\left[\frac{1}{12}(C_1 - C_2)|\tau|^3\right]. \end{gathered} \tag{1.87}$$

Подставим асимптотики (1.85) и (1.87) в выражение (1.81) для $\mathbf{\Psi}_1(\tau)$. Получаем при $\tau \to +\infty$

$$\mathbf{\Psi}_1(\tau) = \left\{ F_1 \frac{1}{\tau} \frac{2i\sqrt{6\pi}}{\sqrt{C_1 - C_2}} \exp\left[-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau + \frac{1}{6}C_1\tau^3 \right] + \right.$$
$$\left. + F_2 \frac{1}{\tau} \frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{C_1 - C_2}} \exp\left[-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau + \frac{1}{6}C_2\tau^3 \right] \right\} (1, -i, i, 1)^T. \quad (1.88)$$

При $\tau \to -\infty$

$$\mathbf{\Psi}_1(\tau) = \left\{ F_1 \frac{1}{|\tau|} \frac{i\sqrt{6\pi}}{\sqrt{C_1 - C_2}} \exp\left[-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau + \frac{1}{6}C_1\tau^3 \right] + \right.$$
$$\left. + F_2 \frac{1}{|\tau|} \frac{2\sqrt{6\pi}}{\sqrt{C_1 - C_2}} \exp\left[-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau + \frac{1}{6}C_2\tau^3 \right] \right\} (1, -i, i, 1)^T. \quad (1.89)$$

Сшивая решения (1.88), (1.89) с ВКБ решениями (1.82), (1.83), получим две системы из двух уравнений, связывающие коэффициенты $B_l^{(\pm)}$, $l = 1, 2$ с коэффициентами F_1 и F_2

$$\begin{cases} -\tilde{\Omega}^{1/3} i^{1/2} B_1^{(+)} = 2F_1 \dfrac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{C_1 - C_2}} \\ \tilde{\Omega}^{1/3} i^{1/2} B_2^{(+)} = F_2 \dfrac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{C_1 - C_2}} \end{cases}
\begin{cases} -\tilde{\Omega}^{1/3} i^{1/2} B_1^{(-)} = F_1 \dfrac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{C_1 - C_2}} \\ \tilde{\Omega}^{1/3} i^{1/2} B_2^{(-)} = 2F_2 \dfrac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{C_1 - C_2}}. \end{cases} \quad (1.90)$$

Откуда легко установить связь между коэффициентами $B_l^{(\pm)}$, $l = 1, 2$

$$B_1^{(+)} = 2B_1^{(-)}, \quad B_2^{(+)} = \frac{1}{2} B_2^{(-)}. \quad (1.91)$$

Таким образом, при проходе точки поворота не происходит обмена мод, но их амплитуды испытывают скачки. Соотношение между скачками амплитуд при переходе через точку поворота имеет вид $B_1^{(-)} B_2^{(-)} = B_1^{(+)} B_2^{(+)}$.

Отметим, что отсутствие взаимодействия мод получается в нулевом приближении по параметру $\tilde{\Omega}^{-2/3}$. Учет членов следующего порядка малости может привести к появлению вкладов, обусловленных взаимодействием мод.

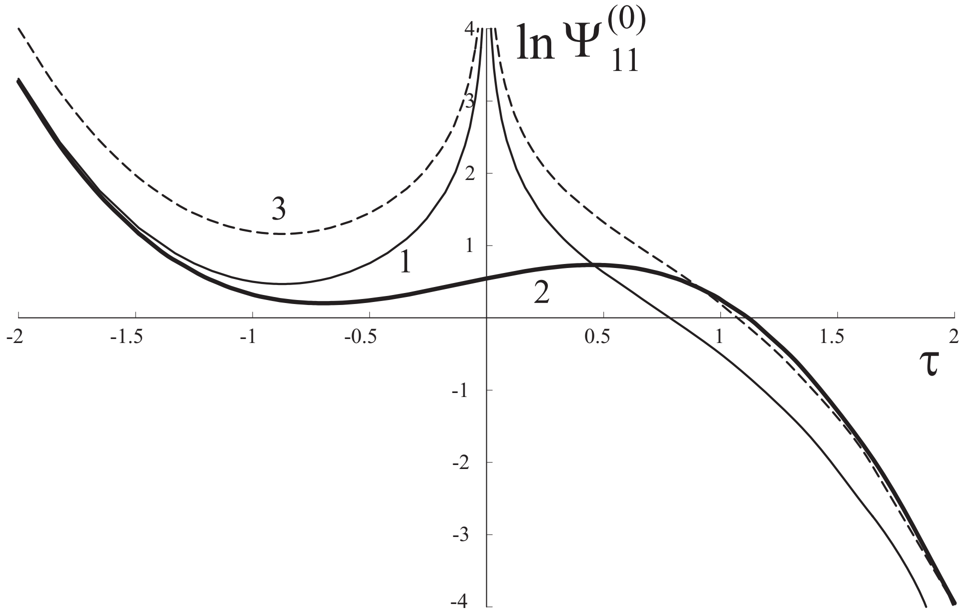


Рис. 1.6

Логарифм первой компоненты вектора $\mathbf{\Psi}_1^{(0)}$ в окрестности точки поворота (кривая 2). Кривая получена в результате численного решения уравнения (1.79) при следующих значениях параметров: $\tilde{\Omega} = 10.0$, $K_{11} = 10^{-6}$ дин, $K_{22} = 0.5 \times 10^{-6}$ дин, $K_{33} = 4.0 \times 10^{-6}$ дин. Кривые 1 и 3 отвечают решению ВКБ и удвоенному решению ВКБ соответственно

На рисунке 1.6 показано поведение первой компоненты $\Psi_{11}^{(0)}$ вектора $\mathbf{\Psi}_1^{(0)}$ в окрестности точки поворота. Эта зависимость, фактически, соответствует поведению элемента корреляционной функции g_{11} для фиксированного $\tau_1 < \tau$. Здесь кривая 1 — решение ВКБ, расходящееся в точке поворота $\tau = 0$. Кривая 2 была получена в результате численного решения уравнения (1.79). Кривая 3 иллюстрирует формулы (1.91), связывающие амплитуды решений по разные стороны от точки поворота. Эта кривая получена умножением на 2 решения ВКБ. Из рисунка видно, что слева от точки поворота численное решение совпадает с решением ВКБ, а справа от точки поворота — с удвоенным решением ВКБ.

Аналогичным образом можно получить решение $\mathbf{\Psi}_3(\tau)$, отвечающее значениям μ_3 и μ_4, в окрестности точки поворота

$$\boldsymbol{\Psi}_3(\tau) = \exp\left[\tilde{\Omega}^{2/3}\tau - \frac{1}{12}(C_1 + C_2)\tau^3\right]\sqrt{\tau}\times$$
$$\times\left[F_3 K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right) + F_4 K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right)\right]\boldsymbol{\chi}_3. \quad (1.92)$$

Для получения формул связи отберем два решения ВКБ, отвечающие μ_3 и μ_4. Для этого достаточно положить $\hat{U}^{-1}(\xi_0)\boldsymbol{\Psi}(\xi_0) = (0,\, 0,\, B_3,\, B_4)^T$. Действуя аналогично случаю решений, отвечающих значениям μ_1 и μ_2, найдем формулы связи

$$B_3^{(+)} = \frac{1}{2}B_3^{(-)}, \quad B_4^{(+)} = 2B_4^{(-)}. \quad (1.93)$$

Заметим, что нами был рассмотрен лишь случай $\xi = \pi/2$. На самом деле развитый подход позволяет описать все точки поворота вида $\xi = \pi/2 + 2\pi m$, где m — целое число. Точки поворота вида $\xi = -\pi/2 + 2\pi m$ надо рассматривать отдельно. Это связано с тем, что разложение матрицы $\hat{B}$ в окрестности этих точек поворота будет иметь другой вид. Но можно показать, что это приведет лишь к другим векторам $\boldsymbol{\chi}_l$, $l = 1, \ldots 4$, а функция $\beta(\tau)$ и формулы связи не изменятся. В этом нет ничего удивительного, так как точки $\xi = \pi/2$ и $\xi = -\pi/2$ описывают противоположные направления директора $\mathbf{n}^0$ и $-\mathbf{n}^0$, которые для ХЖК эквивалентны.

1.2.4. Учет точек поворота в корреляционной функции

Рассмотрим сначала случай, когда обе точки ξ и ξ_1 лежат в областях, где применим метод ВКБ, но между этими точками лежит одна точка поворота $\xi_* = \pi/2$. Пусть для определенности $\xi > \xi_*$, а $\xi_1 < \xi_*$, т.е. $\xi > \xi_1$. В этом случае выражение для функции Грина (1.30) остается справедливым. Но так как при $\xi > \xi_1$ в (1.30) входит матрица $\hat{u}_1$ в обеих точках ξ и ξ_1, для этой матрицы необходимо написать выражение, применимое по обе стороны от точки поворота. То есть надо учесть полученные формулы связи (1.91).

Фактически эти формулы означают, что при проходе окрестности точки поворота амплитуда решения, отвечающего μ_1, вырастет в два раза, а амплитуда решения, отвечающего μ_2, уменьшится в два раза. Напомним, что столбцы матрицы $\hat{u}_1$ образованы двумя первыми компонентами этих решений. Поэтому матрицу $\hat{u}_1$ можно записать в виде

$$\hat{u}_1(\xi) = \begin{cases} \hat{\hat{u}}_1(\xi) & \text{при} \quad \xi < \xi_*, \ |\xi - \xi_*| \gg \tilde{\Omega}^{-1/3} \\ \hat{\hat{u}}_1(\xi)\hat{s} & \text{при} \quad \xi > \xi_*, \ |\xi - \xi_*| \gg \tilde{\Omega}^{-1/3} \end{cases}, \tag{1.94}$$

где $\hat{\hat{u}}_1(\xi)$ задается прежним выражением (1.45) для матрицы $\hat{u}_1(\xi)$, а

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

— матрица, описывающая изменение амплитуд решений при проходе окрестности точки поворота. Тогда выражение (1.30) примет вид

$$\hat{g}(\xi, \xi_1) = \hat{\hat{u}}_1(\xi)\hat{s}\,\hat{\hat{u}}_1^{-1}(\xi_1)(\hat{u}_2'\hat{u}_2^{-1} - \hat{\hat{u}}_1'\hat{\hat{u}}_1^{-1})^{-1}(\xi_1)k_BTq_0^{-1}\hat{K}^{-1}. \tag{1.95}$$

Это приводит к выражению, отличающемуся от (1.47) диагональной матрицей вставкой $\hat{s}$

$$\hat{g}(\xi, \xi_1) = \frac{k_BT}{2q_\perp K_{33}\cos\xi_1\cos\xi} \begin{pmatrix} \sin\xi & i\mu_2(\xi) \\ -i\mu_1(\xi) & \sin\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times\, \hat{\Psi}(\xi, \xi_1) \begin{pmatrix} -\sin\xi_1 & i\mu_1(\xi_1) \\ -i\mu_2(\xi_1) & -\sin\xi_1 \end{pmatrix}. \tag{1.96}$$

Случай $\xi < \xi_1$ рассматривается аналогично: с помощью формул связи (1.93) строится новая матрица $\hat{u}_2(\xi)$.

Заметим, что если бы между точками ξ и ξ_1 оказалось несколько точек поворота, то в корреляционной функции появилась бы та же самая матрица вставка в степени, равной числу точек поворота.

Далее рассмотрим случай, когда точка ξ лежит в окрестности точки поворота $\xi_* = \pi/2$, а точка ξ_1 — далеко от точки поворота, то есть, в области, где применим метод ВКБ. Для определенности снова будем считать, что $\xi > \xi_1$. Для того, чтобы найти корреляционную функцию, продолжим выражение (1.45) для матрицы $\hat{u}_1(\xi)$ в окрестность точки поворота. Это можно сделать, используя выражение (1.81) для решения $\mathbf{\Psi}_1$ и вторую систему в формуле (1.90). Эта формула описывает связь между константами, входящими в ВКБ решения и в решения в окрестности точки поворота. Из (1.81) для $\hat{u}_1$ в окрестности точки поворота получим

$$\hat{u}_1(\tau) = \sqrt{\tau}\exp\left[-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau + \frac{1}{12}(C_1+C_2)\tau^3\right]\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & -i \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1-C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right) & 0 \\ 0 & K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1-C_2)\tau^3\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}. \tag{1.97}$$

Осталось выбрать F_1 и F_2, так чтобы выражение (1.97) было согласовано с выражением (1.45) для матрицы $\hat{u}_1$. Для этого нужно выбрать $B_1^{(-)}$ и $B_2^{(-)}$ в виде

$$B_l^{(-)} = \frac{|\cos\xi_0|}{\sqrt{i\mu_l(\xi_0)}}\exp\left(-\tilde{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi_*}\mu_l d\xi'\right),\ l=1,2. \tag{1.98}$$

Этот выбор, с одной стороны, приводит к уравнению (1.45) для матрицы $\hat{u}_1(\xi)$ и, с другой стороны, согласуется с выражением (1.83) для решений в областях $1 \ll |\tau| \ll \tilde{\Omega}^{1/3}$. Используя (1.90), для F_1 и F_2 получим

$$\begin{aligned} F_1 &= -\tilde{\Omega}^{1/3}\frac{\sqrt{C_1-C_2}}{\sqrt{6\pi}}\frac{|\cos\xi_0|}{\sqrt{\mu_1(\xi_0)}}\exp\left(-\tilde{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi_*}\mu_1 d\xi'\right), \\ F_2 &= \frac{1}{2}\tilde{\Omega}^{1/3}\frac{\sqrt{C_1-C_2}}{\sqrt{6\pi}}\frac{|\cos\xi_0|}{\sqrt{\mu_2(\xi_0)}}\exp\left(-\tilde{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi_*}\mu_2 d\xi'\right). \end{aligned} \tag{1.99}$$

Подставляя в (1.30) выражение (1.97) для $\hat{u}_1(\xi)$ и выражения (1.45) для $\hat{u}_1(\xi_1)$

и $\hat{u}_2(\xi_1)$, получим

$$\hat{g}(\xi,\xi_1) = \\ = \frac{ik_BT\tilde{\Omega}^{1/6}\sqrt{C_1-C_2}}{2q_\perp K_{33}\cos\xi_1\sqrt{6\pi}\sqrt{\xi-\xi_*}}\exp\left\{-\tilde{\Omega}\left[\xi-\xi_*-\frac{C_1+C_2}{12}\left(\xi-\xi_*\right)^3\right]\right\}\times \\ \times\begin{pmatrix} -K_{1/6}\left(\frac{1}{12}\tilde{\Omega}\left(\xi-\xi_*\right)^3(C_1-C_2)e^{-3\pi i}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}K_{1/6}\left(\frac{1}{12}\tilde{\Omega}\left(\xi-\xi_*\right)^3(C_1-C_2)\right)\end{pmatrix}\times \\ \times\hat{\Psi}(\xi_*,\xi_1)\begin{pmatrix} -\sin\xi_1 & i\mu_1(\xi_1) \\ -i\mu_2(\xi_1) & -\sin\xi_1\end{pmatrix}. \quad (1.100)$$

Рассмотрим случай, когда обе точки ξ и ξ_1 оказались в окрестности точки поворота. Тогда обе матрицы $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ потребуют продолжения в эту окрестность. Следует отметить, что при построении решения в окрестности точки поворота требуется учитывать поправки следующего порядка малости. Поскольку иначе не удастся найти матрицы $\hat{u}_1^{-1}(\xi_1)$ и $\hat{u}_2^{-1}(\xi_1)$, входящие в выражение для корреляционной функции. Однако в этом случае не требуется сшивание решения в окрестности точки поворота с решением ВКБ.

Построим матрицу $\hat{u}_1$ в окрестности точки поворота с учетом поправки $\mathbf{\Psi}_1^{(1)}$. Матрица $\hat{u}_2$ строится аналогичным образом. Заметим, что для построения $\hat{u}_1$ используются две первые компоненты вектора $\mathbf{\Psi}_1$. Введем обозначение $\mathbf{w}_1 = (\Psi_{11},\Psi_{12})^T$. Используя выражения (1.76) и (1.80), получим

$$\mathbf{w}_1(\tau) = \beta(\tau)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} + \\ + \tilde{\Omega}^{-2/3}\begin{pmatrix} \beta(\tau)\tau^2\frac{K_{11}+K_{22}-2K_{33}}{8K_{11}} \\ -i\beta'(\tau)\frac{K_{11}+K_{22}}{K_{11}-K_{22}} + i\beta(\tau)\tau^2\frac{K_{11}+K_{22}-2K_{33}}{8K_{11}}\frac{3K_{11}+K_{22}}{K_{11}-K_{22}}\end{pmatrix}. \quad (1.101)$$

Функция $\beta(\tau)$ содержит две произвольных постоянных F_1 и F_2. Пусть

$$\hat{u}_1(\tau) = (\mathbf{w}_1(\tau; F_1 = 1, F_2 = 0), \mathbf{w}_1(\tau; F_1 = 0, F_2 = 1)) \,. \tag{1.102}$$

Такой выбор постоянных F_1 и F_2 приведет к тому, что столбцы матрицы $\hat{u}_1(\tau)$ будут линейно независимы. Тогда элементы матрицы $\hat{u}_1(\tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&[u_1]_{11}(\tau) = \\
&\quad = \exp(-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau)\sqrt{\tau}\exp\left[\frac{1}{12}(C_1 + C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right) \times \\
&\qquad\qquad \times \left\{1 + \tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2 \frac{K_{11} + K_{22} - 2K_{33}}{8K_{11}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[u_1]_{12}(\tau) = \\
&\quad = -i\exp(-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau)\sqrt{\tau}\exp\left[\frac{1}{12}(C_1 + C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right) \times \\
&\qquad \times \left\{1 + \tilde{\Omega}^{-2/3}\frac{K_{11} + K_{22}}{K_{11} - K_{22}} \times \right. \\
&\qquad \times \ln\left[\sqrt{\tau}\exp\left[\frac{1}{12}(C_1 + C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right)\right]' - \\
&\qquad \left. - \tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2 \frac{K_{11} + K_{22} - 2K_{33}}{8K_{11}}\,\frac{3K_{11} + K_{22}}{K_{11} - K_{22}}\right\},
\end{aligned} \tag{1.103}$$

$$\begin{aligned}
&[u_1]_{21}(\tau) = \exp(-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau)\sqrt{\tau}\exp\left[\frac{1}{12}(C_1 + C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right) \times \\
&\qquad\qquad \times \left\{1 + \tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2 \frac{K_{11} + K_{22} - 2K_{33}}{8K_{11}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[u_1]_{22}(\tau) = -i\exp(-\tilde{\Omega}^{2/3}\tau)\sqrt{\tau}\exp\left[\frac{1}{12}(C_1 + C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right) \times \\
&\qquad \times \left\{1 + \tilde{\Omega}^{-2/3}\frac{K_{11} + K_{22}}{K_{11} - K_{22}} \times \right. \\
&\qquad \times \ln\left[\sqrt{\tau}\exp\left[\frac{1}{12}(C_1 + C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1 - C_2)\tau^3\right)\right]' - \\
&\qquad \left. - \tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2 \frac{K_{11} + K_{22} - 2K_{33}}{8K_{11}}\,\frac{3K_{11} + K_{22}}{K_{11} - K_{22}}\right\}.
\end{aligned} \tag{1.104}$$

Для того, чтобы найти матрицу $\hat{u}_2(\tau)$, построим поправки следующего порядка для решения $\mathbf{\Psi}_3(\tau)$, формула (1.92). Эта процедура полностью аналогична процедуре, проделанной для $\mathbf{\Psi}_1(\tau)$. Поэтому приведем лишь ответ для $\hat{u}_2(\tau)$:

$$
\begin{aligned}
&[u_2]_{11}(\tau) = \\
&\quad = -\exp(\tilde{\Omega}^{2/3}\tau)\sqrt{\tau}\exp\left[-\frac{1}{12}(C_1+C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1-C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right)\times \\
&\qquad\qquad \times\left\{1+\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2\frac{K_{11}+K_{22}-2K_{33}}{8K_{11}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[u_2]_{12}(\tau) = \\
&\quad = -i\exp(\tilde{\Omega}^{2/3}\tau)\sqrt{\tau}\exp\left[-\frac{1}{12}(C_1+C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1-C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right)\times \\
&\qquad \times\left\{1-\tilde{\Omega}^{-2/3}\frac{K_{11}+K_{22}}{K_{11}-K_{22}}\times\right. \\
&\qquad \times\ln\left[\sqrt{\tau}\exp\left[-\frac{1}{12}(C_1+C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1-C_2)\tau^3 e^{-3\pi i}\right)\right]'- \\
&\qquad \left.-\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2\frac{K_{11}+K_{22}-2K_{33}}{8K_{11}}\,\frac{3K_{11}+K_{22}}{K_{11}-K_{22}}\right\},
\end{aligned}
\tag{1.105}
$$

$$
\begin{aligned}
&[u_2]_{21}(\tau) = -\exp(\tilde{\Omega}^{2/3}\tau)\sqrt{\tau}\exp\left[-\frac{1}{12}(C_1+C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1-C_2)\tau^3\right)\times \\
&\qquad\qquad \times\left\{1+\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2\frac{K_{11}+K_{22}-2K_{33}}{8K_{11}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[u_2]_{22}(\tau) = -i\exp(\tilde{\Omega}^{2/3}\tau)\sqrt{\tau}\exp\left[-\frac{1}{12}(C_1+C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1-C_2)\tau^3\right)\times \\
&\qquad \times\left\{1-\tilde{\Omega}^{-2/3}\frac{K_{11}+K_{22}}{K_{11}-K_{22}}\times\right. \\
&\qquad \times\ln\left[\sqrt{\tau}\exp\left[-\frac{1}{12}(C_1+C_2)\tau^3\right] K_{1/6}\left(\frac{1}{12}(C_1-C_2)\tau^3\right)\right]'- \\
&\qquad \left.-\tilde{\Omega}^{-2/3}\tau^2\frac{K_{11}+K_{22}-2K_{33}}{8K_{11}}\,\frac{3K_{11}+K_{22}}{K_{11}-K_{22}}\right\}.
\end{aligned}
\tag{1.106}
$$

Для построения корреляционной функции $\hat{g}(\xi,\xi_1)$ можно воспользоваться выражением (1.30) при $\xi > \xi_1$.

Таким образом, мы построили корреляционную функцию $\hat{g}$ при всех возможных положениях точек ξ и ξ_1 относительно точки поворота. Изложенная процедура позволяет учесть флуктуации в неоднородной в среднем среде. При этом подобный подход может быть применен к любой среде с плавно меняющимися свойствами, как при наличии точек поворота, так при их отсутствии.

1.3. Неустойчивость Ландау–Пайерлса в смектических жидких кристаллах

Наиболее простой структурой среди смектических жидких кристаллов обладают смектики А (СЖК-А). В смектиках А длинные оси молекул выстроены в среднем вдоль некоторого направления и образуют слоистую структуру с толщиной слоя, близкой к длине молекул. Таким образом, имеет место периодическая структура вдоль направления, совпадающего с ориентацией длинных осей молекул. В двух остальных направлениях система ведет себя как жидкость. Уже достаточно давно Ландау и Пайерлс показали [4, 23, 24], что в телах, обладающих одномерной упорядоченностью, с ростом размеров флуктуации неограниченно возрастают. В результате упорядоченность разрушается. Далее мы рассмотрим неустойчивость Ландау–Пайерлса для смектических жидких кристаллов.

1.3.1. Свободная энергия смектика А

Рассмотрим ячейку смектика А, помещенную в некоторый объем V. Этот объем представляет собой параллелепипед со сторонами L_x — длина, L_y — толщина и L_z — высота (Рис. 1.7). Введем систему координат с началом отсчета в центре ячейки и осями координат, перпендикулярными ограничива-

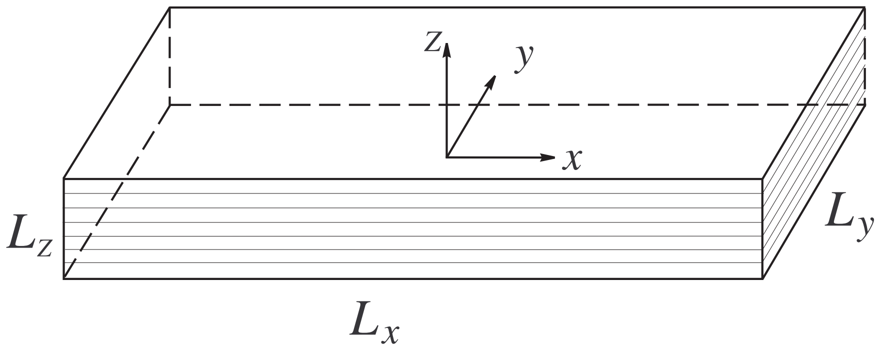


Рис. 1.7 Геометрия плоско-параллельной ограниченной ячейки СЖК-А

ющим плоскостям: $x = \pm L_x/2$, $y = \pm L_y/2$, $z = \pm L_z/2$. Будем считать, что смектические слои располагаются перпендикулярно оси z. Обычно при экспериментах имеют место неравенства $L_z \ll L_x, L_y$.

Объемная часть свободной энергии смектического жидкого кристалла имеет вид [43]

$$F_b = \frac{1}{2}\int_V d\mathbf{r}\left\{B[\partial_z u(\mathbf{r}_\perp, z)]^2 + K[\nabla_\perp^2 u(\mathbf{r}_\perp, z)]^2\right\}. \qquad (1.107)$$

Здесь $u(\mathbf{r})$ — смещение слоя от его равновесного положения вдоль оси z (Рис. 1.8), B — модуль упругости, связанный со сжатием слоев, K — модуль упругости, связанный с искажением формы слоев,

$$\nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Выражение (1.107) учитывает все не равные нулю производные низшего порядка от смещения слоев по координатам. Фактически, это выражение является разложением по малому параметру a_0/r_u, где a_0 — молекулярный размер, r_u — характерный размер неоднородностей функции $u(\mathbf{r})$. Это означает, что в выражении (1.107) учтены только плавные изменения $u(\mathbf{r})$.

Модели (1.107) соответствует вектор директора

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \parallel \left(-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, 1\right),$$

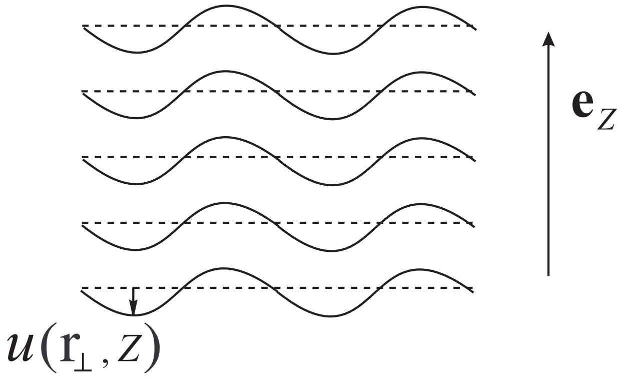


Рис. 1.8 Смещение смектических слоев от положения равновесия $u(\mathbf{r}_\perp, z)$

нормальный к смектическим слоям.

В поверхностной энергии СЖК-А можно выделить два слагаемых. Одно из них описывает вклад боковых поверхностей $x = \pm L_x/2$ и $y = \pm L_y/2$, а второе — вклад верхней и нижней поверхностей $z = \pm L_z/2$. Мы будем считать, что $L_z \ll L_x, L_y$. В этом случае вкладом, связанным с боковыми поверхностями, можно пренебречь. Вклад верхней и нижней поверхностей зависит от типа поверхностей: подложка или свободная поверхность. Соответственно, поверхностная энергия определяется сцеплением, $F_s^{(an)}$, или поверхностным натяжением, $F_s^{(st)}$,

$$F_s = F_s^{(an)} + F_s^{(st)}.$$

В случае гомеотропного сцепления поверхностная энергия имеет вид [144]

$$F_s^{(an)} = \frac{1}{2}\int_{S_\perp} d\mathbf{r}_\perp \left[w_1 u^2(\mathbf{r}_\perp, -L_z/2) + w_2 u^2(\mathbf{r}_\perp, L_z/2)\right], \qquad (1.108)$$

где w_1 и w_2 — коэффициенты сцепления, $S_\perp = \{(x, y) : -L_x/2 \le x \le L_x/2, -L_y/2 \le y \le L_y/2\}$. А для поверхностного натяжения [144–146] —

$$F_s^{(st)} = \frac{1}{2}\int_{S_\perp} d\mathbf{r}_\perp \left\{\gamma_1 \left[\nabla_\perp u(\mathbf{r}_\perp, -L_z/2)\right]^2 + \gamma_2 \left[\nabla_\perp u(\mathbf{r}_\perp, L_z/2)\right]^2\right\}, \qquad (1.109)$$

где γ_1 и γ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения. Если вклад в энергию от одной из поверхностей, связанный со сцеплением (1.108), не равен

Геометрия	Сцепления	Поверхностные натяжения
Плоскопараллельная ячейка	$w_1 \neq 0$, $w_2 \neq 0$, $w_1 = w_2 = w$	$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$
Пленка на подложке	$w_1 = 0$, $w_2 \neq 0$	$\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$
Свободно подвешенная пленка	$w_1 = w_2 = 0$	$\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$

Таблица 1.1

Коэффициенты сцепления и поверхностного натяжения в зависимости от геометрии образца

нулю, то на этой поверхности можно пренебречь вкладом, связанным с поверхностным натяжением (1.109). Однако при отсутствии сцепления поверхностное натяжение необходимо учитывать. В таблице 1.1 приведены три возможные геометрии образца и значения коэффициентов сцепления и поверхностного натяжения для этих геометрий.

В случаях, когда нельзя пренебречь поверхностным вкладом в свободную энергию, мы будем использовать преобразование Фурье вида

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{q}}, \quad u_{\mathbf{q}} = \int_V d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{r}), \tag{1.110}$$

где волновые вектора $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{(n_1,n_2,n_2)}$ образуют дискретный набор

$$\mathbf{q}_{(n_1,n_2,n_2)} = \left(\frac{2\pi n_1}{L_x}, \frac{2\pi n_2}{L_y}, \frac{2\pi n_3}{L_z}\right). \tag{1.111}$$

Здесь $-\infty < n_{1,2,3} < \infty$ — целые числа. Тогда для объемной части свободной энергии имеем

$$F_b = \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{q}} (Bq_z^2 + Kq_\perp^4)|u_{\mathbf{q}}|^2. \tag{1.112}$$

В пределе $L_x, L_y, L_z \to \infty$ мы можем перейти к интегрированию, используя следующее правило $V^{-1}\sum_{\mathbf{q}} \longrightarrow \int d\mathbf{q}/(2\pi)^3$, $u_{\mathbf{q}} \longrightarrow u(\mathbf{q})$. Тогда для рядов (1.110), (1.112) получим

$$u(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{q}), \quad F_b = \frac{1}{2}\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}(Bq_z^2 + Kq_\perp^4)|u(\mathbf{q})|^2. \tag{1.113}$$

Проведенные рассуждения стандартны при расчете энергии. Рассмотрим более подробно некоторые ограничения, возникающие в полученных выражениях.

Суммирование или интегрирование по $\mathbf{q}$ должно быть ограничено волновыми векторами с $q < q_{max} \approx 2\pi/a_0$, поскольку в выражении (1.107) предполагались только плавные флуктуации $u(\mathbf{r})$. Молекулярный размер a_0 определяет область применимости континуальной модели. Однако использование такого “ультрафиолетового” (УФ) обрезания — это достаточно грубый способ учесть область применимости континуальной модели. Более полная процедура должна учитывать поведение системы на молекулярных масштабах. В рамках континуальной теории возможно лишь получать величины, имеющие слабую зависимость от q_{max}.

Далее заметим, что мода $u_{\mathbf{q}}$ с волновым вектором $\mathbf{q} = 0$ при переходе в $\mathbf{r}$–пространство будет постоянной величиной. Физически это соответствует трансляции всего СЖК-А как целого. Поскольку такая трансляция не дает вклада в упругую энергию, мы должны исключить ее из ряда Фурье (1.110). Добавим к (1.111) условие $(n_1, n_2, n_3) \neq (0, 0, 0)$, и суммирование в выражениях (1.110) и (1.112) будет начинаться с $q = q_{min} = 2\pi/\max(L_x, L_y, L_z)$. Однако такое “трехмерное” обрезание будет справедливо только для систем со свободными граничными условиями, когда $u(\mathbf{r})$ на границах может принимать любые значения. В случае, например, систем с жесткими граничными условиями, для которых на всех границах выполняется условие $u(\mathbf{r}) = 0$, трехмерное обрезание заменяется тремя независимыми одномерными

$$|q_x| \geq \frac{2\pi}{L_x}, \quad |q_y| \geq \frac{2\pi}{L_y}, \quad |q_z| \geq \frac{2\pi}{L_z}. \tag{1.114}$$

Такое обрезание связано с тем, что в силу жестких граничных условий, не может быть флуктуаций, например, вида $u = u(x, y)$. Они обязаны обращаться в ноль, поскольку $u(x, y, L_z/2) = 0$. А, значит, должны обращаться в ноль Фурье гармоники $u_{\mathbf{q}}$ с $q_z = 0$.

Таким образом, уравнения (1.110) и (1.112) мы запишем в виде

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{q_{min} \lhd q < q_{max}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{q}}, \quad F_b = \frac{1}{2V} \sum_{q_{min} \lhd q < q_{max}} \left(Bq_z^2 + Kq_\perp^4\right) |u_{\mathbf{q}}|^2 . \quad (1.115)$$

Для интегральной формы этих выражений (1.113) получим

$$u(\mathbf{r}) = \int\limits_{q_{min} \lhd q < q_{max}} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{q}), \quad F_b = \frac{1}{2} \int\limits_{q_{min} \lhd q < q_{max}} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (Bq_z^2 + Kq_\perp^4) |u(\mathbf{q})|^2, \quad (1.116)$$

где $\lhd$ обозначает тип “инфракрасного” (ИК) обрезания. Конкретный тип обрезания будет выбираться в зависимости от вида граничных условий.

Важную роль при применении Фурье-анализа к исследованию флуктуаций в конечных системах играют граничные условия. Ряды вида (1.115) представляют собой суммы периодических функций, а, значит, и сами суммы являются периодическими функциями. В то же время произвольная функция $u(\mathbf{r})$ может не удовлетворять периодическим граничным условиям. Таким образом, на границах появляется отличие между функцией $u(\mathbf{r})$ и ее суммой Фурье. Согласно теореме Дирихле [147], значение суммы Фурье некоторой функции на границах интервала равно среднему арифметическому значений функции на границах. Такое поведение не вызывает затруднений, если необходимо интегрировать квадрат самой функции. Поскольку интервал у границ, в котором сумма Фурье быстро меняется, очень мал. Однако если необходимо интегрировать квадрат производной той же функции, то мы получим существенный вклад в интеграл из-за дельтообразной особенности у производной. В результате аналог равенства Парсеваля

$$\int_V d\mathbf{r} \left\{ B[\partial_z u(\mathbf{r}_\perp, z)]^2 + K[\nabla_\perp^2 u(\mathbf{r}_\perp, z)]^2 \right\} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} (Bq_z^2 + Kq_\perp^4) |u_{\mathbf{q}}|^2 \quad (1.117)$$

не справедлив для систем с непериодическими граничными условиями. Проблема здесь состоит в том, что ряд Фурье для функции с непериодическими граничными условиями не обладает равномерной сходимостью, и его нельзя дифференцировать почленно.

Таким образом, функция $u(\mathbf{r})$ должна удовлетворять периодическим граничным условиям, чтобы ряд Фурье (1.115) не имел разрывов на границах. Для выполнения этого требования обычно предполагают, что размер системы достаточно велик, и влиянием поверхностной энергии по сравнению с объемной энергией можно пренебречь (термодинамический предел). Тогда для большой системы можно использовать практически любые граничные условия, в том числе и периодические. На первый взгляд кажется, что проблема непериодических граничных условий должна проявляться только для малых систем. Однако далее мы увидим, что смектики принадлежат к редкому классу физических систем, для которых поверхностная энергия важна и в термодинамическом пределе.

Для поверхностного вклада в свободную энергию, также как и для объемного вклада, возникает ряд ограничений. Выполним двумерное преобразование Фурье по переменной $\mathbf{r}_\perp$ в уравнениях (1.108) и (1.109), получим

$$F_s = \frac{1}{2S_\perp}\sum_{\mathbf{q}_\perp}\left[(w_1 + q_\perp^2\gamma_1)|u_{\mathbf{q}_\perp}(-L_z/2)|^2 + (w_2 + q_\perp^2\gamma_2)|u_{\mathbf{q}_\perp}(L_z/2)|^2\right], \quad (1.118)$$

где $S_\perp = L_x L_y$ и

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{S_\perp}\sum_{\mathbf{q}_\perp} e^{i\mathbf{q}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp}u_{\mathbf{q}_\perp}(z), \quad u_{\mathbf{q}_\perp}(z) = \int_{S_\perp} d\mathbf{r}_\perp e^{-i\mathbf{q}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp}u(\mathbf{r}_\perp, z). \quad (1.119)$$

Здесь $u^*_{\mathbf{q}_\perp}(z) = u_{-\mathbf{q}_\perp}(z)$, так как $u(\mathbf{r})$ вещественно. В пределе $L_{x,y}\to\infty$ можно перейти от суммирования к интегрированию по переменной $\mathbf{q}_\perp$

$$u(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp} u(\mathbf{q}_\perp, z), \quad (1.120)$$

$$F_s = \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} F_s(\mathbf{q}_\perp, u), \tag{1.121}$$

где

$$F_s(\mathbf{q}_\perp, u) = \frac{1}{2}(w_1 + q_\perp^2 \gamma_1)|u(\mathbf{q}_\perp, -L_z/2)|^2 + \frac{1}{2}(w_2 + q_\perp^2 \gamma_2)|u(\mathbf{q}_\perp, L_z/2)|^2. \tag{1.122}$$

Также как и для объемной энергии, мы должны использовать УФ обрезание $q_\perp < q_{\perp max}$. Инфракрасное обрезание для $q_\perp$ зависит от типа граничных условий. Для плоскопараллельной ячейки обычно используются жесткие граничные условия для переменных x и y

$$u(\pm L_x/2, y, z) = 0, \quad u(x, \pm L_y/2, z) = 0.$$

В этом случае мы должны использовать одномерные обрезания для обеих переменных

$$|q_x| \geq \frac{2\pi}{L_x}, \quad |q_y| \geq \frac{2\pi}{L_y}, \tag{1.123}$$

независимо от вида граничных условий для переменной z. Для свободно подвешенной пленки характерны свободные граничные условия для переменных x и y. В этом случае вид обрезания зависит от граничных условий для переменной z. Если для переменной z также имеют место свободные граничные условия, то в суммах (1.115) мы должны потребовать $\mathbf{q} \neq 0$ (трехмерное обрезание). В случае жестких граничных условий для переменной z следует выполнить двумерное обрезание $\mathbf{q}_\perp \neq 0$.

1.3.2. Неустойчивость Ландау–Пайерлса и граничные условия

Сначала рассмотрим случай $V \to \infty$ и пренебрежем F_s по сравнению с F_b. Как мы увидим далее, такое достаточно стандартное допущение приведет к неожиданным последствиям для СЖК-А. Используя теорему о равнораспределении [4], получим из уравнения (1.112) спектр Фурье для среднего квадрата флуктуаций [43]

$$\langle |u_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = \frac{Vk_BT}{Bq_z^2 + Kq_\perp^4}. \tag{1.124}$$

Тогда из уравнения (1.110) получим корреляционную функцию в виде

$$\langle u(\mathbf{r}_1)u(\mathbf{r}_2)\rangle = \frac{k_BT}{V}\sum_{\mathbf{q}} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}}{Bq_z^2 + Kq_\perp^4}. \tag{1.125}$$

Переходя к интегрированию, мы приходим к формальному выражению для среднего квадрата флуктуаций в СЖК-А

$$\langle u^2(\mathbf{r})\rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{k_BT}{Bq_z^2 + Kq_\perp^4}. \tag{1.126}$$

Этот интеграл расходится логарифмически при $q \to 0$ и $q \to \infty$. Применение ИК и УФ обрезаний устраняет расходимость. Однако с ростом размера системы ИК обрезание стремится к нулю, средний квадрат флуктуаций растет и при достаточно больших размерах системы флуктуации разрушат периодическую структуру. Это и есть явление неустойчивости Ландау–Пайерлса для неограниченных систем, обладающих одномерной периодичностью [4, 23, 24]. Поскольку реальные физические системы конечны, необходимо исследовать зависимость $\langle u^2(\mathbf{r})\rangle$ от размеров системы.

Переходя к интегрированию по q_z и $\mathbf{q}_\perp$ и принимая во внимание свойства подынтегрального выражения, получим из уравнения (1.126)

$$\langle u^2(\mathbf{r})\rangle = \int_0^\infty dq_z \int_0^\infty dq_\perp \Gamma(q_\perp, q_z), \quad \Gamma(q_\perp, q_z) = \frac{k_BT}{2\pi^2}\frac{q_\perp}{Bq_z^2 + Kq_\perp^4}. \tag{1.127}$$

Разные способы обрезания этого интеграла по q_z и $q_\perp$ показаны на Рис. 1.9. Область I_0 соответствует гармонике Фурье с $\mathbf{q} = 0$, связанной со смещением образца как целого. Область I_2 связана с гармониками $q_z = 0$, а область I_3 — с гармониками $q_\perp = 0$. При жестких граничных условиях следует (1.114) и интегрирование должно выполняться по области I_1, а при свободных — по областям I_1, I_2 и I_3, исключая только область I_0.

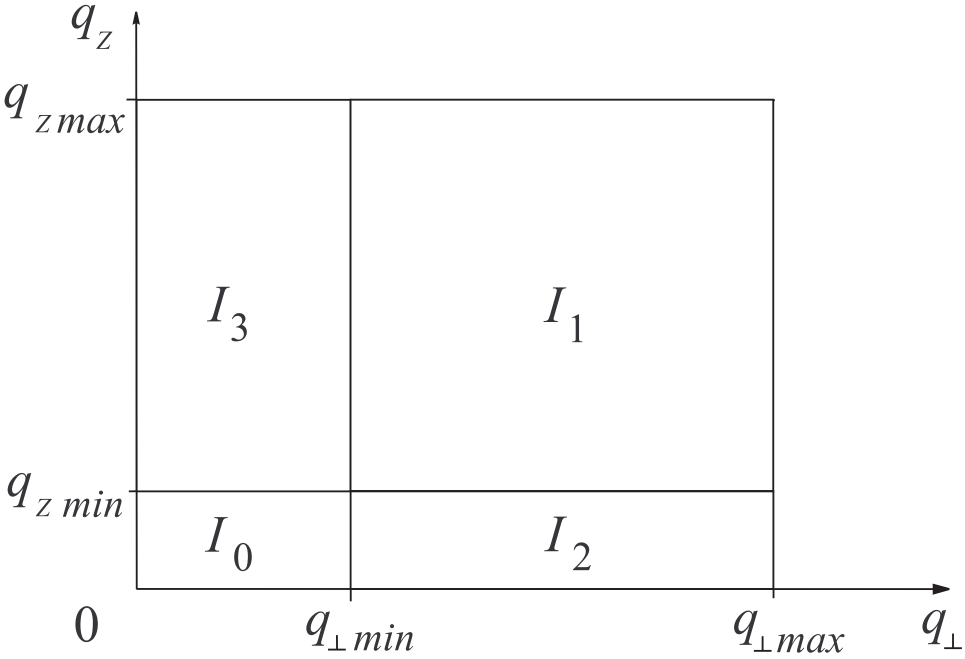


Рис. 1.9 Области интегрирования в уравнениях (1.128)–(1.130)

Запишем интегралы по отдельным областям, а затем скомбинируем их для разных граничных условий.

$$I_1 = \int_{q_{z\,min}}^{q_{z\,max}} dq_z \int_{q_{\perp min}}^{q_{\perp max}} dq_\perp \Gamma(q_\perp, q_z), \tag{1.128}$$

$$I_2 = \int_{0}^{q_{z\,min}} dq_z \int_{q_{\perp min}}^{q_{\perp max}} dq_\perp \Gamma(q_\perp, q_z), \tag{1.129}$$

$$I_3 = \int_{q_{z\,min}}^{q_{z\,max}} dq_z \int_{0}^{q_{\perp min}} dq_\perp \Gamma(q_\perp, q_z). \tag{1.130}$$

Здесь

$$\begin{gathered} q_{z\,min} = \frac{\pi}{L_z}, \quad q_{z\,max} = \frac{2\pi}{a_z}, \\ q_{\perp min} = \frac{\pi}{L_\perp}, \quad q_{\perp max} = \frac{2\pi}{a_\perp}, \end{gathered} \tag{1.131}$$

где $L_\perp \sim L_{x,y}$ и для простоты мы положили $L_x \approx L_y$. Заметим, что мы для дальнейшего удобства использовали здесь обрезание $\pi/L_{z,\perp}$ вместо $2\pi/L_{z,\perp}$. Величины a_z и $a_\perp$ — молекулярные размеры вдоль и поперек молекул смектика.

Приведем характерные значения для введенных размеров. Величина a_z

представляет собой длину смектической молекулы и характеризует период изменения свойств СЖК. Величина $a_\perp \lesssim a_z$ определяет толщину молекулы. Также удобно ввести величину $\lambda_{sm} = \sqrt{K/B}$, имеющую размерность длины. Для типичных значений K и B величина $\lambda_{sm} \approx a_z \approx 2$ нм. Обычно $a_z \ll L_\perp$. Отношение L_z/a_z представляет собой число смектических слоев в образце и, как правило справедливо $a_z \ll L_z$, за исключением очень тонких пленок.

Мы рассмотрим далее два случая. В первом случае $L_z\lambda_{sm} \ll L_\perp^2$, что относится практически ко всем реальным смектических образцам. Для характерных значений $L_\perp \approx 10$–100 мм, $\lambda_{sm} \approx 0.1$–2 нм получаем $L_z \ll 50$–10^5 км. На практике смектические пленки имеют толщину до 10 мкм. Во втором случае $L_z\lambda_{sm} \gg L_\perp^2$, что соответствует смектических нитям. Такая ситуация реализуется, например, при $L_z \approx 10$ мм, $\lambda_{sm} \approx 0.1$–2 нм и $L_\perp \ll 1$–5 мкм.

Рассмотрим сначала первый случай. После интегрирования в (1.128) получаем

$$I_1 = \frac{k_B T}{4\pi^2\sqrt{BK}} \int_{q_{z\,min}}^{q_{z\,max}} \frac{dq_z}{q_z} \left(\operatorname{arctg} \frac{q_{\perp max}^2 \lambda_{sm}}{q_z} - \operatorname{arctg} \frac{q_{\perp min}^2 \lambda_{sm}}{q_z} \right). \qquad (1.132)$$

Здесь аргумент первого арктангенса меняется от

$$q_{\perp max}^2 \lambda_{sm}/q_{z\,min} = 4\pi L_z \lambda_{sm}/a_\perp^2 \gg 1$$

и до

$$q_{\perp max}^2 \lambda_{sm}/q_{z\,max} = 2\pi a_z \lambda_{sm}/a_\perp^2 \gtrsim 1,$$

а аргумент второго арктангенса — от

$$q_{\perp min}^2 \lambda_{sm}/q_{z\,min} = \pi L_z \lambda_{sm}/(2L_\perp^2) \ll 1$$

и до

$$q_{\perp min}^2 \lambda_{sm}/q_{z\,max} = \pi a_z \lambda_{sm}/(2L_\perp^2) \ll 1.$$

Следовательно, мы можем пренебречь вторым слагаемым во всей области интегрирования. Имеем

$$I_1 = \frac{k_B T}{4\pi^2\sqrt{BK}} \int\limits_{q_{z\,min}}^{q_{z\,max}} \frac{dq_z}{q_z} \operatorname{arctg} \frac{q_{\perp max}^2 \lambda_{sm}}{q_z} = \frac{k_B T}{4\pi^2\sqrt{BK}} \int\limits_{q_{\perp max}^2 q_{z\,max}^{-1}\lambda_{sm}}^{q_{\perp max}^2 q_{z\,min}^{-1}\lambda_{sm}} \frac{\operatorname{arctg}\zeta}{\zeta} d\zeta. \tag{1.133}$$

Здесь верхний предел интегрирования равен $q_{\perp max}^2 q_{z\,min}^{-1}\lambda_{sm} = 4\pi L_z \lambda_{sm}/a_\perp^2 \gg 1$, а нижний — $q_{\perp max}^2 q_{z\,max}^{-1}\lambda_{sm} = 2\pi a_z \lambda_{sm}/a_\perp^2 \gtrsim 1$.

Введем функцию

$$\mathcal{J}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\operatorname{arctg}\zeta}{\zeta} d\zeta. \tag{1.134}$$

Поскольку $\operatorname{arctg}\zeta \to \zeta$ при $\zeta \to 0$, то $\mathcal{J}(x) \to 2x/\pi$ при $x \to 0$. Асимптотика функции $\mathcal{J}(x)$ при $x \to \infty$ имеет вид

$$\mathcal{J}(x) - \ln x \sim \frac{2}{\pi x}. \tag{1.135}$$

Тогда из уравнений (1.133)–(1.135) получим два главных члена асимптотического разложения

$$I_1 \sim \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \left[\ln \frac{L_z \lambda_{sm}}{a_\perp^2} - \mathcal{J}\left(\frac{2\pi a_z \lambda_{sm}}{a_\perp^2} \right) \right]. \tag{1.136}$$

В интеграле I_2 мы сначала выполним интегрирование по переменной q_z

$$I_2 = \frac{k_B T}{2\pi^2\sqrt{BK}} \int_{q_{\perp min}}^{q_{\perp max}} \frac{dq_\perp}{q_\perp} \operatorname{arctg} \frac{q_{z\,min}}{q_\perp^2 \lambda_{sm}} = \frac{k_B T}{4\pi^2\sqrt{BK}} \int\limits_{q_{z\,min} q_{\perp max}^{-2} {\lambda_{sm}}^{-1}}^{q_{z\,min} q_{\perp min}^{-2} {\lambda_{sm}}^{-1}} \frac{\operatorname{arctg}\zeta}{\zeta} d\zeta. \tag{1.137}$$

Верхний предел интегрирования равен $q_{z\,min} q_{\perp min}^{-2} {\lambda_{sm}}^{-1} = L_\perp^2/(\pi L_z \lambda_{sm}) \gg 1$, а нижний — $q_{z\,min} q_{\perp max}^{-2} {\lambda_{sm}}^{-1} = a_\perp^2/(4\pi L_z \lambda_{sm}) \ll 1$. Тогда из (1.135) мы получаем асимптотику с той же точностью, что и в выражении (1.136),

$$I_2 \sim \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \ln \frac{L_\perp^2}{L_z \lambda_{sm}}. \tag{1.138}$$

Аналогичным образом получим для интеграла I_3

$$I_3 = \frac{k_B T}{2\pi^2\sqrt{BK}} \int_{q_{z\,min}}^{q_{z\,max}} \frac{dq_z}{q_z} \operatorname{arctg} \frac{q_{\perp min}^2 \lambda_{sm}}{q_z} = \frac{k_B T}{4\pi^2\sqrt{BK}} \int\limits_{q_{\perp min}^2 q_{z\,max}^{-1}\lambda_{sm}}^{q_{\perp min}^2 q_{z\,min}^{-1}\lambda_{sm}} \frac{\operatorname{arctg}\zeta}{\zeta} d\zeta. \tag{1.139}$$

Здесь для пределов интегрирования имеем $q_{\perp min}^2 q_{z\,min}^{-1}\lambda_{sm} = \pi L_z \lambda_{sm}/L_\perp^2 \ll 1$ и $q_{\perp min}^2 q_{z\,max}^{-1}\lambda_{sm} = \pi a_z \lambda_{sm}/(2L_\perp^2) \ll 1$. В результате получаем

$$I_3 \ll I_{1,2}. \tag{1.140}$$

Для жестких граничных условий учтем только область I_1 на Рис. 1.9. Имеем из выражения (1.136)

$$\langle u^2 \rangle_{fixed} = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \left[\ln \frac{L_z}{\lambda_{sm}} + C_1(\lambda_{sm}, a_z, a_\perp) \right]. \tag{1.141}$$

В случае свободных или периодических граничных условий мы должны учесть три области интегрирования $I_1 + I_2 + I_3$. Из выражений (1.136), (1.138) и (1.139) получим

$$\langle u^2 \rangle_{free} = \frac{k_B T}{4\pi\sqrt{BK}} \left[\ln \frac{L_\perp}{\lambda_{sm}} + C_2(\lambda_{sm}, a_z, a_\perp) \right], \tag{1.142}$$

где

$$\begin{aligned} C_1(\lambda_{sm}, a_z, a_\perp) &= 2 \ln \frac{\lambda_{sm}}{a_\perp} - \mathcal{J}\left(\frac{2\pi a_z \lambda_{sm}}{a_\perp^2} \right), \\ C_2(\lambda_{sm}, a_z, a_\perp) &= \frac{1}{2} C_1(\lambda_{sm}, a_z, a_\perp). \end{aligned} \tag{1.143}$$

Формула (1.141) встречается в литературе [148, 149] для случая $L_z \lambda_{sm} \ll L_\perp^2$, но без поправочного члена C_2 и не упоминается неявное предположение о жестких граничных условиях.

Оценим из выражений (1.141) и (1.142) размеры L_z и $L_\perp$, при которых смектическая фаза становится нестабильной. Будем считать, что стабильность пропадает, когда $\sqrt{\langle u^2 \rangle} \gtrsim a_z$, то есть флуктуации слоев становятся порядка толщины слоя. Будем использовать следующие значения параметров: $k_BT \sim 4 \times 10^{-21}$ Дж, $\sqrt{BK} \sim 0.005$ Н/м, $a_z \sim \lambda_{sm} \sim 2$ нм. Тогда из выражения (1.141) найдем $L_z \gtrsim e^{130}\lambda_{sm} \sim 10^{46}$ м, а из выражения (1.142) получаем $L_\perp \gtrsim e^{60}\lambda_{sm} \sim 10^{18}$ м. Таким образом, на практике СЖК-А стабильны и не размываются флуктуациями.

Микроскопические параметры a_z и $a_\perp$ входят только в члены $C_{1,2}$ в выражениях (1.141) и (1.142). Поэтому логарифмический вклад может быть получен из континуальной модели. Величина этого вклада для жестких граничных условий отличается от случая свободных граничных условий.

Перейдем к рассмотрению смектических нитей, для которых выполняется неравенство $L_z\lambda_{sm} \gg L_\perp^2$. После интегрирования выражения (1.128) по переменной q_z, получим

$$I_1 = \frac{k_BT}{2\pi^2\sqrt{BK}} \int_{q_{\perp min}}^{q_{\perp max}} \frac{dq_\perp}{q_\perp} \left(\operatorname{arctg} \frac{q_{z\,max}}{q_\perp^2\lambda_{sm}} - \operatorname{arctg} \frac{q_{z\,min}}{q_\perp^2\lambda_{sm}} \right). \qquad (1.144)$$

Вторым слагаемым под интегралом можно пренебречь во всей области интегрирования. Используя выражение (1.135), получим

$$I_1 = \frac{k_BT}{4\pi^2\sqrt{BK}} \int\limits_{q_{z\,max}q_{\perp max}^{-2}\lambda_{sm}{}^{-1}}^{q_{z\,max}q_{\perp min}^{-2}\lambda_{sm}{}^{-1}} \frac{\operatorname{arctg}\zeta}{\zeta} d\zeta \sim$$

$$\sim \frac{k_BT}{8\pi\sqrt{BK}} \left[\ln \frac{2L_\perp^2}{\pi a_z\lambda_{sm}} - \mathcal{J}\left(\frac{a_\perp^2}{2\pi a_z\lambda_{sm}} \right) \right]. \qquad (1.145)$$

Для интеграла I_3 мы получили выражение (1.139) независимо от того, рассматриваем ли мы смектическую пленку или нить. В случае нити мы имеем следующие пределы интегрирования $q_{\perp min}^2 q_{z\,min}^{-1}\lambda_{sm} = L_z\lambda_{sm}/(2L_\perp^2) \gg 1$ и $q_{\perp min}^2 q_{z\,max}^{-1}\lambda_{sm} = a_z\lambda_{sm}/(2L_\perp^2) \ll 1$. Используя выражение (1.135) найдем

$$I_3 \sim \frac{k_BT}{8\pi\sqrt{BK}} \ln \frac{L_z\lambda_{sm}}{L_\perp^2}. \qquad (1.146)$$

Для интеграла I_2 мы можем использовать выражение (1.137). Однако теперь оба предела интегрирования оказываются много меньше единицы. Поэтому для нитей

$$I_2 \ll I_{1,3}. \tag{1.147}$$

Для жестких граничных условий из выражения (1.145) найдем

$$\langle u^2 \rangle_{fixed} = \frac{k_B T}{4\pi\sqrt{BK}} \left[\ln \frac{L_\perp}{\lambda_{sm}} + C_2(\lambda_{sm}, a_z, a_\perp) \right]. \tag{1.148}$$

Для свободных или периодических граничных условий, согласно выражениям (1.145), (1.146) и (1.147), получим

$$\langle u^2 \rangle_{free} = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \left[\ln \frac{L_z}{\lambda_{sm}} + C_1(\lambda_{sm}, a_z, a_\perp) \right]. \tag{1.149}$$

Формула (1.148) также встречается в литературе [146] и также без постоянного слагаемого и без упоминания о жестких граничных условиях. Аналогично случаю пленок, члены $C_{1,2}$ не могут быть получены в рамках континуальной модели, и мы можем определить только поведение логарифмического члена.

1.3.3. Анализ флуктуаций с помощью ряда Фурье

В предыдущем разделе мы показали, что неустойчивость Ландау–Пайерлса зависит от типа граничных условий. Однако мы не учитывали проблему связанную с непериодическими граничными условиями. Как мы уже видели, в случае свободных границ равенство Парсеваля не выполняется и следует использовать другой подход. Более аккуратным здесь представляется использование рядов Фурье вместо интеграла Фурье. В этом разделе мы подберем полную систему ортогональных функций для каждого типа граничных условий так, чтобы равенство Парсеваля выполнялось.

Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая смектических пленок. Случай нитей может быть рассмотрен аналогично. Будем использовать ряд Фурье только для переменной z, считая, по-прежнему, что влияние боковых стенок мало по сравнению с верхней и нижней поверхностями. В таком приближении мы можем использовать интеграл Фурье для переменных x и y и применять двумерное ИК обрезание по $\mathbf{q}_\perp$. Для удобства в этом разделе мы будем считать, что образец занимает объем $0 \le z \le L_z$ вместо $-L_z/2 \le z \le L_z/2$.

При $L_{x,y} \gg L_z$ используем интеграл Фурье по переменной $\mathbf{r}_\perp$ для объемной части свободной энергии

$$F_b = \int\limits_{q_{\perp min} \le q_\perp < q_{\perp max}} \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} F_b(\mathbf{q}_\perp, u), \tag{1.150}$$

где

$$F_b(\mathbf{q}_\perp, u) = \frac{1}{2} \int_0^{L_z} \left(B|\partial_z u(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 + K q_\perp^4 |u(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \right) dz. \tag{1.151}$$

Нас будут интересовать профиль среднего квадрата флуктуаций

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle = \int\limits_{q_{\perp min} \le q_\perp < q_{\perp max}} \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \langle |u(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle \tag{1.152}$$

и значение среднего квадрата флуктуаций в центре образца

$$\sigma_C^2 = \langle u^2(\mathbf{r}_\perp, L_z/2) \rangle. \tag{1.153}$$

Рассмотрим сначала случай жестких граничных условий $u(\mathbf{q}_\perp, 0) = 0$, $u(\mathbf{q}_\perp, L_z) = 0$. Удобно выполнить продолжение функции $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ с области $[0, L_z]$ на область $[-L_z, L_z]$ так, что $u(\mathbf{q}_\perp, -z) = -u(\mathbf{q}_\perp, z)$. Нечетную функцию на интервале $[-L_z, L_z]$ можно разложить в ряд Фурье по синусам [147]

$$u(\mathbf{q}_\perp, z) = \frac{1}{L_z} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\mathbf{q}_\perp) \sin(p_n z), \quad c_n(\mathbf{q}_\perp) = 2 \int_0^{L_z} u(\mathbf{q}_\perp, z) \sin(p_n z) dz, \tag{1.154}$$

где $p_n = \pi n / L_z$. В силу периодических граничных условий $u(\mathbf{q}_\perp, -L_z) = u(\mathbf{q}_\perp, L_z) = 0$ и непрерывности функции $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ на всем интервале $[-L_z, L_z]$, мы можем использовать аналог равенства Парсеваля (1.117)

$$F_b(\mathbf{q}_\perp, u) = \frac{1}{4L_z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(B p_n^2 + K q_\perp^4 \right) |c_n(\mathbf{q}_\perp)|^2. \tag{1.155}$$

Из теоремы о равнораспределении имеем

$$\langle |c_n(\mathbf{q}_\perp)|^2 \rangle = \frac{2L_z k_B T}{Bp_n^2 + Kq_\perp^4}. \tag{1.156}$$

Используя уравнения (1.154) и (1.156), получим корреляционную функцию флуктуаций смещения слоев

$$G(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \langle u(\mathbf{q}_\perp, z_1) u^*(\mathbf{q}_\perp, z_2) \rangle$$

в виде суммы ряда

$$G(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \frac{1}{L_z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \langle |c_n(\mathbf{q}_\perp)|^2 \rangle \sin(p_n z_1) \sin(p_n z_2) =$$
$$= \frac{k_B T}{L_z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[p_n(z_1 - z_2)] - \cos[p_n(z_1 + z_2)]}{Bp_n^2 + Kq_\perp^4}. \tag{1.157}$$

Здесь мы учли, что $\langle c_n(\mathbf{q}_\perp) c_m^*(\mathbf{q}_\perp) \rangle \propto \delta_{nm}$. Используя тождество [150]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2 + \zeta^2} = \frac{\pi}{2\zeta} \frac{\mathrm{ch}[(\pi - |x|)\zeta]}{\mathrm{sh}(\pi\zeta)} - \frac{1}{2\zeta^2}, \tag{1.158}$$

найдем корреляционную функцию в замкнутой форме

$$G(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \frac{k_B T}{2\sqrt{BK} q_\perp^2} \frac{\mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm}(L_z - |z_1 - z_2|)] - \mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm}(L_z - (z_1 + z_2))]}{\mathrm{sh}(q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z)}. \tag{1.159}$$

Таким образом, для $\langle |u(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle = G(\mathbf{q}_\perp, z, z)$ получим

$$G(\mathbf{q}_\perp, z, z) = \frac{k_B T}{2\sqrt{BK} q_\perp^2} \frac{\mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z] - \mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm}(L_z - 2z)]}{\mathrm{sh}(q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z)}. \tag{1.160}$$

Профиль среднего квадрата флуктуаций (1.152) для жестких граничных условий имеет вид

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle_{fixed} = \frac{k_B T}{4\pi\sqrt{BK}} \int\limits_{q_{\perp min}}^{q_{\perp max}} \frac{dq_\perp}{q_\perp} \frac{\mathrm{ch}(q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z) - \mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm}(L_z - 2z)]}{\mathrm{sh}(q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z)} =$$
$$= \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \int_{q_{\perp min}^2 \lambda_{sm} L_z}^{q_{\perp max}^2 \lambda_{sm} L_z} \frac{\mathrm{ch}\,\zeta - \mathrm{ch}[\zeta(1 - 2z/L_z)]}{\zeta\, \mathrm{sh}\,\zeta} d\zeta. \tag{1.161}$$

В центре образца $z = L_z/2$ получаем

$$\sigma^2_{C\,fixed} = \frac{k_B T}{4\pi\sqrt{BK}} \int_{q^2_{\perp min}\lambda_{sm}L_z/2}^{q^2_{\perp max}\lambda_{sm}L_z/2} \frac{\operatorname{th}\zeta}{\zeta} d\zeta. \tag{1.162}$$

Интегрируя по частям, получим поведение интеграла (1.162) при стремлении верхнего предела к бесконечности

$$\int_0^x \frac{\operatorname{th}\zeta}{\zeta} d\zeta \sim \ln x + C_0 + \frac{1}{x} e^{-x}, \quad x \to \infty.$$

В главном порядке по большим параметрам $L_z\lambda_{sm}/a^2_\perp$ и $L^2_\perp/(L_z\lambda_{sm})$ имеем асимптотическое значение

$$\sigma^2_{C\,fixed} = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \left[\ln\frac{L_z}{\lambda_{sm}} + \tilde{C}_2(\lambda_{sm}, a_\perp) \right]. \tag{1.163}$$

Таким образом, при жестких граничных условиях анализ с помощью ряда Фурье показывает, что главный логарифмический вклад сохраняет свой вид (1.141). Ряд Фурье позволяет лишь более точно определить поправочный вклад.

Периодические граничные условия не реализуются для реальных систем, однако удобны для анализа. Будем полагать, что $u(\mathbf{q}_\perp, 0) = u(\mathbf{q}_\perp, L_z)$. Тогда для ряда Фурье на интервале $[0, L_z]$ получаем

$$u(\mathbf{q}_\perp, z) = \frac{1}{L_z}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\mathbf{q}_\perp) e^{iq_n z}, \quad c_n(\mathbf{q}_\perp) = \int_0^{L_z} u(\mathbf{q}_\perp, z) e^{-iq_n z} dz, \tag{1.164}$$

где $q_n = 2\pi n/L_z$. В силу периодических граничных условий мы можем использовать аналог равенства Парсеваля (1.117)

$$F_b(\mathbf{q}_\perp, u) = \frac{1}{2L_z}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(Bq_n^2 + Kq_\perp^4\right) |c_n(\mathbf{q}_\perp)|^2. \tag{1.165}$$

Из теоремы о равнораспределении имеем

$$\langle |c_n(\mathbf{q}_\perp)|^2 \rangle = \frac{L_z k_B T}{Bq_n^2 + Kq_\perp^4}. \tag{1.166}$$

Используя уравнения (1.164) и (1.166), получим корреляционную функцию флуктуаций смещения слоев в виде суммы ряда

$$G(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \frac{1}{L_z^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle|c_n(\mathbf{q}_\perp)|^2\rangle e^{iq_n(z_1-z_2)} =$$

$$= \frac{k_B T}{L_z}\left\{\frac{1}{Kq_\perp^4} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[q_n(z_1-z_2)]}{Bq_n^2 + Kq_\perp^4}\right\}. \quad (1.167)$$

Аналогично случаю жестких граничных условий найдем корреляционную функцию

$$G(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \frac{k_B T}{2\sqrt{BK}q_\perp^2}\frac{\mathrm{ch}[q_\perp^2\lambda_{sm}(L_z/2 - |z_1 - z_2|)]}{\mathrm{sh}(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z/2)}. \quad (1.168)$$

Таким образом, $\langle|u(\mathbf{q}_\perp, z)|^2\rangle = G(\mathbf{q}_\perp, z, z)$ не зависит от переменной z

$$G(\mathbf{q}_\perp, z, z) = \frac{k_B T}{2\sqrt{BK}q_\perp^2}\,\mathrm{cth}\,\frac{q_\perp^2\lambda_{sm}L_z}{2}, \quad (1.169)$$

и для периодических граничных условий получаем

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle_{periodic} = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}}\int_{q_{\perp min}^2\lambda_{sm}L_z/2}^{q_{\perp max}^2\lambda_{sm}L_z/2}\frac{\mathrm{cth}\,\zeta}{\zeta}d\zeta. \quad (1.170)$$

на верхнем пределе этот интеграл расходится логарифмически. Нижний предел стремится к нулю, так как $\lambda_s L_z/L_\perp^2$ является малой величиной. Подынтегральное выражение при малых ζ ведет себя как

$$\frac{\mathrm{cth}\,\zeta}{\zeta} = \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{3} - \frac{\zeta^2}{45} + \dots$$

и мы получаем степенное поведение среднего квадрата флуктуаций

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle_{periodic} \sim \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}}\frac{2}{q_{\perp min}^2\lambda_{sm}L_z} = \frac{k_B T}{4\pi^3 K}\frac{L_\perp^2}{L_z}, \quad (1.171)$$

что дает более сильную расходимость по сравнению с логарифмической расходимостью, полученной ранее при анализе с помощью интеграла Фурье.

Рассмотрим случай свободных граничных условий для функции $u(\mathbf{q}_\perp, z)$, то есть, $u(\mathbf{q}_\perp, 0)$ и $u(\mathbf{q}_\perp, L_z)$ могут принимать любые значения. Продолжим функцию $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ из области $[0, L_z]$ на область $[-L_z, L_z]$ четным образом: $u(\mathbf{q}_\perp, -z) = u(\mathbf{q}_\perp, z)$. Тогда четную функцию можно разложить на интервале $[-L_z, L_z]$ в ряд Фурье по косинусам $\cos(p_n z)$, где $p_n = \pi n / L_z$, n — натуральное число [147]:

$$u(\mathbf{q}_\perp, z) = \frac{1}{L_z} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\mathbf{q}_\perp) \cos(p_n z),$$

$$c_n(\mathbf{q}_\perp) = 2 \int_0^{L_z} u(\mathbf{q}_\perp, z) \cos(p_n z) dz, \quad c_0(\mathbf{q}_\perp) = \int_0^{L_z} u(\mathbf{q}_\perp, z) dz. \qquad (1.172)$$

Поскольку функция $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ является четной, на интервале $[-L_z, L_z]$ выполняются периодические граничные условия $u(\mathbf{q}_\perp, -L_z) = u(\mathbf{q}_\perp, L_z)$. Также функция $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ является непрерывной на всем интервале, в том числе в точке $z = 0$, где $u(\mathbf{q}_\perp, +0) = u(\mathbf{q}_\perp, -0)$. Следовательно, мы можем использовать аналог равенства Парсеваля для свободной энергии

$$F_b(\mathbf{q}_\perp, u) = \frac{K q_\perp^4}{2L_z} |c_0(\mathbf{q}_\perp)|^2 + \frac{1}{4L_z} \sum_{n=1}^{\infty} (B p_n^2 + K q_\perp^4) |c_n(\mathbf{q}_\perp)|^2. \qquad (1.173)$$

Аналогично случаю периодических граничных условий последовательно получаем

$$\langle |c_0(\mathbf{q}_\perp)|^2 \rangle = \frac{L_z k_B T}{K q_\perp^4}, \quad \langle |c_n(\mathbf{q}_\perp)|^2 \rangle = \frac{2 L_z k_B T}{B p_n^2 + K q_\perp^4},$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) &= \frac{1}{L_z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle |c_n(\mathbf{q}_\perp)|^2 \rangle \cos(p_n z_1) \cos(p_n z_2) = \\ &= \frac{k_B T}{L_z} \left\{ \frac{1}{K q_\perp^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[p_n(z_1 - z_2)] + \cos[p_n(z_1 + z_2)]}{B p_n^2 + K q_\perp^4} \right\}, \end{aligned} \qquad (1.174)$$

$$\begin{aligned} &G(\mathbf{q}_\perp, z_1, z_2) = \\ &= \frac{k_B T}{2\sqrt{BK} q_\perp^2} \frac{\mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm} (L_z - |z_1 - z_2|)] + \mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm} (L_z - (z_1 + z_2))]}{\mathrm{sh}(q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z)}, \end{aligned} \qquad (1.175)$$

$$G(\mathbf{q}_\perp, z, z) = \frac{k_B T}{2\sqrt{BK} q_\perp^2} \frac{\mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z] + \mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm} (L_z - 2z)]}{\mathrm{sh}(q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z)}. \qquad (1.176)$$

Профиль среднего квадрата флуктуаций (1.152) для свободных граничных условий имеет вид

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle_{free} = \frac{k_B T}{4\pi\sqrt{BK}} \int\limits_{q_{\perp min}}^{q_{\perp max}} \frac{dq_\perp}{q_\perp} \frac{\mathrm{ch}(q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z) + \mathrm{ch}[q_\perp^2 \lambda_{sm}(L_z - 2z)]}{\mathrm{sh}(q_\perp^2 \lambda_{sm} L_z)} =$$

$$= \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \int_{q_{\perp min}^2 \lambda_{sm} L_z}^{q_{\perp max}^2 \lambda_{sm} L_z} \frac{\mathrm{ch}\,\zeta + \mathrm{ch}[\zeta(1 - 2z/L_z)]}{\zeta\,\mathrm{sh}\,\zeta} d\zeta. \quad (1.177)$$

В центре образца $z = L_z/2$ получаем

$$\sigma_{C\,free}^2 = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \int_{q_{\perp min}^2 \lambda_{sm} L_z/2}^{q_{\perp max}^2 \lambda_{sm} L_z/2} \frac{\mathrm{cth}\,\zeta}{\zeta} d\zeta, \quad (1.178)$$

что совпадает с результатом (1.170). И мы снова приходим не к логарифмической, а к степенной зависимости от размеров системы

$$\sigma_{C\,free}^2 = \frac{k_B T}{4\pi^3 K} \frac{L_\perp^2}{L_z}. \quad (1.179)$$

Таким образом, мы получили, что флуктуации в СЖК-А с периодическими или свободными граничными условиями имеют сильную степенную зависимость от размеров системы, а не логарифмическую, как в случае жестких граничных условий. При тех же значениях параметров, что были выбраны для оценки выражений (1.141) и (1.142), получим, что потеря устойчивости происходит при $L_\perp^2 \gtrsim 10^3 L_z \lambda_{sm}$. При $\lambda_{sm} = 2$ нм и типичном $L_z = 1000$ нм можно показать, что стабильность пропадает при $L_\perp \gtrsim 1000$ нм. Это означает, что далеко не все смектические пленки будут стабильными. Заметим однако, что периодические и свободные граничные условия не реализуются для реальных смектических пленок. Для их описания необходимо учитывать вклад поверхностной энергии.

1.3.4. Границы с конечной поверхностной энергией

В этом разделе мы рассмотрим, как конечность поверхностной энергии влияет на неустойчивость Ландау–Пайерлса в СЖК-А. В некотором смысле мы изучим промежуточную ситуацию между жесткими и свободными граничными условиями. По-прежнему, мы считаем $L_z \ll L_\perp$ и будем пренебрегать вкладом в энергию от боковых поверхностей образца по сравнению с верхней и нижней поверхностями. То есть, мы воспользуемся выражениями (1.121), (1.122) для поверхностной энергии и выражениями (1.150), (1.151) для объемной энергии в $(\mathbf{q}_\perp, z)$–представлении. Для полной энергии имеем

$$F(\mathbf{q}_\perp, u) = F_b(\mathbf{q}_\perp, u) + F_s(\mathbf{q}_\perp, u). \tag{1.180}$$

Как и с предыдущем разделе мы будем считать, что образец занимает объем $0 \leq z \leq L_z$.

Зафиксируем значение $\mathbf{q}_\perp$. Для любой случайной реализации функции $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ мы обозначим значения на границах как $\tilde{u}_1 \equiv \tilde{u}_1(\mathbf{q}_\perp, 0)$ и $\tilde{u}_2 \equiv \tilde{u}_2(\mathbf{q}_\perp, L_z)$. Разделим пространственные и поверхностные степени свободы следующим образом. Определим функцию $\overline{u}(\mathbf{q}_\perp, z)$ как решение дифференциального уравнения

$$B\overline{u}''(\mathbf{q}_\perp, z) - Kq_\perp^4 \overline{u}(\mathbf{q}_\perp, z) = 0, \tag{1.181}$$

с теми же граничными условиями

$$\overline{u}(\mathbf{q}_\perp, 0) = \tilde{u}_1, \quad \overline{u}(\mathbf{q}_\perp, L_z) = \tilde{u}_2. \tag{1.182}$$

Заметим, что $\overline{u}(\mathbf{q}_\perp, z)$ зависит от случайных значений $\tilde{u}_{1,2}$ и параметров B и K, а не от значений $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ внутри интервала $[0, L_z]$. Определим $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ как сумму

$$u(\mathbf{q}_\perp, z) = \overline{u}(\mathbf{q}_\perp, z) + v(\mathbf{q}_\perp, z), \tag{1.183}$$

где $v(\mathbf{q}_\perp, z)$ — случайная функция, которая зависит от значений $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ внутри интервала $[0, L_z]$. Согласно уравнениям (1.182) и (1.183), функция $v(\mathbf{q}_\perp, z)$ удовлетворяет жестким граничным условиям

$$v(\mathbf{q}_\perp, 0) = v(\mathbf{q}_\perp, L_z) = 0. \tag{1.184}$$

Такой способ разделения степеней свободы применялся в работах [16] и [151].

Подставляя (1.183) в уравнения (1.180), (1.122), (1.151) мы получим после интегрирования по частям

$$F(\mathbf{q}_\perp, \overline{u}+v) = F(\mathbf{q}_\perp, \overline{u}) + F_b(\mathbf{q}_\perp, v). \tag{1.185}$$

Здесь мы также использовали жесткие граничные условия для функции v. В уравнении (1.185) степени свободы функции $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ разделены на две части. Первая часть, связанная с $\overline{u}(z)$, зависит от поверхностных степеней свободы $\tilde{u}_{1,2}$, а вторая — от объемных степеней свободы $v(\mathbf{q}_\perp, z)$. Поэтому в уравнении (1.185) отсутствует член, перекрестный между $v(\mathbf{q}_\perp, z)$ и $\tilde{u}_{1,2}$. Фактически, уравнение (1.181) представляет собой уравнение Эйлера для объемной части свободной энергии (1.151). Так как объемные и поверхностные степени свободы статистически независимы, получаем

$$\langle u(\mathbf{q}_\perp, z)u^*(\mathbf{q}_\perp, z)\rangle_u = \langle \overline{u}(\mathbf{q}_\perp, z)\overline{u}^*(\mathbf{q}_\perp, z)\rangle_{\tilde{u}_{1,2}} + \langle v(\mathbf{q}_\perp, z)v^*(\mathbf{q}_\perp, z)\rangle_v, \tag{1.186}$$

где индекс у скобок $\langle\ \rangle$ указывает по каким случайным переменным следует выполнять усреднение.

Заметим, что из уравнений (1.184), (1.185) следует, что второе слагаемое в правой части (1.186) представляет собой корреляционную функцию $u(\mathbf{q}_\perp, z)$ для жестких граничных условий. Поэтому мы можем использовать наш результат (1.160). Как мы уже видели, (1.163), этот результат приводит к логарифмическому поведению величины σ_C^2.

В первом слагаемом в правой части (1.186) выполним усреднение по переменным $u_{1,2}$. Для этого решим уравнение (1.181) с граничными условиями (1.182), имеем

$$\overline{u}(\mathbf{q}_\perp, z) = \frac{\tilde{u}_1 \operatorname{sh}[q_\perp^2\lambda_{sm}(L_z - z)] + \tilde{u}_2 \operatorname{sh}(q_\perp^2\lambda_{sm} z)}{\operatorname{sh}(q_\perp^2\lambda_{sm} L_z)}. \tag{1.187}$$

После умножения $\overline{u}(\mathbf{q}_\perp, z)$ на $\overline{u}^*(\mathbf{q}_\perp, z)$, остается выполнить усреднение $|\tilde{u}_{1,2}|^2$ и $\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*$ с помощью функции распределения $\exp[-F(\mathbf{q}_\perp, \overline{u})/k_BT]$. Эта функция является гауссовой по переменным $\tilde{u}_{1,2}$. Выполняя стандартные вычисления [4], найдем

$$\langle\overline{u}(\mathbf{q}_\perp, z)\overline{u}^*(\mathbf{q}_\perp, z)\rangle_{\tilde{u}_{1,2}} = \frac{k_BT}{\Delta_{sm}\,\mathrm{sh}^2(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z)}\times$$
$$\times\left\{\left[\sqrt{BK}q_\perp^2\,\mathrm{ch}(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z) + \tilde{w}_2\,\mathrm{sh}(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z)\right]\mathrm{sh}^2[q_\perp^2\lambda_{sm}(L_z - z)] + \right.$$
$$+\left[q_\perp^2\sqrt{BK}\,\mathrm{ch}(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z) + \tilde{w}_1\,\mathrm{sh}(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z)\right]\mathrm{sh}^2(q_\perp^2\lambda_{sm}z)+$$
$$\left.+2\sqrt{BK}\,\mathrm{sh}(q_\perp^2\lambda_{sm}z)\,\mathrm{sh}[q_\perp^2\lambda_{sm}(L_z - z)]\right\}, \quad (1.188)$$

где $\tilde{w}_j = w_j + \gamma_j q_\perp^2$, $j = 1, 2$ и

$$\Delta_{sm} = (q_\perp^4 BK + \tilde{w}_1\tilde{w}_2)\,\mathrm{sh}(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z) + q_\perp^2\sqrt{BK}(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)\,\mathrm{ch}(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z). \quad (1.189)$$

Сумма выражений (1.188) и (1.160) дает [16]

$$G(\mathbf{q}_\perp, z, z) = \frac{k_BT}{2q_\perp^2\Delta_{sm}\sqrt{BK}}\left\{(q_\perp^4 BK - \tilde{w}_1\tilde{w}_2)\,\mathrm{ch}[q_\perp^2\lambda_{sm}(L_z - 2z)] + \right.$$
$$+ q_\perp^2\sqrt{BK}(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)\,\mathrm{sh}[2q_\perp^2\lambda_{sm}(L_z - 2z)] + (q_\perp^4 BK + \tilde{w}_1\tilde{w}_2)\,\mathrm{ch}(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z)+$$
$$\left.+ q_\perp^2\sqrt{BK}(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)\,\mathrm{sh}(q_\perp^2\lambda_{sm}L_z)\right\}. \quad (1.190)$$

Нетрудно показать, что это выражение переходит в корреляционную функцию для жестких граничных условий (1.160), если положить $\tilde{w}_{1,2} \to \infty$. Если же положить $\tilde{w}_{1,2} = 0$, то мы получим корреляционную функцию (1.176) для свободных граничных условий.

Нам осталось проанализировать выражение (1.190) для трех геометрий: плоскопараллельная ячейка, пленка на подложке и свободно подвешенная пленка. Рассмотрение этих трех ситуаций выполняется сходным образом. Для плоскопараллельной ячейки и пленки на подложке мы приходим к такому же результату для среднеквадратичных флуктуаций, σ_C^2, как в случае жестких граничных условий (1.163). Поэтому рассмотрим здесь только случай свободно подвешенной пленки, когда $w_1 = w_2 = 0$ и $\gamma_{1,2} = \gamma \neq 0$.

Рассмотрим среднеквадратичные флуктуации

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle = \\ = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \int\limits_{L_z\lambda_{sm}/L_\perp^2}^{L_z/\lambda_{sm}} \frac{d\zeta}{\zeta} \frac{b_1 \operatorname{ch}(2z\zeta L_z^{-1}) + b_2 \operatorname{sh}(2z\zeta L_z^{-1}) + b_3 \operatorname{ch}\zeta + b_4 \operatorname{sh}\zeta}{b_3 \operatorname{sh}\zeta + b_4 \operatorname{ch}\zeta}, \tag{1.191}$$

где $b_1 = q_\perp^4 BK - \tilde{w}_1\tilde{w}_2$, $b_2 = q_\perp^2\sqrt{BK}(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)$, $b_3 = q_\perp^4 BK + \tilde{w}_1\tilde{w}_2$, $b_4 = q_\perp^2\sqrt{BK}(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)$ и мы перешли к безразмерной переменной $\zeta = q_\perp^2\lambda_{sm}L_z$. Поскольку $L_z\lambda_{sm} \ll L_\perp^2$, нижний предел интегрирования много меньше 1, а верхний предел много больше 1, так как $L_z \gg \lambda_{sm}$. Для того чтобы найти асимптотику интеграла (1.191), мы разобьем промежуток интегрирования на две части

$$\int\limits_{L_z\lambda_{sm}/L_\perp^2}^{L_z/\lambda_{sm}} \to \int\limits_{L_z\lambda_{sm}/L_\perp^2}^{1} + \int\limits_{1}^{L_z/\lambda_{sm}} \tag{1.192}$$

Первая часть расходится на нижнем пределе при $\zeta \ll 1$. Раскладывая в ряд Тейлора, получим

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle_1 = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \int\limits_{L_z\lambda_{sm}/L_\perp^2}^{1} \frac{d\zeta}{\zeta} \frac{b_1 + b_2\zeta + b_3 + b_4\zeta}{b_3\zeta + b_4}. \tag{1.193}$$

Принимая во внимание главный порядок по ζ, имеем

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle_1 = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \frac{b_1 + b_3}{b_4} \ln\frac{L_\perp^2}{L_z\lambda_{sm}} + \text{const} = \frac{k_B T}{8\pi\gamma} \ln\frac{L_\perp^2}{L_z\lambda_{sm}} + \text{const}, \tag{1.194}$$

где const — член более высокого порядка малости по параметру $L_z\lambda_{sm}/L_\perp^2$.

Второй интеграл в выражении (1.192) расходится на верхнем пределе при $\zeta \gg 1$. При расчете асимптотики мы можем пренебречь экспоненциально малыми членами. Получим

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle_2 = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \int\limits_1^{L_z/\lambda_{sm}} \frac{d\zeta}{\zeta}\left(\frac{b_1+b_2}{b_3+b_4} e^{(2zL_z^{-1}-1)\zeta} + 1\right). \tag{1.195}$$

Член главного порядка даст 1 в скобках. Имеем

$$\langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle_2 = \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}} \ln\frac{L_z}{\lambda_{sm}} + \mathrm{const}\,. \tag{1.196}$$

Для среднего квадрата флуктуаций в центре образца получим

$$\sigma^2_{C\,film} = \langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle \sim \langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle_1 + \langle u^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle_2 \sim \\ \sim \frac{k_B T}{8\pi\sqrt{BK}}\left[\left(1 - \frac{\sqrt{BK}}{\gamma}\right)\ln\frac{L_z}{\lambda_{sm}} + 2\frac{\sqrt{BK}}{\gamma}\ln\frac{L_\perp}{\lambda_{sm}}\right]. \tag{1.197}$$

Заметим, что из выражения (1.163) следует, что флуктуации остаются конечными, если $L_\perp \to \infty$. Тогда как из выражения (1.197) видно, что средний квадрат флуктуаций логарифмически расходится с ростом $L_\perp$. То есть, тонкая и бесконечно широкая пленка СЖК-А будет стабильна согласно выражению (1.163) и, наоборот, перестает быть стабильной согласно выражению (1.197). Эта нестабильность возникает из-за конечного значения поверхностного натяжения и может быть объяснена влиянием границ на объемные свойства пленки.

Можно оценить из выражения (1.197), когда пропадает стабильность пленки с ростом $L_\perp$. При $\sqrt{BK}/\gamma = 5/3$ и используемых ранее значениях остальных параметров, можно получить, что стабильность исчезает при $L_\perp \sim L_z \gtrsim 10^{11}$ м. Это меньше, чем граница потери устойчивости в выражении (1.142) для свободных граничных условий, $L_\perp \gtrsim 10^{18}$ м. Однако такие размеры пленок не достижимы на практике. Тем не менее, на эксперименте можно исследовать если не границу потери устойчивости, то по крайней мере тенденцию к этому эффекту. Для этого можно исследовать зависимость среднего квадрата флуктуаций смещений в центре образца жидкого кристалла σ^2_C.

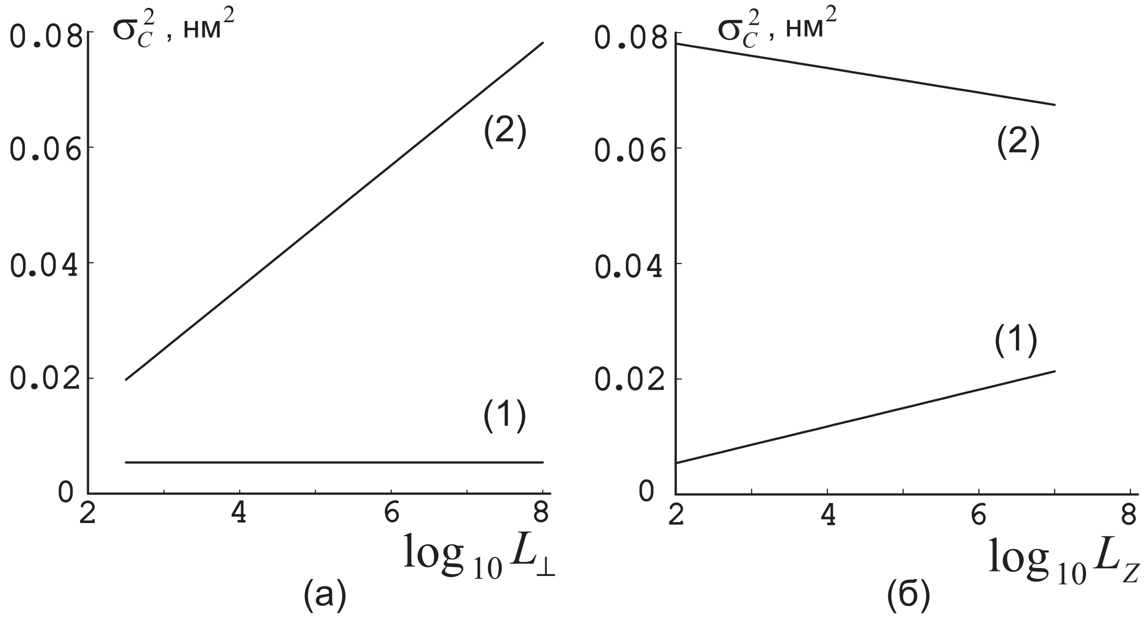


Рис. 1.10

Поведение среднего квадрата флуктуаций смещения слоев в центре образца σ_C^2 в зависимости от $L_\perp$ (а) и L_z (б). Линии (1) рассчитаны по формуле (1.163), линии (2) — по формуле (1.197). Линии получены для случая $L_z\lambda_{sm} \ll L_\perp^2$ при следующих значениях параметров $k_BT = 4 \times 10^{-21}$ Дж, $\sqrt{BK} = 0.005$ Н/м, $\sqrt{BK}/\gamma = 5/3$, $\lambda_{sm} = 2$ нм. На Рис. (а): $L_z = 10^2$ нм, на Рис. (б): $L_\perp = 10^8$ нм. Величина σ_C^2 выражена в нм^2. По горизонтальной оси отложен десятичный логарифм $L_\perp$ или L_z, размеры системы также выражены в нм

На рисунке 1.10 приведены результаты расчетов по формулам (1.163) — линии (1) и (1.197) — линии (2). Формула (1.163) описывает неустойчивость Ландау–Пайерлса для жестких граничных условий, а формула (1.197) — для пленки с учетом вклада поверхностной энергии. Диапазон значений L_z и $L_\perp$ на этом рисунке приближен к реальным экспериментальным значениям для смектических пленок. На Рис. 1.10(а) приведены зависимости среднего квадрата флуктуаций от $L_\perp$ при фиксированном L_z. При подходе Ландау–Пайерлса величина σ_C^2 не зависит от $L_\perp$ — линия (1), а в случае пленок должен наблюдаться линейный рост от логарифма $L_\perp$ — линия (2). В пределе жестких граничных условий ($\gamma \to \infty$) линия (2) совпадает с линией (1).

На Рис. 1.10(б) приведены зависимости σ_C^2 от L_z при фиксированном $L_\perp$.

В случае слабого поверхностного натяжения, $\gamma < \sqrt{BK}$, величина σ_C^2 согласно (1.197) логарифмически убывает с ростом L_z, в то время как для жестких граничных условий эта же величина согласно (1.163) растет.

Заметим, что влияние граничных условий на характер флуктуаций проявляется через зависимость от размеров образца. Как видно из рисунка 1.10, можно предложить эксперимент для изучения влияния поверхностной энергии на величину среднеквадратичных смещений, то есть, на устойчивость смектической пленки. Таким экспериментом может быть, например, исследование рассеяния рентгеновских лучей свободно подвешенными смектическими пленками [152, 153]. Для этого следует изготавливать свободно подвешенные пленки одинаковой толщины, но разных поперечных размеров. Если средний квадрат флуктуаций смещений будет расти с ростом поперечных размеров пленки (см. Рис. 1.10(а)), то справедлива формула (1.197), а не (1.163). Также для смектиков со слабым поверхностным натяжением можно изучить набор пленок разной толщины, но с одинаковыми поперечными размерами. Если средний квадрат флуктуаций смещений будет убывать с ростом толщины пленки (см. Рис. 1.10(б)), то также будет справедлива формула (1.197), а если расти, то справедлива формула (1.163).

Глава 2.

Распространение электромагнитных волн в геликоидальных средах с большим шагом спирали

К геликоидальным средам относятся киральные жидкие кристаллы — холестерики и некоторые виды смектиков, а также твист-ячейки нематических жидких кристаллов, закрутка которых достигается влиянием ориентирующих поверхностей. Уникальность киральных жидких кристаллов заключается в том, что они представляют собой соединения, у которых можно заранее подбирать шаг спирали. С этой точки зрения в киральных средах удобно описывать особенности рефракции лучей и сопоставлять полученные результаты с экспериментом. Возможность относительно просто описывать распространение лучей в этих средах, с одной стороны, позволяет детально разобраться в физической картине распространения лучей в периодических средах, и, с другой стороны, использовать развитый подход при создании разнообразных оптических устройств на основе жидких кристаллов.

Оптические свойства киральных жидких кристаллов определяются тензором диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\perp}\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_a n_{\alpha}(\mathbf{r}) n_{\beta}(\mathbf{r}), \quad \alpha, \beta = x, y, z. \tag{2.1}$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$, $\varepsilon_\perp$ — диэлектрические проницаемости вдоль и поперек директора. Среды с $\varepsilon_a > 0$ и $\varepsilon_a < 0$ рассматриваются сходным образом. Однако в некоторых случая возникают отличия, на которые мы будем обращать внимание.

Система уравнений Максвелла для монохроматической волны имеет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = ik_0\hat{\mu}(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -ik_0\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{2.2}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, $k_0 = \omega/c$, ω — круговая частота, c — скорость света в вакууме, $\hat{\mu}$ — тензор магнитной проницаемости. В дальнейшем при описании поля мы будем учитывать, что магнитная восприимчивость вдоль и поперек директора $\chi_{\parallel,\perp} \ll 1$, так, что $\mu_{\alpha\beta} \approx \delta_{\alpha\beta}$. Из системы (2.2), исключая вектор $\mathbf{H}$, получаем волновое уравнение для вектора $\mathbf{E}$

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - k_0^2\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}))\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \tag{2.3}$$

Для равновесной среды уравнение (2.3) имеет вид

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - k_0^2\hat{\varepsilon}^0)\mathbf{E}^0(\mathbf{r}) = 0. \tag{2.4}$$

В этой главе мы будем рассматривать только равновесные системы и индекс “0” у полей будем опускать. В равновесии оптические свойства жидкого кристалла определяются локально одноосным тензором диэлектрической проницаемости [43]

$$\varepsilon^0_{\alpha\beta}(z) = \varepsilon_\perp\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_a n^0_\alpha(z) n^0_\beta(z). \tag{2.5}$$

2.1. Собственные волны в нематических жидких кристаллах

Нематические жидкие кристаллы представляют собой предельный случай одноосной киральной среды с бесконечным шагом спирали. В этом случае зависимость от z в (2.5) пропадает и мы получаем обычную одноосную среду. Собственные волны $\mathbf{E}^{(j)}(\mathbf{r})$ в одноосной среде представляют собой две плоские волны, обыкновенную, (o), и необыкновенную, (e), с волновыми векторами $\mathbf{k}^{(o)}$ и $\mathbf{k}^{(e)}$ [154]

$$\mathbf{E}^{(j)} = E^{(j)}\mathbf{e}^{(j)}e^{i\mathbf{k}^{(j)}\cdot\mathbf{r}}, \quad j = o, e.$$

Здесь $E^{(j)}$ — амплитуда поля, $\mathbf{e}^{(j)}$ — единичный вектор поляризации, $k^{(j)} = k_0 n^{(j)}$,

$$n^{(o)} = \sqrt{\varepsilon_\perp}, \quad n^{(e)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp + \varepsilon_a \cos^2\theta}} \tag{2.6}$$

— показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн, θ — угол между векторами $\mathbf{n}^0$ и $\mathbf{k}^{(e)}$. На самом деле собственных волн в такой системе будет не две, а четыре, поскольку волновому уравнению также будут удовлетворять волны с волновыми векторами $-\mathbf{k}^{(o)}$ и $-\mathbf{k}^{(e)}$.

Поляризации волн, задаваемые единичными векторами $\mathbf{e}^{(o)}$ и $\mathbf{e}^{(e)}$, удовлетворяют условиям

$$\mathbf{e}^{(o)} \perp \mathbf{n}^0, \quad \mathbf{e}^{(o)} \perp \mathbf{k}^{(o)}, \quad \hat{\varepsilon}^0\mathbf{e}^{(e)} \perp \mathbf{k}^{(e)}, \tag{2.7}$$

где вектор $\mathbf{e}^{(e)}$ лежит в плоскости, образованной векторами $\mathbf{k}^{(e)}$ и $\mathbf{n}^0$.

2.2. Асимптотическое решение для поля световой волны в киральных средах

В этом разделе мы рассмотрим собственные волны в одноосных киральных ЖК с шагом спирали P значительно большим длины световой волны λ. Заметим, что для киральных систем тензор диэлектрической проницаемости (2.5) локально ведет себя также, как в одноосной среде, но при этом отслеживает поворот равновесного директора (1.10). Решение уравнений Максвелла можно построить при помощи метода ВКБ. Для описания волны можно ограничиться учетом нулевого и первого приближений. Нулевое приближение эквивалентно методу эйконала для волнового уравнения. Оно позволяет определять фазу волны и ее поляризацию. Первое приближение ВКБ аналогично уравнению переноса и позволяет найти амплитуду поля.

Ввиду того, что тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}^0(z)$ есть функция только переменной z, удобно перейти в $(\mathbf{k}_\perp,z)$-представление. Выполним преобразование Фурье по поперечным переменным (1.19). Без ограничения общности можно выбрать систему координат так, чтобы направление вектора $\mathbf{k}_\perp$ совпадало с осью x, то есть $\mathbf{k}_\perp = (k_\perp, 0, 0)$. Далее, переходя к новой переменной $\xi = q_0 z + \phi_0$ и исключая H_z и E_z, получаем

$$\partial_\xi \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ -H_y \end{pmatrix} = -i\Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{H} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon^0_{xy}(\xi) & \varepsilon^0_{yy}(\xi) + \varepsilon_\perp(\mathcal{H}-1) & 0 & 0 \\ \varepsilon^0_{xx}(\xi) & \varepsilon^0_{xy}(\xi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ -H_y \end{pmatrix}, \qquad (2.8)$$

где $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$, $\mathcal{H} = 1 - k_\perp^2/(k_0^2\varepsilon_\perp)$, $\Omega = k_0/q_0 = P/\lambda$, $\lambda = 2\pi/k_0$ — длина волны.

Систему (2.8) можно формально записать как уравнение для четырехкомпонентного вектора-столбца $\mathbf{\Phi}(\xi)$

$$\partial_\xi \mathbf{\Phi}(\xi) = i\Omega \hat{A}(\xi)\mathbf{\Phi}(\xi). \qquad (2.9)$$

Для решения системы (2.9) с начальными условиями вида $\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{\Phi}(\xi_0)$, удобно ввести матрицу эволюции $\hat{M}(\xi, \xi_0)$. В этом случае

$$\mathbf{\Phi}(\xi) = \hat{M}(\xi, \xi_0)\mathbf{\Phi}(\xi_0)\,. \qquad (2.10)$$

Матрица $\hat{M}(\xi, \xi_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, аналогичному (2.9),

$$\partial_\xi \hat{M}(\xi, \xi_0) = i\Omega \hat{A}(\xi)\hat{M}(\xi, \xi_0) \qquad (2.11)$$

и начальному условию $\hat{M}(\xi_0, \xi_0) = \hat{I}$.

В дальнейшем мы будем считать Ω большим параметром

$$\Omega \gg 1.$$

В этом случае можно применить метод последовательной диагонализации и построить решение системы (2.11) в виде ряда по обратным степеням параметра Ω. Эта процедура для аналогичной задачи описана в Приложении 1. Используя результаты, полученные в Приложении 1, построим решение для компонент поля E_x и E_y в ВКБ приближении. Затем, используя уравнение $\mathrm{div}(\hat{\varepsilon}^0\mathbf{E}) = 0$, найдем компоненту поля E_z. В результате мы получим четыре собственных волны

$$\mathbf{E}_{\pm}^{(j)}(\mathbf{r}) = E_0 A^{(j)}(z)\mathbf{e}_{\pm}^{(j)}(z) \exp\left(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp \pm i\int_0^z k_z^{(j)}(z')dz'\right), \quad j = o, e, \quad (2.12)$$

где E_0 — амплитуда поля, $A^{(j)}(z)$ и $k_z^{(j)}(z)$ — скалярные функции, а $\mathbf{e}_{\pm}^{(j)}(z)$ — единичный вектор, которые можно трактовать, соответственно, как локальные значения амплитуды, z-компоненты полного волнового вектора $\mathbf{k}_{\pm}^{(j)}(z) = (\mathbf{k}_\perp, \pm k_z^{(j)}(z))$ и вектора поляризации квазиплоской волны. Далее, для краткости, мы будем опускать индексы (j) и "$\pm$" у поляризаций, амплитуд и волновых векторов, если получаемые выражения будут справедливы для всех возможных значений индексов.

Получим выражения для волновых векторов, амплитуд и поляризаций в (2.12) с помощью уравнений эйконала и переноса. Подставляя (2.12) в волновое уравнение (2.4), в главном порядке по большому параметру Ω получаем уравнение эйконала

$$\mathbf{k}(z) \times \mathbf{k}(z) \times \mathbf{e}(z) + k_0^2\hat{\varepsilon}^0(z)\mathbf{e}(z) = 0. \quad (2.13)$$

При фиксированном направлении волнового вектора $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ и фиксированном значении z однородная система линейных уравнений (2.13) для одноосного тензора диэлектрической проницаемости (2.5) имеет два решения, соответствующих обыкновенной, (o), и необыкновенной, (e), волнам [154]:

$$k^{(o)} = k_0 n^{(o)}, \quad k^{(e)} = k_0 n^{(e)}, \tag{2.14}$$

где $n^{(o)}$ и $n^{(e)} = n^{(e)}(\mathbf{s})$ — показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей (2.6). Вектора поляризации $\mathbf{e}^{(o)} = \mathbf{e}^{(o)}(\mathbf{s})$ и $\mathbf{e}^{(e)} = \mathbf{e}^{(e)}(\mathbf{s})$ определяются условиями (2.7). Из уравнений (2.5) и (2.7) находим направления единичных векторов поляризации $\mathbf{e}^{(o)}$ и $\mathbf{e}^{(e)}$:

$$\mathbf{e}^{(o)} \parallel \mathbf{k} \times \mathbf{n}^0, \quad \mathbf{e}^{(e)} \parallel \mathbf{n}^0(\mathbf{k}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{k}) - \mathbf{k}(\mathbf{k}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{n}^0). \tag{2.15}$$

В отличие от обычной постановки задачи о распространении волны в однородной анизотропной среде, когда фиксировано направление волнового вектора $\mathbf{s}$, а направление оптической оси $\mathbf{n}^0$ не зависит от z, в нашей системе фиксирована поперечная компонента $\mathbf{k}_\perp$ волнового вектора, а оптическая ось $\mathbf{n}^0(z)$ вращается в пространстве. В этом случае волновые вектора $\mathbf{k}$ и вектора поляризации $\mathbf{e}$ являются функциями координаты z и двумерного вектора $\mathbf{k}_\perp$. Для обыкновенной волны из первого уравнения (2.14) получаем

$$k_z^{(o)}(\mathbf{k}_\perp, z) \equiv k_z^{(o)}(k_\perp) = \sqrt{\varepsilon_\perp k_0^2 - k_\perp^2}. \tag{2.16}$$

Поскольку для необыкновенной волны

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}^0(z)\cdot\mathbf{k}^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z)}{k^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z)} = \frac{\mathbf{n}^0(z)\cdot\mathbf{k}_\perp}{k^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z)}, \tag{2.17}$$

то второе соотношение (2.14) представляет собой уравнение на компоненту $k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z)$. Решая это уравнение, получаем

$$k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z) = \sqrt{\varepsilon_\parallel k_0^2 - k_\perp^2 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_\perp}(\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{n}^0(z))^2}\,. \tag{2.18}$$

Вектора поляризаций $\mathbf{e}_\pm^{(o)}(\mathbf{k}_\perp, z)$, $\mathbf{e}_\pm^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z)$, при этом могут быть найдены по формулам (2.15), в которых следует положить $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\pm^{(o)}(\mathbf{k}_\perp)$ или $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\pm^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z)$, где $\mathbf{k}_\pm^{(o)} = (\mathbf{k}_\perp, \pm k_z^{(o)}(k_\perp))$, $\mathbf{k}_\pm^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z) = (\mathbf{k}_\perp, \pm k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z))$.

Обратим внимание, что в рамках используемого нами приближения геометрической оптики (2.12) независимость поперечной компоненты волнового вектора $\mathbf{k}_\perp$ от z эквивалентна закону Снеллиуса. Действительно, если выбрать ось x системы координат (x, y, z) вдоль фиксированного вектора $\mathbf{k}_\perp$, то $\mathbf{s}$ принимает вид $\mathbf{s}(z) = (\sin\chi(z), 0, \cos\chi(z))$, где $\chi(z)$ — угол между волновым вектором и осью z, зависящий от значения z. Следовательно, $n^{(e)}(\mathbf{s}) = n^{(e)}(\mathbf{s}(z)) = n^{(e)}(z)$. Тогда для необыкновенной волны из (2.14) получаем $k_\perp = k_0 n^{(e)} \sin\chi(z)$. Таким образом, условие постоянства $\mathbf{k}_\perp$ соответствует обычной формуле Снеллиуса

$$n^{(e)}(z)\sin\chi(z) = \text{const}. \tag{2.19}$$

Для обыкновенной волны это условие также соответствует закону Снеллиуса, $n^{(o)}(z)\sin\chi(z) = \text{const}$, но здесь, согласно (2.6), (2.16), обе величины $n^{(o)}(z)$ и $\chi(z)$ не зависят от z и этот закон тривиален.

Для нахождения амплитуды поля $A^{(j)}(z)$ в приближении геометрической оптики необходимо учесть в волновом уравнении члены следующего порядка по малому параметру $\lambda/P = \Omega^{-1}$. Получающееся при этом "уравнение переноса" [155] на амплитуду поля $A^{(j)}(z)$ эквивалентно закону сохранения энергии $\operatorname{div}\mathbf{S} = 0$ для вектора Пойнтинга [154],

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{c}{8\pi k_0}\left[\mathbf{k}\,|E|^2 - \mathbf{E}\,(\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{k})\right], \tag{2.20}$$

Для волн (2.12) $\mathbf{S}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{S}(z)$,

$$\mathbf{S}(z) = \frac{cE_0^2\,|A(z)|^2}{8\pi k_0}\left[\mathbf{k}(z) - \mathbf{e}(z)\,(\mathbf{k}(z)\cdot\mathbf{e}(z))\right]. \tag{2.21}$$

Таким образом, в нашем случае закон сохранения энергии принимает вид $\operatorname{div}\mathbf{S} = \partial_z S_z(z) = 0$, то есть, компонента $S_z(z)$ не зависит от z. В результате из (2.21) находим закон изменения амплитуды поля

$$|A(z)|^2 = \frac{C_0^2}{E_0^2}\frac{k_0}{k_z(z) - e_z(z)\mathbf{k}(z)\cdot\mathbf{e}(z)}, \tag{2.22}$$

где C_0 — произвольная постоянная. Подставляя (2.15)–(2.18) в (2.22) окончательно получаем

$$|A^{(j)}(z)|^2 = \frac{C_0^2}{E_0^2} \begin{cases} k_0/k_z^{(o)}(k_\perp), & \text{для (o)-луча,} \\ \dfrac{k_0^2\varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_a \left(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{n}^0(z)\right)^2}{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z) k_0 \varepsilon_\perp^2}, & \text{для (e)-луча.} \end{cases} \tag{2.23}$$

Условием применимости геометрооптического приближения (2.12) является набор неравенств

$$\frac{dA(z)}{dz} \ll A(z)k_z(z), \quad \left|\frac{d\mathbf{e}(z)}{dz}\right| \ll k_z(z), \quad \frac{dk_z(z)}{dz} \ll k_z^2(z) \tag{2.24}$$

для всех z. Первое и второе неравенства означают плавность изменения амплитуды поля и вектора поляризации на масштабе порядка длины волны $\lambda \sim k^{-1} \sim k_z^{-1}$, а третье неравенство — плавность изменения компоненты $k_z(z)$ волнового вектора $\mathbf{k}(z)$ на этом же масштабе. Отметим, что поскольку $dk_z(z)/dz \sim k_z(z)/P$, то третье неравенство соответствует условию

$$k_z(z)P \gg 1. \tag{2.25}$$

Как следует из (2.24), (2.25) в рамках приближения геометрической оптики компонента $k_z(z)$ для каждого z не должна быть очень малой.

Отметим, что члены следующего порядка по малому параметру λ/P в волновом уравнении дают поправку к фазе волны (2.12). Условие малости этой поправки ограничивает на длину трассы волны в неоднородной среде [41, 58, 155],

$$|z|\,\lambda \ll P^2. \tag{2.26}$$

Это неравенство является дополнительным условием применимости приближения геометрической оптики.

С точки зрения векторного метода ВКБ условием применимости выражения (2.12) является выполнение условия (П1.13). Как следует из (П1.15), это означает, что собственные значения матрицы $\hat{A}$ в (2.9) не должны сближаться. Собственными значениями матрицы $\hat{A}$ являются безразмерные z компоненты волновых векторов (2.16) и (2.18)

$$\lambda_1 = \sqrt{\varepsilon_\perp \mathcal{H}} = k_z^{(o)}/k_0, \quad \lambda_2 = \sqrt{\varepsilon_\parallel \mathcal{H} + \varepsilon_a (1 - \mathcal{H}) \sin^2 \xi} = k_z^{(e)}/k_0, \tag{2.27}$$
$$\lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2.$$

Фактически, сближение собственных значений означает, что у волн сближаются волновые вектора и возможна взаимная трансформация мод.

2.2.1. Эффект поворота необыкновенного луча

Полученные волны (2.12) будут бегущими только в случае вещественных $k_z^{(j)}$, $j = o, e$, что также эквивалентно вещественным $\lambda_{1,2}$. Обсудим условия, при которых свет может распространяться в среде для заданного значения $\mathbf{k}_\perp$. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon_a > 0$. В этом случае $k_\perp$ может меняться в пределах $0 \le k_\perp^2 \le k_0^2 \varepsilon_\parallel$. Проанализируем поведение $k_z^{(o)}$ и $k_z^{(e)}$ в зависимости от $k_\perp$. Удобнее это делать в терминах параметра $\mathcal{H}$, который принимает значения $-\varepsilon_a/\varepsilon_\perp \le \mathcal{H} \le 1$. Из формулы (2.27) видно, что при $0 < \mathcal{H} \le 1$ ($0 \le k_\perp^2 < k_0^2 \varepsilon_\perp$) подкоренные выражения в λ_1 и λ_2 положительны при любых ξ, и обе волны будут распространяться на всем протяжении образца. При выполнении этого условия обыкновенная волна в среде будет распространяться прямолинейно, поскольку волновой вектор $\mathbf{k}^{(o)}$ не зависит от z. Вектор поляризации этой волны $\mathbf{e}^{(o)}(z)$, согласно (2.15), будет зависеть от z, поскольку его направление определяется локальным вектором директора $\mathbf{n}^0(z)$. Амплитуда волны, согласно (2.23), будет оставаться постоянной.

При $-\varepsilon_a/\varepsilon_\perp \le \mathcal{H} < 0$ ($k_0^2 \varepsilon_\perp \le k_\perp^2 < k_0^2 \varepsilon_\parallel$) подкоренное выражение для λ_1 отрицательно при любых значениях ξ, а для λ_2 подкоренное выражение отрицательно в некоторой области значений ξ. Тогда $k_z^{(o)}$ — чисто мнимое, и обыкновенная волна будет затухающей на всем протяжении ЖК. Для необыкновенной волны экспоненциальное затухание будет иметь место не на всем протяжении ЖК, а лишь в области, где $k_z^{(e)}$ является чисто мнимым. Внутри этой области распространение бегущей в направлении оси z волны невозможно, поэтому такая область представляет собой запрещенную зону. Из (2.27) следует, что запрещенная зона определяется неравенством

$$\sin^2\xi \le -\frac{\mathcal{H}}{1-\mathcal{H}}\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_a}\,. \tag{2.28}$$

В случае равенства выражение (2.28) дает точки, где $k_z^{(e)} = 0$, то есть, волновой вектор направлен вдоль оси x. Фактически, в этих точках происходит смена знака $k_z^{(e)}$ и, соответственно, смена направления распространения волны вдоль оси z. То есть, точка $k_z^{(e)}(z_*) = 0$ представляет собой точку поворота луча. В определенном смысле данный эффект аналогичен эффекту полного внутреннего отражения от некоторой плоскости внутри среды.

Вектор поляризации необыкновенной волны $\mathbf{e}^{(e)}(z)$ адиабатически подстраивается под локальные значения волнового вектора и директора согласно формуле (2.15).

В окрестности точки $z = z_*$ первое и третье неравенства (2.24) нарушаются и описание в рамках геометрической оптики становится неприменимым. Здесь мы попадаем в область каустики. Причем внутри этой области согласно уравнению (2.23) амплитуда поля стремится к бесконечности, так как $k_z^{(e)}(z) \to 0$ при $z \to z_*$. Для описания этой области требуется проводить анализ волнового уравнения (2.4) для поля (2.12), разлагая $\hat{\varepsilon}^0(z)$ в ряд в окрестности точки поворота. Для скалярных волн эффект поворота волны и поведение поля в окрестности точки поворота подробно описаны, например, в [41, 58]. Этот анализ показывает, в частности, что после прохождения точки поворота поле, кроме смены знака компоненты $k_z^{(e)}$, приобретает дополнительный фазовый сдвиг $\exp(-i\pi/2)$.

В случае $\varepsilon_a < 0$ поперечная компонента волнового вектора $k_\perp$ может меняться в пределах $0 \le k_\perp^2 \le k_0^2\varepsilon_\perp$. Параметр $\mathcal{H}$ при этом принимает значения $0 \le \mathcal{H} \le 1$. В этом случае $k_z^{(o)}$ вещественно при любых ξ и $\mathcal{H}$, и обыкновенная волна может распространяться на всем протяжении ЖК. Необыкновенная волна будет распространяться на всем протяжении ЖК только для $-\varepsilon_a/\varepsilon_\perp < \mathcal{H} \le 1$ $(0 \le k_\perp^2 < k_0^2\varepsilon_\parallel)$. В случае же $0 \le \mathcal{H} < -\varepsilon_a/\varepsilon_\perp$ $(k_0^2\varepsilon_\parallel < k_\perp^2 \le k_0^2\varepsilon_\perp)$ образуется запрещенная зона, определяемая неравенством

$$\sin^2\xi \ge -\frac{\mathcal{H}}{1-\mathcal{H}}\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_a}. \tag{2.29}$$

Заметим, что в случае $\varepsilon_a < 0$ запрещенная зона меняется местами с областью распространения по сравнению со случаем $\varepsilon_a > 0$.

Проведенные рассуждения основаны на выражениях для поля, полученных в ВКБ приближении. Однако если собственные значения λ_l сближаются, то амплитуды полученных решений обращаются в бесконечность, и условие применимости метода ВКБ (П1.13) нарушается. При вырождении собственных значений различие между соответствующими им волнами исчезает, и в окрестности точки вырождения возможна взаимная трансформация мод, то есть, перераспределение энергии между волнами.

Как видно из уравнения (2.27), точки вырождения вида $\lambda_2 = \lambda_4$ находятся из соотношения

$$\sin^2\xi_* = -\frac{\mathcal{H}}{1-\mathcal{H}}\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_a}. \tag{2.30}$$

В этих точках $\lambda_{2,4}(\xi_*) = 0$ и $k_z^{(e)}(z_*) = 0$. Это означает, что волновой вектор направлен по оси x. Поскольку собственные значения λ_2 и λ_4 характеризуют распространение необыкновенных волн, то в окрестности ξ_* происходит взаимодействие между падающей и отраженной необыкновенными волнами.

Далее такой тип взаимодействия будем обозначать как $e^+ - e^-$. Окрестность, где происходит это взаимодействие, согласно (П1.13), задается неравенством

$$|\xi - \xi_*| \lesssim \Omega^{-2/3}. \tag{2.31}$$

В случае $\varepsilon_a > 0$ возможно также вырождение типа $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\lambda_3 = \lambda_4$. Оно происходит в точках, удовлетворяющих условию

$$\sin^2 \xi_{**} = -\mathcal{H}/(1 - \mathcal{H}). \tag{2.32}$$

Здесь попарно взаимодействуют (o) и (e) волны. Далее такой тип взаимодействия будем обозначать как $e - o$. Область этого взаимодействия ограничена условием

$$|\xi - \xi_{**}| \lesssim \Omega^{-1/2}, \tag{2.33}$$

В случае $\varepsilon_a < 0$ не существует дополнительных точек поворота внутри запрещенной зоны, поскольку уравнение вида $\lambda_1 = \lambda_2$ дает единственное решение при $\mathcal{H} = 0$. Этот случай соответствует распространению обыкновенной и необыкновенной волн поперек оси z и не представляет для нас особого интереса.

Рассмотрим вопрос о форме траекторий обыкновенного и необыкновенного лучей в ХЖК с большим шагом спирали. Траектория луча определяется как линия, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением групповой скорости волны. В нашем случае удобнее вместо вектора групповой скорости использовать вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$, совпадающий с ним по направлению [154]. В изотропной среде $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$, и траекторию обычно описывают с помощью волнового вектора. В анизотропной среде, в общем случае, $\mathbf{S} \nparallel \mathbf{k}$, и описание траектории следует проводить с помощью вектора Пойнтинга. Параметризуя траекторию луча в виде $(\mathbf{r}_\perp(z), z)$ и записывая условие параллельности касательной в данной точке луча вектору Пойнтинга волны

$(\mathbf{S}_\perp(z), S_z(z))$ в этой точке, получим уравнение для траектории $\mathbf{r}_\perp(z)$

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp(z)}{dz} = \frac{\mathbf{S}_\perp(z)}{S_z(z)}. \tag{2.34}$$

Для обыкновенного луча из (2.15) следует, что $\mathbf{k}^{(o)} \cdot \mathbf{e}^{(o)}(z) = 0$, и из (2.21) получаем, что $\mathbf{S}^{(o)} \parallel \mathbf{k}^{(o)}$ и не зависит от координаты z. Поэтому правая часть уравнения (2.34) не меняется, и мы получаем, что траектория обыкновенного луча прямолинейна и совпадает по направлению с волновым вектором $\mathbf{k}^{(o)}$.

Для необыкновенного луча вектор $\mathbf{S}^{(e)}(z)$ меняется по направлению при изменении z, причем $\mathbf{S}^{(e)}(z) \nparallel \mathbf{k}^{(e)}(z)$, поэтому его траектория более сложная. Для ее нахождения заметим, прежде всего, что в произвольной анизотропной среде вектора $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{S}$ лежат в одной плоскости, $\mathbf{S} \perp \mathbf{E}$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{D} = \hat{\varepsilon}^0\mathbf{E}$, то есть, $\mathbf{k}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{E} = 0$ [154]. С учетом симметрии тензора $\hat{\varepsilon}^0$ последнее равенство можно переписать в виде $\mathbf{e}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{k} = 0$, то есть, $\mathbf{e} \perp \hat{\varepsilon}^0\mathbf{k}$. Из формулы (2.5) следует соотношение

$$\hat{\varepsilon}^0\mathbf{k} = \varepsilon_\perp\mathbf{k} + \varepsilon_a(\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{n}^0, \tag{2.35}$$

которое означает, что в одноосной анизотропной среде вектор $\hat{\varepsilon}^0\mathbf{k}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{n}^0$ и $\mathbf{k}$. Заметим теперь, что согласно (2.15), для необыкновенной волны вектор $\mathbf{e}^{(e)}$ также является линейной комбинацией векторов $\mathbf{n}^0$ и $\mathbf{k}$. В результате мы получаем, что вектора $\mathbf{e}^{(e)}$, $\mathbf{S}^{(e)}$ и $\hat{\varepsilon}^0\mathbf{k}^{(e)}$ лежат в одной плоскости, образованной векторами $\mathbf{n}^0$ и $\mathbf{k}^{(e)}$, причем $\mathbf{e} \perp \hat{\varepsilon}^0\mathbf{k}$ и $\mathbf{e} \perp \mathbf{S}$. Поэтому в одноосных анизотропных средах, к которым локально принадлежат рассматриваемые системы, $\mathbf{S}^{(e)} \parallel \hat{\varepsilon}^0\mathbf{k}^{(e)}$.

Таким образом,

$$\frac{\mathbf{S}_\perp(z)}{S_z(z)} = \frac{(\hat{\varepsilon}^0(z)\mathbf{k}^{(e)}(z))_\perp}{(\hat{\varepsilon}^0(z)\mathbf{k}^{(e)}(z))_z}, \tag{2.36}$$

и уравнение траектории (2.34) с учетом (2.35) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp(z)}{dz} = \frac{\mathbf{n}^0(z)k_\perp\cos\xi(z)\varepsilon_a + \mathbf{k}_\perp\varepsilon_\perp}{k_z^{(e)}(z)\varepsilon_\perp}. \tag{2.37}$$

Интегрируя (2.37), получаем траекторию луча в явном виде

$$\mathbf{r}_\perp(z) = \frac{\varepsilon_a k_\perp}{\varepsilon_\perp} \int_0^z \frac{\mathbf{n}^0(z') \cos\xi(z')}{k_z^{(e)}(z')} dz' + \mathbf{k}_\perp \int_0^z \frac{dz'}{k_z^{(e)}(z')}. \qquad (2.38)$$

Правая часть (2.38) сводится к элементарным функциям и неполному эллиптическому интегралу первого рода. Результаты численных расчетов траекторий приведены на Рис. 2.1 и 2.2.

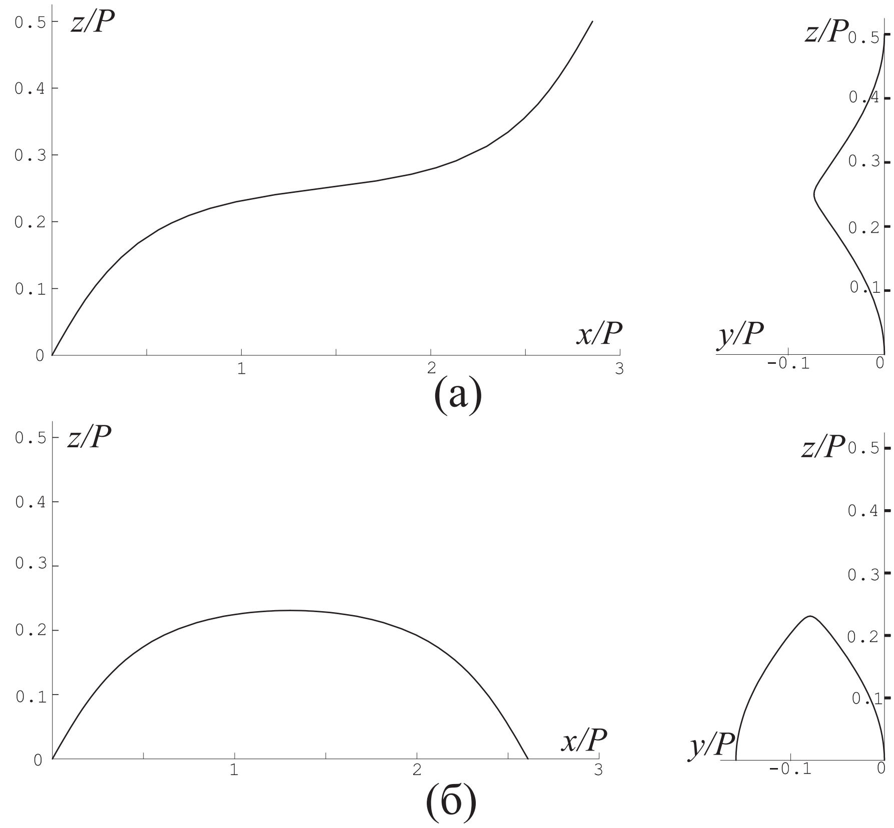


Рис. 2.1

Проекции траекторий лучей в ячейке на плоскости x-z, y-z. При расчетах положено $\sqrt{\varepsilon_\perp} = 1.51$, $\sqrt{\varepsilon_\parallel} = 1.69$, угол ϕ_0 равен $-\pi/2$. Ось x выбрана вдоль $\mathbf{k}_\perp$. Углы входа χ в ЖК при $z = 0$: (а) — необыкновенный прошедший луч, $\chi = 63.2°$, (б) — необыкновенный луч, испытавший поворот $\chi = 63.5°$.

Из рисунка 2.1(б) видно, что при определенных углах падения необыкновенный луч должен испытывать поворот внутри ЖК и возвращаться в среду, из которой он попал в жидкий кристалл. Здесь при расчетах сшивались куски траекторий с $+k_z^{(e)}$ и $-k_z^{(e)}$. Видно, что траектория необыкновенного луча

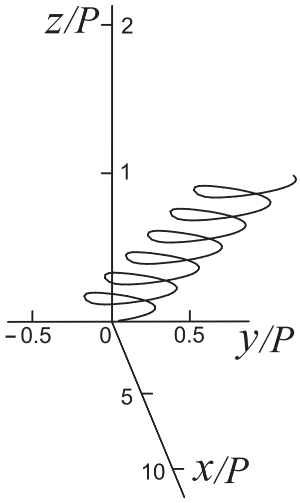


Рис. 2.2

Траектория необыкновенного луча в геликоидальном ЖК при следующих значениях параметров $\varepsilon_{\|} = 2.3$, $\varepsilon_a = 2.0$, угол падения на плоскость $z = 0$ равен $\chi = \pi/4$, угол $\phi_0 = -\pi/4$. Ось x выбрана вдоль $\mathbf{k}_{\perp}$. Все расстояния выражены в единицах шага спирали P

в такой среде не будет плоской. Однако средний по периоду вектор Пойнтинга будет лежать в плоскости оси z и вектора $\mathbf{k}_{\perp}$. Рисунок 2.2 иллюстрирует трехмерную форму траектории необыкновенного луча в геликоидальной среде.

Эффект поворота необыкновенного луча был подтвержден в результате эксперимента. Была приготовлена специальная кювета, показанная на Рис. 2.3. Тонкий плоскопараллельный слой жидкого кристалла (1) помещался между двумя трапецеидальными стеклянными призмами (2,3) с углами при основании равными $\gamma_0 = 70^\circ$. Такая форма призмы давала возможность вводить падающий луч в ЖК под достаточно большими углами падения. Было изготовлено два образца толщиной d в 8 мкм и 100 мкм. Ориентация осей легкого ориентирования директора на обеих поверхностях была перпендикулярна плоскости рисунка. Концентрация оптически активной добавки подбиралась так, чтобы половина шага спирали $P/2$ была близка к толщине

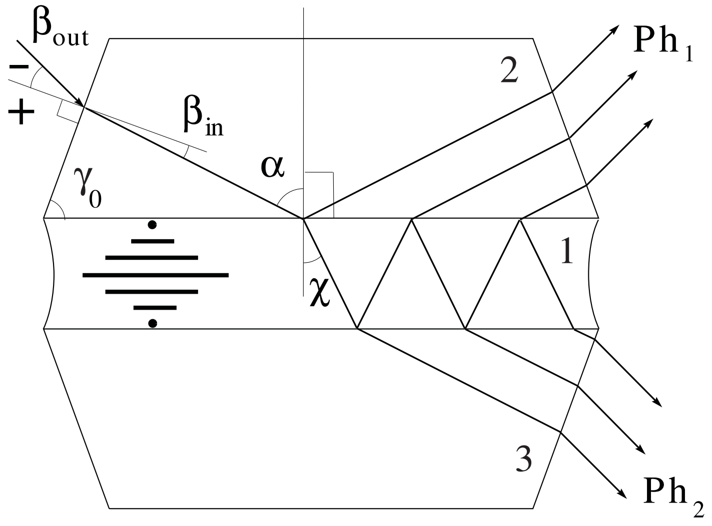


Рис. 2.3

Твист-ячейка с жидким кристаллом и схематический ход лучей. 1 — планарно закрученный ЖК, 2,3 — стеклянные призмы высотой 12 мм, длиной большего основания 37 мм и углом при основании $\gamma_0 = 70°$. Углы β_{out}, β_{in} — углы падения и преломления луча на входной грани призмы, угол α — угол падения на границу стекло–ЖК

слоя d. В результате в ячейке возникала планарная закрученная структура, в которой директор был ортогонален плоскости рисунка на ориентирующих поверхностях и параллелен плоскости рисунка в центре слоя.

Параметры $\sqrt{\varepsilon_\perp}$ и $\sqrt{\varepsilon_\|}$ в приготовленных смесях для длины световой волны $\lambda = 632.8$ нм были равны $\sqrt{\varepsilon_\perp} \approx 1.51$, $\sqrt{\varepsilon_\|} \approx 1.69$, и практически не отличались от значений соответствующих параметров нематической матрицы. Это обусловлено тем, что концентрация закручивающей добавки была мала — для первого образца она составляла $\approx 2\%$, а для второго $\approx 0.07\%$. Показатель преломления стеклянных призм был равен $n_p = 1.644$. Таким образом, он лежит между $\sqrt{\varepsilon_\perp}$ и $\sqrt{\varepsilon_\|}$, причем n_p примерно втрое ближе к $\sqrt{\varepsilon_\|}$, чем к $\sqrt{\varepsilon_\perp}$.

Входящий, прошедший и отраженный лучи были расположены в плоскости Рис. 2.3. Измерялись интенсивности света I_1 и I_2, попадающего в фотоприемники Ph_1 и Ph_2, в зависимости от угла падения света на ЖК при двух поляризациях падающего света, соответствующих обыкновенному или необыкновенному лучу на входе в жидкий кристалл. Угол падения луча на жидкий кристалл α связан с углом падения на входную грань призмы β_{out} соотношениями

$$\alpha = \gamma_0 \pm \beta_{in}, \quad n_p \sin\beta_{in} = \sin\beta_{out}, \tag{2.39}$$

где выбор знака $\pm$ показан на Рис. 2.3 и определяется расположением падающего луча вне образца относительно внешней нормали к входной грани призмы. Угол преломления луча внутри ЖК обозначен как χ. Из (2.39) следует, что угол α может меняться в пределах от $\gamma_0 - \arcsin(1/n_p) \approx 32.54^\circ$ до 90°.

Обсудим сначала как должна распределиться интенсивность падающего света между фотоприемниками Ph_1 и Ph_2, если не принимать во внимание эффект поворота необыкновенного луча.

Из закона Снеллиуса для преломления обыкновенного луча на границе стекло–ЖК получаем

$$n_p \sin\alpha = n^{(o)} \sin\chi = \sqrt{\varepsilon_\perp} \sin\chi \leqslant \sqrt{\varepsilon_\perp}. \tag{2.40}$$

Таким образом, имеется ограничение на угол падения

$$\alpha < \alpha_* = \arcsin(\sqrt{\varepsilon_\perp}/n_p),$$

и при $\alpha > \alpha_*$ обыкновенный луч в жидкий кристалл не входит. Подставляя значения n_p и $\sqrt{\varepsilon_\perp}$ получаем, что $\alpha_* \approx 66.7^\circ$ является углом полного внутреннего отражения обыкновенного луча на границе стекло–ЖК.

Для необыкновенного луча закон Снеллиуса с учетом (2.6) принимает вид

$$n_p \sin\alpha = n^{(e)}(\theta) \sin\chi = \sqrt{\varepsilon_\parallel} \sin\chi, \tag{2.41}$$

так как на границе угол $\theta = 90^\circ$ (Рис. 2.3). Правая часть в этом равенстве при изменении χ от 0° до 90° меняется в интервале от 0 до $\sqrt{\varepsilon_\parallel}$. Аналогично, левая часть при изменении α меняется в интервале от 0 до n_p. В силу условия $n_p < \sqrt{\varepsilon_\parallel}$, при любом значении угла α существует такой угол χ,

$$\chi = \arcsin\left(n_p \sin\alpha / \sqrt{\varepsilon_\parallel}\right), \tag{2.42}$$

что равенство (2.41) будет выполнено. Это означает, что полного внутреннего отражения на границе стекло–ЖК не будет происходить ни при каких углах падения α.

Таким образом, можно было бы ожидать, что необыкновенный луч при всех углах падения испытывает отражение и преломление, то есть, интенсивность света, принимаемая обоими фотоприемниками, меняется плавно в зависимости от α, причем интенсивность прошедшего света I_2 должна значительно превышать интенсивность отраженного света I_1. Для обыкновенного луча можно ожидать, что при $\alpha < \alpha_*$ присутствует как отраженный, так и преломленный лучи, а при $\alpha > \alpha_*$ — только отраженный луч.

Результаты измерений показаны на Рис. 2.4(а) для обыкновенного луча и 2.4(б) для необыкновенного луча. Как видно из Рис. 2.4, существует угол $\alpha_* \approx 66.7^\circ$, одинаковый для обоих типов лучей, такой что при $\alpha < \alpha_*$ свет попадает в оба фотоприемника Ph_1 и Ph_2, а при $\alpha > \alpha_*$ свет попадает только в приемник Ph_1. Приведенные на Рис. 2.4 результаты относятся к образцу толщиной $d = 100$ мкм. Для образца толщиной 8 мкм, картина качественно была такой же, но с менее выраженными изменениями интенсивности в окрестности $\alpha \lesssim \alpha_*$. Таким образом, для обыкновенного луча экспериментально наблюдаемая картина качественно согласуется со сделанными предсказаниями, а для необыкновенного луча — не согласуется с ними.

Противоречие устраняется, если мы примем во внимание эффект поворота необыкновенного луча. Как было показано ранее, необыкновенная волна с достаточно большим значением $k_\perp$ (то есть, с достаточно большим углом па-

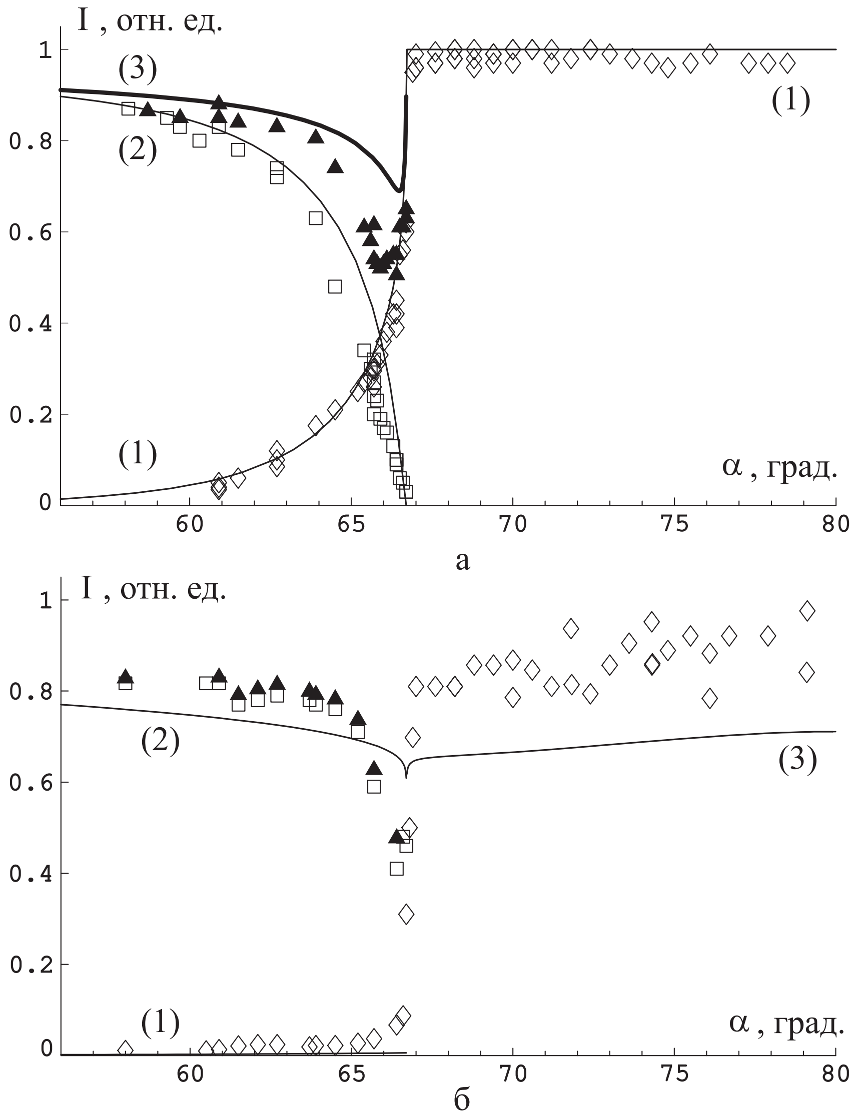


Рис. 2.4

Угловая зависимость интенсивности отраженного и прошедшего света для обыкновенного (а) и необыкновенного (б) лучей. Экспериментальные данные: ◊ — интенсивность отраженного света, □ — интенсивность прошедшего света, ▲ — суммарная интенсивность. Сплошными линиями показаны теоретические кривые. (а): (1) — интенсивность отраженного света I_1, (2) — интенсивность прошедшего света I_2, рассчитанные по формулам (2.46) и (2.47), (3) — суммарная интенсивность $I_1 + I_2$. (б): (1) — интенсивность отраженного света I_1, (2) — интенсивность прошедшего света I_2, рассчитанные по формулам (2.50), (3) — интенсивность отраженного света I_1, рассчитанная по формуле (2.51). Величины нормированы на интенсивность падающего света дения α) не может проникнуть внутрь ЖК далее определенного слоя $z = z_*$, на котором $k_z^{(e)} = 0$. После достижения этого слоя компонента $k_z^{(e)}$ меняет знак. Фактически, эта волна выйдет из слоя ЖК с тем же значением поперечной компоненты волнового вектора $\mathbf{k}_\perp$, но противоположным значением продольной компоненты $k_z^{(e)}$, то есть, будет выглядеть как отраженная. Как мы видели ранее поворот луча в случае $\varepsilon_\perp < \varepsilon_\parallel$ возникает для волн с $k_\perp$, удовлетворяющих условию $\varepsilon_\perp k_0^2 < k_\perp^2 \leqslant \varepsilon_\parallel k_0^2$. Принимая во внимание $k_\perp = k^{(e)} \sin\chi$, с учетом закона Снеллиуса (2.41) имеем $\sqrt{\varepsilon_\perp}/n_p < \sin\alpha \leqslant \sqrt{\varepsilon_\parallel}/n_p$. Поскольку $\sqrt{\varepsilon_\parallel} > n_p$ и $\sqrt{\varepsilon_\perp}/n_p \equiv \sin\alpha_*$, получаем, что эффект поворота необыкновенного луча возникает в области углов $\alpha_* < \alpha \leqslant 90^\circ$, что мы и наблюдали в эксперименте.

Физически совпадение предельных углов α_* для обыкновенного и необыкновенного лучей можно пояснить следующим образом. Если по мере распространения необыкновенного луча вглубь среды его показатель преломления (2.6) уменьшается, то в силу постоянства компоненты $k_\perp$ волнового вектора это приводит к уменьшению компоненты волнового вектора $k_z^{(e)}$ вдоль луча. Минимальный угол α, при котором начинается эффект поворота, соответствует условию обращения $k_z^{(e)}$ в ноль на плоскости внутри ЖК, у которой показатель преломления $n^{(e)}$ минимален. Поскольку в нашем ЖК $\varepsilon_\perp < \varepsilon_\parallel$, минимальное значение $n^{(e)}$ равно $\sqrt{\varepsilon_\perp}$ и совпадает с показателем преломления обыкновенного луча $n^{(o)}$. Поэтому минимальный угол α, при котором начинается эффект поворота необыкновенного луча, в точности совпадает с углом полного внутреннего отражения α_* обыкновенного луча.

2.2.2. Интенсивность прошедшего и отраженного лучей

Проанализируем более детально угловую зависимость $I_{1,2}$ для обоих типов лучей. Рассмотрим сначала случай падающего обыкновенного луча. Первый эффект, определяющий плавное убывание интенсивности проходящего луча I_2 и возрастание интенсивности отраженного луча I_1 при $\alpha \to \alpha_*$ в области $\alpha < \alpha_*$, связан с перераспределением энергии между преломленным и отраженным на границе ЖК–стекло лучами. Интенсивность прошедшего в среду I_{tr} и отраженного I_{rf} лучей описывается формулами Френеля [154]

$$I_{rf} = I_0 R_{\|}, \quad I_{tr} = I_0(1 - R_{\|}), \tag{2.43}$$

где I_0 — интенсивность падающего света,

$$R_{\|} = \frac{\mathrm{tg}^2(\chi - \alpha)}{\mathrm{tg}^2(\chi + \alpha)} \tag{2.44}$$

— коэффициент отражения для луча с поляризацией, лежащей в плоскости падения.

Поскольку при приближении α к α_* коэффициент отражения возрастает, стремясь в пределе $\alpha \to \alpha_*$ к 1, то в окрестности α_* становится необходимым учет многократных отражений света на обеих границах ЖК–стекло (Рис. 2.3).

Заметим также, что при $\alpha \to \alpha_*$ из (2.40) следует $\chi \to 90^\circ$ и, следовательно, распространение преломленного луча внутри ЖК при $\alpha \approx \alpha_*$ близко к скользящему. При этом длина пути

$$l^{(o)} = d\frac{\sin\alpha_*}{\sqrt{\sin^2\alpha_* - \sin^2\alpha}}, \tag{2.45}$$

проходимого лучом между двумя последовательными отражениям внутри ЖК, может быть достаточно большой, и становятся существенны потери света на рассеяние в ЖК (экстинкция).

Для вычисления коэффициента экстинкции в твист-ячейке ЖК с большим шагом спирали можно воспользоваться выражением для коэффициента экстинкции НЖК и учесть, что направление директора плавно меняется в пространстве. Коэффициент экстинкции НЖК рассмотрен в Приложении 2.

По формуле (П2.3) был проведен расчет угловой зависимости коэффициентов экстинкции обыкновенного $\tau_{(o)}(\theta)$ и необыкновенного $\tau_{(e)}(\theta)$ лучей для используемого нами ЖК. Для нематической матрицы в данном ЖК известно отношение модулей Франка $K_{33}/K_{11} \approx 0.95$ и величина $K_{11} \sim 10^{-6}$ дин. Поэтому для оценок было использовано одноконстантное приближение с $K_{11} = K_{22} = K_{33} = 10^{-6}$ дин.

С учетом многократных отражений и экстинкции для обыкновенного луча получаем при $\alpha < \alpha_*$

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 R_\parallel \left[1 + a_{(o)}^2 (1 - R_\parallel)^2 \, \frac{1 - \gamma_{(o)}^{2M_{(o)}+2}}{1 - \gamma_{(o)}^2} \right], \\ I_2 &= I_0 a_{(o)} (1 - R_\parallel)^2 \, \frac{1 - \gamma_{(o)}^{2M_{(o)}+2}}{1 - \gamma_{(o)}^2} \end{aligned} \tag{2.46}$$

и при $\alpha > \alpha_*$

$$I_1 = I_0, \quad I_2 = 0, \tag{2.47}$$

где $\gamma_{(o)} = a_{(o)} R_\parallel$,

$$a_{(o)} = \exp\left(-\frac{l^{(o)}}{d} \int_0^d \tau_{(o)}(\theta(z)) dz \right) \tag{2.48}$$

— потери света на рассеяние между двумя отражениями, $\theta = \theta(z)$ — угол между директором $\mathbf{n}^0(z)$ и волновым вектором $\mathbf{k}^{(o)}$,

$$\cos\theta(z) = \frac{\mathbf{n}^0(z) \cdot \mathbf{k}_\perp}{k_0 \sqrt{\varepsilon_\perp}} = \cos(q_0 z + \phi_0) \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_*},$$

а $M_{(o)} \approx 1 + D\sqrt{\sin^2\alpha_* - \sin^2\alpha}/d \sin 2\alpha$ — число отражений обыкновенного луча внутри образца в пределах принимаемой апертуры $D \gg d$ (в нашем эксперименте $D = 4$ мм). В нашей геометрии $\phi_0 = -\pi/2$, $\mathbf{k}_\perp = (k_\perp, 0, 0)$. Выражение (2.46) представляет собой сумму геометрической прогрессии, учитывающей лучи, испытавшие разное число отражений от границ стекло–ЖК.

На Рис. 2.4(a) сплошные линии соответствуют расчету по формулам (2.46), (2.47). Здесь следует отметить, что кривые $I_{1,2}(\alpha)$ очень чувствительны к значению коэффициента экстинкции, и поэтому согласие теории и эксперимента, полученное на Рис. 2.4(а) без каких-либо подгоночных параметров следует считать достаточно хорошим. Обратим внимание, что сумма интенсивностей отраженного и прошедшего лучей при $\alpha < \alpha_*$ меньше интенсивности отраженного луча при $\alpha > \alpha_*$ Это различие особенно заметно при $\alpha_* - \alpha \sim 1 \div 2°$. Причина такого поведения связана со значительными потерями света на рассеяние в ЖК, когда при углах α близких к углу полного внутреннего отражения обыкновенный луч проходит большие расстояния внутри ЖК.

Теперь рассмотрим необыкновенный падающий луч. Отметим некоторые отличия Рис. 2.4(б) от Рис. 2.4(а). Во-первых, в области $\alpha < \alpha_*$ достаточно далеко от α_* интенсивность прошедшего необыкновенного луча I_2 меньше, чем для обыкновенного. Так, как видно из Рис. 2.4, $I_2^{(e)}(56°) \approx 0.8 I_0$, а $I_2^{(o)}(56°) \approx 0.9 I_0$. Во-вторых, для необыкновенного луча суммарная интенсивность $I_1 + I_2$ при $\alpha < \alpha_*$ в широкой области $\alpha_* - \alpha \gtrsim 1°$ близка к значению интенсивности I_1 при $\alpha > \alpha_*$, в то время как для обыкновенного луча интенсивность I_1 в области $\alpha > \alpha_*$ заметно превосходит значения $I_1 + I_2$ в области $\alpha < \alpha_*$. И, наконец, область углов $\alpha < \alpha_*$ на Рис. 2.4(б), в которых наблюдается заметное изменение I_1 и I_2 при $\alpha \to \alpha_*$, в несколько раз уже, чем для обыкновенного луча. Причем в этой области происходит небольшой рост интенсивности I_1 отраженного луча и заметное уменьшение интенсивности прошедшего луча I_2, в отличие от обыкновенного луча, для которого изменение величин I_1 и I_2 имеет один порядок величины.

Для объяснения этих различий, прежде всего напомним, что показатель преломления необыкновенного луча $\sqrt{\varepsilon_\parallel}$ в нашей системе почти втрое ближе к показателю преломления стеклянных призм n_p, чем показатель преломления обыкновенного луча $\sqrt{\varepsilon_\perp}$. Отсюда следует, что величина

$$R_\perp = \frac{\sin^2(\chi - \alpha)}{\sin^2(\chi + \alpha)} \tag{2.49}$$

— коэффициент отражения для необыкновенного луча с поляризацией, лежащей поперек плоскости падения [154],[1] при χ из (2.42) примерно на порядок меньше, чем $R_\parallel$ — коэффициент отражения обыкновенного луча. Поэтому основной фактор, существенно влияющий на интенсивности I_1 и I_2 для необыкновенного луча — это экстинкция. В частности, в данном случае сравнительно малую роль играют многократные отражения луча на границах ЖК–стекло и стекло–ЖК. Последнее объясняет отсутствие заметной угловой зависимости интенсивности отраженного луча I_1 в области $\alpha < \alpha_*$.

Таким образом получаем для интенсивностей прошедшего и отраженного лучей при $\alpha < \alpha_*$

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 R_\perp \left[1 + a_{1(e)}^2 (1 - R_\perp)^2 \, \frac{1 - \gamma_{1(e)}^{2M_{1(e)}+2}}{1 - \gamma_{1(e)}^2} \right], \\ I_2 &= I_0 a_{1(e)} (1 - R_\perp)^2 \, \frac{1 - \gamma_{1(e)}^{2M_{1(e)}+2}}{1 - \gamma_{1(e)}^2} \end{aligned} \tag{2.50}$$

и при $\alpha > \alpha_*$

$$I_1 = I_0 R_\perp + I_0 a_{2(e)} (1 - R_\perp) \, \frac{1 - \gamma_{2(e)}^{M_{2(e)}+1}}{1 - \gamma_{2(e)}}, \quad I_2 = 0, \tag{2.51}$$

где $\gamma_{j(e)} = a_{j(e)} R_\perp$ $(j = 1{,}2)$,

$$\begin{aligned} a_{1(e)} &= \exp\left(- \int_{z=0}^{z=d} \tau_{(e)}(z) dl^{(e)}(z) \right), \\ a_{2(e)} &= \exp\left(-2 \int_{z=0}^{z=z_*} \tau_{(e)}(z) dl^{(e)}(z) \right), \end{aligned} \tag{2.52}$$

угол $\theta(z)$ определяется формулой (2.17),

$$dl^{(e)}(z) = \sqrt{1 + \left| \frac{d\mathbf{r}_\perp(z)}{dz} \right|^2} dz \tag{2.53}$$

[1] Здесь для оценок мы использовали формулу изотропной среды.

— элемент длины пути, проходимого необыкновенным лучом в ЖК, вычисляемый по формуле (2.37), $M_{j(e)}$ — число отражений необыкновенного луча внутри образца при $\alpha < \alpha_*$ ($j = 1$) и $\alpha > \alpha_*$ ($j = 2$). Поскольку в нашем случае $R_\perp \ll 1$, то $\gamma_{j(e)} \ll 1$ и в формулах (2.50), (2.51) можно положить $M_{j(e)} = \infty$.

На Рис. 2.4(б) сплошной линией показан результат расчета по формулам (2.50) и (2.51). Здесь также следует подчеркнуть высокую чувствительность кривых $I_2(\alpha)$ при $\alpha < \alpha_*$ и $I_1(\alpha)$ при $\alpha > \alpha_*$ к значению коэффициента экстинкции $\tau_{(e)}$. Отметим, что при расчетах $\tau_{(e)}$ по формуле (П2.3) проводилось обрезание интеграла в области углов рассеяния меньших 0.7°, что соответствует условию $k_\perp \gtrsim 4q_0$. Кроме того, в тонких слоях ЖК становятся существенными эффекты взаимодействия молекул ЖК с ориентирующими поверхностями. Это приводит к подавлению флуктуаций вблизи границ, а, значит, и к уменьшению коэффициента экстинкции. Поэтому значения $\tau_{(e)}$, более чувствительные к рассеянию на малые углы, чем $\tau_{(o)}$, следует рассматривать как оценку. С этим, вероятно, и связано большее расхождение теории и эксперимента для необыкновенного луча, Рис. 2.4(б), чем для обыкновенного луча, Рис. 2.4(а).

Теперь мы можем объяснить поведение I_1 и I_2 в областях далеких от α_*. Меньшие величины I_2 для (е) луча, по сравнению с (о) лучом связаны с тем, что в интегралы (2.50) и (2.51) вносят существенный вклад области z в которых велико $\tau_{(e)}$, то есть, те области, где $\theta(z)$ в (2.17) близко к 45°. В результате даже для сравнительно коротких длин прохода луча в среде, соответствующим углам α далеким от α_*, экспоненциальные множители в (2.52) становятся отличны от единицы. Областям $\theta(z) \approx 45^\circ$ соответствуют два сравнительно узких участка на интервалах $(0; P/4)$ и $(P/4; P/2)$. При этом проходящий луч пересекает один такой участок существенного вклада в интеграл при $0 < z < P/4$, а другой — при $P/4 < z < P/2$, а луч, испытавший поворот, проходит дважды через один такой участок при $0 < z < P/4$, первый раз — при прямом распространении, а второй раз — при обратном. Поэтому величина I_2 при $\alpha < \alpha_*$ и величина I_1 при $\alpha > \alpha_*$ имеют примерно одинаковые значения.

Обсудим некоторые дополнительные факторы, влияющие на интенсивность проходящего и отраженного необыкновенного луча в близкой окрестности угла α_*.

Во-первых, для необыкновенного луча в НЖК имеет место аномально сильное рассеяние на малые углы в необыкновенный луч [43]. В силу этого необыкновенный луч на длинах порядка $\tau_{(e)}^{-1} \ll \tau_{(o)}^{-1}$ за счет многократного рассеяния трансформируется из когерентного в диффузный с незначительным угловым расширением пучка и сохранением поляризации [156]. Поскольку локально наша система близка к НЖК, то здесь можно ожидать аналогичный эффект. Согласно экспериментальным данным [156], характерный угловой размер диффузного луча составлял $1 \div 1.5^\circ$ при длинах прохода луча в ЖК ~ 0.1 см. Таким образом, примерно на тех же углах α, когда начинается заметное изменение I_2 за счет потерь света на рассеяние на большие углы, начинает происходить и заметное расширение углового расхождения луча. В результате при $\alpha_* - \alpha \sim 1 \div 1.5^\circ$ в пучке появляется заметная доля лучей, у которых может проявляться эффект поворота. Эти лучи после выхода из ЖК выглядят как отраженные. За счет этого в области $\alpha_* - \alpha \sim 1 \div 1.5^\circ$ начинает увеличиваться интенсивность I_1, причем тем заметнее, чем ближе $\alpha_* - \alpha$ к нулю.

Во-вторых, при углах $\alpha > \alpha_*$, но достаточно близких к α_* на угловую зависимость интенсивностей $I_{1,2}$ может оказывать влияние так называемый эффект просачивания [41, 42]. Он состоит в частичном проникновении волны через запрещенную область, где она экспоненциально затухает вдоль направления z, в соседнюю разрешенную область. Это приводит к уменьшению интенсивности I_1 (часть энергии уходит через запрещенную область) и увеличению интенсивности I_2 (энергия приходит через запрещенную область). Эффект просачивания проявляется тем заметнее, чем меньше ширина запрещенной области. В нашем случае запрещенной является область $z_* < z < P/2 - z_*$, и ее ширина $P/2 - 2z_*$ стремится к нулю при $\alpha \to \alpha_*$. Характерный интервал углов $\Delta\alpha_{per} = \alpha - \alpha_*$, для которых заметен эффект просачивания, определяется неравенством

$$\int_{z_*}^{P/4} \operatorname{Im} k_z^{(e)}(z) dz \lesssim 1. \qquad (2.54)$$

Из условия $k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z_*) = 0$ можно найти z_* как функцию α

$$z_*(\alpha) = \frac{P}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_a} \left(\frac{\varepsilon_\parallel}{n_p^2 \sin^2 \alpha} - 1 \right)}.$$

В частности, $z_*(\alpha_*) = P/4$. Отсюда для $\Delta z_*(\alpha) = z_*(\alpha_*) - z_*(\alpha)$ в пределе $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_* \to 0$ имеем

$$\Delta z_*(\alpha) \approx \mu q_0^{-1} (\Delta\alpha)^{1/2},$$

где

$$\mu = 2^{1/2} \varepsilon_\parallel^{1/2} \varepsilon_\perp^{-1/4} \varepsilon_a^{-1/2} (n_p^2 - \varepsilon_\perp)^{1/4}.$$

В окрестности точки $z_* = z_*(\alpha)$ в запрещенной области продольная компонента волнового вектора (2.18) имеет вид

$$k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z) \approx i k_0 \sqrt{\varepsilon_a} \sqrt{2\mu (\Delta\alpha)^{1/2} q_0 (z - z_*) - q_0^2 (z - z_*)^2}, \qquad (2.55)$$

Выполняя интегрирование в (2.54), получаем

$$\frac{\pi k_0}{4 q_0} \mu^2 \sqrt{\varepsilon_a} \Delta\alpha \lesssim 1.$$

Откуда

$$\Delta\alpha_{per} \sim \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_{\parallel}P}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_a}{n_p^2-\varepsilon_{\perp}}}.$$

Для экспериментальных значений n_p, $\varepsilon_{\perp}$ и $\varepsilon_{\parallel}$ имеем $\Delta\alpha_{per} \sim 0.4\lambda/P$. Для образца толщиной 100 мкм получим $\Delta\alpha_{per} \sim 0.07^{\circ}$, а для образца толщиной 8 мкм — $\Delta\alpha_{per} \sim 0.9^{\circ}$.

В-третьих, поскольку при $\alpha = \alpha_*$ точка поворота $z_*(\alpha_*) = P/4$, то для компонент волнового вектора $\mathbf{k}^{(e)}$ имеем в этой точке $k_{\perp}^{(e)} = k_0\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$, $k_z^{(e)} = 0$. Поскольку компонента $\mathbf{k}_{\perp}^{(o)} = \mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp}^{(e)}$, то в этом случае, согласно (2.16), $k_z^{(o)}(k_{\perp}) = 0$ и $\mathbf{k}^{(e)} = \mathbf{k}^{(o)}$. При этом в точке поворота $\mathbf{n}^0(P/4) \parallel \mathbf{k}^{(o,e)}$, и моды вырождены — различие между обыкновенной и необыкновенной волной исчезает. В такой ситуации может возникать эффект взаимной трансформации мод [155] между обыкновенным и необыкновенным лучом. В результате в окрестности точки поворота при $\alpha \approx \alpha_*$ часть энергии необыкновенного луча передается обыкновенному лучу, причем последний распространяется в узкой окрестности плоскости $z = P/4$, и на внешние поверхности призм не выходит. Характерный интервал углов $\Delta\alpha_{int}$ в котором может происходить взаимная трансформация этих двух лучей, определяется неравенством $\left|\mathbf{k}^{(o)} - \mathbf{k}^{(e)}\right| \lesssim q_0 = 2\pi/P$. Поскольку в окрестности поворота $k_z^{(e)} \ll k_{\perp}$, то получаем условие $\left|\mathbf{k}_{\perp}^{(o)}(\alpha_*) - \mathbf{k}_{\perp}^{(e)}(\alpha)\right| \lesssim q_0$, или $k_0 n_p \cos\alpha_*\Delta\alpha = k_0\sqrt{n_p^2-\varepsilon_{\perp}}\Delta\alpha \lesssim q_0$. Откуда следует оценка $\Delta\alpha_{int} \lesssim \lambda/P$, или $\Delta\alpha_{int} \sim 0.4^{\circ}$ для $d = 100$ мкм и $\Delta\alpha_{int} \sim 4.5^{\circ}$ для $d = 8$ мкм. Подчеркнем, что данная оценка дает лишь область углов, где может проявляться трансформация необыкновенного луча в обыкновенный, а не абсолютные значения такой трансформации. Для расчета последней величины требуется решать волновое уравнение в окрестности $\alpha = \alpha_*$ с учетом взаимодействия мод.

2.3. Предельный луч

Изучим вопрос о взаимной трансформации мод в окрестностях точек поворота. Рассмотрение начнем со случая, когда ширина запрещенной зоны равна нулю. Запрещенная зона нулевой ширины наблюдается при единственном угле падения луча. Такой луч мы будем называть предельным. Из выражений (2.28) и (2.29) нетрудно видеть, что предельному лучу соответствует $\mathcal{H} = 0$. Это приводит к условию на точку поворота $\sin \xi_* = 0$. Для определенности мы рассмотрим точку поворота $\xi_* = 0$. Остальные точки $\xi_{*k} = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, исследуются аналогично. В случае предельного луча нет принципиальных отличий в описании сред с $\varepsilon_a > 0$ и $\varepsilon_a < 0$. Для определенности мы рассмотрим среду с $\varepsilon_a > 0$.

Для предельного луча нам будет удобно рассмотреть волновое уравнение (2.4) в $(\mathbf{k}_\perp, z)$–представлении

$$\begin{cases} \partial_\xi^2 E_x - i\Omega \dfrac{k_\perp}{k_0} \partial_\xi E_z + \Omega^2 \varepsilon_{xx}^0 E_x + \Omega^2 \varepsilon_{xy}^0 E_y = 0 \\ \partial_\xi^2 E_y + \Omega^2 \varepsilon_{xy}^0 E_x + \Omega^2 \left(\varepsilon_{yy}^0 - \dfrac{k_\perp^2}{k_0^2} \right) E_y = 0 \\ -i\Omega \dfrac{k_\perp}{k_0} \partial_\xi E_x + \Omega^2 \left(\varepsilon_\perp - \dfrac{k_\perp^2}{k_0^2} \right) E_z = 0. \end{cases} \tag{2.56}$$

В случае $\mathcal{H} = 0$ эта система допускает существенные упрощения. Из третьего уравнения системы (2.56) нетрудно получить, что компонента поля E_x не зависит от ξ, $E_x = E_{x0}$. Если подставить это решение в первое и второе уравнение, получим систему

$$\begin{cases} -i\sqrt{\varepsilon_\perp} \partial_\xi E_z + \Omega(\varepsilon_\perp + \varepsilon_a \cos^2 \xi) E_{x0} + \Omega \varepsilon_a \cos \xi \sin \xi E_y = 0 \\ \partial_\xi^2 E_y + \Omega^2 \varepsilon_a \cos \xi \sin \xi E_{x0} + \Omega^2 \varepsilon_a \sin^2 \xi E_y = 0. \end{cases} \tag{2.57}$$

Заметим, что решение второго уравнения (2.57) может быть функцией только ξ и $\Omega^2 \varepsilon_a$, а решение первого уравнения имеет вид

$$E_z = -i \frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} \left[E_{x0} \xi + \sqrt{\varepsilon_\perp} \varepsilon_a \int (E_{x0} \cos^2 \xi + E_y \cos \xi \sin \xi) d\xi \right] + C. \tag{2.58}$$

Поскольку E_y не зависит от $\varepsilon_\perp$, то растущий вклад $E_{x0}\xi$ не может быть скомпенсирован интегральным членом. Растущее решение не согласуется с законом сохранения энергии, и поэтому следует положить $E_{x0} = 0$.

Полагая $E_{x0} = 0$ в системе (2.57), получим

$$\begin{cases} \partial_\xi E_z + i\Omega \dfrac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} \sin\xi \cos\xi E_y = 0 \\ \partial_\xi^2 E_y + \Omega^2 \varepsilon_a \sin^2\xi E_y = 0. \end{cases} \tag{2.59}$$

Обозначим $\Omega_\varepsilon = \Omega\varepsilon_a^{1/2}$, после чего система (2.59) принимает вид

$$\begin{cases} \partial_\xi E_z + i\Omega_\varepsilon \dfrac{\sqrt{\varepsilon_a}}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} \sin\xi \cos\xi E_y = 0 \\ \partial_\xi^2 E_y + \Omega_\varepsilon^2 \sin^2\xi E_y = 0. \end{cases} \tag{2.60}$$

Отметим, что Ω_ε остается большим параметром, так как характерное значение ε_a для большинства задач лежит в пределах $0.1 \le \varepsilon_a \le 1$ [43, 49].

Система (2.60) представляет собой систему уравнений с периодическими коэффициентами. В системе имеется большой параметр Ω_ε, поэтому вдали от точек поворота мы воспользуемся развитым ранее методом ВКБ. В окрестности точки поворота будем решать систему при помощи метода эталонного уравнения. Сшивание решений, полученных для разных областей, позволит найти поле во всей неоднородной среде.

2.3.1. Поле предельного луча вдали от точки поворота

Вдали от точки поворота поле будет иметь вид (2.12). Найдем сначала z компоненты волновых векторов. Из (2.16) получим $k_z^{(o)} = 0$, а из (2.18) — $k_z^{(e)} = \sqrt{\varepsilon_a}|\sin\xi|$. Поляризации собственных волн можно получить из условия (2.15). В частности, имеем $\mathbf{e}_\pm^{(o)} = \mathbf{e}_z$. Амплитуду необыкновенной волны нетрудно получить из выражения (2.23). Амплитуда обыкновенной волны, согласно этому выражению, идет на бесконечность. Это является следствием того, что при $\mathcal{H} = 0$ произошло вырождение двух обыкновенных волн:

$k_z^{(o)} = -k_z^{(o)} = 0$ или $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. А значит выражением (2.23) мы пользоваться не можем. Однако амплитуду обыкновенной волны можно получить непосредственно из первого уравнения системы (2.60). Как видно, $E_z = C^{(o)}$, где $C^{(o)}$ — константа, является решением системы уравнений (2.60). Эта константа и есть амплитуда обыкновенной волны.

Таким образом, в приближении геометрической оптики решение системы (2.60) имеет вид суммы трех волн: двух необыкновенных и обыкновенной

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}_\perp, z) = \mathbf{E}_+^{(e)} + \mathbf{E}_-^{(e)} + \mathbf{E}^{(o)}, \tag{2.61}$$

$$\mathbf{E}^{(o)} = C^{(o)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.62}$$

$$\mathbf{E}_\pm^{(e)} = \frac{C^{(e)\pm}}{\sqrt{|\sin\xi|}} \exp\left(\pm i\Omega_\varepsilon \int_0^\xi |\sin\xi'| d\xi'\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mp\dfrac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}} \operatorname{sign}(\sin\xi)\cos\xi \end{pmatrix}. \tag{2.63}$$

Обыкновенная волна (2.62) представляет собой плоскую волну, бегущую параллельно оси x, а необыкновенные волны (2.63) являются квазиплоскими.

Обратим внимание, что для необыкновенной волны в точках, где $\sin\xi = 0$, амплитуда поля обращается в бесконечность. Это связано с тем, что в окрестностях этих точек неприменим метод ВКБ.

Область применимости построенного решения в окрестности точки $\xi_* = 0$. нетрудно получить из второго уравнения (2.60). Для это уравнения можно выполнить процедуру, описанную в Приложении 1, и воспользоваться условием (П1.13). Или же можно построить асимптотический ряд для решения второго уравнения (2.60) и потребовать малость члена ряда с номером $n+1$

по сравнению с n-тым членом ряда. Получим область применимости ВКБ приближения (2.61) в окрестности $\xi_* = 0$

$$|\xi| \gg \Omega_\varepsilon^{-1/2}. \tag{2.64}$$

В следующем разделе мы рассмотрим поведение поля в близкой окрестности точки поворота.

2.3.2. Решение в окрестности точки поворота

Разложим коэффициенты уравнений системы (2.60) в точке поворота $\xi_* = 0$ в ряд

$$\begin{cases} \partial_\xi E_z + i\Omega_\varepsilon \dfrac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}} \left(\xi - \dfrac{2}{3}\xi^3 + \ldots\right) E_y = 0 \\ \partial_\xi^2 E_y + \Omega_\varepsilon^2 \left(\xi^2 - \dfrac{1}{3}\xi^4 + \ldots\right) E_y = 0. \end{cases} \tag{2.65}$$

Заметим, что при рассмотрении окрестности точки поворота система (2.65) имеет два малых параметра ξ и Ω_ε^{-1}. Поэтому введем "растянутую" переменную $\zeta = \Omega_\varepsilon^{1/2}\xi$, которая, согласно (2.64), в окрестности точки поворота не является малой. В случае $\xi \ll 1$ ($\zeta \ll \Omega_\varepsilon^{1/2}$) достаточно ограничиться главными членами по Ω_ε, имеем

$$\begin{cases} \partial_\zeta E_z + i\dfrac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}} \zeta E_y = 0 \\ \partial_\zeta^2 E_y + \zeta^2 E_y = 0. \end{cases} \tag{2.66}$$

Решением второго уравнения системы (2.66) являются цилиндрические функции порядка 1/4. Существует произвол в выборе комбинации двух линейно независимых решений. В качестве двух линейно независимых решений удобно выбрать функции Ханкеля первого и второго рода: $H_{1/4}^{(1)}(u)$ и $H_{1/4}^{(2)}(u)$. Функции Ханкеля определены однозначно для $|\arg u| < \pi$. Поэтому для задания решения в области $\zeta < 0$, мы воспользуемся тем, что вид второго уравнения системы (2.66) не меняется при замене ζ на $-\zeta$. Получаем

$$E_{y,>} = \zeta^{1/2}\left[A_> H_{1/4}^{(1)}\left(\frac{1}{2}\zeta^2\right) + B_> H_{1/4}^{(2)}\left(\frac{1}{2}\zeta^2\right)\right] \tag{2.67}$$

для области $\zeta > 0$ и

$$E_{y,<} = |\zeta|^{1/2}\left[A_< H_{1/4}^{(1)}\left(\frac{1}{2}|\zeta|^2\right) + B_< H_{1/4}^{(2)}\left(\frac{1}{2}|\zeta|^2\right)\right] \tag{2.68}$$

для области $\zeta < 0$. Как видно из (2.67) и (2.68), решения для областей $\zeta > 0$ и $\zeta < 0$ отличаются константами: $A_>$, $B_>$ и $A_<$, $B_<$. Эти константы связаны условиями непрерывности компоненты E_y и ее производной $\partial_\zeta E_y$ при $\zeta = 0$.

Поведение решения при $\zeta \ll 1$ с учетом знака ζ задается выражениями [157]

$$|\zeta|^{1/2} H_{1/4}^{(j)}(\zeta^2/2) = \mp\frac{2i}{\Gamma(3/4)} + \frac{2(1\pm i)\Gamma(3/4)}{\pi}|\zeta| + O(\zeta^4). \tag{2.69}$$

Здесь и далее верхний знак соответствует $j = 1$, а нижний — $j = 2$. Тогда в окрестности нуля имеем

$$\begin{aligned} E_{y,>} &\approx \frac{2i}{\Gamma(3/4)}(-A_> + B_>) + \frac{2\Gamma(3/4)\zeta}{\pi}\left[(1+i)A_> + (1-i)B_>\right] \\ E_{y,<} &\approx \frac{2i}{\Gamma(3/4)}(-A_< + B_<) - \frac{2\Gamma(3/4)\zeta}{\pi}\left[(1+i)A_< + (1-i)B_<\right]. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Из условий непрерывности компоненты E_y и ее производной можно выразить константы $A_>$ и $A_<$ через $B_>$ и $B_<$

$$\begin{aligned} A_> &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B_< e^{i3\pi/4} + B_> e^{i\pi/4}\right) \\ A_< &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B_< e^{i\pi/4} + B_> e^{i3\pi/4}\right). \end{aligned} \tag{2.71}$$

Две оставшиеся константы $B_>$ и $B_<$ определяются из граничных условий, как амплитуды падающих волн со стороны положительных и отрицательных z на границу рассматриваемой области.

Для применения граничных условий рассмотрим асимптотики решений (2.67), (2.68) при $|\zeta| \gg 1$. Воспользуемся асимптотиками функций Ханкеля при $\zeta \to \pm\infty$

$$H_\nu^{(j)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \exp\left[\pm i\left(u - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right][1 + O(u^{-1})], \quad j = 1, 2, \tag{2.72}$$

где $|u| \gg 1$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1/2$, $|\arg u| < \pi$.

С помощью выражения (2.72), можно различить константы, отвечающие падающим и отраженным волнам. Асимптотики имеют вид квазиплоских волн. Направление распространения таких волн задается знаком фазы волны. Можно сделать вывод, что константы $B_>$ и $B_<$ характеризуют амплитуды падающих волн, а $A_>$ и $A_<$ — отраженных от запрещенной зоны нулевой ширины $\xi = 0$ (Рис. 2.5).

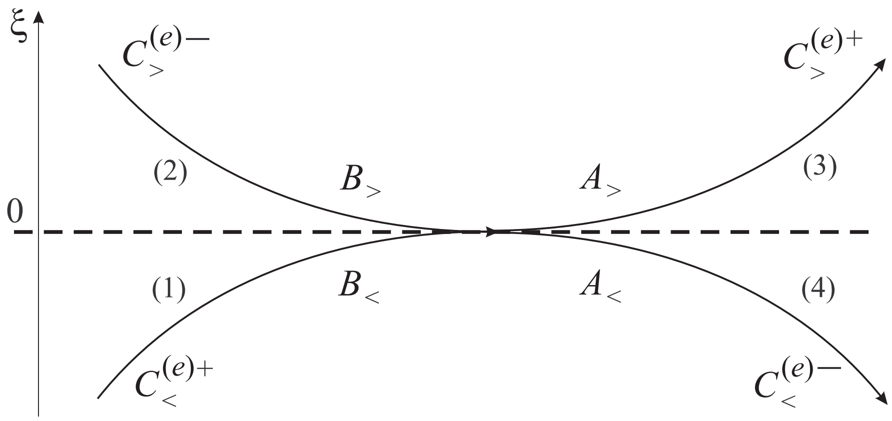


Рис. 2.5

Траектории распространения волн для случая предельного луча, $C_<^{(e)+}$, $C_>^{(e)-}$, $C_>^{(e)+}$, $C_<^{(e)-}$ — амплитуды волн вдали от точки поворота, а $B_<$, $B_>$, $A_>$, $A_<$ — в окрестности точки поворота. Стрелками указаны направления распространения волн

Воспользуемся ВКБ приближением (2.63) для сшивания решений. При условии $|\xi| \ll 1$ выражение для компоненты y переходит в

$$\begin{aligned} E_{y,>} &= C_>^{(e)+}\frac{1}{\sqrt{\xi}}\exp\left(i\Omega_\varepsilon\frac{\xi^2}{2}\right) + C_>^{(e)-}\frac{1}{\sqrt{\xi}}\exp\left(-i\Omega_\varepsilon\frac{\xi^2}{2}\right) \\ E_{y,<} &= C_<^{(e)+}\frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\exp\left(-i\Omega_\varepsilon\frac{\xi^2}{2}\right) + C_<^{(e)-}\frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\exp\left(i\Omega_\varepsilon\frac{\xi^2}{2}\right), \end{aligned} \tag{2.73}$$

где константы $C_>^{(e)\pm}$ и $C_<^{(e)\pm}$ относятся к ВКБ решениям выше и ниже точки поворота (Рис. 2.5). Эти константы могут отличаться, поскольку в окрестности точки поворота происходит взаимодействие мод.

Асимптотики решений (2.67), (2.68) при $\zeta \to \pm\infty$, согласно (2.72), примут вид

$$\begin{aligned} E_{y,>} &= \frac{2}{\sqrt{\pi\zeta}}\left\{A_> \exp\left[i\left(\frac{\zeta^2}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\right] + B_> \exp\left[-i\left(\frac{\zeta^2}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\right]\right\}, \\ E_{y,<} &= \frac{2}{\sqrt{\pi|\zeta|}}\left\{A_< \exp\left[i\left(\frac{\zeta^2}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\right] + B_< \exp\left[-i\left(\frac{\zeta^2}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Можно заметить, что при значениях $1 \ll |\zeta| \ll \Omega_\varepsilon^{1/2}$ перекрываются как область применимости ВКБ приближения (2.73), так и асимптотик решений в окрестности точки поворота (2.74). Можно установить связь между константами в ВКБ приближении и решении в окрестности точки поворота

$$\begin{aligned} A_> &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Omega_\varepsilon^{1/4} e^{3\pi i/8} C_>^{(e)+}, \quad B_> = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Omega_\varepsilon^{1/4} e^{-3\pi i/8} C_>^{(e)-}, \\ A_< &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Omega_\varepsilon^{1/4} e^{3\pi i/8} C_<^{(e)-}, \quad B_< = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Omega_\varepsilon^{1/4} e^{-3\pi i/8} C_<^{(e)+}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Соотношения между амплитудами падающих и отраженных волн согласно (2.71) и (2.75) имеют вид

$$\begin{aligned} C_>^{(e)+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C_<^{(e)+} - iC_>^{(e)-}\right) \\ C_<^{(e)-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-iC_<^{(e)+} + C_>^{(e)-}\right). \end{aligned} \tag{2.76}$$

Таким образом, при падении волн со стороны положительных и отрицательных ξ происходит их отражение в окрестности точки поворота, причем имеет место перераспределение энергии между волнами

$$\begin{aligned} \left|C_>^{(e)+}\right|^2 &= \frac{1}{2}\left(\left|C_<^{(e)+}\right|^2 + \left|C_>^{(e)-}\right|^2\right) + \operatorname{Im}\left(C_<^{(e)+} C_>^{(e)-*}\right) \\ \left|C_<^{(e)-}\right|^2 &= \frac{1}{2}\left(\left|C_<^{(e)+}\right|^2 + \left|C_>^{(e)-}\right|^2\right) - \operatorname{Im}\left(C_<^{(e)+} C_>^{(e)-*}\right). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Из выражений (2.77) следует закон сохранения энергии

$$\left|C_>^{(e)+}\right|^2 + \left|C_<^{(e)-}\right|^2 = \left|C_<^{(e)+}\right|^2 + \left|C_>^{(e)-}\right|^2. \tag{2.78}$$

Также соотношения (2.76) показывают, что при отражении волны от запрещенной зоны происходит потеря фазы на $\pi/2$, в то время как волна, которая просачивается через запрещенную зону, не приобретает фазового сдвига.

Для построения решения, отвечающего компоненте поля E_z, проинтегрируем первое уравнение системы (2.66). Аналогично процедуре, проделанной для компоненты E_y, построим отдельно решения для $\zeta > 0$ и для $\zeta < 0$. Используя выражение (2.67), получаем

$$E_{z,>} = -i2^{1/4}\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\int_0^\zeta d\left(\zeta'^2/2\right)\left(\zeta'^2/2\right)^{1/4}\times \\ \times\left[A_> H_{1/4}^{(1)}\left(\zeta'^2/2\right) + B_> H_{1/4}^{(2)}\left(\zeta'^2/2\right)\right] + F_z, \quad (2.79)$$

где F_z — константа, дающая вклад в амплитуду обыкновенной волны. В результате интегрирования имеем [158]

$$E_{z,>} = -i\frac{\pi^{1/2}}{2^{3/2}}\Gamma(3/4)\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\zeta^2\times \\ \times\left\{A_>\left[H_{1/4}^{(1)}(\zeta^2/2)\mathbf{H}_{-3/4}(\zeta^2/2) - H_{-3/4}^{(1)}(\zeta^2/2)\mathbf{H}_{1/4}(\zeta^2/2)\right] + \right. \\ \left. + B_>\left[H_{1/4}^{(2)}(\zeta^2/2)\mathbf{H}_{-3/4}(\zeta^2/2) - H_{-3/4}^{(2)}(\zeta^2/2)\mathbf{H}_{1/4}(\zeta^2/2)\right]\right\} + F_z, \quad (2.80)$$

где $\mathbf{H}_\nu(u)$ — функция Струве. Для решения в области $\zeta < 0$ достаточно заменить в выражении (2.80) величины $A_>$, $B_>$ на $A_<$, $B_<$. Связь между константами $A_>$, $B_>$, $A_<$, $B_<$ определяется выражениями (2.71). Для компоненты поля E_z также должны соблюдаться условия непрерывности в нуле самой функции и ее производной. Как видно из (2.69) и (2.79), непрерывность соблюдается, если для $\zeta > 0$ и $\zeta < 0$ в качестве константы интегрирования мы возьмем одну и ту же величину F_z.

С учетом (2.70) и (2.79), поле в окрестности точки $\zeta = 0$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}(\zeta) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ a + b\zeta \\ -i\dfrac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\left[a\dfrac{\zeta^2}{2} + b\dfrac{\zeta^3}{3}\right] + F_z \end{pmatrix}, \tag{2.81}$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{2i}{\Gamma(3/4)}(-A_> + B_>), \\ b &= \frac{2}{\pi}\Gamma(3/4)\left[(i+1)A_> + (1-i)B_>\right]. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу непрерывности $\mathbf{E}$ в точке $\zeta = 0$ это выражение справедливо в окрестности нуля как при $\zeta > 0$, так и при $\zeta < 0$.

Для того, чтобы выполнить сшивание решения в окрестности точки поворота с ВКБ решением, построим асимптотики решения (2.80) при $|\zeta| \gg 1$. Используя асимптотики функций Струве [159], получаем

$$\begin{aligned} E_{z,>} \approx -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(3/4)\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\left\{A_>\left\{1 - \frac{2^{1/2}}{\Gamma(3/4)\zeta^{1/2}}\exp\left[i\left(\frac{\zeta^2}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right]\right\} + \right. \\ \left. + B_>\left\{1 - \frac{2^{1/2}}{\Gamma(3/4)\zeta^{1/2}}\exp\left[-i\left(\frac{\zeta^2}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right]\right\}\right\} + F_z. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Выражение для $E_{z,<}$ получается заменой $A_>$, $B_>$ на $A_<$, $B_<$.

Выражение (2.82) в областях $1 \ll |\zeta| \ll \Omega_\varepsilon^{1/2}$ должно совпадать с ВКБ приближением (2.61). Решение ВКБ в этих областях для компоненты E_z может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} E_{z,>} &= -C_>^{(e)+}\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{\xi}}\exp\left(i\Omega_\varepsilon\frac{\xi^2}{2}\right) + C_>^{(e)-}\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{\xi}}\exp\left(-i\Omega_\varepsilon\frac{\xi^2}{2}\right) + C_>^{(o)} \\ E_{z,<} &= C_<^{(e)+}\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\exp\left(-i\Omega_\varepsilon\frac{\xi^2}{2}\right) - C_<^{(e)-}\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\exp\left(i\Omega_\varepsilon\frac{\xi^2}{2}\right) + C_<^{(o)}. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Константы $A_>$, $B_>$, $A_<$ и $B_<$ выбираются согласно (2.75). Для сшивания решений остается связать константы $C_>^{(o)}$ и $C_<^{(o)}$. Получаем

$$
\begin{aligned}
C_>^{(o)} &= F_z - i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(3/4)\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}(A_> + B_>) \\
C_<^{(o)} &= F_z - i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(3/4)\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}(A_< + B_<).
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

Проанализируем физический смысл полученных результатов. Вдали от точки поворота (см. Рис. 2.5) решение уравнений Максвелла представляет собой обыкновенные и необыкновенные волны. В близкой окрестности точки поворота система уравнений Максвелла не допускает такого разделения и поле имеет достаточно сложную структуру.

Уравнения (2.75), (2.76), (2.84) позволяют построить полную матрицу связи амплитуд поля по обе стороны точки поворота

$$
\begin{pmatrix} C_>^{(e)+} \\ C_>^{(e)-} \\ C_>^{(o)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i & 0 \\ i & \sqrt{2} & 0 \\ 2e^{-i\pi/8}\Gamma(3/4)\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\Omega_\varepsilon^{1/4} & -2e^{i\pi/8}\Gamma(3/4)\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\Omega_\varepsilon^{1/4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_<^{(e)+} \\ C_<^{(e)-} \\ C_<^{(o)} \end{pmatrix}.
\tag{2.85}
$$

Систему (2.85) удобнее переписать в виде уравнений, выражающих амплитуды уходящих волн $C_>^{(e)+}$, $C_<^{(e)-}$, $C_>^{(o)}$ через амплитуды падающих $C_<^{(e)+}$, $C_>^{(e)-}$, $C_<^{(o)}$

$$
\begin{pmatrix} C_>^{(e)+} \\ C_<^{(e)-} \\ C_>^{(o)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2}e^{i\pi/8}\Gamma(3/4)\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\Omega_\varepsilon^{1/4} & -\sqrt{2}e^{i\pi/8}\Gamma(3/4)\frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_\perp^{1/2}}\Omega_\varepsilon^{1/4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_<^{(e)+} \\ C_>^{(e)-} \\ C_<^{(o)} \end{pmatrix}.
\tag{2.86}
$$

Формула (2.77) описывает соотношения между интенсивностями волн, к которым приводит проход через окрестность точки поворота.

Рассмотрим сначала случай, когда на среду падает только одна волна (1) или (2) на Рис. 2.5. Как следует из формул (2.77), в этом случае возникает отраженная и прошедшая волны (3) и (4), при этом интенсивности этих волн совпадают и равны половине интенсивности падающей волны.

Если на среду падают одновременно две волны (1) и (2), то, как видно из (2.77), при проходе окрестности точки поворота появляется эффект, аналогичный интерференции. В случае несовпадения фаз падающих волн за счет последних слагаемых в (2.77) происходит перераспределение энергии уходящих волн.

Если на среду падает только обыкновенная волна, то, как следует из системы (2.86), она проходит через точку поворота без изменения и не появляется необыкновенных волн. Если амплитуды необыкновенных волн отличны от нуля, то обыкновенные волны, бегущие вдоль оси x, имеют разные амплитуды по обе стороны точки поворота $\xi = 0$. Такое явление есть следствие трансформации мод в окрестности этой точки. Разница амплитуд обыкновенных волн определяется амплитудами необыкновенных.

Появление такого рода обыкновенных волн, являющихся следствием присутствия необыкновенных, не противоречит закону сохранения энергии. В случае стационарной задачи и бесконечной ширины пучка (присутствие одной Фурье-гармоники) поток энергии вдоль оси x присутствует на всей оси x и в каждой точке выполнен закон $\operatorname{div}\mathbf{S} = 0$, где $\mathbf{S}$ — вектор Пойнтинга. В случае реальной задачи — широкого по сравнению с длиной волны фронта остронаправленного пучка также нет энергетических противоречий. В этом случае появление такой обыкновенной волны имеет место только в близкой окрестности (по оси z и оси x) точки поворота. По оси x эта область ограничена освещенной пучком необыкновенной волны частью плоскости поворота. Таким образом, за пределы окрестности области поворота конечного пучка такая обыкновенная волна не уходит и не вносит изменений в перераспределение энергии на границах системы.

2.4. Просачивание в случае широких запрещенных зон

В этом разделе мы рассмотрим случай широких запрещенных зон. Для таких зон затухание волн будет очень сильным, и с экспериментальной точки зрения этот случай, возможно, не является самым интересным. Однако, как будет показано, для широких запрещенных зон удается описать поведение волн в окрестностях всех особых точек. Это позволит в дальнейшем рассматривать более интересные с точки зрения эксперимента случаи, опираясь на полученные в этом разделе точные результаты.

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon_a > 0$ и пологое падение световой волны ($\mathcal{H} < 0$). Нам достаточно рассмотреть половину периода ЖК, ограниченную плоскостями $\xi = -\pi/2$ и $\xi = \pi/2$, поскольку решения уравнений (2.30) и (2.32) повторяются с периодом π. В этом интервале эти уравнения имеют по два решения. Взаимодействие мод происходит в окрестностях четырех точек вырождения (точек поворота), показанных на Рис. 2.6. Будем считать, что запрещенные зоны такие широкие, что между точками поворота, показанными на Рис. 2.6 как точки 1–4, существуют области применимости ВКБ приближения.

Сложность анализа распространения волн в окрестности точек поворота заключается в том, что здесь невозможно описывать поле как набор квазиплоских обыкновенных и необыкновенных волн с плавно меняющимися параметрами. Вблизи точек поворота поле находится как решение эталонного уравнения. Для получения поля во всей области, включая точку поворота, необходимо сшивать решения ВКБ и решение эталонного уравнения.

Также, как и в случае предельного луча, рассмотрим систему уравнений на компоненты вектора напряженности электрического поля в $(\mathbf{k}_\perp, z)$–представлении (2.56). Рассмотрим поле в окрестности точки поворота $\xi_*^{(1)}$,

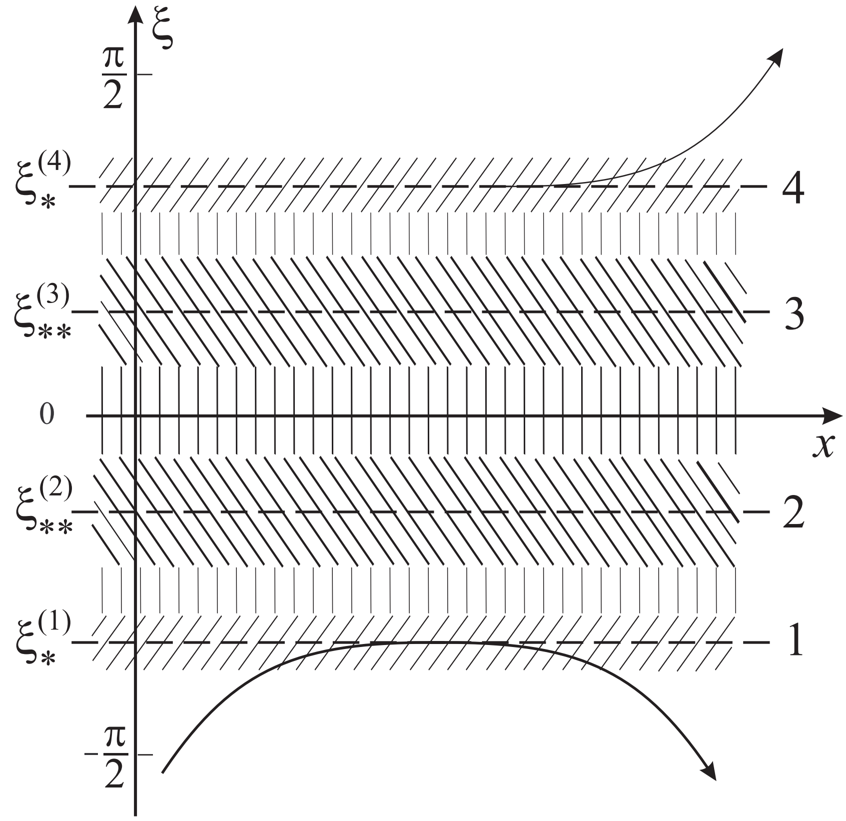


Рис. 2.6

Структура широкой запрещенной зоны для $\varepsilon_a > 0$. В областях 1 и 4 имеет место взаимодействие двух необыкновенных волн, в областях 2 и 3 попарно взаимодействуют необыкновенные и обыкновенные волны. Вертикальными штрихами показаны области применимости метода ВКБ

для которой $\sin\xi_*^{(1)} = -\sqrt{|\mathcal{H}|\varepsilon_\parallel/[(1-\mathcal{H})\varepsilon_a]}$. Если исключить компоненту E_z, то система (2.56) принимает вид

$$\begin{cases} \partial_\xi^2 E_x + \Omega^2 \mathcal{H}\varepsilon_{xx}^0 E_x + \Omega^2 \mathcal{H}\varepsilon_{xy}^0 E_y = 0 \\ \partial_\xi^2 E_y + \Omega^2 \left(\varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_\perp(\mathcal{H}-1)\right) E_y + \Omega^2 \varepsilon_{xy}^0 E_x = 0. \end{cases} \tag{2.87}$$

Решение этой системы в окрестности точки поворота $\xi_*^{(1)}$ приведено в Приложении 3. Оно представляет собой линейную комбинацию функций Ханкеля. Также в Приложении 3 получены асимптотики решения в окрестности точки поворота при $|\xi - \xi_*^{(1)}| \gg \Omega^{-2/3}$. Они имеют вид

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_< = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{v^{-1/12}}{(\xi_*^{(1)} - \xi)^{1/4} \Omega^{1/6} (\mathcal{H} + (1-\mathcal{H}) \sin^2 \xi_*^{(1)})^{1/2}} \begin{pmatrix} \mathcal{H} \cos \xi_*^{(1)} \\ \sin \xi_*^{(1)} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \left[A_<^{(1)} \exp\left(\frac{2i}{3} v^{\frac{1}{2}} \Omega (\xi_*^{(1)} - \xi)^{\frac{3}{2}} - \frac{5i\pi}{12} \right) + \right.$$
$$\left. + B_<^{(1)} \exp\left(-\frac{2i}{3} v^{\frac{1}{2}} \Omega (\xi_*^{(1)} - \xi)^{\frac{3}{2}} - \frac{5i\pi}{12} \right) \right], \quad (2.88)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_> = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{v^{-1/12}}{(\xi - \xi_*^{(1)})^{1/4} \Omega^{1/6} (\mathcal{H} + (1-\mathcal{H}) \sin^2 \xi_*^{(1)})^{1/2}} \begin{pmatrix} \mathcal{H} \cos \xi_*^{(1)} \\ \sin \xi_*^{(1)} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \left[A_>^{(1)} \exp\left(-\frac{2}{3} v^{\frac{1}{2}} \Omega (\xi - \xi_*^{(1)})^{\frac{3}{2}} - \frac{5i\pi}{12} \right) + \right.$$
$$\left. + B_>^{(1)} \exp\left(\frac{2}{3} v^{\frac{1}{2}} \Omega (\xi - \xi_*^{(1)})^{\frac{3}{2}} + \frac{5i\pi}{12} \right) \right], \quad (2.89)$$

где $v = 2\sqrt{|\mathcal{H}|\varepsilon_\parallel(\varepsilon_a + \mathcal{H}\varepsilon_\perp)}$, $A_<^{(1)}$, $B_<^{(1)}$, $A_>^{(1)}$, $B_>^{(1)}$ — константы.

Область применимости ВКБ решений (2.12) пересекается с областью применимости решения в окрестности точки поворота. Эта область пересечения определяется неравенствами

$$\Omega^{-2/3} \ll |\xi - \xi_*^{(1)}| \ll 1.$$

В этой области можно выполнить сшивание решений: асимптотики ВКБ решений при $|\xi - \xi_*^{(1)}| \ll 1$ должны совпадать с асимптотиками решения в окрестности точки поворота при $|\xi - \xi_*^{(1)}| \gg \Omega^{-2/3}$.

Разложим решения ВКБ (2.12) в ряд в окрестности $\xi_*^{(1)}$. Получим

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_{\pm<}^{(e)} = \frac{C_<^{(e)\pm}}{(v(\xi_*^{(1)} - \xi))^{1/4} (\mathcal{H} + (1-\mathcal{H}) \sin^2 \xi_*^{(1)})^{1/2}} \begin{pmatrix} \mathcal{H} \cos \xi_*^{(1)} \\ \sin \xi_*^{(1)} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \exp\left[\pm i\Omega \left(\int_{\xi_0}^{\xi_*^{(1)}} \lambda_2 d\xi' - v^{1/2} \frac{2}{3} (\xi_*^{(1)} - \xi)^{3/2} \right) \right], \quad \xi < \xi_*^{(1)}, \quad (2.90)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}^{(e)}_{\pm 1} = \frac{C_1^{(e)\pm}}{(-v(\xi-\xi_*^{(1)}))^{1/4}(\mathcal{H}+(1-\mathcal{H})\sin^2\xi_*^{(1)})^{1/2}} \begin{pmatrix} \mathcal{H}\cos\xi_*^{(1)} \\ \sin\xi_*^{(1)} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \exp\left[\pm\Omega\left(i\int_{\xi_0}^{\xi_*^{(1)}}\lambda_2 d\xi' - v^{1/2}\frac{2}{3}(\xi-\xi_*^{(1)})^{3/2}\right)\right], \quad \xi > \xi_*^{(1)}. \quad (2.91)$$

Здесь индекс “$<$” у компонент поля и констант относится к значениям левее первой точки поворота в области применимости ВКБ приближения. А индекс “1” относится к значениям правее первой точки поворота в области применимости ВКБ приближения. Приравнивая асимптотики, можно получить формулы связи для констант $C^{(e)+}$ и $C^{(e)-}$ по разные стороны от точки поворота. Заметим, что значения этих амплитуд не обязаны совпадать. Это связано с взаимной трансформацией мод, возникающей при сближении волновых векторов двух волн. Приравнивая асимптотики ВКБ решений и решения в окрестности точки поворота, получим формулы связи

$$\begin{pmatrix} C_<^{(e)-} \\ C_1^{(e)+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(2s - i\pi/2) & \exp(-i\pi/4) \\ \exp(i\pi/4) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_<^{(e)+} \\ C_1^{(e)-} \end{pmatrix}, \quad (2.92)$$

где

$$s = i\Omega\int_{\xi_0}^{\xi_*^{(1)}}\lambda_2 d\xi'.$$

Здесь $C_1^{(e)+}$ и $C_1^{(e)-}$ — константы, описывающие амплитуды ВКБ решений после прохода окрестности первой точки поворота. Это выражение описывает связь амплитуд ВКБ решений по разные стороны от точки поворота $\xi = \xi_*^{(1)}$. Как видно, взаимодействие мод проявляется в том, что амплитуда отраженной волны $C_<^{(e)-}$ начинает зависеть от двух амплитуд $C_<^{(e)+}$ и $C_1^{(e)-}$. Заметим, что здесь амплитуды $C_1^{(e)+}$ и $C_1^{(e)-}$ отвечают экспоненциально затухающему и экспоненциально растущему решениям, проникшим внутрь запрещенной зоны. Вне окрестности точки поворота эти затухающие решения описываются ВКБ приближением.

Внутри запрещенной зоны существуют еще две точки поворота вида (2.32) (точки 2 и 3 на Рис. 2.6), дающие взаимную трансформацию необыкновенной и обыкновенной мод. Окрестности этих точек поворота, в которых нарушается ВКБ приближение, задаются условием (2.33). В точках ξ_{**} происходит попарное вырождение волн типа $e-o$.

Рассмотрим взаимодействие волн, распространяющихся в положительном направлении по ξ, то есть, взаимодействие мод типа $(e)+$ и $(o)+$, в окрестности точки $\sin\xi_{**}^{(2)} = -\sqrt{|\mathcal{H}|/(1-\mathcal{H})}$. Построение решения в окрестности точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$ аналогично процедуре, изложенной в Приложении 3. Поэтому мы не будем подробно рассматривать эту точку поворота, а лишь остановимся на отличиях от рассмотренного ранее случая. Здесь удобно сделать замену

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \exp[i\Omega\sqrt{\mathcal{H}\varepsilon_\perp}(\xi-\xi_{**}^{(2)})] \begin{pmatrix} \mathcal{H}\cos\xi_{**}^{(2)} & 0 \\ 0 & \sin\xi_{**}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \tag{2.93}$$

и ввести растянутую переменную $\rho = \Omega^{1/2}(\xi-\xi_{**}^{(2)})$. Решение этого уравнения для функции $\mathbf{g} = (g_x, g_y)^T$ ищется в виде ряда по степеням $\Omega^{-1/2}$. В нулевом приближении это решение имеет вид

$$\mathbf{g}_0 = \gamma(\rho)\boldsymbol{\chi}_1, \qquad \boldsymbol{\chi}_1 = (1,1)^T\,,$$

где функция $\gamma(\rho)$ зависит от знака ρ:

$$\gamma_{>,<}(\rho) = \sqrt{|\rho|}\exp\left(\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}\rho^2\right)\times \\ \times\left[A_{>,<}^{(2)}I_{1/4}\left(\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}|\rho|^2\right) + B_{>,<}^{(2)}K_{1/4}\left(\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}|\rho|^2\right)\right], \tag{2.94}$$

где $I_\nu(u)$ и $K_\nu(u)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $A_{>,<}^{(2)}$ и $B_{>,<}^{(2)}$ — константы отвечающие решениям для положительных и отрицательных значений ρ. Соотношения между константами найдем из условия непрерывности поля и его производной в точке $\xi_{**}^{(2)}$.

Теперь проведем сшивание решений в окрестности точки поворота с ВКБ решениями. Асимптотики модифицированных функций Бесселя имеют вид

$$\begin{aligned} I_{1/4}\left(\frac{1}{4}au^2\right) &= \frac{1}{u}\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\exp\left(\frac{1}{4}au^2\right)\left[1+O(u^{-2})\right], \\ K_{1/4}\left(\frac{1}{4}au^2\right) &= \frac{1}{u}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\exp\left(-\frac{1}{4}au^2\right)\left[1+O(u^{-2})\right]. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Поведение решения (2.93), (2.94) при $|\rho| \gg 1$ в старшем порядке имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}^{(2)}_{>,<} = \frac{\varepsilon_\perp^{1/4}\exp[i\Omega\sqrt{\mathcal{H}\varepsilon_\perp}(\xi-\xi_{**}^{(2)})]}{\varepsilon_a^{1/2}\Omega^{1/4}|\xi-\xi_{**}^{(2)}|^{-1/2}}\times$$
$$\times\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}A^{(2)}_{>,<}\exp\left[\frac{1}{2}\Omega\frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}(\xi-\xi_{**}^{(2)})^2\right]+\sqrt{2\pi}B^{(2)}_{>,<}\right\}\begin{pmatrix} \mathcal{H}\cos\xi_{**}^{(2)} \\ \sin\xi_{**}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{2.96}$$

Здесь индекс (2) у поля обозначает окрестность точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$. Решение ВКБ в окрестности точки $\xi_{**}^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}^{(o)}_{+<,2} = \frac{C^{(o)+}_{<,2}}{(\mathcal{H}\varepsilon_\perp)^{1/4}[-2i\mathcal{H}^{1/2}(\xi-\xi_{**}^{(2)})]^{1/2}}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \sin\xi_{**}^{(2)} \\ -\cos\xi_{**}^{(2)} \end{pmatrix}\exp[i\Omega\sqrt{\mathcal{H}\varepsilon_\perp}(\xi-\xi_0)]. \tag{2.97}$$

Здесь индекс “$<$” у компонент поля и констант относится к значениям левее точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$ в области применимости ВКБ приближения. А индекс “2” относится к значениям правее точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$ в области применимости ВКБ приближения.

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}^{(e)}_{+1,2} = \frac{C^{(e)+}_{1,2}}{(\mathcal{H}\varepsilon_\perp)^{1/4}[-2i\mathcal{H}^{1/2}(\xi-\xi_{**}^{(2)})]^{1/2}}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \mathcal{H}\cos\xi_{**}^{(2)} \\ \sin\xi_{**}^{(2)} \end{pmatrix}\exp\left[i\Omega\int\limits_{\xi_0}^{\xi_{**}^{(2)}}\lambda_2 d\xi + i\Omega\sqrt{\mathcal{H}\varepsilon_\perp}(\xi-\xi_0)+\frac{1}{2}\Omega\frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}(\xi-\xi_{**}^{(2)})^2\right]. \tag{2.98}$$

Здесь индекс “1” у компонент поля и констант относится к значениям между точками поворота $\xi_*^{(1)}$ и $\xi_{**}^{(2)}$ в области применимости ВКБ приближения. А индекс “2” относится к значениям правее точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$ в области применимости ВКБ приближения.

Сравнение асимптотик ВКБ решения и решения в окрестности точки поворота показывает, что $I_{1/4}(u)$ описывает распространение необыкновенной волны, а $K_{1/4}(u)$ — обыкновенной.

Теперь запишем связь амплитуд ВКБ решений по обе стороны точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$

$$\begin{pmatrix} C_2^{(e)+} \\ C_2^{(o)+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/2} & -2^{1/2}\mathcal{H}^{-1/2}e^{i\Omega\left[\sqrt{\mathcal{H}\varepsilon_\perp}(\xi_{**}^{(2)}-\xi_0)-\int_{\xi_0}^{\xi_{**}^{(2)}}\lambda_2 d\xi\right]} \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(e)+} \\ C_<^{(o)+} \end{pmatrix}. \tag{2.99}$$

Вклад обыкновенной волны в необыкновенную определяется экспоненциальным множителем в (2.99). Величина этого множителя определяется разностью интервалов, на которых затухает каждая из волн. Необыкновенная волна затухает от точки $\xi_*^{(1)}$ до $\xi_{**}^{(2)}$, а обыкновенная от ξ_0 до $\xi_{**}^{(2)}$. Поэтому вклад обыкновенной волны в необыкновенную может быть значителен, только если область распространения необыкновенной волны достаточно узкая, то есть, разность $\xi_0 - \xi_*^{(1)}$ мала.

Аналогичным образом можно описать взаимодействие волн $(e)-$ и $(o)-$ в окрестности точки $\xi_{**}^{(2)}$, а также построить решения и получить формулы связи для симметричных точек поворота $\xi_{**}^{(3)}$ и $\xi_*^{(4)}$. Мы не будем здесь приводить формулы связи для этих точек. Вместо этого мы дадим качественное описание прохождения необыкновенной волны через запрещенную зону.

Заметим, что наиболее интересным с практической точки зрения является случай, когда на среду падает необыкновенная волна, проникающая в запрещенную зону, а экспоненциально затухающая обыкновенная волна отсутствует или ей можно пренебречь ($C_<^{(o)+} = 0$). В этом случае сначала происходит взаимодействие волн $(e)+$ и $(e)-$ в точке $\xi_*^{(1)}$. Появляются отраженная необыкновенная волна и экспоненциально затухающая прошедшая необыкновенная волна. Согласно формулам связи (2.92), прошедшая волна приобретет фазовый сдвиг $\pi/4$. Далее на пути прошедшей необыкновенной волны встретится точка поворота $\xi_{**}^{(2)}$. В окрестности этой точки, согласно формулам связи (2.99), необыкновенная волна приобретет фазовый сдвиг $\pi/2$. Обыкновенная волна не появится, так как $C_<^{(o)+} = 0$. Далее на пути волны возникает симметричная точка поворота $\xi_{**}^{(3)}$. В окрестности этой точки необыкновенная волна получает фазовый сдвиг $-\pi/2$. Таким образом, влияние точек поворота вида ξ_{**} на необыкновенную волну никак не проявляется, поскольку фазовые сдвиги компенсируются. В точке поворота $\xi_{**}^{(3)}$ из необыкновенной волны рождается экспоненциально затухающая обыкновенная волна, которая не представляет для нас интереса, поскольку она не может превратиться в бегущую. В заключении необыкновенная волна встречает симметричную точку поворота $\xi_*^{(4)}$, в которой взаимодействуют волны $(e)+$ и $(e)-$. В результате после прохода окрестности точки поворота $\xi_*^{(4)}$ возникает бегущая волна. При этом происходит обратное изменение фазы на $-\pi/4$. Таким образом, прохождение запрещенной зоны не дает изменения фазы необыкновенной волны. Изменение амплитуды необыкновенной волны определяется экспоненциальным затуханием внутри запрещенной зоны. Коэффициент прохождения необыкновенной волны W можно записать в виде

$$W = \exp\left(-\Omega \int_{\xi_*^{(1)}}^{\xi_*^{(4)}} |\lambda_2| d\xi\right). \tag{2.100}$$

Для того, чтобы можно было применять изложенный метод для широких запрещенных зон, необходимо, чтобы все четыре точки поворота находились друг от друга на достаточном расстоянии. При выполнении этого условия вырождение собственных значений λ_l (2.27) матрицы $\hat{A}$ в (2.9) происходит попарно. В этом случае эталонные уравнения имеют второй порядок, а не четвертый, как было бы в случае вырождения всех четырех собственных значений матрицы $\hat{A}$ сразу. Также для выполнения последовательной процедуры сшивания с решениями ВКБ вблизи каждой из точек поворота необходимо, чтобы между точками поворота существовали области применимости метода ВКБ. Эти условия накладывают ограничения на ширину запрещенной зоны, которая задается параметром $\mathcal{H} < 0$. Согласно (2.30)–(2.33), можно сделать следующие оценки

$$\xi_* \approx \sqrt{\frac{|\mathcal{H}|}{1-\mathcal{H}}\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_a}} \gtrsim \Omega^{-2/3}, \quad \xi_{**} \approx -\sqrt{\frac{|\mathcal{H}|}{1-\mathcal{H}}} \gtrsim \Omega^{-1/2}, \tag{2.101}$$

$$|\mathcal{H}| \gtrsim \frac{\varepsilon_a}{(\sqrt{\varepsilon_\parallel}-\sqrt{\varepsilon_a})^2}\Omega^{-1}, \quad |\mathcal{H}| \gtrsim \Omega^{-1}. \tag{2.102}$$

Рассмотрим поведение коэффициента затухания интенсивности $|W|^2$ для значений

$$\Omega^{-1} < |\mathcal{H}| \ll 1.$$

$$|W|^2 = \exp\left\{-2\Omega\int_{\xi_*^{(1)}}^{\xi_*^{(4)}} \left|\mathcal{H}\varepsilon_\parallel + (1-\mathcal{H})\varepsilon_a\sin^2\xi\right|^{1/2} d\xi\right\} \approx$$
$$\approx \exp\left[-2\Omega\varepsilon_a^{1/2}\int_{-\Theta}^{\Theta}(\Theta^2+\xi^2)d\xi\right], \tag{2.103}$$

где

$$\Theta = \sqrt{|\mathcal{H}|\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_a}}.$$

После вычисления интеграла получаем

$$|W|^2 = \exp\left(-\pi|\mathcal{H}|\Omega\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_a^{1/2}}\right). \tag{2.104}$$

Итак, выражение (2.104) дает поведение коэффициента затухания необыкновенной волны в случае широких запрещенных зон (2.102).

В случае $\varepsilon_a < 0$ отсутствуют точки поворота типа $e-o$ и анализ поведения мод внутри запрещенной зоны значительно проще. В данном случае задача сводится к исследованию прохождения через две точки поворота типа 1 и 4 на Рис. 2.6, между которыми имеется область применимости метода ВКБ.

2.5. Просачивание в случае узких запрещенных зон

В этом разделе мы рассмотрим подробно наиболее интересный с экспериментальной точки зрения случай прохождения волн через узкую запрещенную зону. Проблема описания узкой запрещенной зоны состоит в том, что точки поворота сближаются и между ними нет областей применимости метода ВКБ. В этом случае эталонное уравнение строится для области, охватывающей все точки поворота. Мы ограничимся случаем, когда точки поворота настолько близки, что их можно учитывать как одну эффективную точку.

При $\varepsilon_a > 0$ предельно узкая запрещенная зона существует при условии $\mathcal{H} = 0$. То есть, в случае узкой запрещенной зоны величина $\mathcal{H}$ мала и отрицательна. Будем считать, что эта величина имеет порядок Ω^{-1}

$$\mathcal{H} = -\delta\mathcal{H}\Omega^{-1}, \quad 0 < \delta\mathcal{H} \lesssim 1, \tag{2.105}$$

где параметр $\delta\mathcal{H}$ связан с шириной запрещенной зоны Δ соотношением

$$\delta\mathcal{H} \approx \Omega\frac{\varepsilon_a \Delta^2 q_0^2}{4\varepsilon_\parallel}. \tag{2.106}$$

Ширину запрещенной зоны можно, например, выразить через угол падения луча χ_0 в жидком кристалле в точке $\xi = -\pi/2$. Имеем

$$\Delta = \frac{2}{q_0} \arccos\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_a}} \operatorname{ctg}\chi_0\right]. \tag{2.107}$$

При условии (2.105) точки поворота (2.30) и (2.32) практически вырождаются в точку $\xi_* = 0$. В этом случае, как следует из (2.106), окрестность точки поворота ограничена неравенством

$$|\xi| \lesssim \Omega^{-1/2}. \tag{2.108}$$

В случае $\varepsilon_a > 0$ построить последовательное решение для узких запрещенных зон не удается. Сложность проблемы здесь обусловлена тем, что все четыре точки поворота сближаются. Формально это приводит для каждой компоненты поля к эталонному уравнению четвертого порядка, для которого не удается построить последовательное решение. Поэтому мы в этом случае ограничимся построением приближенного решения, основанного на простых физических соображениях. Будем считать, что обыкновенная и необыкновенная волны не взаимодействуют. Тогда распространение необыкновенной волны может быть описано скалярным уравнением Гельмгольца в среде с периодически меняющимся показателем преломления. В $(\mathbf{k}_\perp, z)$–представлении это уравнение с учетом соотношения (2.18) имеет вид

$$\partial_z^2 \mathcal{E} + k_z^{(e)2} \mathcal{E} = 0$$

или

$$\partial_\xi^2 \mathcal{E} + \Omega^2 \left[\mathcal{H} \varepsilon_\parallel + (1 - \mathcal{H}) \varepsilon_a \sin^2 \xi \right] \mathcal{E} = 0. \tag{2.109}$$

Здесь компоненты поля будут определяться соотношениями $E_x = \mathcal{E}\mathcal{H} \cos \xi$, $E_y = \mathcal{E} \sin \xi$.

В задаче имеется два малых параметра ξ и Ω^{-1}. Сделаем замену $\zeta = \varepsilon_a^{1/4} \Omega^{1/2} \xi$. Теперь новая переменная ζ уже не является малой. Разложим коэффициенты в уравнении (2.109) в ряд в окрестности точки $\zeta = 0$. Уравнение примет вид

$$\partial_\zeta^2 \mathcal{E} + \left[\zeta^2 - \delta\mathcal{H} \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_a^{1/2}} + \Omega^{-1} \left(\delta\mathcal{H} \zeta^2 - \frac{\zeta^4}{3\varepsilon_a^{1/2}} \right) + ... \right] \mathcal{E} = 0. \tag{2.110}$$

Решение будем искать в виде ряда по степеням Ω^{-1}

$$\mathcal{E}(\zeta) = \mathcal{E}_0(\zeta) + \Omega^{-1} \mathcal{E}_1(\zeta) + \Omega^{-2} \mathcal{E}_2(\zeta) + \ldots. \tag{2.111}$$

Ограничимся старшими членами уравнения и нулевым приближением для $\mathcal{E}$. Получим

$$\partial_\zeta^2 \mathcal{E}_0 + [\zeta^2 - \psi^2]\mathcal{E}_0 = 0, \tag{2.112}$$

где

$$\psi = \left[\delta \mathcal{H} \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_a^{1/2}}\right]^{1/2}. \tag{2.113}$$

Решением уравнения (2.112) являются функции параболического цилиндра

$$\mathcal{E}_0 = A_1 D_{-1/2 - i\psi^2/2}(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\zeta) + A_2 D_{-1/2 - i\psi^2/2}(\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\zeta), \tag{2.114}$$

где A_1 и A_2 — константы.

Для сравнения с ВКБ решениями воспользуемся асимптотиками функций параболического цилиндра при большом аргументе $|u/\nu| \gg 1$

$$D_\nu(u) = \begin{cases} e^{-u^2/4}u^\nu[1 + O(u^{-2})], \quad \arg u \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \left[e^{-u^2/4}u^\nu - \sqrt{2\pi}\Gamma^{-1}(-\nu)e^{u^2/4 \pm i\pi\nu}u^{-1-\nu}\right][1 + O(u^{-2})]. \end{cases} \tag{2.115}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Если в нижней строке выражения (2.115) $\arg u \in (\pi/2, \pi]$, то в показателе экспоненты следует брать знак "+", а если $\arg u \in (-\pi, -\pi/2)$, то следует брать знак "−". Пусть волна падает со стороны $\zeta \longrightarrow -\infty$. В области $\zeta < 0$ существуют две волны — падающая и отраженная. За барьером (после прохода запрещенной зоны), $\zeta \longrightarrow +\infty$, существует только прошедшая уходящая волна. В (2.114) член, пропорциональный A_2, дает две волны для области $\zeta > 0$, поэтому следует положить $A_2 = 0$.

Таким образом, асимптотики решения (2.114) имеют вид

$$\mathcal{E}_{0,>} = G_3 \zeta^{-1/2} \exp\left[i\frac{\psi^2}{2}\left(\frac{\zeta^2}{\psi^2} - \ln\frac{2\zeta}{|\psi|}\right)\right] \tag{2.116}$$

для $\zeta > 0$ и

$$\mathcal{E}_{0,<} = |\zeta|^{-1/2} \times$$
$$\times \left\{G_2 \exp\left[i\frac{\psi^2}{2}\left(\frac{\zeta^2}{\psi^2} - \ln\frac{2|\zeta|}{|\psi|}\right)\right] + G_1 \exp\left[-i\frac{\psi^2}{2}\left(\frac{\zeta^2}{\psi^2} - \ln\frac{2|\zeta|}{|\psi|}\right)\right]\right\} \tag{2.117}$$

для $\zeta < 0$, где

$$
\begin{aligned}
G_1 &= C\sqrt{2\pi}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\psi^2}{2}\right)\exp\left[i\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\psi^2}{4}\ln 2 + \frac{\psi^2}{2}\ln|\psi|\right) - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi\psi^2}{8}\right]\\
G_2 &= C\exp\left[-i\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\psi^2}{4}\ln 2 + \frac{\psi^2}{2}\ln|\psi|\right) - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{3\pi\psi^2}{8}\right]\\
G_3 &= C\exp\left[i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\psi^2}{4}\ln 2 - \frac{\psi^2}{2}\ln|\psi|\right) - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{\pi\psi^2}{8}\right].
\end{aligned}
$$

Здесь C — константа. Можно убедиться, что асимптотики соответствуют старшему члену ВКБ приближения.

Вычислим коэффициенты отражения $V = G_2/G_1$ и прохождения $W = G_3/G_1$ волн:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\psi^2}{2}\right)\exp\left[-i\frac{\pi}{2} + i\frac{\psi^2}{2}\ln 2 - i\psi^2\ln|\psi| + \frac{\pi\psi^2}{4}\right]\\
W &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\psi^2}{2}\right)\exp\left[+i\frac{\psi^2}{2}\ln 2 - i\psi^2\ln|\psi| - \frac{\pi\psi^2}{4}\right].
\end{aligned}
\tag{2.118}
$$

Воспользуемся формулой приведения для гамма-функции

$$
|\Gamma(1 - b + ia)\Gamma(b + ia)| = \pi|\sin\pi(b + ia)|^{-1}. \tag{2.119}
$$

Получим

$$
\begin{aligned}
V &= \left[1 + \exp(-\pi\psi^2)\right]^{-1/2}\exp\left[-i(\pi/2 + \phi)\right]\\
W &= \left[1 + \exp(\pi\psi^2)\right]^{-1/2}\exp\left[-i\phi\right],
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

где

$$
\phi = -\arg\Gamma(1/2 + i\psi^2/2) - \psi^2\ln 2/2 + \psi^2\ln|\psi|.
$$

Для энергии отраженной и прошедшей волн получаем

$$
|V|^2 = (1 + e^{-\pi\psi^2})^{-1}, \quad |W|^2 = (1 + e^{\pi\psi^2})^{-1}. \tag{2.121}
$$

Нетрудно убедиться, что энергетические коэффициенты отражения и прохождения (2.121) в сумме дают единицу.

Заметим, что полученные решения будут справедливы и для таких волн, у которых компонента волнового вектора $k_z^{(e)}$ в ноль не обращается, но в

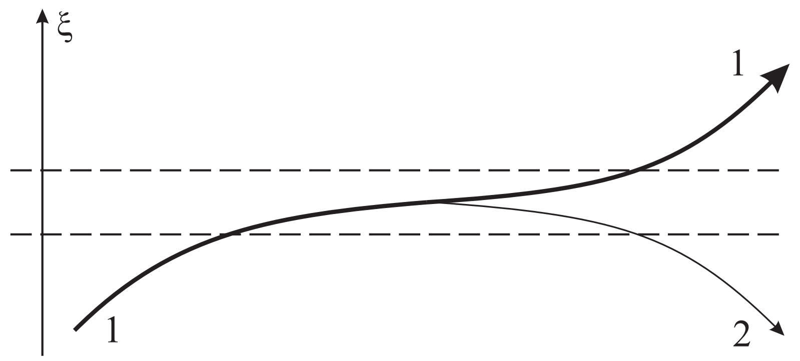


Рис. 2.7

Траектория проходящего необыкновенного луча с малым $k_z^{(e)}$ — 1; отраженный луч, обусловленный надбарьерным отражением — 2. Пунктиром показана область, где нарушается ВКБ приближение

некоторой области очень близка к нулю. Такая ситуация приводит также к нарушению применимости метода ВКБ и требует использования метода эталонного уравнения. Этот случай отличается от рассмотренного тем, что $\delta\mathcal{H} < 0$ и коэффициент ψ является чисто мнимым. Физически данный случай аналогичен эффекту надбарьерного отражения (Рис. 2.7).

В случае $\varepsilon_a < 0$ взаимодействия обыкновенных и необыкновенных волн нет. Здесь сближаются точки поворота $\xi_*^{(1)}$ и $\xi_*^{(4)}$. При этом не требуется вводить дополнительных упрощений. Система уравнений (2.87) допускает точное решение. Эталонное уравнение в окрестности точки поворота $\xi_* = \pi/2$ сохраняет вид (2.112), с точностью до замен

$$\delta\mathcal{H} \leftrightarrow \Omega\left(-\mathcal{H} - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_\perp}\right), \quad \zeta \leftrightarrow \Omega^{1/2}\left(\frac{\varepsilon_\parallel|\varepsilon_a|}{\varepsilon_\perp}\right)^{1/2}(\xi - \pi/2), \quad \psi^2 \leftrightarrow \delta\mathcal{H}\frac{\varepsilon_\perp^{3/2}}{\varepsilon_\parallel^{1/2}|\varepsilon_a|^{1/2}}.$$

На рисунке 2.8 показана угловая зависимость коэффициентов отражения и прохождения интенсивности необыкновенного луча для разных значений отношения шага спирали к длине волны. При расчетах в качестве $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ выбраны те же значения, что и в экспериментально исследуемой киральной системе. При углах падения $\chi < \chi^{(0)} \approx 63.45^\circ$ необыкновенный луч проходит через среду, запрещенной зоны нет, но имеет место надбарьерное отражение. Угол $\chi^{(0)}$ соответствует запрещенной зоне нулевой ширины. Здесь вне зависимости от значения Ω интенсивности отраженного и прошедшего лучей равны между собой. При углах $\chi > \chi^{(0)}$ имеет место просачивание через запрещенную зону. Интенсивность отраженного луча становится больше интенсивности прошедшего. Видно, что с экспериментальной точки зрения наиболее привлекательным является случай не слишком больших Ω, поскольку эффекты просачивания и надбарьерного отражения проявляются в более широком интервале углов.

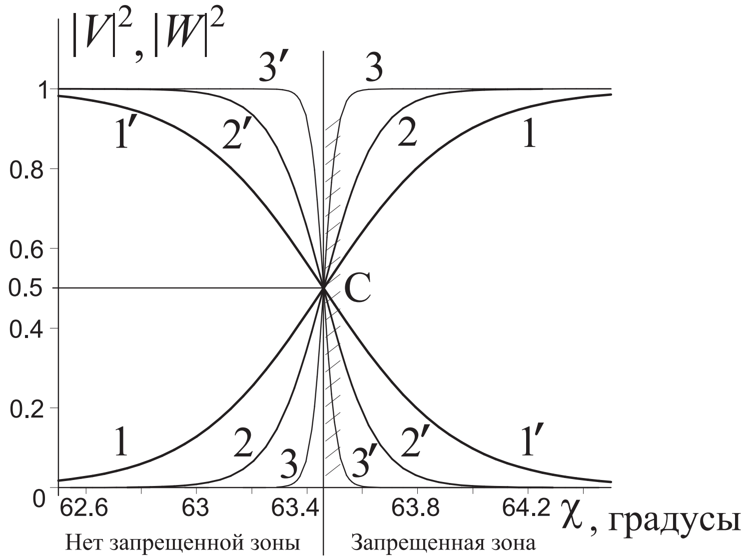


Рис. 2.8

Угловая зависимость коэффициентов отражения $|V|^2$ (линии 1, 2, 3) и прохождения $|W|^2$ (линии 1′, 2′, 3′) необыкновенных волн в киральной среде с $\varepsilon_{\parallel} = 2.863$, $\varepsilon_{\perp} = 2.291$ и различных значениях $\Omega = P/\lambda$: 1 — $\Omega = 20$, 2 — $\Omega = 50$, 3 — $\Omega = 200$, χ — угол, образованный лучом с осью z на плоскости $\xi = -\pi/2$. Угол $\chi^{(0)} = \arcsin\sqrt{\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel}} = 63.46^{\circ}$ соответствует запрещенной зоне нулевой ширины. Штриховкой показано наличие запрещенной зоны. Все кривые пересекаются в точке C, соответствующей запрещенной зоне нулевой ширины

Для экспериментальной проверки полученных результатов была собрана ячейка, такая же, как на Рис. 2.3. В отличие от эксперимента, обсуждавшегося в разделе 2.2.1, наблюдение эффекта просачивания потребовало более точных измерений интенсивности прошедшего света в узком интервале углов. Также были с высокой степенью точности измерены показатели преломления исследуемой киральной системы. Значения показателей преломления были равны $n_\perp = \sqrt{\varepsilon_\perp} = 1.514 \pm 0.002$, $n_\| = \sqrt{\varepsilon_\|} = 1.692 \pm 0.002$ ($\varepsilon_\perp = 2.291$, $\varepsilon_\| = 2.863$), то есть, система относится к случаю $\varepsilon_a > 0$. Показатель преломления стеклянных призм был равен $n_p = 1.644$. Это значение показателя преломления лежит в промежутке между $n_\|$ и $n_\perp$. Толщина ячейки составляла $d = 100$ мкм. Измерялась интенсивность света, проходящего сквозь ячейку, в зависимости от угла падения на жидкий кристалл при двух поляризациях падающего света, соответствующих при входе в жидкий кристалл обыкновенному и необыкновенному лучу. При этом точность отсчета углов была 5 секунд. Входящий и прошедший лучи расположены в плоскости Рис. 2.3.

Угол падения луча на жидкий кристалл α связан с углом падения на входную грань призмы β_{out} и углом преломления β_{in} соотношениями (2.39). Закон Снеллиуса для преломления обыкновенного луча на границе стекло–ЖК имеет вид (2.40). Поскольку $\sqrt{\varepsilon_\perp} < n_p$, при угле $\alpha_* = \arcsin(\sqrt{\varepsilon_\perp}/n_p) = 67.03°$ должно иметь место полное отражение.

Из закона Снеллиуса для необыкновенного луча (2.41), следует, что максимальное значение угла преломления в жидком кристалле χ равно $\chi^{max} = \arcsin(n_p/\sqrt{\varepsilon_\|}) = 76.32°$.

Результат измерения интенсивности прошедшего обыкновенного луча показан на Рис. 2.9. Видно, что интенсивность при угле падения α_* обращается в ноль. Мы рассчитали интенсивность при $\alpha < \alpha_*$ по формулам Френеля (2.43) и (2.44). Расхождение экспериментально наблюдаемого поведения с теоретическим связано с тем, что при приближении к углу полного отражения необходим учет многократных отражений на границе стекло–ЖК, что должно уменьшить коэффициент прохождения этого луча.

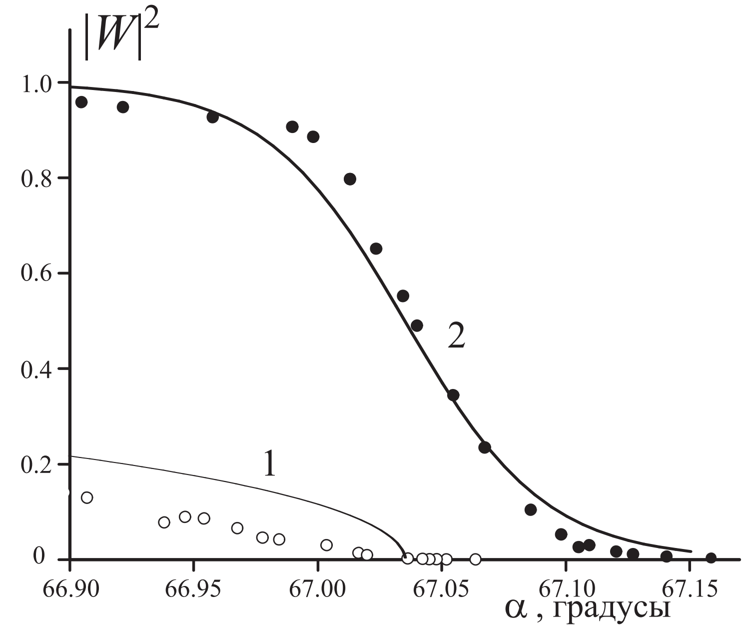


Рис. 2.9

Измеренные коэффициенты прохождения обыкновенного (белые кружки) и необыкновенного (черные кружки) лучей. Сплошные линии соответствуют расчетам, 1: формула Френеля для обыкновенного луча (2.43), 2: выражение (2.121) для необыкновенного луча

На этом же рисунке 2.9 показано поведение необыкновенного луча. Видно, что интенсивность прошедшего необыкновенного луча в узком интервале углов падает до нулевого значения. Обратим внимание, что относительно угла $\alpha = \alpha_*$ кривая изменения интенсивности симметрична. В точке $\alpha = \alpha_*$, где интенсивность прошедшего обыкновенного луча обращается в ноль, интенсивность необыкновенного луча уменьшается в два раза. Такое падение интенсивности нетрудно понять, если учесть, что условие обращения в ноль ширины запрещенной зоны имеет вид

$$\mathcal{H} = 0 = 1 - \frac{k_\perp^2}{k_0^2 \varepsilon_\perp}$$

Это означает, что $k_\perp^2 = k_0^2 \varepsilon_\perp$. Такое соотношение для необыкновенного луча означает, что на границе с жидким кристаллом волновое число для обыкновенного луча в точности совпадает с $k_\perp$ внутри жидкого кристалла. Это совпадает с условием полного внутреннего отражения для этого луча. С другой стороны, для случая предельного необыкновенного луча интенсивности прошедшего и возвращенного луча одинаковы, то есть, интенсивность прошедшего луча падает вдвое, как и наблюдается экспериментально.

Угловая зависимость прошедшего (е) луча в окрестности $\alpha = \alpha_*$ рассчитывалась в приближении узкой запрещенной зоны по формулам (2.121). Видно, что теоретические и экспериментальные кривые хорошо совпадают. Отсюда следует, что, действительно, при $\alpha \leq \alpha_*$ интенсивность прошедшего луча падает за счет эффекта надбарьерного отражения, а при $\alpha \geq \alpha_*$ наблюдается эффект просачивания через запрещенную зону.

В этой главе мы рассмотрели проблему распространения света в киральных одноосных средах с большим по сравнению с длиной волны шагом спирали. Как в любой анизотропной среде, здесь существует два типа волн: обыкновенные и необыкновенные. Но поведение этих волн в киральной среде существенно различно. Обыкновенная волна имеет прямолинейную траекторию, а вектор поляризации подстраивается под локальные характеристики среды. Для необыкновенной волны траектория луча неплоская и имеет достаточно сложную форму. При определенных соотношениях между углом падения и оптическими параметрами среды этот луч претерпевает внутреннее отражение и распространяется в обратном направлении по отношению к оси спирали. При этом возникает запрещенная зона — область, в которой амплитуда волны экспоненциально затухает. Для периодических сред ширина запрещенной зоны ограничена.

Мы проанализировали запрещенные зоны различной ширины. В случае широкой запрещенной зоны имеет место набор из четырех особых точек, вблизи которых лучи попарно взаимодействуют, а между этими точками есть области, где можно применять метод ВКБ. Прохождение волн через широкую запрещенную зону имеет достаточно сложный характер. Внутри всей запрещенной зоны волны экспоненциально затухают. В областях, где применим метод ВКБ, мы имеем волны двух типов, а в окрестностях точек поворота такое разделение недопустимо и требуется рассматривать единое поле. Удобство рассмотрения широкой запрещенной зоны заключается в том, что здесь удается провести последовательное описание процесса подбарьерного прохождения волны. Здесь удается описать поле как внутри, так и вне запрещенной зоны с учетом взаимодействия между волнами разных типов. Однако широкая запрещенная зона приводит к сильному затуханию волн, которое трудно наблюдать экспериментально. Поэтому мы отдельно проанализировали случаи узкой и предельно узкой запрещенной зоны.

В случае узкой запрещенной зоны точки поворота сближаются, и у нас возникает единая окрестность этих точек поворота. Для случая $\varepsilon_a < 0$ удается описать эту окрестность без введения дополнительных упрощающих предположений, поскольку для такой системы нет взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн. В случае $\varepsilon_a > 0$ мы пренебрегли взаимодействием обыкновенных и необыкновенных волн. При этом для $\varepsilon_a < 0$ и $\varepsilon_a > 0$ описание поля свелось к решению скалярного уравнения Гельмгольца для среды с периодически меняющимся показателем преломления. Интересно отметить, что возникающая задача аналогична задаче прохождения частиц через барьер параболической формы. В рамках этого приближения рассчитывается как подбарьерное просачивание лучей, так и надбарьерное отражение.

Эффект просачивания был исследован экспериментально для нематического жидкого кристалла с киральной добавкой. Зависимость интенсивности прошедшего необыкновенного луча от угла падения оказалась в хорошем согласии с данными теоретических расчетов.

В заключении обсудим вопрос о соответствии развитого подхода к стандартному подходу для киральных систем, основанному на теореме Флоке.

В использованном нами подходе мы применили метод ВКБ, основанный на плавном изменении свойств среды. При этом величина оптической анизотропии ε_a считалась произвольной. Профиль изменения свойств среды при этом был не принципиальным, а важна была только его плавность. Для безграничной среды ВКБ подход приближенно дает четыре собственные волны, которые представляют собой квазиплоские волны — две обыкновенные и две необыкновенные. Однако в случае запрещенных зон найденные волны начинают взаимодействовать, что создает технические сложности для описания поля.

С общей точки зрения более удачный выбор собственных волн с явным учетом пространственной периодичности среды существенно упростил бы описание и, в частности, не требовалось бы вводить эталонное уравнение. Построение такого решения основано на теореме Флоке [160] и представляет поле в виде бесконечного ряда

$$E(\mathbf{r}_\perp, z) \sim \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + i\mu z) \sum_n C_n \exp(ik_b n z), \tag{2.122}$$

где $k_b \mathbf{e}_z = q_0 \mathbf{e}_z$ — вектор обратной решетки. Однако такой подход эффективен, если шаг спирали сравним с длиной световой волны или мала оптическая анизотропия, поскольку это дает возможность ограничиться небольшим числом членов ряда. В случае большого шага спирали, то есть, среды с очень плавно меняющимися свойствами, для описания поля требуется учитывать большое число членов ряда, по крайней мере порядка P/λ. Это означает, что такой подход мог бы быть реализован только численно. С другой стороны, вдали от особых точек собственные волны с хорошей точностью представляют собой квазиплоские волны. Это означает, что даже очень малая неточность в определении коэффициентов C_n может вызвать значительный сбой в фазе волны, что приведет к неопределенности в описании поля.

Фактически, примененный нами подход эквивалентен квазиклассическому приближению, а использование ряда (2.122) — разложению по волнам Блоха. Первый подход эффективен, когда важна только плавность изменения параметров среды, а для эффективного применения второго подхода определяющим фактором является периодичность системы.

Глава 3.

Поле точечного источника в средах с одномерной крупномасштабной периодичностью

В этой главе изучается функция Грина (поле точечного источника) в средах, обладающих одномерной крупномасштабной периодичностью. Сначала рассматривается модельная задача для скалярного поля. Затем приводятся сведения о функции Грина электромагнитного поля в нематических жидких кристаллах. В заключении строится функция Грина электромагнитного поля для геликоидальной среды. Построение выполняется при помощи собственных волн, изученных в предыдущей главе.

3.1. Функция Грина скалярного поля в одномерно периодической среде

Рассмотрим распространение волн в неоднородной изотропной среде. В этом разделе мы не будем интересоваться поляризационными эффектами. Тогда поле волны в такой среде $w(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет скалярному волновому уравнению

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w(\mathbf{r},t) = 0, \tag{3.1}$$

где $c\,(\mathbf{r})$ — скорость волны. Для гармонического по времени поля $w(\mathbf{r},t) = w(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, где $w(\mathbf{r})$ — амплитуда волны, ω — частота, получаем уравнение Гельмгольца

$$\left[\triangle + k^2(\mathbf{r})\right] w(\mathbf{r}) = 0, \tag{3.2}$$

где $k(\mathbf{r}) = \omega / c(\mathbf{r})$ — волновое число.

Пусть среда периодична вдоль оси z с периодом P. Тогда $k^2(\mathbf{r})$ можно записать в виде

$$k^2(\mathbf{r}) = k_0^2\left[1 + f(z)\right], \tag{3.3}$$

где функция $f(z)$ является периодической $f(z+P) = f(z)$.

Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\left[\triangle + k_0^2\left(1 + f(z)\right)\right] T(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}; z, z_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tag{3.4}$$

и условию излучения. В связи с тем, что среда периодична вдоль оси z, функция Грина начинает зависеть не только от разности пространственных координат, но и от их абсолютных значений.

Если воспользоваться однородностью среды в поперечной плоскости xy, то можно провести двумерное преобразование Фурье (1.19) уравнения (3.4). Получим

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_\perp^2 + k_0^2\left(1 + f(z)\right)\right] T(\mathbf{k}_\perp; z, z_1) = \delta(z - z_1). \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5), дополненное условием излучения, является уравнением на функцию Грина задачи Штурма–Лиувилля. Используя известные теоремы, для функции Грина можно записать

$$T(\mathbf{k}_\perp; z, z_1) = \frac{1}{W}\left\{\begin{array}{lll} w_1(z)w_2(z_1) & \text{при} & z \geq z_1 \\ w_1(z_1)w_2(z) & \text{при} & z < z_1 \end{array}\right., \tag{3.6}$$

где $w_1(z)$, $w_2(z)$ — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_\perp^2 + k_0^2\,(1 + f(z))\right] w(z) = 0, \tag{3.7}$$

$W = w_1(z)w_2'(z) - w_1'(z)w_2(z)$ — вронскиан функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$. Вронскиан W не зависит от z, так как уравнение (3.5) не содержит первой производной по z.

Для того, чтобы функция Грина удовлетворяла условию излучения, в качестве $w_1(z)$ следует взять решение, соответствующее распространению волны в направлении $+\infty$, а в качестве $w_2(z)$ — в направлении $-\infty$. Уравнение (3.7) является уравнением Хилла и, согласно теореме Флоке, интересующие нас решения $w_1(z)$ и $w_2(z)$ могут быть представлены в виде [139]

$$w_1(z) = \phi_1(z)e^{i\mu_0 z}, \qquad w_2(z) = \phi_2(z)e^{-i\mu_0 z}, \tag{3.8}$$

где $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ — периодические функции z с периодом P, а μ_0 — постоянная. Функции $\phi_j(z)$, $(j = 1, 2)$ и постоянная μ_0 определяются параметром $k_\perp$. При некоторых $k_\perp$ значение μ_0 становится комплексным, волна $w_1(z)$ затухает, а $w_2(z)$ — возрастает. Области таких значений $k_\perp$ соответствуют так называемым запрещенным зонам [160]. При переходе к координатному представлению эти области вносят экспоненциально малый вклад в асимптотику функции Грина при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \to \infty$. Исключение составляет случай, когда $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ лежат в пределах одного периода по z.

Мы рассмотрим неоднородную среду с $f(z) = \eta\cos(q_0 z)$, где $q_0 = 2\pi/P$, $\eta < 1$ — коэффициент, характеризующий степень неоднородности среды. В этом случае уравнение (3.7) сводится к уравнению Матье

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_\perp^2 + k_0^2 + k_0^2\,\eta\cos(q_0 z)\right] w(z) = 0. \tag{3.9}$$

Формальное решение уравнения Хилла известно [160], но численная реализация чрезвычайно громоздка. Даже в случае уравнения Матье для получения аналитического выражения вводятся различные малые параметры. В частности в работе [68] рассмотрен случай слабонеоднородной среды с $\eta \ll 1$. В силу четности $f(z)$ в качестве $w_2(z)$ можно взять $w_1(-z)$. При этом (3.6) переходит в выражение

$$T(\mathbf{k}_\perp; z, z_1) = \frac{1}{W} e^{i\mu_0|z-z_1|} \begin{cases} \phi_1(z)\phi_1(-z_1) & \text{при} \quad z \geq z_1 \\ \phi_1(z_1)\phi_1(-z) & \text{при} \quad z < z_1 \end{cases}. \tag{3.10}$$

В случае $k_0 > q_0$ в таких системах возникают запрещенные зоны. Расчет полей вблизи запрещенных зон требует модификации теории возмущений. Если же отношение k_0/q_0 велико, число запрещенных зон неограниченно возрастает, а их ширина стремится к нулю. В этом случае применение теории Флоке для описания полей становится неэффективным. С другой стороны, в системах с крупномасштабной периодичностью параметры среды слабо меняются на расстояниях порядка длины волны и представляется более целесообразным использовать для описания поля метод ВКБ [19].

3.1.1. Функция Грина в среде с крупномасштабной периодичностью

Рассмотрим случай, когда η не является малым параметром, а период структуры P много больше длины волны $\lambda = 2\pi/k_0$, то есть $\Omega = k_0/q_0 \gg 1$.

Введем безразмерную переменную $\xi = q_0 z$, тогда уравнение (3.9) примет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{k_\perp^2}{q_0^2} + \Omega^2(1 + \eta \cos \xi)\right] w(\xi) = 0. \tag{3.11}$$

Применяя к (3.11) метод ВКБ, в первом приближении имеем

$$w_{1,2}(z) = \Gamma^{-1/2}(k_\perp, q_0 z) \exp\left(\pm i\Omega \int_{q_0 z_0}^{q_0 z} d\xi' \Gamma(k_\perp, \xi')\right), \tag{3.12}$$

где z_0 — произвольная координата, определяющая постоянные амплитуды функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$, а $\Gamma(k_\perp, \xi)$ определяется выражением

$$\Gamma(k_\perp, \xi) = \sqrt{1 - \frac{k_\perp^2}{k_0^2} + \eta \cos \xi}. \tag{3.13}$$

Легко убедиться, что вронскиан функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$ не зависит от z. Проще всего вычислить его при $z = 0$. Получим $W = -2ik_0$. Тогда функция Грина (3.6) примет вид

$$T(\mathbf{k}_\perp; z, z_1) = \frac{i}{2k_0 \Gamma^{1/2}(k_\perp, q_0 z)\Gamma^{1/2}(k_\perp, q_0 z_1)} \exp\left(i\Omega \left| \int_{q_0 z_1}^{q_0 z} d\xi \Gamma(k_\perp, \xi) \right| \right). \tag{3.14}$$

Переходя к координатному представлению, получаем

$$T(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}; z, z_1) = \int d\mathbf{k}_\perp \frac{i \exp\left[i \left(\Omega \left| \int_{q_0 z_1}^{q_0 z} d\xi \Gamma(k_\perp, \xi) \right| + \mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}) \right) \right]}{8\pi^2 k_0 \Gamma^{1/2}(k_\perp, q_0 z)\Gamma^{1/2}(k_\perp, q_0 z_1)}. \tag{3.15}$$

Формула (3.15) описывает функцию Грина на любых расстояниях. Будем интересоваться асимптотикой функции Грина в дальней зоне. Для этого мы рассчитаем интеграл в выражении (3.15) для $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \gg \lambda$ при помощи метода стационарной фазы [161]. Мы найдем стационарную точку $\mathbf{k}_{\perp st}$ и разложим в ее окрестности показатель экспоненты в ряд Тейлора по $\mathbf{p} = (\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_{\perp st})$ с точностью до членов второго порядка. Во всех внеэкспоненциальных множителях можно положить $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_{\perp st}$ и вынести их за знак интегрирования. Остающийся интеграл гауссова типа легко вычисляется

$$\int \exp\left(\frac{i}{2} \mathbf{p} \hat{h} \mathbf{p} \right) d\mathbf{p} = \frac{2\pi i \sigma}{\sqrt{|\det \hat{h}|}}, \tag{3.16}$$

где $\hat{h}$ — вещественная симметричная матрица вторых производных, вычисленных при $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_{\perp st}$ (Матрица Гессе). Множитель σ в (3.16) зависит от знаков вещественных собственных чисел μ_1 и μ_2 матрицы $\hat{h}$: если $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, то $\sigma = 1$; если $\mu_1 \mu_2 < 0$, то $\sigma = -i$; если $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$, то $\sigma = -1$ [161].

Стационарная точка $\mathbf{k}_{\perp st}$ определяется из условия

$$\nabla_{\mathbf{k}_\perp}\left(\Omega\left|\int_{q_0z_1}^{q_0z} d\xi\Gamma(k_\perp,\xi)\right| + \mathbf{k}_\perp\cdot(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_{1\perp})\right)=0. \tag{3.17}$$

Уравнение (3.17) можно записать в виде

$$\frac{k_0^2|\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_{1\perp}|}{k_{\perp st}}=\Omega\left|\int_{q_0z_1}^{q_0z}\frac{d\xi}{\Gamma(k_{\perp st},\xi)}\right|,\quad \mathbf{k}_{\perp st}=k_{\perp st}\frac{\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_{1\perp}}{|\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_{1\perp}|}\,. \tag{3.18}$$

Воспользуемся тем, что первообразная периодической функции может быть представлена в виде суммы линейной функции и периодической с тем же периодом, что и исходная функция [139]. Используем далее нормальные эллиптические интегралы Лежандра [157]

$$\begin{gathered}K(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi'}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi'}}\,,\quad E(a)=\int_0^{\pi/2}d\psi'\sqrt{1-a^2\sin^2\psi'}\,,\\ F(\psi_0,a)=\int_0^{\psi_0}\frac{d\psi'}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi'}}\,.\end{gathered} \tag{3.19}$$

Тогда уравнение (3.18) можно записать в виде

$$\frac{|\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_{1\perp}|}{k_{\perp st}}=\frac{2|z-z_1|}{\pi\sqrt{k_0^2-k_{\perp st}^2+\eta k_0^2}}K\left(\sqrt{\frac{2\eta k_0^2}{k_0^2-k_{\perp st}^2+\eta k_0^2}}\right)+B_0(z,z_1), \tag{3.20}$$

где $B_0(z,z_1)$ — периодическая функция

$$\begin{gathered}B_0(z,z_1)=\frac{2}{q_0k_0\Gamma(k_{\perp st},0)}\left|F\left(q_0z,\frac{2\eta}{\Gamma(k_{\perp st},0)}\right)-F\left(q_0z_1,\frac{2\eta}{\Gamma(k_{\perp st},0)}\right)\right|-\\ -\frac{2|z-z_1|}{\pi k_0\Gamma(k_{\perp st},0)}K\left(\frac{2\eta}{\Gamma(k_{\perp st},0)}\right)\,.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Как видно из (3.20) и (3.21), стационарная точка $k_{\perp st}$ является функцией не только вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, но и абсолютных значений координат z и z_1, входящих в функцию $B_0(z,z_1)$ по отдельности.

Матрица Гессе в уравнении (3.16) имеет вид

$$\begin{gathered}h_{\gamma\beta}(k_\perp)=\nabla_{k_{\perp\beta}}\nabla_{k_{\perp\gamma}}\left(\Omega\left|\int_{q_0z_1}^{q_0z}d\xi\Gamma(k_\perp,\xi)\right|+\mathbf{k}_\perp\cdot(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_{1\perp})\right)=\\ =-\frac{\Omega}{k_0^2}\left|\int_{q_0z_1}^{q_0z}\frac{d\xi}{\Gamma(k_\perp,\xi)}\left(\delta_{\gamma\beta}+\frac{k_{\perp\gamma}k_{\perp\beta}}{k_0^2\Gamma^2(k_\perp,\xi)}\right)\right|\,.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Откуда имеем

$$\det \hat{h} = \frac{\Omega^2}{k_0^4} \left| \int_{q_0 z_1}^{q_0 z} \frac{d\xi}{\Gamma(k_{\perp st}, \xi)} \right| \left| \int_{q_0 z_1}^{q_0 z} \frac{d\xi}{\Gamma(k_{\perp st}, \xi)} \left(1 + \frac{k_{\perp st}^2}{k_0^2 \Gamma^2(k_{\perp st}, \xi)} \right) \right| . \tag{3.23}$$

Как следует из (3.22), в данном случае $\mu_1 < 0$ и $\mu_2 < 0$, то есть, в формуле (3.16) множитель $\sigma = -1$. Используя (3.15), (3.16) и (3.23), находим выражение для функции Грина в дальней зоне

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}; z, z_1) = \frac{\exp\left(i\Omega \left| \int_{q_0 z_1}^{q_0 z} d\xi \Gamma(k_{\perp st}, \xi) \right| + i k_{\perp st} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}| \right)}{4\pi k_0 \Gamma^{1/2}(k_{\perp st}, q_0 z) \Gamma^{1/2}(k_{\perp st}, q_0 z_1)} \times \\ \times \left[\frac{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}|}{k_{\perp st}} \left(\frac{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}|}{k_{\perp st}} + \left| \int_{z_1}^{z} \frac{k_{\perp st}^2 dz'}{k_0^3 \Gamma^3(k_{\perp st}, q_0 z')} \right| \right) \right]^{-1/2} . \end{aligned} \tag{3.24}$$

При выводе этой формулы мы упростили определитель (3.23) с помощью уравнения (3.18).

3.1.2. Структура поля на больших расстояниях

Мы рассмотрим функцию Грина для расстояний $|z - z_1|$, значительно превышающих период структуры P. Этот случай наиболее интересен для приложений. При $|z - z_1| \gg P$ функцией $B_0(z, z_1)$ в (3.20) можно пренебречь, и показатель экспоненты функции Грина (3.24) принимает вид

$$i \left[\frac{2}{\pi} |z - z_1| \sqrt{k_0^2 - k_{\perp st}^2 + \eta k_0^2}\, E\left(\sqrt{\frac{2\eta k_0^2}{k_0^2 - k_{\perp st}^2 + \eta k_0^2}} \right) + k_{\perp st} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}| \right] . \tag{3.25}$$

Из (3.20) видно, что в данном случае $k_{\perp st}$ зависит лишь от отношения $|z - z_1|/|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}|$. Если выражение (3.25) записать в виде

$$i \left[k_{z\, st}(z - z_1) + \mathbf{k}_{\perp st} \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}) \right] , \tag{3.26}$$

где

$$k_{z\, st} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(z - z_1) \sqrt{k_0^2 - k_{\perp st}^2 + \eta k_0^2}\, E\left(\sqrt{\frac{2\eta k_0^2}{k_0^2 - k_{\perp st}^2 + \eta k_0^2}} \right) , \tag{3.27}$$

то видно, что трехмерный вектор $\mathbf{k}_{st} = (\mathbf{k}_{\perp st}, k_{z\,st})$ можно рассматривать как волновой вектор. Этот вектор не зависит от абсолютных значений координат z и z_1. Поэтому среда по своим свойствам становится похожей на пространственно однородную. Выражение для функции Грина (3.24) в случае $|z - z_1| \gg P$ примет вид

$$T(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}; z, z_1) = \frac{\exp\left[i\mathbf{k}_{st} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\right]}{4\pi R(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}; z, z_1)}\,, \tag{3.28}$$

где

$$R(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}; z, z_1) = k_0 \Gamma^{1/2}(k_{\perp st}, q_0 z)\Gamma^{1/2}(k_{\perp st}, q_0 z_1)\times$$
$$\times\left[\frac{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}|}{k_{\perp st}}\left(\frac{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}|}{k_{\perp st}} + \frac{2k_{\perp st}^2 |z - z_1|}{\pi k_0^3}\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi'}{\Gamma^3(k_{\perp st}, \xi')}\right)\right]^{1/2}.$$

Здесь в интеграле, стоящем в амплитудном множителе выражения (3.24), была оставлена лишь линейная по $|z - z_1|$ часть.

При малых значениях параметра η, то есть, в случае слабонеоднородной среды, уравнение (3.18) для $k_{\perp st}$ и формула для функции Грина (3.24) допускают дополнительные упрощения. Уравнение (3.18) в низшем по η порядке легко решается и дает

$$k_{\perp st} = \frac{k_0 |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\left(1 + \frac{\eta|\sin q_0 z - \sin q_0 z_1|}{4q_0|z - z_1|}\right), \tag{3.29}$$

а показатель экспоненты функции Грина принимает вид

$$ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|\left(1 + \frac{\eta|\sin q_0 z - \sin q_0 z_1|}{4q_0|z - z_1|}\right). \tag{3.30}$$

Эти формулы справедливы при выполнении условия $\eta|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2 \ll 4(z - z_1)^2$. Заметим, что при $\eta \to 0$ амплитудный множитель $R(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}; z, z_1) \to |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ и функция Грина (3.28) переходит в функцию Грина однородной среды. Из формулы (3.30) видно, что поверхности постоянной фазы функции Грина имеют форму сферических поверхностей с небольшими периодическими искажениями.

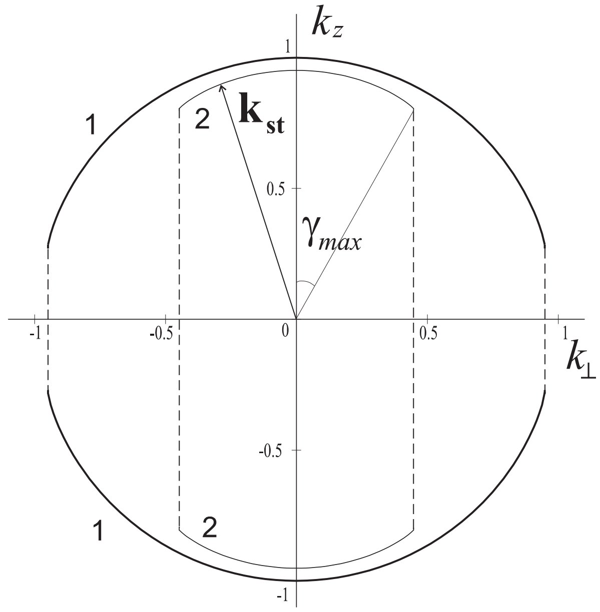


Рис. 3.1

Сечения поверхности волновых векторов плоскостью, содержащей ось z, для разных значений глубины модуляции η: 1. — $\eta = 0.1$, 2. — $\eta = 0.8$ для $k_0/q_0 = 20$. Пунктиром показаны запрещенные зоны, γ_{max} — максимально возможный угол между волновым вектором и осью z. Все волновые числа выражены в единицах k_0

Влияние пространственной периодичности системы на больших расстояниях эффективно проявляется в том, что форма поверхности волновых векторов, описываемой формулой (3.27), отлична от сферической. Поскольку среда обладает аксиальной симметрией, то эта поверхность волновых векторов похожа на поверхность волновых векторов одноосной анизотропной среды, имеющую форму эллипсоида [154]. Однако в нашем случае она значительно сложнее.

На рисунке 3.1 приведено сечение поверхности волновых векторов плоскостью yz, рассчитанное по формуле (3.27) для двух значений параметра η, отвечающего за глубину модуляции: 1. — $\eta = 0.1$, 2. — $\eta = 0.8$. Видно, что поверхность имеет разрыв, величина которого растет с ростом η. Этот разрыв означает существование запрещенных зон. То есть, имеется ограничение на возможные направления волновых векторов $\mathbf{k}_{st}$. Формально появление запрещенных зон связано с тем, что функция $E(a)$ (а также $K(a)$ и $F(\psi_0, a)$) в (3.19) принимает вещественные значения только при $|a| < 1$. Такое ограничение на аргумент функции $E(a)$ приводит в (3.27) к неравенствам $k_{\perp st}^2 \leq k_{\perp max}^2 = k_0^2(1-\eta)$ и $k_{z\,st} \geq k_{\perp min} = (2/\pi)k_0\sqrt{2\eta}$. При значениях $k_{\perp st} > k_{\perp max}$ функция $E(a)$, а следовательно и $k_{z\,st}$, становятся комплексными, что соответствует затухающим волнам с длиной затухания порядка длины волны. Пусть γ — угол между $\mathbf{k}_{st}$ и осью z:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{k_{\perp st}}{k_{z\,st}}. \tag{3.31}$$

Тогда ограничение на возможные направления $\mathbf{k}_{st}$ можно записать в виде $|\gamma| \leq \gamma_{max}$, где

$$\gamma_{max} = \operatorname{arctg}\frac{k_{\perp max}}{k_{\perp min}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1-\eta}{2\eta}}\right). \tag{3.32}$$

Аналогия с одноосной однородной средой проявляется также в том, что направления волнового вектора и лучевого вектора, определяющего поток энергии, в нашем случае не совпадают. Угол δ между этими векторами не трудно найти, если учесть, что лучевой вектор ортогонален к поверхности волновых векторов в данной точке. Откуда имеем

$$\cos\delta = \frac{k_{\perp st}\sin\theta_r + k_{z\,st}\cos\theta_r}{\sqrt{k_{\perp st}^2 + k_{z\,st}^2}}, \tag{3.33}$$

где θ_r — угол между осью z и вектором $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$.

На рисунке 3.2 показано сечение поверхности лучевых векторов, определяющей форму поверхности постоянной фазы для точечного источника. Видно, что наличие запрещенных зон на поверхности волновых векторов проявляется здесь в виде излома поверхности при $z = z_1$. Геометрическая причина такой особенности поверхности постоянной фазы связана с тем, что нормаль к ней в каждой точке определяет направление волнового вектора. Существование запрещенных зон ограничивает допустимые углы между нормалью и

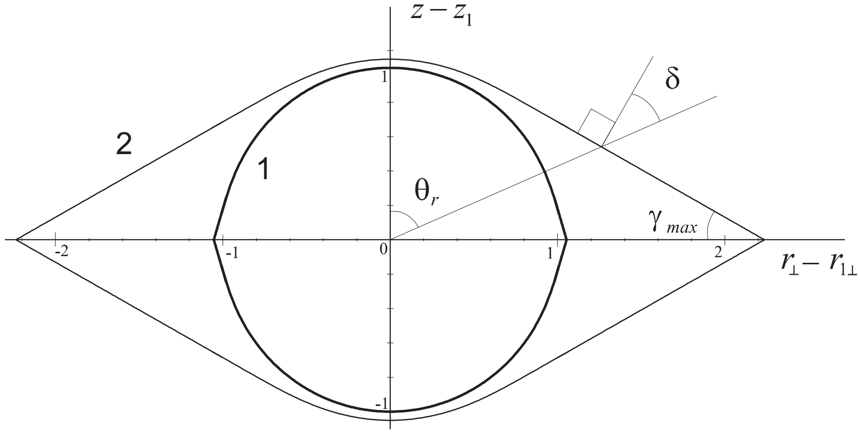


Рис. 3.2

Поверхности постоянной фазы точечного источника, полученные в результате численных расчетов по формулам (3.20) и (3.25) при тех же значениях параметров, что и на рисунке 3.1. Видно, что на больших расстояниях групповая скорость волны вдоль направления периодической структуры заметно меньше, чем поперек

осью z углом γ_{max}. В результате мы получаем картину, приведенную на рисунке 3.2.

3.1.3. Возникновение запрещенной зоны в одномерно периодической среде с большим периодом

Поясним физическую причину появления запрещенных зон в нашей задаче. Введем показатель преломления

$$n(z) = \sqrt{1 + \eta \cos(q_0 z)}\,. \tag{3.34}$$

Он меняется в пределах $\sqrt{1-\eta} \leq n \leq \sqrt{1+\eta}$. В приближении геометрической оптики будем говорить о траектории отдельного луча, описываемого кривой $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_\perp(z)$. Траектория луча в слоистой изотропной среде лежит в плоскости падения. Для удобства будем считать, что в плоскости падения координата $y = 0$, то есть, луч лежит в плоскости xz. Для любой точки $(\mathbf{r}_\perp, z)$

данного луча выполняется соотношение

$$n(z)\sin\chi(z) = C, \tag{3.35}$$

где $C \geq 0$ — постоянная вдоль всего луча величина, $\chi(z)$ — угол падения, отсчитываемый от оси z, $0 \leq \chi \leq \pi/2$. Равенство (3.35) представляет собой закон Снеллиуса. Угол $\chi(z)$ связан с траекторией луча соотношением

$$\mathrm{tg}^2\,\chi(z) = [x'(z)]^2. \tag{3.36}$$

Из уравнений (3.35) и (3.36) имеем

$$x'(z) = \pm\frac{C}{\sqrt{n^2(z) - C^2}}\,. \tag{3.37}$$

Здесь знак плюс соответствует участкам луча, для которых $x(z)$ возрастает с ростом z, а знак минус — участкам, для которых $x(z)$ убывает. Для определенности выберем далее участок луча со знаком плюс в (3.37). Так как в нашем случае $n(z)$ — периодическая функция z, то из формулы (3.37) следует, что производная $x'(z)$ тоже периодическая функция z. Аналогично переходу от (3.18) к (3.20) можно записать

$$x(z) = g(z - z_0) + M_0(z)\,, \tag{3.38}$$

где $M_0(z)$ — периодическая функция с нулевым средним значением по периоду, z_0 — произвольная постоянная, а величина g определяет средний тангенс угла наклона кривой $x(z)$:

$$g = \frac{q_0 C}{\pi}\int_0^{\pi/q_0}\frac{dz}{\sqrt{1 + \eta\cos(q_0 z) - C^2}}\,. \tag{3.39}$$

Откуда следует

$$g = \frac{2C}{\pi\sqrt{1 + \eta - C^2}}\,K\left(\sqrt{\frac{2\eta}{1 + \eta - C^2}}\right)\,. \tag{3.40}$$

Поскольку условием вещественности функции $K(a)$ является неравенство $|a| < 1$, то значения параметра C ограничены условием $C < C_* = \sqrt{1 - \eta}$.

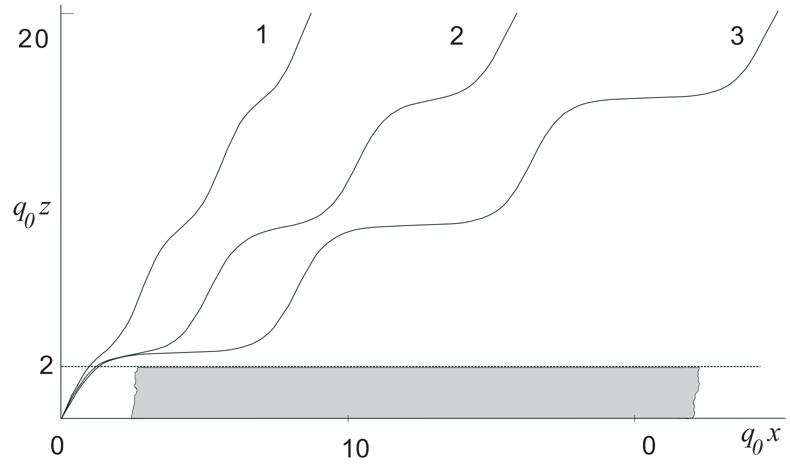


Рис. 3.3

Ход лучей вне запрещенной зоны ($C < C_*$). Кривые получены в результате численных расчетов по формуле (3.37) при $\eta = 0.5$ и разных значениях C: 1 — $C = 0.6$; 2 — $C = 0.7$; 3 — $C = 0.707$

При изменении параметра C в области $0 \leq C < \sqrt{1-\eta}$ величина g, как следует из формулы (3.40), меняется в пределах от 0 до ∞, так как функция $K(a)$ логарифмически расходится при $a \to 1$. Таким образом, изменяя начальный угол падения луча $\chi(z_1)$ в точке z_1, а значит и параметр C, мы можем при больших $|z - z_1|$ наблюдать лучи с любым (в том числе и сколь угодно большим) отношением $|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}|/|z - z_1|$. Это соответствует тому, что на поверхности лучевых векторов (Рис. 3.2) нет запрещенных зон. Рисунок 3.3 показывает траектории лучей вне запрещенной зоны.

Чтобы объяснить возникновение запрещенной зоны на поверхности волновых векторов (Рис. 3.1), введем понятие волнового вектора $\mathbf{k}$, соответствующего данному лучу. Для этого рассмотрим изменение фазы поля вдоль луча от точки $\mathbf{r}_1 = (x_1, 0, z_1)$ к точке $\mathbf{r} = (x, 0, z)$, считая что $z > z_1$,

$$\tilde{\Psi} = k_0 \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} n ds, \tag{3.41}$$

где s — расстояние вдоль луча. Используя формулу для элемента длины дуги $ds = \sqrt{1 + [x'(z)]^2}\, dz$, получим из выражения (3.37) $ds = ndz/\sqrt{n^2 - C^2}$.

Учитывая (3.37) еще раз, интеграл (3.41) можно переписать в виде

$$\tilde{\Psi} = k_0 C(x - x_1) + k_0 \int_{z_1}^{z} \sqrt{n^2(z) - C^2} dz \,. \tag{3.42}$$

Поперечная часть искомого волнового вектора $\mathbf{k}$ определяется согласно (3.42) формулой $\mathbf{k}_\perp = (k_x,\, 0)$, $k_x = k_0 C$. Для определения продольной части волнового вектора k_z заметим, что фаза (3.42) совпадает с фазой волны в (3.24), если положить $C = k_{\perp st}/k_0$. Тогда, применяя те же аргументы, что и при переходе от (3.24) к (3.25), получим

$$k_z = \frac{2k_0}{\pi} \sqrt{1 + \eta - C^2}\, E\left(\sqrt{\frac{2\eta}{1 + \eta - C^2}}\right). \tag{3.43}$$

Из (3.43) следует, что предельному значению $C = C_* = \sqrt{1 - \eta}$ соответствует отношение

$$\frac{k_\perp}{k_z} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 - \eta}{2\eta}}\,, \tag{3.44}$$

что в точности совпадает с ограничением на угол γ между $\mathbf{k}_{st}$ и осью z в формуле (3.32).

Таким образом, для введенного волнового вектора $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_\perp, k_z)$ действительно существует запрещенная зона, связанная с тем, что при $C > C_*$ величина k_z в уравнении (3.43) становится комплексной и волна начинает затухать. Последнее означает, что для таких C волна не распространяется в область больших z, длина затухания при этом имеет порядок длины волны.

3.1.4. Запрещенная зона и планарный волновой канал

С точки зрения геометрической оптики появление запрещенной зоны можно объяснить тем, что при уменьшении показателя преломления в направлении распространения луча возможен поворот (“отражение”) луча [20]. В результате лучи, соответствующие значениям $C > C_*$, оказываются “запертыми” в пределах одного слоя (Рис. 3.4). Между двумя отдельными отражениями форму траектории луча можно, по-прежнему, найти, интегрируя правую

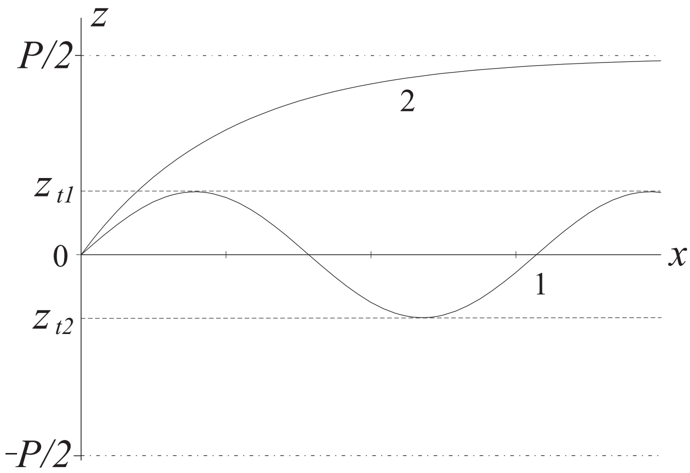


Рис. 3.4

Ход лучей в волновом канале. Кривая 1 показывает траекторию лучей при $\sqrt{1-\eta} < C < \sqrt{1+\eta}$, на кривой 2 изображен предельный луч, для которого $C = C_* = \sqrt{1-\eta}$

часть уравнения (3.37). При описании распространения волн в рамках геометрической оптики следует производить правильные склейки участков луча со знаками плюс и минус в (3.37) и учитывать изменение фазы на $\pi/2$ при каждом отражении. Подобный подход позволяет описать поведение лучей везде, за исключением окрестностей точек поворота.

Плоскости $z = \text{const}$, на которых происходит поворот ("отражение"), определяются из условия $\sin\chi(z) = 1$ в уравнении (3.35), то есть

$$n(z_1)\sin\chi(z_1) = n(z), \tag{3.45}$$

где z_1 — положение источника волны. Будем считать, что $|z_1| < P/2$, тогда уравнение (3.45) имеет два решения

$$z_{t1,2} = \pm\frac{1}{q_0}\arccos\frac{n^2(z_1)\sin^2\chi(z_1) - 1}{\eta}. \tag{3.46}$$

Луч будет распространяться между плоскостями $z = z_{t1}$ и $z = z_{t2}$, попеременно "отражаясь" от них.

Таким образом, мы имеем плоский волновой канал. Границами этого канала являются плоскости $z = P/2$ и $z = -P/2$, на которых показатель преломления $n(z)$ минимален. В этот волновой канал захватываются волны, для которых выполняется условие

$$n(z_1)\sin\chi(z_1) \geq \sqrt{1-\eta} = C_*\,. \tag{3.47}$$

Отметим, что ширина “канала захвата” $z_t = |z_{t1} - z_{t2}|$ для конкретного луча зависит от параметра C. При $C \to \sqrt{1+\eta}$ величина $z_t \to 0$, а при $C \to \sqrt{1-\eta}$ величина $z_t \to P$. Обратим внимание на случай $C \to \sqrt{1-\eta}$. В пределе $C = \sqrt{1-\eta}$ луч переходит к скользящему падению, асимптотически приближаясь к плоскости $z = P/2$ (или $z = -P/2$), не испытывая отражения. Этот луч также остается “запертым” в волновом канале (кривая 2 на рисунке 3.4).

Оценим характер асимптотики функции Грина при $|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}| \to \infty$ из простых физических соображений. Все волны, удовлетворяющие условию (3.47), будут оставаться в плоском слое $-P/2 \leq z \leq P/2$, при любых $|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}|$. Поэтому соответствующая плотность энергии волн, запертых внутри слоя, будет с удалением от источника убывать как $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^{-1} \approx |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}|^{-1}$. Следовательно амплитуда поля точечного источника в случае, когда обе точки z и z_1 лежат в одном волновом канале, ведет себя при $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| \to \infty$ как $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^{-1/2}$. Это отличается от обычной ситуации $|z - z_1| \to \infty$, когда, согласно (3.24), амплитуда поля пропорциональна $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^{-1}$.

3.2. Функция Грина нематических жидких кристаллов

Перейдем теперь к описанию поля точечного источника электромагнитного поля. При описании распространения волн в неоднородной среде удобно записать уравнение (2.3) в интегральной форме

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) + k_0^2 \int d\mathbf{r}_1 \hat{T}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}_1)\mathbf{E}(\mathbf{r}_1), \tag{3.48}$$

где $\delta\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^0$ — флуктуации тензора диэлектрической проницаемости. Функция Грина электромагнитного поля $\hat{T}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} - k_0^2\hat{\varepsilon}^0)\hat{T}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\hat{I}. \tag{3.49}$$

Нематический жидкий кристалл в состоянии равновесия является пространственно однородной средой. Поэтому функция Грина зависит только от разности аргументов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. Если перейти к спектру Фурье, то Фурье-образ функции Грина можно записать в виде [162, 163]

$$\hat{T}^0(\mathbf{k}) = \sum_{j=o,e} \frac{n^{(j)2}(\mathbf{s})}{k^2 - k^{(j)2}(\mathbf{s})} \frac{\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s}) \otimes \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s})}{(\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s})\hat{\varepsilon}^0\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s}))}, \tag{3.50}$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{k}$, $k^{(j)} = n^{(j)}k_0$, показатели преломления $n^{(j)}$ определены в выражении (2.6), а поляризации $\mathbf{e}^{(j)}$ — в (2.7). Здесь мы не учитываем вклад продольной волны.

В дальней зоне в координатном представлении функция Грина имеет вид [162, 163]

$$\hat{T}^0(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R} \sum_{j=o,e} n^{(j)2} f_{(j)} \frac{\mathbf{e}^{(j)} \otimes \mathbf{e}^{(j)}}{(\mathbf{e}^{(j)}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{e}^{(j)})} \exp(i\mathbf{k}_{st}^{(j)} \cdot \mathbf{R}), \tag{3.51}$$

где

$$\mathbf{k}_{st}^{(o)} = \sqrt{\varepsilon_\perp}k_0\frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{k}_{st}^{(e)} = k_0\left[\frac{\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp}{(\mathbf{R}(\hat{\varepsilon}^0)^{-1}\mathbf{R})}\right]^{1/2}(\hat{\varepsilon}^0)^{-1}\mathbf{R} \tag{3.52}$$

— векторы стационарной фазы обыкновенной и необыкновенной волн,

$$f_{(o)} = 1, \quad f_{(e)}^2 = \frac{(\mathbf{s}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{s})(\mathbf{s}\hat{\varepsilon}^{02}\mathbf{s})}{\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp^2}. \tag{3.53}$$

Величины в (3.53) вычислены на соответствующем векторе стационарной фазы при $\mathbf{s} = \mathbf{k}_{st}^{(j)}/k_{st}^{(j)}$.

3.3. Функция Грина холестерических жидких кристаллов с крупномасштабной периодичностью

Задача (3.49) для поля точечного источника геликоидального жидкого кристалла $\hat{T}^0(\mathbf{k}_\perp; z, z_1)$ в $(\mathbf{k}_\perp, z)$–представлении сводится к системе уравнений вида

$$\hat{\mathfrak{L}}(z)\hat{T}^0(\mathbf{k}_\perp; z, z_1) = \delta(z - z_1)\hat{I}, \tag{3.54}$$

где

$$\hat{\mathfrak{L}}(z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - k_0^2\varepsilon_{xx}^0 & -k_0^2\varepsilon_{xy}^0 & ik_\perp\dfrac{\partial}{\partial z} \\ -k_0^2\varepsilon_{xy}^0 & -\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\perp^2 - k_0^2\varepsilon_{yy}^0 & 0 \\ ik_\perp\dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & k_\perp^2 - k_0^2\varepsilon_\perp \end{pmatrix}$$

— линейный дифференциальный оператор второго порядка.

Решение неоднородного уравнения (3.54) конструируется как суперпозиция решений (2.12) соответствующего однородного уравнения в каждой из областей $z > z_1$ и $z < z_1$, с подбором коэффициентов суперпозиции, обеспечивающих нужный характер особенности правой части (3.54). Аналогичная процедура была проделана в первой главе (см. (1.24)–(1.30)), поэтому здесь мы сразу приведем результат расчетов

$$\hat{T}^0(\mathbf{k}_\perp; z, z_1) = \hat{T}^{(o)}(\mathbf{k}_\perp; z, z_1) + \hat{T}^{(e)}(\mathbf{k}_\perp; z, z_1), \tag{3.55}$$

где

$$T_{\alpha\beta}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp; z, z_1) = \frac{i}{2k_0}B^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z)B^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z_1)\, e_\alpha^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z)e_\beta^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z_1)\times$$
$$\times \exp\left(i\left|\int_{z_1}^{z} k_z^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z')dz'\right|\right) \qquad j = o, e, \tag{3.56}$$

$$B^{(o)}(\mathbf{k}_\perp, z) \equiv B^{(o)}(k_\perp) = \sqrt{\frac{k_0}{k_z^{(o)}(k_\perp)}},\ B^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z) = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp^2 k_0^2 + \varepsilon_a(\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{n}^0(z))^2}}{\varepsilon_\perp\sqrt{k_0 k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp, z)}}. \tag{3.57}$$

Здесь $k_z^{(j)}$ определяются выражениями (2.16) и (2.18), а поляризации $\mathbf{e}^{(j)}$ — выражением (2.15). Заметим, что амплитуды волн $A^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z)$ в (2.23) можно записать в виде

$$A^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z) = \frac{B^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z)}{B^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z_0)} \quad j = o, e. \tag{3.58}$$

Для нахождении функции Грина в координатном представлении необходимо вычислить двумерный интеграл

$$\hat{T}^0(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}, z, z_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\mathbf{k}_\perp \exp\left[i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp})\right] \hat{T}^0(\mathbf{k}_\perp; z, z_1)\,. \tag{3.59}$$

Вычисление этого интеграла в дальней зоне $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \gg \lambda$ выполним методом стационарной фазы, аналогично (3.15)–(3.24). При подстановке (3.55) в (3.59) мы получим два интеграла, содержащие экспоненциальные быстро осциллирующие множители и плавные внеэкспоненциальные множители.

В первом слагаемом (3.55) стационарная точка определяется из условия

$$\nabla_{\mathbf{k}_\perp} \Big(k_z^{(o)}(\mathbf{k}_\perp)|z - z_1| + \mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}) \Big) = 0. \tag{3.60}$$

Решая уравнение (3.60), найдем

$$\mathbf{k}_{\perp st}^{(o)} = \sqrt{\varepsilon_\perp} k_0 \frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}\,. \tag{3.61}$$

Показатель экспоненты в этом слагаемом равен $i\Psi_o$, где

$$\Psi_o = k_z^{(o)}(k_{\perp st}^{(o)})|z - z_1| + \mathbf{k}_{\perp st}^{(o)} \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}) = \sqrt{\varepsilon_\perp} k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|\,. \tag{3.62}$$

Во втором слагаемом (3.55) уравнение на стационарную точку примет вид

$$\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp} = \frac{1}{\varepsilon_\perp} \left| \int_{z_1}^{z} \frac{\hat{\varepsilon}^\perp(z')\mathbf{k}_{\perp st}^{(e)}\, dz'}{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp st}^{(e)}, z')} \right|, \tag{3.63}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^\perp(z) = \varepsilon_{\alpha\beta}(z)$, $(\alpha, \beta = x, y)$ — поперечная проекция $\hat{\varepsilon}(z)$ на плоскость xy. Показатель экспоненты второго слагаемого будет равен $i\Psi_e$, где

$$\Psi_e = \left| \int_{z_1}^{z} dz' k_z^{(e)}(\mathbf{k}_{\perp st}^{(e)}, z') \right| + \mathbf{k}_{\perp st}^{(e)} \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp})\,. \tag{3.64}$$

Отсюда находим функцию Грина в дальней зоне

$$T^0_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\exp(i\Psi_o)\,e^{(o)}_\alpha(\mathbf{k}^{(o)}_{\perp st},z)e^{(o)}_\beta(\mathbf{k}^{(o)}_{\perp st},z_1)+ \\ + \frac{B^{(e)}(\mathbf{k}^{(e)}_{\perp st},z)B^{(e)}(\mathbf{k}^{(e)}_{\perp st},z_1)\exp(i\Psi_e)}{4\pi k_0\sqrt{\det\hat{A}(\mathbf{k}^{(e)}_{\perp st};z,z_1)}}e^{(e)}_\alpha(\mathbf{k}^{(e)}_{\perp st},z)\,e^{(e)}_\beta(\mathbf{k}^{(e)}_{\perp st},z_1), \quad (3.65)$$

где

$$A_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp;z,z_1) = \\ = \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}\left|\int_{z_1}^{z}\left[\frac{\varepsilon^\perp_{\alpha\beta}}{(\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp k_0^2-(\mathbf{k}_\perp\hat{\varepsilon}^\perp\mathbf{k}_\perp))^{1/2}}+\frac{(\hat{\varepsilon}^\perp\mathbf{k}_\perp)_\alpha(\hat{\varepsilon}^\perp\mathbf{k}_\perp)_\beta}{(\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp k_0^2-(\mathbf{k}_\perp\hat{\varepsilon}^\perp\mathbf{k}_\perp))^{3/2}}\right]dz'\right|. \quad (3.66)$$

Как видно из выражения (3.62), волновая поверхность обыкновенной волны является сферой. Амплитуда обыкновенного вклада в функции Грина (3.65) такая же, как в однородной изотропной среде. Направления вектора поляризации распределены достаточно сложным образом. Вклад, связанный с необыкновенной волной, проявляет все особенности, изученные нами ранее для случая скалярного поля. Действительно, фаза необыкновенной волны (3.64) совпадает с фазой в выражении (3.24), если сделать замену $k_z^{(e)} \leftrightarrow k_0\Gamma$. Поэтому для необыкновенной волны будут иметь место запрещенные зоны и волной канал, описываемые аналогично скалярному случаю.

Оценим долю энергии необыкновенного луча C_t, уходящую в волновой канал. Будем считать, что источник находится в начале координат и $\varepsilon_a > 0$. Доля энергии пропорциональна отношению телесного угла θ_t, образуемого лучами, захватываемыми в волновой канал, к полному телесному углу 4π. Для направлений $z > 0$ лучи, захватываемые в канал, излучаются под углами $\chi^0_* \le \chi \le \pi/2$. Пусть из начала координат излучается волна под углом χ^0 к оси z. Тогда в силу закона Снеллиуса

$$k^{(e)2}(z)\sin^2\chi(z) = k^{(e)2}(0)\sin^2\chi^0\,. \quad (3.67)$$

В точке поворота $\chi(z_*) = \pi/2$. Тогда из уравнения (3.67) можно получить

$$\cos^2(q_0 z_* + \phi_0) = \frac{\varepsilon_\perp \cos^2\chi^0 + \varepsilon_a \sin^2\chi^0 \cos^2\phi_0}{\varepsilon_a \sin^2\chi^0}\,. \tag{3.68}$$

Предельный луч будет асимптотически приближаться к плоскости с $n^{(e)} = \sqrt{\varepsilon_\perp}$, то есть, к плоскости с минимальным показателем преломления. Для этой плоскости $\cos\theta = 1$ и $\chi(z_*) = \pi/2$, а значит и $\cos(q_0 z_* + \phi_0) = 1$. Тогда из условия (3.68) можно получить угол χ^0, под которым предельный луч выйдет из начала координат

$$\sin^2\chi^0_* = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp + \varepsilon_a \sin^2\phi_0}\,. \tag{3.69}$$

Телесный угол θ_t имеет вид

$$\theta_t = 2\int_0^{2\pi} d\phi_0 \left(\int_{\chi^0_*}^{\pi/2} \sin\chi\, d\chi\right)\,. \tag{3.70}$$

Здесь множитель 2 введен, чтобы учесть лучи, распространяющиеся в направлениях $z < 0$. Вычисляя интегралы (3.70) получим

$$C_t \sim \frac{\theta_t}{4\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\varepsilon_a}}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}\,. \tag{3.71}$$

При $\varepsilon_\perp = 2.28$ и $\varepsilon_\parallel = 2.86$ доля энергии, захватываемой в волной канал, составляет $C_t \approx 0.30$.

В заключении проанализируем предел $q_0 \to 0$ в (3.56), который соответствует нематическому жидкому кристаллу. Величины $\mathbf{n}^0(z)$, $k_z^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z)$, $B^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z)$, $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z)$ в этом пределе перестают зависеть от координаты z, а функции $\hat{T}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp; z, z_1)$ становятся зависящими только от разности пространственных координат, $\hat{T}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp; z, z_1) = \hat{T}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp; z - z_1)$. Формула (3.56) тогда приобретает вид

$$T^{(j)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp; z - z_1) = \frac{i}{2k_0} B^{(j)2}(\mathbf{k}_\perp)\, e^{(j)}_\alpha(\mathbf{k}_\perp) e^{(j)}_\beta(\mathbf{k}_\perp)\, e^{ik_z^{(j)}(\mathbf{k}_\perp)|z - z_1|}\,. \tag{3.72}$$

Выражение для поля точечного источника в однородной анизотропной среде в трехмерном представлении Фурье имеет вид (3.50). Величины, относящиеся к НЖК, будем отмечать здесь индексом N.

Запишем волновой вектор $\mathbf{k}_N$ в виде $\mathbf{k}_N = (\mathbf{k}_{N\perp}; k_{Nz})$ и выполним в (3.50) обратное преобразование Фурье по переменной k_{Nz}

$$T^0_{N\alpha\beta}(\mathbf{k}_{N\perp}; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{Nz}}{2\pi}\, T^0_{N\alpha\beta}(\mathbf{k}_{N\perp}; k_{Nz})\, e^{ik_{Nz}z}. \tag{3.73}$$

Главный вклад в асимптотику интеграла при $z \gg \lambda$ дается вычетами в полюсах первого порядка на двух дисперсионных поверхностях,

$$k^2_{N\perp} + k^2_{Nz} - k^{(j)2}_N(\mathbf{k}_{N\perp}; k_{Nz}) = 0, \tag{3.74}$$

$j = o, e$. Обозначая два решения каждого дисперсионного уравнения относительно k_{Nz}, как $k_{Nz} = \pm k^{(j)}_{Nz}(\mathbf{k}_{N\perp})$, из (3.50) получаем

$$T^0_{N\alpha\beta}(\mathbf{k}_{N\perp}; z) = \frac{i}{k_0^2} \sum_{j=o,e} k^{(j)2}_N \left(2k_{Nz} - \frac{\partial k^{(j)2}_N}{\partial k_{Nz}}\right)^{-1} \frac{e^{(j)}_{N\alpha} e^{(j)}_{N\beta}}{\mathbf{e}^{(j)}_N \hat{\varepsilon}^0_N \mathbf{e}^{(j)}_N}\, e^{ik^{(j)}_{Nz}|z|}, \tag{3.75}$$

где величины $\mathbf{e}^{(j)}_N$ и $k^{(j)}_N$ вычислены на волновом векторе

$$\mathbf{k}^{(j)}_N(\mathbf{k}_{N\perp}) \equiv (\mathbf{k}_{N\perp}, k^{(j)}_{Nz}(\mathbf{k}_{N\perp})).$$

Подставляя в (3.74) выражение (2.6) для $k^{(j)2}_N(\mathbf{k}_N)$ и решая полученные уравнения для $j = o, e$ относительно k_{Nz}, получим в обоих случаях, что $k^{(j)}_{Nz} = k^{(j)}_z(\mathbf{k}_\perp)$. Таким образом $\mathbf{k}^{(j)}_N(\mathbf{k}_\perp) = (\mathbf{k}_\perp, k^{(j)}_z(\mathbf{k}_\perp)) = \mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp)$. Как нетрудно проверить используя (2.6) и (2.7), величины $\mathbf{e}^{(j)}_N(\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp))$ и $k^{(j)}_N(\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp))$ при этом совпадают с $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp)$ и $k^{(j)}(\mathbf{k}_\perp)$ при $q_0 = 0$. Также для обоих значений $j = o, e$ выполняется тождество

$$\frac{k^{(j)}_z(\mathbf{k}_\perp) B^{(j)2}(\mathbf{k}_\perp)}{k_0} = \\ = \frac{k^{(j)2}(\mathbf{k}_\perp)}{k_0^2 \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp) \hat{\varepsilon}^0 \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{k}_\perp)} \left(k_{Nz} - \frac{1}{2} \left.\frac{\partial k^{(j)2}_N(\mathbf{k}_\perp, k_{Nz})}{\partial k_{Nz}}\right|_{k_{Nz} = k^{(j)}_z(\mathbf{k}_\perp)} \right)^{-1} \tag{3.76}$$

В результате (3.75) совпадает с (3.55), (3.56).

Глава 4.

Рассеяние света в слоистой среде

Одним из эффективных методов исследования жидкокристаллических систем является метод светорассеяния. Необычные оптические и структурные свойства жидких кристаллов приводят к существенным усложнениям при описании рассеяния света. К таким свойствам можно отнести значительную оптическую анизотропию, наличие регулярных пространственных структур, аномально большие флуктуации параметра порядка, аномально большую оптическую активность. Задача о рассеянии света в ЖК усложняется, так как пространственная однородность среды существенно нарушается. В этой главе на примере холестерических жидких кристаллов предложена общая схема расчета интенсивности рассеянного света в средах с одномерной регулярной структурой, параметры которой слабо меняются на размерах порядка длины волны.

Рассмотрим второй член в правой части уравнения (3.48). Он соответствует рассеянному полю $\mathbf{E}^{(s)}$, порожденному падающим полем $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$. Решая это уравнение итерациями и ограничиваясь низшим порядком по флуктуациям $\delta\hat{\varepsilon}$, получим рассеянное поле $\mathbf{E}^{(s)}$ в приближении однократного рассеяния

$$\mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{r}) = k_0^2 \int d\mathbf{r}'\, \hat{T}^0(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp; z, z')\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}')\mathbf{E}^0(\mathbf{r}'). \tag{4.1}$$

Свойства рассеянного света определяются функцией когерентности

$$\langle E_\alpha^{(s)}(\mathbf{r}_1) E_\beta^{(s)*}(\mathbf{r}_2)\rangle = k_0^4 \int d\mathbf{r}_1' d\mathbf{r}_2'\, T_{\alpha\gamma}^0(\mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}_{1\perp}'; z_1, z_1') \times \\ \times T_{\beta\zeta}^{0*}(\mathbf{r}_{2\perp} - \mathbf{r}_{2\perp}'; z_2, z_2') \mathcal{G}_{\gamma\zeta\nu\mu}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') E_\nu^0(\mathbf{r}_1') E_\mu^{0*}(\mathbf{r}_2'), \quad (4.2)$$

где $\mathcal{G}_{\gamma\zeta\nu\mu}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = \langle \delta\varepsilon_{\gamma\nu}(\mathbf{r}_1') \delta\varepsilon_{\zeta\mu}^*(\mathbf{r}_2')\rangle$ — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости. В силу однородности системы в плоскостях, поперечных оси z, имеем $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') \equiv \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}_{1\perp}' - \mathbf{r}_{2\perp}'; z_1', z_2')$.

Таким образом, для вычисления функции когерентности (4.2), нам необходимо знать собственные волны, определяющие вид поля $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$, функцию Грина $\hat{T}^0$ и корреляционную функцию флуктуаций диэлектрической проницаемости $\hat{\mathcal{G}}$ в нашей системе.

4.1. Общая теория однократного рассеяния света в слоистой среде

С оптической точки зрения холестерики представляют собой пространственно неоднородную среду, свойства которой изменяются вдоль оси холестерика. Собственные волны и поле точечного источника в такой среде имеют сложную структуру. Кроме того, корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ зависит здесь не только от разности пространственных координат $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, но и от их абсолютных значений. Все это приводит к тому, что задача светорассеяния в ХЖК имеет специфические особенности. Для того, чтобы проиллюстрировать эти особенности, изложим кратко обычный подход к решению задачи о рассеянии света в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \varepsilon_0 \delta_{\alpha\beta}$.

4.1.1. Однородная среда

При обычной постановке задачи светорассеяния предполагается, что на образец падает плоская волна $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}) = E_0\mathbf{e}^{(i)}\exp(i\mathbf{k}^{(i)}\cdot\mathbf{r})$, где E_0 — амплитуда, $\mathbf{e}^{(i)}$ — вектор поляризации, $\mathbf{k}^{(i)}$ — волновой вектор падающей волны ($\mathbf{e}^{(i)} \perp \mathbf{k}^{(i)}$), а рассеянное поле с вектором поляризации $\mathbf{e}^{(s)}$ регистрируется на больших расстояниях от рассеивающего объема V_{sc} (Рис. 4.1). В этом случае можно считать рассеянное поле квазиплоской волной с волновым вектором $\mathbf{k}^{(s)}$. Чтобы не учитывать преломления на границе будем считать, что образец окружен однородной средой с диэлектрической проницаемостью ε_0. Тогда $\left|\mathbf{k}^{(i)}\right| = \left|\mathbf{k}^{(s)}\right| = k$, где $k = k_0\sqrt{\varepsilon_0}$ — волновое число в среде.

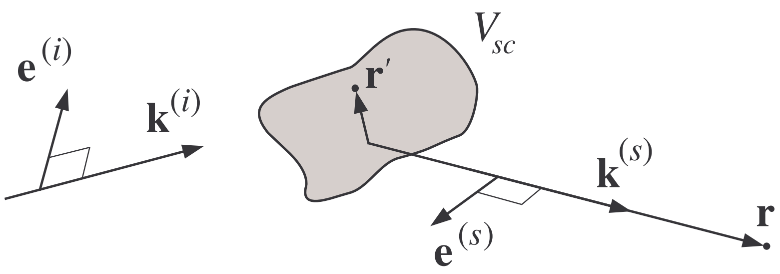


Рис. 4.1

Геометрия обычного эксперимента по рассеянию света: $\mathbf{k}^{(i)}$ — волновой вектор падающей волны, V_{sc} — рассеивающий объем, $\mathbf{k}^{(s)}$ — волновой вектор рассеянной волны, $\mathbf{r}$ — точка наблюдения

В изотропной среде $\hat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv \hat{T}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, где в приближении дальней (волновой) зоны, когда $kR \gg 1$,

$$T_{0\alpha\beta}(\mathbf{R}) \approx P_{\alpha\beta}(\mathbf{R})\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\,, \tag{4.3}$$

где

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{R_\alpha R_\beta}{R^2} \tag{4.4}$$

— поперечный проектор на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{R}$ [154]. Наличие тензора $P_{\alpha\beta}$ в (4.3) обеспечивает поперечность поля точечного источника в дальней зоне.

На больших расстояниях от образца, когда $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg V_{sc}^{1/3} \sim r'$, можно в неэкспонециальных множителях формулы (4.3) произвести замену $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$, а в показателе экспоненты использовать "Фраунгоферовское" приближение $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/r$ (последнее подразумевает выполнение также условия $kV_{sc}^{2/3} \ll r$). В результате из выражения (4.3) мы получаем "плосковолновое" приближение для функции Грина,

$$T_{0\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx P_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-i\mathbf{k}^{(s)} \cdot \mathbf{r}'}, \tag{4.5}$$

где $\mathbf{k}^{(s)} = k\mathbf{r}/r$ — волновой вектор рассеянной волны.

Полагая в (4.1) $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})$ и используя формулу (4.5), получаем выражение для рассеянного поля

$$E_\alpha^{(s)}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{k_0^2 e^{ikr}}{4\pi r} P_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) e_\gamma^{(i)} \int_{V_{sc}} d\mathbf{r}' \delta\varepsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{r}') e^{i\left(\mathbf{k}^{(i)} - \mathbf{k}^{(s)}\right) \cdot \mathbf{r}'} . \tag{4.6}$$

Таким образом мы получаем, что рассеянное поле определяется трехмерной Фурье компонентой флуктуаций диэлектрической проницаемости $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{Q})$ в объеме V_{sc}, где $\mathbf{Q} = \mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}$ — вектор рассеяния. Учитывая что $e_\alpha^{(s)} P_{\alpha\beta} = e_\beta^{(s)}$, получаем для компоненты рассеянного поля с поляризацией $\mathbf{e}^{(s)}$,

$$E^{(s)}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{k_0^2 e^{ikr}}{4\pi r} \, \mathbf{e}^{(s)} \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{Q}) \mathbf{e}^{(i)} . \tag{4.7}$$

Соответствующая интенсивность (модуль вектора Пойнтинга) рассеянного света,

$$I_{(i)}^{(s)} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_0} \, \left\langle |E^{(s)}|^2 \right\rangle , \tag{4.8}$$

имеет, таким образом, вид

$$I_{(i)}^{(s)} = \frac{V_{sc} I_0^{(i)} k_0^4}{(4\pi)^2 r^2} \, e_\alpha^{(s)} e_\beta^{(s)} \mathcal{G}_{\alpha\beta\nu\mu}(\mathbf{Q}) e_\nu^{(i)} e_\mu^{(i)} , \tag{4.9}$$

где $I_0^{(i)}$ — интенсивность падающего света, а $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{Q})$ — трехмерный Фурье-образ корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости, которая в однородной среде зависит только от разности координат $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Здесь мы учли соотношение $\langle \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{Q}) \otimes \delta\hat{\varepsilon}^*(\mathbf{Q})\rangle = V_{sc}\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{Q})$.

Подчеркнем, что с симметрийной точки зрения тот факт, что в формуле (4.7) рассеянное поле выражено через одну трехмерную Фурье гармонику флуктуаций $\delta\hat{\varepsilon}$, является следствием пространственной однородности системы по отношению к ее оптическим свойствам.

4.1.2. Среда с регулярными неоднородностями

Перейдем теперь к рассмотрению интересующей нас ситуации, когда среда содержит регулярные неоднородности.

Простейший подход, позволяющий учесть регулярные неоднородности — использовать так называемое кинематическое приближение в теории дифракции [40, 164]. Запишем тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\delta_{\alpha\beta} + \Delta\varepsilon^0_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) + \delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r})\,,$$

где член $\Delta\hat{\varepsilon}^0(\mathbf{r})$ учитывает регулярные неоднородности структуры, а $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ — случайные флуктуации. Рассматривая $\Delta\hat{\varepsilon}^0(\mathbf{r}) + \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ как возмущение, можно считать, что падающее и рассеянное поле распространяются в однородной среде, и мы получим, аналогично (4.6), соответствующее рассеянное поле с поляризацией $\mathbf{e}^{(s)}$ в виде

$$E^{(s)}(\mathbf{r}) = E_0\frac{k_0^2 e^{ikr}}{4\pi r}\left[\mathbf{e}^{(s)}\Delta\hat{\varepsilon}^0(\mathbf{Q})\mathbf{e}^{(i)} + \mathbf{e}^{(s)}\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{Q})\mathbf{e}^{(i)}\right]. \tag{4.10}$$

Первый из членов суммы в правой части (4.10) соответствует рассеянию на регулярной структуре (дифракции), а второй — обычному релеевскому рассеянию (4.6).

Обе формулы (4.6) и (4.10) соответствуют приближению однократного рассеяния. Однако, если в случае (4.6) это приближение обосновано малостью тепловых флуктуаций $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$, то в случае (4.10) регулярная часть неоднородностей $\Delta\hat{\varepsilon}^0(\mathbf{r})$ обычно уже не мала и приближение однократного рассеяния для нее, вообще говоря, не справедливо. Использование формулы типа (4.10) для описания рассеяния света может быть правомерно только в случае очень малых регулярных неоднородностей или в очень тонких образцах.

Проблема учета влияния немалых регулярных неоднородностей на рассеяние света корректно решается, если перейти от описания рассеяния в терминах собственных волн $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \propto \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, и функции Грина $\hat{T}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ однородной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0\delta_{\alpha\beta}$ к собственным волнам $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ и функции Грина $\hat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ регулярно неоднородной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^0_{\alpha\beta} = \varepsilon_0\delta_{\alpha\beta} + \Delta\varepsilon^0_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$.

В этом случае однократно рассеянное на случайных флуктуациях $\delta\hat{\varepsilon}$ поле описывается формулой (4.1). Эта формула учитывает одну кратность рассеяния на флуктуациях $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и все порядки рассеяния на регулярной структуре $\Delta\hat{\varepsilon}^0(\mathbf{r})$ (дифракция).

Отметим, что здесь в отличие от случая однородной среды (4.3) функция Грина $\hat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ уже не есть функция разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, а нормальные волны $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ не имеют простого вида плоской волны $\sim \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. Соответственно, несправедливо также “плосковолновое” приближение (4.5) для функции Грина в координатном представлении. Поэтому в такой среде интенсивность однократного рассеяния не будет пропорциональна трехмерному Фурье-образу флуктуаций диэлектрической проницаемости $\delta\hat{\varepsilon}$ на волновом векторе $\mathbf{Q} = \mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}$. Таким, образом в этом случае не работает обычная схема расчета интенсивности рассеяния (4.3)–(4.9), и нужен другой подход.

Кроме проблемы учета регулярных неоднородностей, которая решается использованием формулы (4.1) вместо (4.6), в задаче рассеяния для неоднородных систем имеется еще одна проблема. Формула (4.1), в отличие от (4.6), описывает рассеянное поле только внутри среды. В эксперименте же обычно измеряются интенсивности рассеяния вне среды. Для однородных в среднем рассеивающих сред эта проблема обычно решается следующим образом. В простейшем случае предполагается, что рассеивающий объем помещен внутри однородной среды с диэлектрической проницаемостью ε_0, что позволяет избежать рассмотрения вопроса о преломлении на границе образца. Более последовательный подход — учет преломления света на границах образца. Поскольку в однородной среде падающая волна является плоской, а рассеянная волна в дальней зоне внутри образца также может считаться квазиплоской, то задача преломления может решаться на основе обычных формул Френеля. Здесь, однако, даже в изотропной системе существует тонкость, связанная с нетривиальной коррекцией телесных углов при преломлении. Для анизотропных рассеивающих сред эта проблема разобрана в работах [162, 163].

Оптические свойства системы с регулярными неоднородностями и окружающей однородной среды отличаются принципиально. Собственные волны и функция Грина внутри и вне рассеивающего объема существенно различны (и, в частности, падающая и рассеянная волны могут считаться плоскими только вне образца), что не позволяет игнорировать наличие границы.

Для преодоления этих трудностей в средах с одномерными регулярными неоднородностями можно использовать следующую схему расчета интенсивности однократного рассеяния. Пусть рассеивающий объем представляет собой плоский слой $0 \leqslant z \leqslant L_z$ с достаточно большими поперечными размерами $L_\perp \gg L_z$, на который со стороны $z = -\infty$ падает плоская волна, а рассеянное поле регистрируется в области $z > L_z$, то есть, в передней полусфере. Это не принципиально, поскольку тем же способом можно рассматривать и рассеяние в задней полусфере, $z < 0$.

Сначала мы определим падающее поле $\mathbf{E}_{in}^{(i)}(\mathbf{r})$ внутри среды, порожденное плоской падающей волной $\mathbf{E}^{(i)}_{out}(\mathbf{r})$ вне среды с волновым вектором $\mathbf{k}^{(i)}$. Здесь и далее индексы "*in*" и "*out*" относятся к величинам вычисленным соответственно внутри и вне неоднородной среды. Связь между компонентами поля внутри и снаружи образца на его границе без труда может быть найдена на основе общих граничных условий в электродинамике. Для плоскослоистых сред с границами параллельными слоям, волна внутри среды будет иметь вид

$$\mathbf{E}^{(i)}_{in}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}(\mathbf{k}^{(i)}_{\perp}, z)e^{i\mathbf{k}^{(i)}_{\perp}\cdot\mathbf{r}_{\perp}}\,, \tag{4.11}$$

где функция $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}(\mathbf{k}^{(i)}_{\perp}, z)$ определяется свойствами плоскослоистой среды, поляризацией падающей волны $\mathbf{E}^{(i)}_{out}(\mathbf{r})$ и ее амплитудой.

Отметим, что в силу тождества $k_z^2 + k_\perp^2 = k_0^2\varepsilon_0$, справедливого вне плоскослоистой среды, для задания полного волнового вектора $\mathbf{k}$ достаточно задать вектор $\mathbf{k}_\perp$ и знак компоненты k_z. Поэтому при известном направлении падения волны на образец (положительном или отрицательном по отношению к z) достаточно задать вектор $\mathbf{k}^{(i)}_{\perp}$. Это же справедливо и для волнового вектора $\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}$ рассеянной волны:

$$\mathbf{E}^{(s)}_{in}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(s)}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, z)e^{i\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}\cdot\mathbf{r}_{\perp}}\,. \tag{4.12}$$

Рассеянное поле $\mathbf{E}^{(s)}_{in}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, L_z)$ на границе $z = L_z$ внутри неоднородного образца можно найти, используя формулы (4.1), (4.11). Имеем

$$\mathbf{E}^{(s)}_{in}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, L_z) = k_0^2\int_0^{L_z} dz'\,\hat{T}^0(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}; L_z, z')\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp} - \mathbf{k}^{(i)}_{\perp}, z')\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}(\mathbf{k}^{(i)}_{\perp}, z'). \tag{4.13}$$

Здесь, как мы видим, кроме знания функций $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}(\mathbf{k}^{(i)}_{\perp}, z)$ нам потребуется выражение для Фурье-компонент функции Грина $\hat{T}^0(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}; z, z')$.

Связь между полем $\mathbf{E}^{(s)}_{out}(\mathbf{r})$ вне образца и полем $\mathbf{E}^{(s)}_{in}(\mathbf{r})$ внутри образца на границе можно определить на основе граничных условий. Причем фактически, нам потребуется соответствующее соотношение только для Фурье-компонент $\mathbf{E}^{(s)}_{out}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, L_z)$ и $\mathbf{E}^{(s)}_{in}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, L_z)$.

Поле $\mathbf{E}^{(s)}_{out}(\mathbf{r})$ в точке наблюдения $\mathbf{r}$ вдали от образца можно найти по значениям поля $\mathbf{E}^{(s)}_{out}(\mathbf{r}_\perp, L_z)$ на границе рассеивающего объема вне образца, используя метод Кирхгофа [161].

4.1.3. Метод Кирхгофа

Поясним применение метода Кирхгофа сначала на примере скалярного волнового поля. Рассмотрим произвольную область Γ, ограниченную замкнутой поверхностью Σ, лежащую целиком вне неоднородного образца, то есть, в однородной среде. Внутри области Γ поле $E(\mathbf{r}) = E_{out}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left(\Delta + k_0^2\varepsilon_0\right) E(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{4.14}$$

Пусть функция $T^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = T^0_{out}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ для всех $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Gamma$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\Delta + k_0^2\varepsilon_0\right) T^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{4.15}$$

Тогда, из (4.14), (4.15) следует интегральная теорема Кирхгофа-Гельмгольца [161],

$$E(\mathbf{r}) = \int_\Sigma d^2\mathbf{r}' \left(T^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}E(\mathbf{r}') - E(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}T^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right) \mathbf{s}(\mathbf{r}')\,, \tag{4.16}$$

где $\mathbf{r} \in \Gamma$ — произвольная точка, $\mathbf{r}' \in \Sigma$, $\mathbf{s}(\mathbf{r}')$ — внешняя нормаль к поверхности Σ в точке $\mathbf{r}'$.

Уравнение (4.15) не определяет функцию $T^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ однозначно — требуются дополнительно граничные условия. Если в качестве граничного условия к этому уравнению взять $T^0|_\Sigma = 0$, то в этом случае поле в точке наблюдения $E(\mathbf{r})$ может быть выражено через значения поля $E(\mathbf{r}')$ на поверхности Σ,

$$E(\mathbf{r}) = -\int_\Sigma d^2\mathbf{r}' E(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}T^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{s}(\mathbf{r}')\,. \tag{4.17}$$

Вид функции Грина, удовлетворяющей условию $T^0|_\Sigma = 0$, зависит от формы образца. Рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда поверхность Σ является участком плоскости $z = L_z$ с достаточно большими поперечными размерами $L_\perp$, замкнутым большой полусферой. Если функция Грина $T^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ удовлетворяет на бесконечности условиям излучения (а мы ниже будем выбирать именно такие функции), то вклад в интеграл (4.17) от этой полусферы стремиться к нулю с ростом ее размеров. В этом случае граничное условие $T^0|_\Sigma = 0$ сводится к $T^0|_{z=L_z} = 0$, и, используя метод зеркальных отображений, получим

$$T^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1|}\right), \tag{4.18}$$

где $\mathbf{r}'_1$ — зеркальное отражение точки $\mathbf{r}'$ относительно границы $z = L_z$.

Предположим, что измерение поля осуществляется в точке $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\perp, z)$, $z - L_z \gg L_\perp$. Тогда мы можем применить приближение типа (4.5) в обоих членах формулы (4.18). Учитывая, что в нашей геометрии $\mathbf{s}(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'} = -\partial/\partial z'$, из (4.17) находим

$$E(\mathbf{r}) = \frac{-ik_0\sqrt{\varepsilon_0}}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{z}{r}e^{-ik_z^{(s)}L_z}\int_\Sigma d^2\mathbf{r}'_\perp E(\mathbf{r}'_\perp, L_z)e^{-i\mathbf{k}_\perp^{(s)}\cdot\mathbf{r}'_\perp}. \tag{4.19}$$

Таким образом, при $L_\perp \gg \lambda$, где λ — длина волны света, мы получаем, что поле в точке $\mathbf{r}$ пропорционально поперечной Фурье-компоненте поля на плоскости $z = L_z$:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{-ik_0\sqrt{\varepsilon_0}}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{z}{r}e^{-ik_z^{(s)}L_z}E(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z). \tag{4.20}$$

Соответствующая интенсивность имеет, таким образом, вид

$$I \sim |E(\mathbf{r})|^2 = \frac{k_0^2\varepsilon_0}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{z}{r}\right)^2\left|E(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z)\right|^2. \tag{4.21}$$

Перейдем теперь к рассмотрению векторной ситуации электромагнитного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{out}(\mathbf{r})$ вне неоднородного образца удовлетворяет волновому уравнению

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - k_0^2\varepsilon_0\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{4.22}$$

Система трех связанных уравнений (4.22) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \left(\Delta + k_0^2\varepsilon_0\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0\,. \end{cases} \tag{4.23}$$

Первое уравнение (4.23) означает, что каждая из трех векторных компонент поля удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\left(\Delta + k_0^2\varepsilon_0\right)E_\alpha(\mathbf{r}) = 0, \tag{4.24}$$

а второе уравнение — что все три компоненты вместе — дополнительному условию $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, соответствующему поперечности электромагнитного поля. Поэтому, формально, для каждой из трех компонент поля E_α применима скалярная формула типа Кирхгофа (4.20). При этом мы, однако, не учли условие поперечности поля $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ в (4.23). Для его учета умножим набор трех скалярных формул (4.20) для каждой из компонент поля на проектор $\hat{P}(\mathbf{r})$ (4.4), обеспечивающий поперечность поля в дальней зоне. В результате получаем векторный аналог формулы Кирхгофа в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-ik_0\sqrt{\varepsilon_0}}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{z}{r}e^{-ik_z^{(s)}L_z}\,\hat{P}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z)\,. \tag{4.25}$$

Как известно [161], прямой перенос скалярной формулы Кирхгофа на векторный случай приводит к проблеме — нарушению условия поперечности $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Для устранения этого противоречия можно использовать векторную формулу Кирхгофа–Котлера (см., например, [165]). Однако в приближении дальней зоны образца непоперечность поля $\mathbf{E}$ при применении обычных формул Кирхгофа имеет порядок $\lambda/L_\perp \ll 1$. В такой ситуации использование простой векторной формулы (4.25), в которой поперечность поля обеспечивается проектором $\hat{P}(\mathbf{r})$, эквивалентно методу Кирхгофа–Котлера.

В силу соотношения $e_\alpha^{(s)} P_{\alpha\beta} = e_\beta^{(s)}$, получаем аналогично (4.7)–(4.9) формулу для интенсивности компоненты рассеянного поля с поляризацией $\mathbf{e}^{(s)}$,

$$I^{(s)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} c^2}{8\pi} \frac{k_0^2 \varepsilon_0}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{z}{r}\right)^2 \left\langle \left| \mathbf{e}^{(s)} \cdot \mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z) \right|^2 \right\rangle . \tag{4.26}$$

В случае пространственно однородных систем формула (4.26) переходит в выражение (4.9). Действительно, выполняя в формуле (4.1) преобразование Фурье по поперечным переменным x и y, имеем

$$\mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z) = E_0 k_0^2 \int_0^{L_z} dz' \hat{T}^0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z - z') \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}_\perp^{(s)} - \mathbf{k}_\perp^{(i)}, z') \mathbf{e}^{(i)} e^{ik_z^{(i)} z'} . \tag{4.27}$$

Фурье образ функции Грина $\hat{T}^0(\mathbf{r})$ по координатам x, y имеет вид

$$\hat{T}^0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z - z') = \frac{i}{2k_z^{(s)}} e^{ik_z^{(s)}|L_z - z'|} \hat{P}(\mathbf{k}^{(s)}) , \tag{4.28}$$

где $k_z^{(s)} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0 - k_\perp^{(s)2}}$. Для однородной системы, в которой ε_0 внутри и вне образца совпадают, $\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z) = \mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z)$. Поскольку $\mathbf{k}^{(s)} = k_0 \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{r}/r$, то $k_z^{(s)} = k_0 \sqrt{\varepsilon_0} z/r$ и $\hat{P}(\mathbf{k}^{(s)}) = \hat{P}(\mathbf{r})$. Подставляя (4.28) в (4.27), получаем с учетом условия $z' < L_z$,

$$\mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z) = \frac{iE_0 k_0^2}{2k_z^{(s)}} \hat{P}(\mathbf{r}) \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}) \mathbf{e}^{(i)} e^{ik_z^{(s)} L_z} . \tag{4.29}$$

Подставляя это выражение в формулу (4.25) и умножая скалярно левую и правую часть на вектор $\mathbf{e}^{(s)}$, получаем (4.7).

При применении формулы (4.26) к задаче о рассеянии света в ХЖК пренебрегать разницей между полями $\mathbf{E}_{in}$ и $\mathbf{E}_{out}$ нельзя. Для нахождения связи между ними учтем, что при проходе через границу раздела двух сред тангенциальная составляющая поля не меняется,

$$E_{out\perp}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0) = E_{in\perp}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0), \quad E_{out\perp}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z) = E_{in\perp}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z), \tag{4.30}$$

а компоненты $E_{out\,z}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z)$, $E_{out\,z}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0)$ получим из условия $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$.

В случае, когда шаг спирали велик по сравнению с длиной волны $P \gg \lambda$, можно использовать приближение геометрической оптики внутри ХЖК. При этом между полями на границах внутри $\mathbf{E}_{in}$ и вне $\mathbf{E}_{out}$ среды имеются линейные соотношения вида

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{in}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},0) &= \hat{M}^{out\to in}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},0)\mathbf{E}_{out}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},0)\,, \\ \mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L_z) &= \hat{M}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L_z)\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L_z)\,, \end{aligned} \tag{4.31}$$

где матрицы пересчета $\hat{M}^{out\to in}$, $\hat{M}^{in\to out}$ несложно получить из уравнений (4.30) и условий $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$.

Из (4.13), (4.31) и соотношения $\langle \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}_\perp, z) \otimes \delta\hat{\varepsilon}^*(\mathbf{k}_\perp, z') \rangle = S_\perp \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{k}_\perp; z, z')$, где $S_\perp$ — площадь поперечного сечения образца, находим величину в формуле (4.26), определяющую интенсивность однократного рассеяния,

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \mathbf{e}^{(s)} \cdot \mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L_z) \right|^2 \right\rangle = k_0^4 S_\perp e_\alpha^{(s)} e_\gamma^{(s)} M_{\alpha\beta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L_z) M_{\gamma\delta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L_z) \times \\ \times \int_0^{L_z} dz_1 \int_0^{L_z} dz_2\, T_{\beta\rho}^0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; L_z, z_1) T_{\delta\varphi}^{0*}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; L_z, z_2) \times \\ \times \mathcal{G}_{\rho\varphi\nu\mu}(\mathbf{k}_\perp^{(s)} - \mathbf{k}_\perp^{(i)}; z_1, z_2) \mathcal{E}_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_1) \mathcal{E}_\mu^{(i)*}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_2)\,. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Здесь опущены матрицы пересчета $\hat{M}^{out\to in}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},0)$, позволяющие выразить поле внутри среды через поле, падающее на образец.

4.2. Рассеяние света в ХЖК с большим шагом спирали

Рассмотрим образец ХЖК в виде плоского слоя толщиной L_z с достаточно большими поперечными размерами (Рис. 4.2). На образец падает плоская волна с волновым вектором $\mathbf{k}^{(i)}$ и исследуется рассеянная волна в дальней зоне образца с волновым вектором $\mathbf{k}^{(s)}$.

Для простоты ограничимся случаем, когда поляризация падающего света вне образца подобрана так, что внутри образца образуется падающая волна

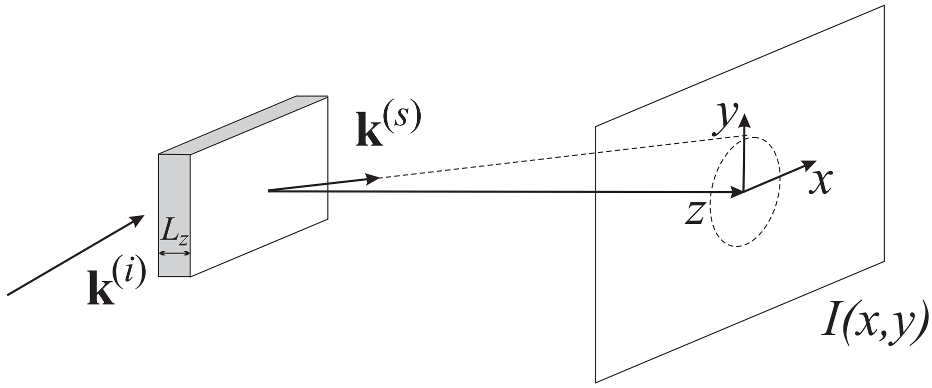


Рис. 4.2 Геометрия рассеяния света в ХЖК

$\mathbf{E}_{in}^{(i)}(\mathbf{r})$ только одного из двух допустимых типов, (o) или (e). В противном случае необходимо выполнять суммирование по (i) внутри среды. Аналогично выберем также поляризацию рассеянного света вне образца так, чтобы ей внутри образца отвечала рассеянная волна $\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{r})$ только одного из двух допустимых типов. Это позволит нам в дальнейшем избежать суммирования по (s) внутри среды. Таким образом индексы (i) и (s) мы можем отождествлять с типом волны (o) или (e) в зависимости от типа падающей и рассеянной волны.

Для этой геометрии интенсивность однократно рассеянного света в ХЖК согласно (4.26) и (4.32) определяется выражением

$$I^{(s)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}c^2}{8\pi}\frac{k_0^6\varepsilon_0}{4\pi^2}\frac{S_\perp}{r^2}\left(\frac{z}{r}\right)^2 e_\alpha^{(s)}e_\gamma^{(s)}M_{\alpha\beta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L_z)M_{\gamma\delta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L_z)\times$$
$$\times\int_0^{L_z}dz_1\int_0^{L_z}dz_2\,T_{\beta\rho}^{0}(\mathbf{k}_\perp^{(s)};L_z,z_1)T_{\delta\varphi}^{0*}(\mathbf{k}_\perp^{(s)};L_z,z_2)\times$$
$$\times\,\mathcal{G}_{\rho\varphi\nu\mu}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}-\mathbf{k}_\perp^{(i)};z_1,z_2)\mathcal{E}_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},z_1)\mathcal{E}_\mu^{(i)*}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},z_2)\,. \quad (4.33)$$

В выражение для интенсивности рассеяния (4.33) входят сопряженные пары падающих полей и функций Грина. Используя (2.12) и (3.56), получим

$$\mathcal{E}_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},z_1)\mathcal{E}_\mu^{(i)*}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},z_2) = E_0^{(i)2}A^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)};z_1,0)A^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)};z_2,0)\times$$
$$\times\exp\left[-i\int_{z_1}^{z_2}k_z^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},z')dz'\right]e_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},z_1)e_\mu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},z_2), \quad (4.34)$$

$$T^{(s)}_{\beta\rho}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}; L_z, z_1) T^{(s)*}_{\delta\varphi}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}; L_z, z_2) = \frac{1}{4k_0^2} \exp\left[i \int_{z_1}^{z_2} k_z^{(s)}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, z') dz' \right] \times$$
$$\times B^{(s)2}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, L_z) B^{(s)}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, z_1) B^{(s)}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, z_2) \times$$
$$\times e^{(s)}_{\beta}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, L_z) e^{(s)}_{\delta}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, L_z) e^{(s)}_{\rho}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, z_1) e^{(s)}_{\varphi}(\mathbf{k}^{(s)}_{\perp}, z_2). \quad (4.35)$$

Наиболее сильный вклад в $\delta\hat{\varepsilon}$ вносят в ЖК флуктуации директора [43]. В этом предположении мы можем использовать выражения для равновесного тензора (2.5) и для флуктуирующего тензора диэлектрической проницаемости (2.1). Вычитая (2.5) из (2.1), находим в главном порядке связь между флуктуациями диэлектрической проницаемости и флуктуациями директора в ХЖК

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \varepsilon_a \left(n^0_{\alpha}(z) \delta n_{\beta}(\mathbf{r}) + \delta n_{\alpha}(\mathbf{r}) n^0_{\beta}(z) \right) \quad (4.36)$$

и связь между соответствующими корреляционными функциями

$$\mathcal{G}_{\alpha\gamma\beta\delta}(\mathbf{r}_{\perp}; z, z') = \varepsilon_a^2 \left[n^0_{\alpha}(z) n^0_{\gamma}(z') G_{\beta\delta}(\mathbf{r}_{\perp}; z, z') + n^0_{\alpha}(z) n^0_{\delta}(z') G_{\beta\gamma}(\mathbf{r}_{\perp}; z, z') + \right.$$
$$\left. + n^0_{\beta}(z) n^0_{\gamma}(z') G_{\alpha\delta}(\mathbf{r}_{\perp}; z, z') + n^0_{\beta}(z) n^0_{\delta}(z') G_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_{\perp}; z, z') \right]. \quad (4.37)$$

Здесь $\hat{G}$ — корреляционная функция флуктуаций директора (1.53).

Из выражений (1.53) и (4.37) находим корреляционную функцию диэлектрической проницаемости $\mathcal{G}_{\beta\gamma\delta\nu}(\mathbf{q}_{\perp}, z_1, z_2)$ в виде

$$\mathcal{G}_{\beta\gamma\delta\nu}(\mathbf{q}_{\perp}; z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{2} \exp\left(-q_{\perp} \left| \int_{z_1}^{z_2} \mu_j(z) dz \right| \right) \mathcal{M}^{(j)}_{\beta\gamma\delta\nu}(\mathbf{q}_{\perp}; z_1, z_2), \quad (4.38)$$

где

$$\mathcal{M}^{(j)}_{\beta\gamma\delta\nu}(z_1, z_2) = \frac{k_B T \varepsilon_a^2}{2q_{\perp} K_{33} \cos\xi(z_1) \cos\xi(z_2)} [n^0_{\beta}(z_1) n^0_{\gamma}(z_2) f^{(j)}_{\delta}(z_1, z_2) f^{(j)*}_{\nu}(z_2, z_1) +$$
$$+ n^0_{\delta}(z_1) n^0_{\gamma}(z_2) f^{(j)}_{\beta}(z_1, z_2) f^{(j)*}_{\nu}(z_2, z_1) + n^0_{\beta}(z_1) n^0_{\nu}(z_2) f^{(j)}_{\delta}(z_1, z_2) f^{(j)*}_{\gamma}(z_2, z_1) +$$
$$+ n^0_{\delta}(z_1) n^0_{\nu}(z_2) f^{(j)}_{\beta}(z_1, z_2) f^{(j)*}_{\gamma}(z_2, z_1)]. \quad (4.39)$$

Существенно, однако, что в интересующей нас задаче рассеяния света основной вклад в интеграл (4.32), как будет показано ниже, вносит область с $|z_1 - z_2| \ll P$. А в случае, когда обе точки $z_{1,2}$ оказываются одновременно в области $\cos\xi(z_{1,2}) = 0$, особенность в корреляционной функции сокращается. Это нетрудно увидеть из того, что в пределе $z_1 \to z_2$ и $\cos\xi(z_1), \cos\xi(z_2) \to 0$ в формуле (1.48) показатели экспонент $\mu_1(z), \mu_2(z) \to 1$, и выполнено условие $\sum_{j=1,2} \hat{W}^{(j)}(\mathbf{q}_\perp; z_1, z_2) \to 0$. Физически отсутствие особенности в этом случае можно объяснить тем, что в области близких значений z_1 и z_2 ХЖК почти неотличим от нематика. А в НЖК корреляционная функция конечна при $\cos\phi_0 = 0$ (см. напр. (1.60)).

Таким образом, для задачи рассеяния можно ограничиться выражением для корреляционной функции (1.53) при выполнении неравенств $q_\perp \gg q_0$ и

$$|z_1 - z_2| \ll \frac{q_\perp}{q_0^2}. \tag{4.40}$$

Если подставить в формулу (4.33) выражения для функций Грина (4.35), корреляционной функции (4.38) и падающего поля (4.34), интенсивность рассеяния примет вид суммы двукратных интегралов, соответствующих двум флуктуационным модам директора

$$\begin{gathered}
I^{(s)} = \sum_{j=1}^{2} I_j = J_0 \sum_{j=1}^{2} \int_0^{L_z} dz_1 \int_0^{L_z} dz_2 \\
\exp\left[i \int_{z_1}^{z_2} (k_z^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z') - k_z^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z')) dz' \right] \exp\left[-q_\perp \left| \int_{z_1}^{z_2} \mu_j(z) dz \right| \right] \times \\
\times A^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}; z_1, 0) A^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}; z_2, 0) B^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_1) B^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_2) \times \\
\times e_\rho^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_1) e_\varphi^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_2) \mathcal{M}_{\rho\varphi\nu\mu}^{(j)}(\mathbf{q}_\perp; z_1, z_2) e_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_1) e_\mu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_2),
\end{gathered} \tag{4.41}$$

где $\mathbf{q}_\perp = \mathbf{k}_\perp^{(s)} - \mathbf{k}_\perp^{(i)}$,

$$\begin{gathered}
J_0 = E_0^2 \frac{\sqrt{\varepsilon_0} c^2}{8\pi} \frac{k_0^4 \varepsilon_0}{16\pi^2} \frac{S_\perp}{r^2} \left(\frac{z}{r} \right)^2 B^{(s)2}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z) \times \\
\times e_\alpha^{(s)} e_\gamma^{(s)} M_{\alpha\beta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z) M_{\gamma\delta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z) e_\beta^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z) e_\delta^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z).
\end{gathered}$$

4.2.1. Использование больших параметров в выражении для интенсивности

Наличие в нашей системе больших параметров $\Omega = k_0/q_0$ и $\tilde{\Omega} = q_\perp/q_0$ позволяет существенно упростить общее выражение для интенсивности рассеяния (4.41). Для этого удобно снова вернуться к безразмерной переменной $\xi = q_0 z + \phi_0$. Тогда I_j принимает вид

$$I_j = \int_0^{L_z q_0} \int_0^{L_z q_0} d\xi_1 d\xi_2 F_j(\xi_1, \xi_2) \exp[i\Phi_{opt}(\xi_1, \xi_2) + \Phi_{cor}^{(j)}(\xi_1, \xi_2)], \tag{4.42}$$

где Φ_{opt} — фаза, обусловленная падающим полем и функцией Грина,

$$\Phi_{opt}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{q_0}\left[-\int_{\xi_1}^{\xi_2} k_z^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi')d\xi' + \int_{\xi_1}^{\xi_2} k_z^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi')d\xi'\right] = \\ = \frac{1}{q_0}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \Delta k_z(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi')d\xi'. \tag{4.43}$$

Здесь $\Delta k_z(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = k_z^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi) - k_z^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi)$, $k_z^{(s)}$ и $k_z^{(i)}$ равны $k_z^{(o)}$ или $k_z^{(e)}$ в зависимости от типов падающей и рассеянной волн. “Фаза” корреляционной функции $\Phi_{cor}^{(j)}(\xi_1, \xi_2)$ имеет вид

$$\Phi_{cor}^{(j)}(\xi_1, \xi_2) = -\frac{q_\perp}{q_0}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} \mu_j(\mathbf{q}_\perp, \xi')d\xi'\right|. \tag{4.44}$$

Функция $F_j(\xi_1, \xi_2)$, связанная с внеэкспоненциальными множителями в выражениях для падающего поля, функции Грина и корреляционной функции, может быть, согласно (1.53)–(1.54), записана в виде

$$F_j(\xi_1, \xi_2) = F_{1j}(\xi_1, \xi_2) + i\,\mathrm{sign}(\xi_2 - \xi_1)F_{2j}(\xi_1, \xi_2),$$

где $F_{1j}(\xi_1, \xi_2)$ и $F_{2j}(\xi_1, \xi_2)$ — гладкие функции.

Интеграл (4.42) имеет характер зависимости по большим параметрам $k_0/q_0 \sim q_\perp/q_0$ типичный для задач, решаемых методом перевала. В данном случае осложняющим фактором является наличие особенности в фазовой функции на линии $\xi_1 = \xi_2$, связанной со знаком абсолютной величины в показателе экспоненты (4.44), а также особенности вида $\mathrm{sign}(\xi_1 - \xi_2)$ функции $F_j(\xi_1, \xi_2)$ на этой же линии.

Вещественный показатель экспоненты (4.44) достигает максимума на линии $\xi_1 = \xi_2$. На этой же линии этот множитель имеет особенность, связанную с наличием знака модуля. Последнее приводит к тому, что в окрестности этой линии не происходит полного сокращения осцилляций, связанных с фазой Φ_{opt}. В результате линия $\xi_1 = \xi_2$ дает главный вклад в асимптотику всего интеграла (4.42). Вклады стационарных точек осциллирующего множителя (4.43), лежащие вне линии $\xi_1 = \xi_2$, умножаются на экспоненциально малые сомножители (4.44), и ими можно пренебречь.

Переходя к новым переменным $\xi_+ = (\xi_1 + \xi_2)/2$ и $\xi_- = (\xi_2 - \xi_1)/2$, разложим фазовые функции возле линии $\xi_- = 0$ с точностью до членов первого порядка. Имеем

$$\Phi_j(\xi_+, \xi_-) = i\Phi_{opt}(\xi_1, \xi_2) + \Phi_{cor}^{(j)}(\xi_1, \xi_2) \approx \frac{2i}{q_0}\Delta k_z(\xi_+)\xi_- - \frac{2q_\perp}{q_0}\mu_j(\xi_+)\left|\xi_-\right|. \quad (4.45)$$

Таким образом, интегралы, определяющие интенсивность рассеянного света, имеют структуру вида

$$I_j = 2\int_0^{L_z q_0} d\xi_+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_- \left[F_{1j}(\xi_+, \xi_-) + i\,\mathrm{sign}(\xi_-) F_{2j}(\xi_+, \xi_-)\right] e^{\Phi_j(\xi_+, \xi_-)}. \quad (4.46)$$

По переменной ξ_- мы распространили интегрирование от $-\infty$ до $+\infty$ так как вклад по ξ_- вносит только узкая окрестность вблизи $\xi_- = 0$.

Разбивая промежуток интегрирования на два участка $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и заменяя внеэкспоненциальные гладкие функции $F_{1j,2j}$ их значениями при

$\xi_- = 0$, получаем для внутреннего интеграла в (4.46)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(\xi_+,\xi_-)e^{\Phi_j(\xi_+,\xi_-)}d\xi_- =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} d\xi_- \exp\left(\frac{2i}{q_0}\Delta k_z(\xi_+)\xi_- + \frac{2q_\perp}{q_0}\mu_j(\xi_+)\xi_-\right)(F_{1j}(\xi_+,0) - iF_{2j}(\xi_+,0)) +$$
$$+ \int_{0}^{+\infty} d\xi_- \exp\left[\frac{2i}{q_0}\Delta k_z(\xi_+)\xi_- - \frac{2q_\perp}{q_0}\mu_j(\xi_+)\xi_-\right](F_{1j}(\xi_+,0) + iF_{2j}(\xi_+,0)) =$$
$$= \frac{q_\perp q_0 \mu_j(\xi_+)F_{1j}(\xi_+,0)}{q_\perp^2\mu_j^2(\xi_+) + \Delta k_z^2(\xi_+)} - \frac{k_0 q_0 \Delta k_z(\xi_+)F_{2j}(\xi_+,0)}{q_\perp^2\mu_j^2(\xi_+) + \Delta k_z^2(\xi_+)}. \quad (4.47)$$

Таким образом, в главном порядке по большому параметру получаем выражение для интенсивности рассеяния в виде однократного интеграла

$$I_j = 2q_0 \int_0^{L_z q_0} d\xi_+ \frac{q_\perp \mu_j(\xi_+)F_{1j}(\xi_+,0) - \Delta k_z(\xi_+)F_{2j}(\xi_+,0)}{q_\perp^2\mu_j^2(\xi_+) + \Delta k_z^2(\xi_+)}. \quad (4.48)$$

4.2.2. Основные геометрии рассеяния

Рассмотрим рассеяние света различных поляризаций. Рассеяние типа (o)–(o) отсутствует. В этом нетрудно убедиться, если принять во внимание, что в интенсивность рассеяния света входят скалярные произведения векторов поляризаций падающей и рассеянной волн и вектора директора, входящего в выражение для корреляционной функции (4.39), а вектор поляризации обыкновенной волны ортогонален директору. Здесь ситуация вполне аналогична нематическому жидкому кристаллу.

Рассмотрим (o)–(e) рассеяние. Выполняя суммирование по повторяющимся индексам и интегрирование по разностной переменной в выражении (4.41), получим

$$I(\mathbf{e}^{(o)},\mathbf{e}^{(e)}) = \frac{J_0\varepsilon_a^2 k_B T}{q_0 q_\perp K_{33}} \frac{k_0^2\varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_a k_\perp^{(s)2}\cos^2[\xi(L_z) - \gamma_s]}{\varepsilon_\perp^2 k_0 k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z)} \int\limits_0^{L_z q_0} \frac{d\xi_+ V_0(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)}{\cos^2\xi_+} \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{2} \frac{q_\perp\mu_j(\xi_+)V_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+) - [k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi_+) - k_z^{(o)}(k_\perp^{(i)})]W_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)}{q_\perp^2\mu_j^2(\xi_+) + [k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi_+) - k_z^{(o)}(k_\perp^{(i)})]^2}, \quad (4.49)$$

где γ_s — угол между векторами $\mathbf{q}_\perp$ и $\mathbf{k}_\perp^{(s)}$, γ_i — угол между векторами $\mathbf{q}_\perp$ и $\mathbf{k}_\perp^{(i)}$,

$$V_0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \frac{k_0}{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi)} \frac{k_0^2\varepsilon_\perp - k_\perp^{(s)2}\cos^2(\xi - \gamma_s)}{k_0^2\varepsilon_\perp - k_\perp^{(i)2}\cos^2(\xi - \gamma_i)}\,, \tag{4.50}$$

$$V_1(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = -\frac{k_z^{(o)2}(k_\perp^{(i)})}{k_0^2\varepsilon_\perp}\frac{\sin^2\xi}{\mu_1(\xi)} + \frac{k_\perp^{(i)2}}{k_0^2\varepsilon_\perp}\sin^2(\xi - \gamma_i)\mu_1(\xi),$$

$$V_2(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \frac{k_z^{(o)2}(k_\perp^{(i)})}{k_0^2\varepsilon_\perp}\mu_2(\xi) - \frac{k_\perp^{(i)2}}{k_0^2\varepsilon_\perp}\sin^2(\xi - \gamma_i)\frac{\sin^2\xi}{\mu_2(\xi)}, \tag{4.51}$$

$$W_1(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = W_2(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \frac{2k_\perp^{(i)}k_z^{(o)}(k_\perp^{(i)})}{k_0^2\varepsilon_\perp}\sin(\xi - \gamma_i)\sin\xi. \tag{4.52}$$

Интенсивность (e)–(o) рассеяния может быть легко получена из интенсивности (o)–(e) рассеяния, если выполнить замены: $\mathbf{e}^{(o)} \rightleftharpoons \mathbf{e}^{(e)}$ и $\mathbf{k}^{(s)} \rightleftharpoons \mathbf{k}^{(i)}$.

Отличие при расчете интенсивности (e)–(e) рассеяния состоит в том, что после выполнения сверток вклад в рассеяние дадут все четыре слагаемых корреляционной функции (4.39). Выполняя суммирование по повторяющимся индексам и интегрирование по разностной переменной в выражении (4.41), получим интенсивность (e)–(e) рассеяния в виде

$$\begin{gathered} I(\mathbf{e}^{(e)}, \mathbf{e}^{(e)}) = \frac{J_0}{q_0}\frac{\varepsilon_a^2 k_B T}{q_\perp K_{33}} \frac{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0)[k_0^2\varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_a k_\perp^{(s)2}\cos^2(\xi(L_z) - \gamma_s)]}{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L_z)[k_0^2\varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_a k_\perp^{(i)2}\cos^2(\phi_0 - \gamma_i)]\varepsilon_\perp^2} \times \\ \times \int_0^{L_z q_0} \frac{d\xi_+}{\cos^2\xi_+} \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} V_0^{(k)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi_+) \times \\ \times \frac{q_\perp\mu_j(\xi_+)V_j^{(k)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi_+) - [k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi_+) - k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi_+)]W_j^{(k)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi_+)}{q_\perp^2\mu_j^2(\xi_+) + [k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi_+) - k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi_+)]^2}. \end{gathered} \tag{4.53}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$V_0^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \frac{k_0^2\varepsilon_\perp - k_\perp^{(s)2}\cos^2(\xi - \gamma_s)}{k_0^2\varepsilon_\perp - k_\perp^{(i)2}\cos^2(\xi - \gamma_i)} \frac{k_\perp^{(i)2}\cos^2(\xi - \gamma_i)}{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi)k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi)}\,,$$

$$V_0^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = V_0^{(3)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \frac{k_\perp^{(s)}k_\perp^{(i)}\cos(\xi - \gamma_s)\cos(\xi - \gamma_i)}{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi)k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi)}\,,$$

$$V_0^{(4)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \frac{k_0^2\varepsilon_\perp - k_\perp^{(i)2}\cos^2(\xi-\gamma_i)}{k_0^2\varepsilon_\perp - k_\perp^{(s)2}\cos^2(\xi-\gamma_s)} \frac{k_\perp^{(s)2}\cos^2(\xi-\gamma_s)}{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)k_z^{(e)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi)}\,, \qquad (4.54)$$

$$\begin{aligned}
V_j^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) &= \tilde{V}_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi),\\
V_j^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) &= V_j^{(3)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \tilde{V}_j(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi),\\
V_j^{(4)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) &= \tilde{V}_j(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi),
\end{aligned}$$

где $j = 1, 2$ и

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi) = -\frac{k_1k_2}{k_0^2}\frac{\sin^2\xi}{\mu_1(\xi)}\sin(\xi-\gamma_1)\sin(\xi-\gamma_2) + {}&\\
+\frac{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_1,\xi)k_z^{(e)}(\mathbf{k}_2,\xi)}{k_0^2}\mu_1(\xi)&,
\end{aligned}$$

$$\tilde{V}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi) = \frac{k_1k_2}{k_0^2}\,\mu_2(\xi)\sin(\xi-\gamma_1)\sin(\xi-\gamma_2) - \frac{k_z^{(e)}(\mathbf{k}_1,\xi)k_z^{(e)}(\mathbf{k}_2,\xi)}{k_0^2}\frac{\sin^2\xi}{\mu_2(\xi)}\,, \qquad (4.55)$$

γ_j — угол между векторами $\mathbf{q}_\perp$ и $\mathbf{k}_j$.

$$\begin{aligned}
W_j^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) &= \tilde{W}_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi),\\
W_j^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) &= W_j^{(3)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \tilde{W}_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi),\\
W_j^{(4)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) &= \tilde{W}_j(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi),
\end{aligned}$$

где $j = 1, 2$ и

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi) &= -\frac{\sin\xi}{k_0^2}\left[k_1k_z^{(e)}(\mathbf{k}_2,\xi)\sin(\xi-\gamma_1) + k_2k_z^{(e)}(\mathbf{k}_1,\xi)\sin(\xi-\gamma_2)\right],\\
\tilde{W}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi) &= -\tilde{W}_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi). \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Выражения (4.49) и (4.53) позволяют рассчитывать интенсивность однократного рассеяния света ячейкой ХЖК в переднюю полусферу при произвольной ориентации директора в плоскостях границ. Расчет интенсивности рассеяния в заднюю полусферу можно провести теми же методами.

Использование нами больших параметров $\Omega = k_0/q_0$ и $\tilde{\Omega} = q_\perp/q_0$ приводит к определенным ограничениям на геометрические условия рассеяния, при которых применимы формулы (4.49), (4.53). Во-первых, угол γ между векторами $\mathbf{k}_\perp^{(i)}$ и $\mathbf{k}_\perp^{(s)}$ не может быть очень малым ($\gamma \gg q_0/k_0 \sim \lambda/P$), поскольку выражения для корреляционной функции получены в приближении $q_\perp \gg q_0$. Во-вторых, углы, образуемые волновыми векторами падающей $\mathbf{k}^{(i)}$ и рассеянной $\mathbf{k}^{(s)}$ волн необыкновенного типа с осью z, должны быть не слишком близки к 90°. Это связано с эффектом захвата необыкновенного луча в плоский волновой канал. Наконец, условие применимости ВКБ приближения (1.53) для корреляционной функции, связанное с неравенством (4.40), дает ограничение на толщину L_z допустимого ХЖК: $L_z \ll k_0/q_0^2 \sim \pi P^2/\lambda$. Из последнего неравенства следует, что полученные нами формулы позволяют, в частности, рассматривать ХЖК, содержащий много периодов спирали.

Мы рассчитали интенсивность рассеянного света для приведенных геометрий. При расчетах вводился угол ϕ_i между вектором директора $\mathbf{n}^0$ и вектором $\mathbf{k}_\perp^{(i)}$ на плоскости $z = 0$, а также угол γ между поперечными проекциями волновых векторов падающего и рассеянного света. Эти углы показаны на Рис. 4.3.

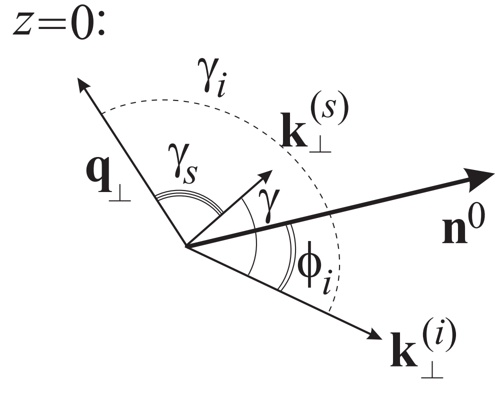


Рис. 4.3 Проекции волновых векторов на плоскость $z = 0$

Рассчитывались интенсивности рассеяния $I(\mathbf{e}^{(o)}, \mathbf{e}^{(e)})$ и $I(\mathbf{e}^{(e)}, \mathbf{e}^{(e)})$. На рисунке 4.4 показаны линии постоянной интенсивности рассеянного света для холестерика с полным углом закрутки $L_z q_0 = \pi/2$, когда угол падения по отношению к оси z равен $\pi/8$ и $\phi_i = \pi/4$. Максимальная интенсивность для обоих типов рассеяния достигается в области $\mathbf{k}^{(s)} \approx \mathbf{k}^{(i)}$. Видно, что для (o)–(e) рассеяния "пятно на экране" значительно шире, чем для (e)–(e) рассеяния. Интенсивность (e)–(e) рассеяния в центре формально не ограничена, в то время как для (o)–(e) рассеяния она конечна. Отметим также более сложную форму пика для (e)–(e) рассеяния. На Рис. 4.5 приведены те же интенсивности, но для угла падения $\pi/4$.

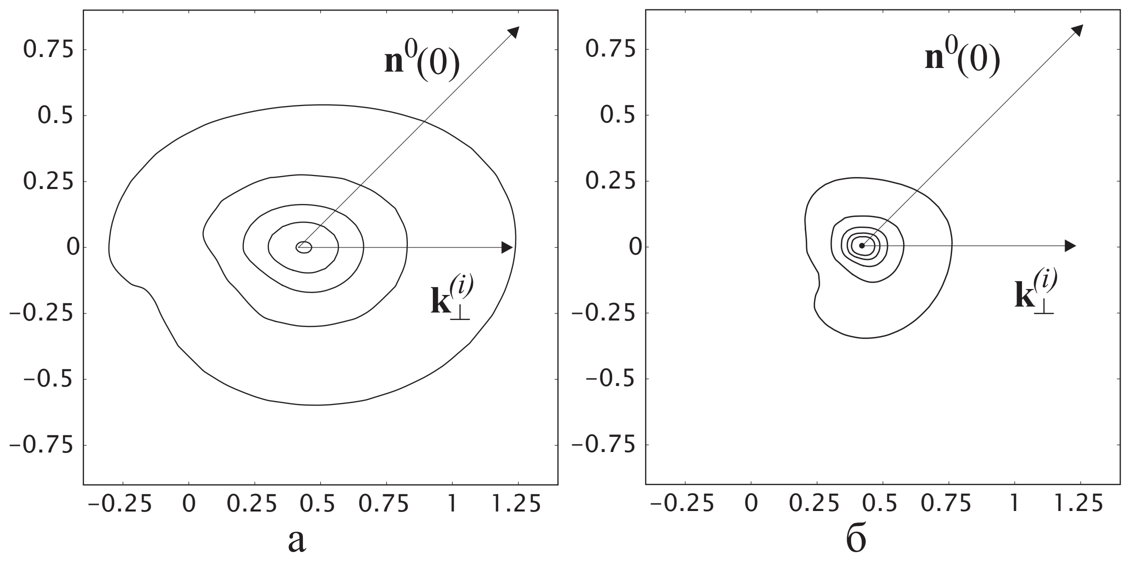


Рис. 4.4

Линии постоянной интенсивности рассеянного света для (o)–(e) (а) и (e)–(e) (б) рассеяний. На осях отложены расстояния в условных единицах, одинаковых для обоих типов рассеяния. Интенсивности рассчитаны для $\varepsilon_a = 0.5$, $\varepsilon_\perp = 2.0$, $K_{11} = 3.0 \cdot 10^{-6}$ дин, $K_{22} = 2.0 \cdot 10^{-6}$ дин, $K_{33} = 5.0 \cdot 10^{-6}$ дин, угол падения составляет $\pi/8$, $\phi_i = \pi/4$, $L_z q_0 = \pi/2$. Высота пика (o)–(e) рассеяния 2.1 условных единиц. Линии постоянной интенсивности построены на пяти уровнях: 2.0, 1.0, 0.5, 0.2, 0.05

Специфической особенностью данной системы является нелинейная зависимость интенсивности однократного рассеяния света от объема образца $V_{sc} = S_\perp L_z$. А именно при изменении толщины образца наблюдаются осцил-

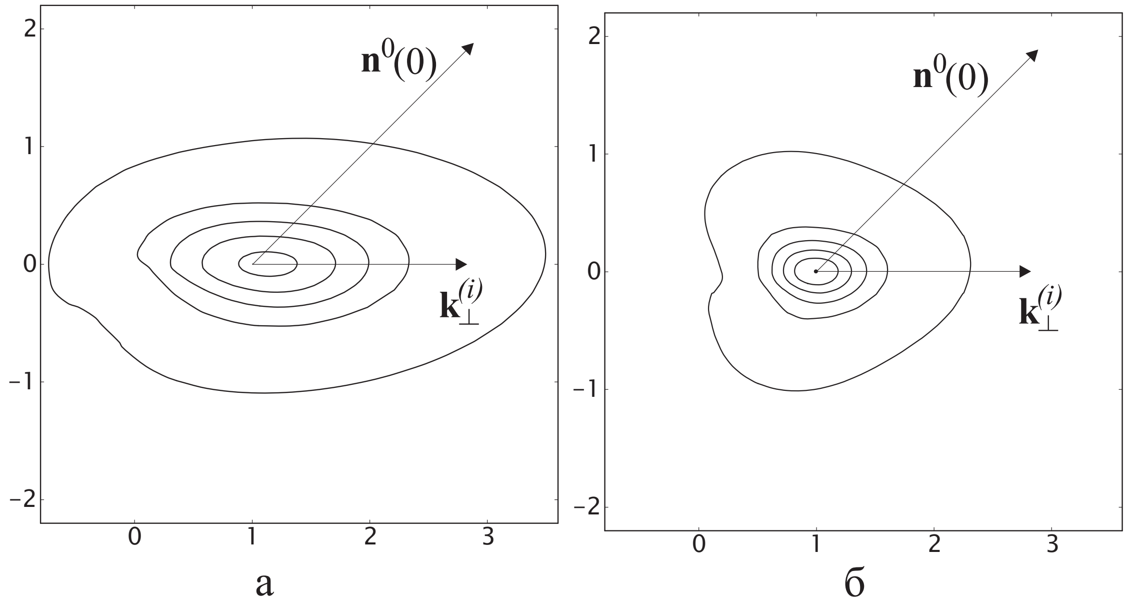


Рис. 4.5

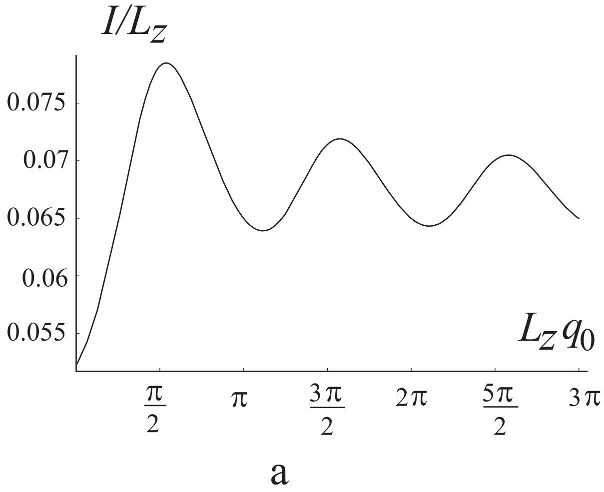
Линии постоянной интенсивности рассеянного света для (o)–(e) (а) и (e)–(e) (б) рассеяний. На осях отложены расстояния в условных единицах, одинаковых для обоих типов рассеяния. Значения диэлектрических проницаемостей и модулей Франка такие же, как на рисунке 4.4. Угол падения составляет $\pi/4$, $\phi_i = \pi/4$, $L_z q_0 = \pi/2$. Высота пика (o)–(e) рассеяния 0.68 условных единиц. Линии постоянной интенсивности построены на пяти уровнях: 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01

ляции величины I/L_z как функции параметра $L_z q_0$. При этом зависимость I от $S_\perp$, по-прежнему, линейная. Эта особенность показана на Рис. 4.6 для обоих типов рассеяния.

Мы также рассчитали степень поляризации p при рассеянии необыкновенной волны [161]

$$p = \frac{|I(\mathbf{e}^{(e)}, \mathbf{e}^{(e)}) - I(\mathbf{e}^{(e)}, \mathbf{e}^{(o)})|}{I(\mathbf{e}^{(e)}, \mathbf{e}^{(e)}) + I(\mathbf{e}^{(e)}, \mathbf{e}^{(o)})}.$$

Здесь интенсивность рассеяния (e)–(o) типа, $I(\mathbf{e}^{(e)}, \mathbf{e}^{(o)})$, может быть получена аналогично интенсивности рассеяния типа (o)–(e) (4.49). Линии постоянной степени поляризации показаны на Рис. 4.7. Эти линии имеют достаточно сложный характер, поскольку пики (e)–(e) и (e)–(o) значительно отличаются. Пик (e)–(e) рассеяния имеет большую высоту и резко спадает с углом, а



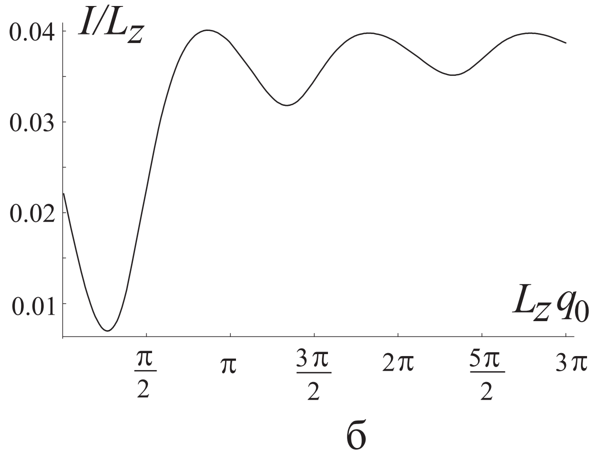


Рис. 4.6

Зависимость величины I/L_z от параметра $L_z q_0$ для (о)–(е) (а) и (е)–(е) (б) рассеяний, выраженная в условных единицах. Значения диэлектрических проницаемостей и модулей Франка такие же, как на рисунке 4.4. Угол падения составляет $\pi/8$, угол рассеяния $\pi/4$, $\gamma = \pi/6$, $\phi_i = \pi/4$

пик (е)–(о) рассеяния более пологий и имеет значительно меньшую высоту. В результате в окрестности нулевого угла рассеяния степень поляризации близка к единице, затем она достаточно быстро спадает до нуля, а далее снова начинает нарастать. На Рис. 4.7 изолиния $p = 0.5$ в области, где интенсивность (е)–(о) рассеяния становится больше, замыкается при больших углах рассеяния и поэтому мы привели только часть этой линии.

Мы исследовали рассеяние света в холестериках с большим шагом спирали. При решении этой задачи, оказалось, что учет пространственной неоднородности среды существенен как при описании собственных волн и функции Грина, так и при расчете пространственных корреляционных функций флуктуаций диэлектрической проницаемости и спектров тепловых шумов.

Использованный метод расчета может оказаться полезным при изучении рассеяния света в разнообразных слоистых средах и средах с одномерной периодичностью, когда длина световой волны мала по сравнению с простран-

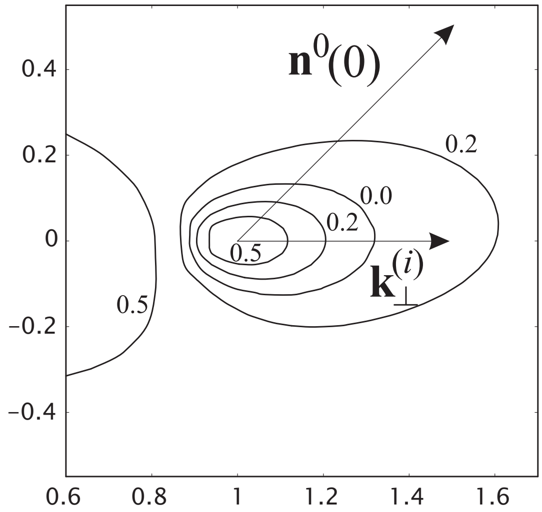


Рис. 4.7

Линии постоянной степени поляризации для (e)–(o) и (e)–(e) рассеяний. На осях отложены расстояния в условных единицах. Значения диэлектрических проницаемостей и модулей Франка такие же, как на рисунке 4.4. Угол падения составляет $\pi/4$, $\phi_i = \pi/4$, $L_z q_0 = \pi/2$. Линии постоянной степени поляризации построены на трех уровнях: 0.5, 0.2, 0.0

ственной неоднородностью среды. В частности, в рамках развитого подхода можно исследовать проблему распространения и рассеяния света в волновом канале.

Проведенные расчеты показывают, что угловые и поляризационные характеристики интенсивности рассеянного света могут быть существенными при исследовании структуры и корреляционных свойств сред с плавной пространственной периодичностью.

Глава 5.

Многократное рассеяние света в нематических жидких кристаллах. Когерентное обратное рассеяние

Недавно были получены экспериментальные данные, подтверждающие наличие пика когерентного обратного рассеяния в упорядоченных нематических жидких кристаллах. В работах [137,138] проводились измерения эффекта когерентного обратного рассеяния в нематической фазе жидкого кристалла во внешнем магнитном поле. Был обнаружен пик обратного рассеяния, ширина которого оказалась на несколько порядков уже, чем, например, для суспензий латексов. Пик обратного рассеяния представлял собой эллиптический конус. Детального теоретического описания этого эффекта до сих пор не проводилось. Трудности в описании этого эффекта вызваны тем, что, с одной стороны, НЖК — это одноосная среда со значительной оптической анизотропией. С другой стороны, в этих системах очень велики тепловые флуктуации ориентации, описание которых значительно сложнее, чем флуктуаций скалярных величин таких, как плотность или концентрация.

В этой главе проведено исследование эффекта когерентного обратного рассеяния в НЖК во внешнем магнитном поле. В рамках диффузионного приближения рассчитываются вклады лестничных и циклических диаграмм в интенсивность многократного рассеяния света.

5.1. Средняя функция Грина

В главе 4 была получена интенсивность однократного рассеяния в изотропной однородной системе (4.9). Интенсивность однократного рассеяния в НЖК имеет похожую форму [162]

$$I_{(i)}^{(s)} = I_{(i)}^{0} \frac{V_{sc}}{(4\pi)^2 R^2} \frac{1}{n^{(i)} \cos\delta^{(i)}} \frac{n^{(s)}}{\cos^3\delta^{(s)}} f_{(s)}^2 e_\alpha^{(s)} e_\beta^{(s)} B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) e_\mu^{(i)} e_\nu^{(i)}, \tag{5.1}$$

где индексы (i) и (s) обозначают тип падающей и рассеянной волны, V_{sc} — рассеивающий объем, R — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения, показатели преломления $n^{(j)}$ задаются выражением (2.6), поляризации $\mathbf{e}^{(j)}$ — выражением (2.7), множители $f_{(s)}$ — выражением (3.53),

$$\cos\delta^{(o)} = 1, \quad \cos\delta^{(e)} = \frac{(\mathbf{e}^{(e)}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{e}^{(e)})^{1/2}}{n^{(e)}}, \tag{5.2}$$

$\mathbf{q} = \mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}$, $\mathbf{k}^{(s)}$ и $\mathbf{k}^{(i)}$ — волновые векторы рассеянного и падающего света, $I_{(i)}^0$ — интенсивность (модуль вектора Пойнтинга $\mathbf{S}^{(i)}$) падающего света

$$I_{(i)}^0 = |\mathbf{S}^{(i)}| = \frac{c}{4\pi} E_{(i)}^{02} n^{(i)} \cos\delta^{(i)},$$

$B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) = k_0^4 \langle \delta\varepsilon_{\alpha\mu} \delta\varepsilon_{\nu\beta}^* \rangle(\mathbf{q})$ — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости. Она связана с флуктуациями директора (1.8) соотношением

$$B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) = k_0^4 \varepsilon_a^2 \sum_{l=1}^{2} \langle |\delta n_l(\mathbf{q})|^2 \rangle \times$$
$$\times \left(a_{l\mu} a_{l\nu} n_\alpha^0 n_\beta^0 + a_{l\mu} a_{l\beta} n_\alpha^0 n_\nu^0 + a_{l\alpha} a_{l\nu} n_\mu^0 n_\beta^0 + a_{l\alpha} a_{l\beta} n_\mu^0 n_\nu^0\right). \tag{5.3}$$

Отличие формулы (5.1) от выражения (4.9) состоит в наличии поляризационных множителей, связанных с анизотропией среды.

Если подставить явное выражение для корреляционной функции в формулу для интенсивности однократного рассеяния (5.1), то можно проанализировать особенности рассеяния на флуктуациях директора. Прежде всего, нетрудно убедиться, что в силу ортогональности вектора поляризации обыкновенного луча $\mathbf{e}^{(o)}$ и директора $\mathbf{n}^0$, нет рассеяния обыкновенного луча в обыкновенный, (o)→(o). Таким образом, возможны только рассеяния типа (o)→(e), (e)→(o) и (e)→(e). Также рассеяние отсутствует, если поляризации $\mathbf{e}^{(i)}$ и $\mathbf{e}^{(s)}$ параллельны директору $\mathbf{n}^0$. В этом случае вектора поляризации ортогональны векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ в (1.7). Обратим внимание, что рассеяние типа (o)→(e) и (e)→(o) происходит на векторе $\mathbf{q}$ с длиной $q \sim k_0|n^{(o)} - n^{(e)}|$, то есть, вектор рассеяния на всех углах остается конечным. Рассеяние типа (e)→(e) при малых углах имеет резкий пик, особенно в случаях малых полей, $H_0 \to 0$. При этом, фактически, рассеяние необыкновенного луча в необыкновенный происходит в основном вперед. Это означает, что при распространении в ЖК необыкновенный луч трансформируется из падающей плоской волны в диффузный с небольшим расширением пучка.

Наличие флуктуаций диэлектрической проницаемости приводит к тому, что при вычислении среднего поля и средней интенсивности рассеяния вместо функции Грина (3.50) необходимо использовать полную функцию Грина, усредненную по неоднородностям среды. В приближении слабого рассеяния такая усредненная функция Грина в представлении Фурье имеет вид [125]

$$\langle \hat{T}^{R/A} \rangle(\mathbf{k}) = \sum_{j=o,e} [\langle T^{R/A} \rangle(\mathbf{k})]^j \, \frac{\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s}) \otimes \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s})}{(\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s})\hat{\varepsilon}^0 \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s}))}, \tag{5.4}$$

где индексы A и R обозначают опережающую и запаздывающую функции Грина, $\langle \hat{T}^A \rangle(\mathbf{r}) = [\langle \hat{T}^R \rangle(\mathbf{r})]^*$,

$$[\langle T^{R/A} \rangle(\mathbf{k})]^j = \left[\frac{k^2 - k^{(j)2}(\mathbf{s})}{n^{(j)2}(\mathbf{s})} \mp \frac{ik_0}{n^{(j)}(\mathbf{s}) l_{(j)}(\mathbf{s})} \right]^{-1}, \tag{5.5}$$

$l_{(j)}(\mathbf{s})$ — длина свободного пробега фотона для волны типа (j). Длина свободного пробега связана с экстинкцией $\tau_{(j)}(\mathbf{s})$ соотношением

$$l_{(j)}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\tau_{(j)}(\mathbf{s})}.$$

Коэффициент экстинкции рассчитан в Приложении 2. На Рис. 5.1 показана угловая зависимость коэффициента экстинкции для нематического жидкого кристалла. Обратим внимание, что $\tau_{(e)}$, в отличие от $\tau_{(o)}$, сильно зависит от угла между волновым вектором падающей волны и оптической осью.

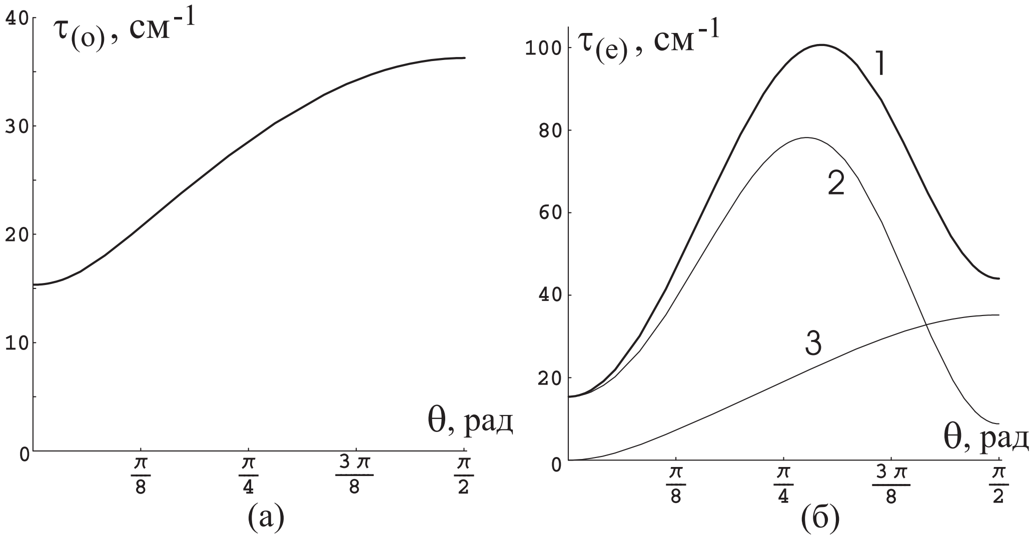


Рис. 5.1

Зависимость коэффициентов экстинкции обыкновенного, (а), и необыкновенного, (б), лучей от угла между волновым вектором падающей волны и оптической осью, θ. На кривой 1 приведен полный коэффициент экстинкции, кривые 2 и 3 — вклады в коэффициент экстинкции, связанные с рассеянием в необыкновенный и обыкновенный луч соответственно. Кривые рассчитаны по формуле (П2.3) для жидкого кристалла 5CB. Значения необходимых параметров взяты из работ [137, 138], $\varepsilon_\perp = 2.2$, $\varepsilon_a = 0.8$, $\lambda = 4.88 \cdot 10^{-5}$ см, $K_{33} = 6.1 \cdot 10^{-7}$ дин, $K_{11} = 0.79 K_{33}$, $K_{22} = 0.43 K_{33}$, $T = 301$K, $\xi_H = 4.2 \cdot 10^{-4}$ см

Наличие экстинкции приводит к тому, что величина $[\langle T^{R/A}\rangle(\mathbf{k})]^j$ становится комплексной. Полагая $\tau_{(j)} \ll k^{(j)}$, можно получить

$$\mathrm{Im}[\langle T^{R/A}\rangle(\mathbf{k})]^j \approx \pm\frac{\pi}{2k_0} n^{(j)}(\mathbf{s})\delta(k^{(j)}(\mathbf{s}) - k). \tag{5.6}$$

Тогда в координатном представлении средняя функция Грина имеет вид

$$\langle \hat{T}^{R/A} \rangle(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R} \sum_{j=o,e} n^{(j)2} f_{(j)} \frac{\mathbf{e}^{(j)} \otimes \mathbf{e}^{(j)}}{(\mathbf{e}^{(j)} \hat{\varepsilon}^0 \mathbf{e}^{(j)})} \exp\left(\pm i \mathbf{k}_{st}^{(j)} \cdot \mathbf{R} - \frac{R}{2 l_{(j)} (\mathbf{k}_{st}^{(j)} / k_{st}^{(j)})} \right), \tag{5.7}$$

где стационарные точки $\mathbf{k}_{st}^{(j)}$ задаются выражением (3.52).

5.2. Многократное рассеяние в анизотропной среде в диффузионном приближении

Наблюдаемыми величинами являются моменты поля $\mathbf{E}$. Среднее поле $\langle E_\alpha \rangle(\mathbf{x})$ определяется средней функцией Грина

$$\langle E_\alpha \rangle(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}_1 \langle T_{\alpha\beta}^R \rangle(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) F_\beta(\mathbf{x}_1),$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1)$ — источник. В этом разделе и далее мы будем обозначать пространственные координаты буквами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Свойства рассеянного света определяются функцией когерентности:

$$\langle E_\alpha(\mathbf{x}_1) E_\beta^*(\mathbf{x}_2) \rangle.$$

Нас будет интересовать автокорреляционная функция

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \langle E_\alpha(\mathbf{x}) E_\beta^*(\mathbf{x}) \rangle = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \langle T_{\alpha\alpha'}^R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) T_{\beta'\beta}^A(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \rangle F_{\alpha'}(\mathbf{x}_1) F_{\beta'}^*(\mathbf{x}_2), \tag{5.8}$$

через которую выражается интенсивность рассеянного света. Заметим, что полная функция Грина $\hat{T}^{R/A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)$ зависит от двух пространственных аргументов, так как во флуктуирующей среде отсутствует трансляционная симметрия. Однако в среднем среда является однородной, и после усреднения функция $\langle \hat{T}^{R/A} \rangle(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$ в безграничной среде будет зависеть лишь от разности пространственных аргументов.

Поскольку в НЖК флуктуации директора не малы, при распространении света в достаточно толстых образцах ЖК формируется режим многократного рассеяния. Для описания интенсивности многократного рассеяния удобно использовать уравнение Бете–Солпитера (см. напр. [119]), которое имеет вид:

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) = \Gamma^0_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) + \int d\mathbf{R}_2 d\mathbf{R}_3 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3$$
$$\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) U_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4), \quad (5.9)$$

где

$$\Gamma^0_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma^0_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) =$$
$$= \langle T^R_{\alpha\alpha'} \rangle (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \langle T^A_{\beta'\beta} \rangle (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1), \quad (5.10)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle T^R_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) T^A_{\beta'\beta}(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) \rangle. \quad (5.11)$$

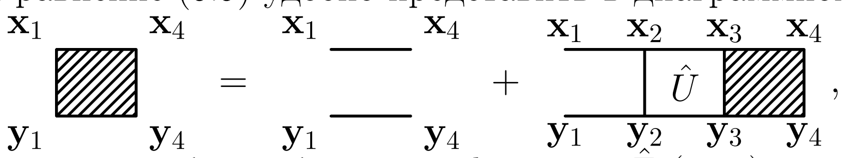
Функция $\hat{\Gamma}$ учитывает пространственные корреляции функции Грина в неоднородной среде. Функция $\hat{U}$ содержит неприводимые диаграммы оператора интенсивности. Здесь вместо координат $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$, $n = 1, \ldots 4$ введены переменные

$$\mathbf{R}_n = \frac{\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n}{2}, \quad n = 1, \ldots 4,$$

описывающие координаты “центров масс”, и переменные

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n, \quad n = 1, \ldots 4,$$

характеризующие пространственную корреляцию полей в сильно неоднородной среде. Уравнение (5.9) удобно представить в диаграммном виде



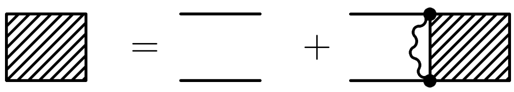
где заштрихованный блок обозначает функцию $\hat{\Gamma}$ (5.11), две параллельных линии — произведение средних функций Грина $\hat{\Gamma}^0$ (5.10), причем верхняя линия соответствует $\langle \hat{T}^R \rangle$, а нижняя — $\langle \hat{T}^A \rangle$, незаштрихованный блок, $\hat{U}$, учитывает всевозможные корреляции тензора диэлектрической проницаемости.

Величины, соответствующие элементам нижней линии, комплексно сопряжены относительно элементов верхней линии. В каждой вершине проводится интегрирование по объему и суммирование по компонентам тензорных величин. Здесь для иллюстрации указаны пространственные координаты $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$, $n = 1, \ldots 4$.

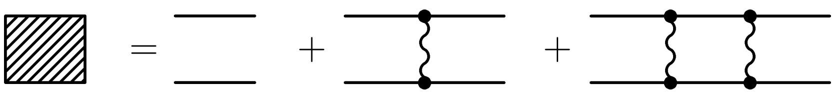
В приближении слабого рассеяния $l_{(j)} \gg \lambda$, где λ — длина световой волны, $j = 1, 2$, основной вклад в интенсивность рассеяния вносит выражение

$$U_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{r}_1)\delta\left(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\right)\delta\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right). \qquad (5.12)$$

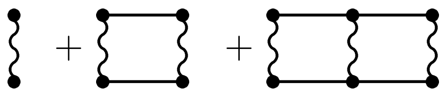
В этом случае уравнение Бете–Солпитера приводится к виду

 , (5.13)

где волнистая линия обозначает функцию $\hat{B}$. Построим итерационное решение уравнения (5.13) в диаграммном представлении

 $+ \ldots .$ (5.14)

Таким образом, использование выражения (5.12) соответствует учету лестничных диаграмм $\hat{L}$:

$L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) =$  $+ \ldots .$ (5.15)

Тогда итерационное решение уравнения (5.13) можно представить как

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) = \Gamma^0_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) + \int d\mathbf{R}_2 d\mathbf{R}_3 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3$$

$$\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Gamma^0_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4). \qquad (5.16)$$

После статистического усреднения характеристики системы становятся пространственно однородными, то есть, не зависят от абсолютных значений координат, а зависят только от их разностей. Поэтому функция $\hat{\Gamma}$ в (5.11) реально является функцией не четырех, а трех переменных $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$.

Для решения уравнения (5.13) удобно выполнить преобразование Фурье по всем трем пространственным переменным

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{K},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=\int d(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2$$
$$\exp[-i\mathbf{K}\cdot(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_1+i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}_2]\hat{\Gamma}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2). \quad (5.17)$$

Тогда уравнение (5.13) примет вид

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{K},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{K},\mathbf{k}_1)I^{(4)}_{\gamma\delta\alpha'\beta'}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)+$$
$$+\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{K},\mathbf{k}_1)\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k})\Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{K},\mathbf{k},\mathbf{k}_2), \quad (5.18)$$

а его решение (5.16) —

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{K},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{K},\mathbf{k}_1)I^{(4)}_{\gamma\delta\alpha'\beta'}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)+$$
$$+\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{K},\mathbf{k}_1)L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{K},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\Gamma^0_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{K},\mathbf{k}_2), \quad (5.19)$$

где

$$\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{K},\mathbf{k})=\langle T^R_{\alpha\gamma}\rangle(\mathbf{k}+\mathbf{K}/2)\langle T^A_{\delta\beta}\rangle(\mathbf{k}-\mathbf{K}/2), \quad (5.20)$$
$$I^{(4)}_{\gamma\delta\alpha'\beta'}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\frac{\delta_{\gamma\alpha'}\delta_{\delta\beta'}+\delta_{\gamma\beta'}\delta_{\delta\alpha'}}{2}. \quad (5.21)$$

Заметим, что диаграммный вид (5.13) и (5.14) справедлив и в представлении Фурье. Только интегрирование по координатам заменяется на интегрирование по промежуточным волновым векторам с учетом векторного закона сохранения импульса в вершинах.

Решение уравнения (5.18) сводится к суммированию бесконечного ряда (5.14). Для скалярного поля и изотропной рассеивающей среды это уравнение было решено в работе [119] в приближении точечных рассеивателей. В этом случае все величины, входящие в уравнение (5.18), являются скалярами и уравнение можно записать в виде

$$\Gamma(\mathbf{K},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=\Gamma^0(\mathbf{K},\mathbf{k}_1)(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)+\Gamma^0(\mathbf{K},\mathbf{k}_1)L(\mathbf{K},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\Gamma^0(\mathbf{K},\mathbf{k}_2). \quad (5.22)$$

В скалярном изотропном случае функции T^0 и $\langle T^{R/A}\rangle$ принимают вид

$$T^0(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 - k_0^2}, \quad \langle T^{R/A}\rangle(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 - k_0^2 \mp ik_0/l}, \tag{5.23}$$

где l — длина свободного пробега фотона. В приближении точечных рассеивателей функция B принимает вид

$$B(\mathbf{r}) = \gamma\delta(\mathbf{r}), \tag{5.24}$$

где γ — постоянная величина, связанная с длиной свободного пробега l оптической теоремой: $l = 4\pi/\gamma$. В этом случае ряд вида (5.15) легко суммируется и имеет вид геометрической прогрессии со знаменателем

$$Q(\mathbf{K}) = \gamma \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \langle T^R\rangle(\mathbf{q} + \mathbf{K}/2)\langle T^A\rangle(\mathbf{q} - \mathbf{K}/2) \approx 1 - \frac{1}{3}l^2K^2. \tag{5.25}$$

Суммирование геометрической прогрессии дает

$$L(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{\gamma}{1 - Q(K)} \approx \frac{3\gamma}{l^2K^2} = \frac{\gamma}{\tau}\frac{1}{DK^2}, \tag{5.26}$$

где $D = lc/3$ — коэффициент диффузии, τ — среднее время жизни фотона. Использование асимптотики вида K^{-2} в выражении (5.26) соответствует расстояниям $R \gg l$, когда применимо диффузионное приближение уравнения переноса излучения [166], то есть, расстояниям, на которых излучение будет хаотизировано. В случае рассеяния на частицах конечных размеров диффузионное приближение приводит к замене длины свободного пробега l в (5.26) на транспортную длину l^* которая может значительно превышать l.

В случае анизотропных систем и электромагнитного поля решение уравнения (5.18) в диффузионном приближении было получено в работе [125]. Сложность здесь состоит в том, что требуется учитывать векторный характер электромагнитного поля и различные поляризации собственных волн среды. Поэтому был предложен метод решения интегрального уравнения Бете–

Солпитера, основанный на разложении по собственным функциям интегрального уравнения. Уравнение Бете–Солпитера (5.18) можно представить в виде

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}[I^{(4)}_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) - \Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1)B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})]\Gamma_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{K}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2) =$$

$$= \Gamma^0_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1)I^{(4)}_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \quad (5.27)$$

Если собственные функции и собственные значения интегрального уравнения (5.27) обозначить как $\Psi^{(m)}_{\alpha\beta}(\mathbf{K}, \mathbf{k})$ и $\lambda^{(m)}(\mathbf{K})$, $m = 0, \ldots \infty$, то имеем

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}[I^{(4)}_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) - \Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1)B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})]\Psi^{(m)}_{\mu\nu}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) =$$

$$= \lambda^{(m)}(\mathbf{K})\Psi^{(m)}_{\alpha\beta}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1). \quad (5.28)$$

Тогда решение уравнения (5.27) можно представить в виде

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \sum_{m=0} \frac{\Psi^{(m)}_{\alpha\beta}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1)\overline{\Psi}^{(m)}_{\mu\nu}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_2)}{\lambda^{(m)}(\mathbf{K})}\Gamma^0_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_2), \quad (5.29)$$

где $\overline{\Psi}^{(m)}_{\mu\nu}$ собственные функции эрмитово сопряженной задачи. Если в сумме (5.29) ограничиться только одним слагаемым, отвечающим самому маленькому собственному значению $\lambda^{(0)}$, то можно показать, что решение имеет вид [125]

$$\Gamma^{(D)}_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{N}\frac{\mathrm{Im}\langle T^R_{\alpha\beta}\rangle(\mathbf{k}_1)\,\mathrm{Im}\langle T^R_{\alpha'\beta'}\rangle(\mathbf{k}_2)}{(\mathbf{K}\hat{D}\mathbf{K})}, \quad (5.30)$$

где

$$N = \frac{k_0^2}{16\pi^2 c}\sum_{j=o,e}\int d\Omega_{\mathbf{k}} n^{(j)3}(\mathbf{s}),$$

$\hat{D}$ — тензорный коэффициент диффузии света, который для НЖК имеет вид

$$\hat{D} = D_\perp \hat{I} + (D_\parallel - D_\perp)\mathbf{n}^0 \otimes \mathbf{n}^0, \quad (5.31)$$

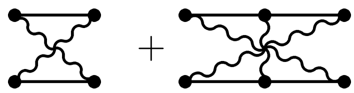
$D_\parallel$ и $D_\perp$ — коэффициенты диффузии вдоль и поперек $\mathbf{n}^0$. При построении решения (5.30) было использовано диффузионное приближение, то есть, модуль вектора $\mathbf{K}$ считается малым.

5.3. Когерентное обратное рассеяние

В предыдущем разделе было построено решение уравнения Бете–Солпитера в диффузионном приближении. Оно позволяет описать многократное рассеяние света во всех направлениях, кроме узкой окрестности рассеяния строго назад. В этой области становится существенным эффект когерентного обратного рассеяния. Физически он заключается в том, что поля, рассеянные на тех же неоднородностях, но в обратном порядке, являются когерентными. Это приводит к дополнительному вкладу и появлению узкого пика в угловой зависимости интенсивности рассеяния. Для описания этого пика формально необходимо кроме лестничных, $\hat{L}$, учитывать вклад циклических диаграмм, $\hat{C}$.

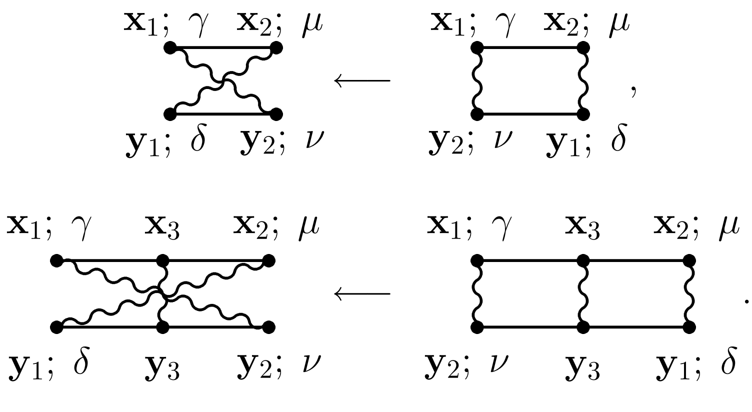
Сумма циклических диаграмм может быть представлена в виде (см. напр. [82])

$$C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) =$$



$+ \ldots . \qquad (5.32)$

Как известно, вклад циклических диаграмм нетрудно получить из лестничного, выполнив разворот нижней линии диаграмм на π:



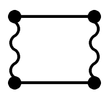
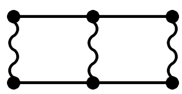
Выполняя эту процедуру для каждой диаграммы, можно получить общее соотношение для всего ряда. Подчеркнем, что такая связь лестничных и циклических диаграмм начинается с диаграммы, описывающей двукратное рассеяние. Имеем

$$C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}\left(\frac{\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2}{2}+\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{4}, \frac{\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2}{2}-\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{4},\right.$$
$$\left.\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2+\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1+\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right) \quad (5.33)$$

в координатном представлении и

$$C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}\left(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \frac{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2+\mathbf{K}}{2}, \frac{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1+\mathbf{K}}{2}\right) \quad (5.34)$$

после преобразования Фурье. Здесь введено обозначение $\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}$ для суммы лестничных диаграмм, начинающейся с двукратного рассеяния

$\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta} =$  $+$  $+\ldots.$ (5.35)

Нас будет интересовать интенсивность многократно рассеянного света, содержащая вклады лестничных и циклических диаграмм. Будем считать, что рассеивающая среда занимает объем V_{sc}. Фурье-образ $J_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)})$ функции когерентности $\langle E_\alpha(\mathbf{R}+\mathbf{r}/2)E^*_\beta(\mathbf{R}-\mathbf{r}/2)\rangle$ по переменной $\mathbf{r}$ пропорционален интенсивности излучения в точке $\mathbf{R}$ с волновым вектором $\mathbf{k}^{(s)}$ [167],

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}^{(s)}\cdot\mathbf{r}}\left\langle E_\alpha\left(\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right)E^*_\beta\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right\rangle \quad (5.36)$$

или

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}^{(s)}\cdot\mathbf{r}}\int d\mathbf{R}_3 d\mathbf{r}_3 \Gamma_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_3, \mathbf{r}, \mathbf{r}_3) J^0_{\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_3, \mathbf{r}_3), \quad (5.37)$$

где $J^0_{\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_3, \mathbf{r}_3)$ — интенсивность источника. При выполнении интегрирования по $\mathbf{R}_3$ и $\mathbf{r}_3$ необходимо учитывать, что точки с координатами $\mathbf{x}_3 = \mathbf{R}_3 + \mathbf{r}_3/2$ и $\mathbf{y}_3 = \mathbf{R}_3 - \mathbf{r}_3/2$ лежат внутри рассеивающего объема. Мы будем рассматривать случай, когда на рассеивающий объем падает плоская волна. Тогда $J^0_{\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_3, \mathbf{r}_3)$ примет вид

$$J^0_{\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_3, \mathbf{r}_3) = |E^{(i)}_0|^2 e^{(i)}_{\alpha'} e^{(i)}_{\beta'} e^{i\mathbf{k}^{(i)}\cdot\mathbf{r}_3} = I^{(i)}_{\alpha'\beta'} e^{i\mathbf{k}^{(i)}\cdot\mathbf{r}_3}.$$

С учетом вкладов лестничных и циклических диаграмм в $\hat{\Gamma}$, выражение (5.37) примет вид

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}^{(s)}\cdot\mathbf{r}} \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{R}_2 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{R}_3 d\mathbf{r}_3 \Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\times$$
$$\times [L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \Gamma^0_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) I^{(i)}_{\alpha'\beta'} e^{i\mathbf{k}^{(i)}\cdot\mathbf{r}_3}. \tag{5.38}$$

Выполняя интегрирования по $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, и $\mathbf{r}_3$, получим

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}_1)\times$$
$$\times [L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)]\times$$
$$\times \int_{S_{sc}} d\mathbf{R}_3 \Gamma^0_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}^{(i)}) I^{(i)}_{\alpha'\beta'}, \tag{5.39}$$

где S_{sc} — площадь освещаемой подающим полем поверхности.

В формулу (5.39) входит произведение средних функций Грина $\hat{\Gamma}^0$ в смешанном представлении

$$\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}_2}\times$$
$$\times \langle T^R_{\alpha\gamma}\rangle \left(\mathbf{R}_1 + \frac{\mathbf{r}_1}{2}, \mathbf{R}_2 + \frac{\mathbf{r}_2}{2}\right) \langle T^A_{\delta\beta}\rangle \left(\mathbf{R}_2 - \frac{\mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{R}_1 - \frac{\mathbf{r}_1}{2}\right). \tag{5.40}$$

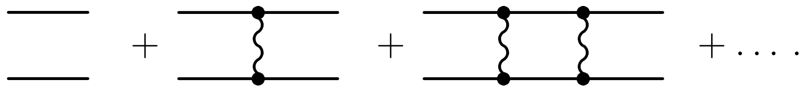
Если воспользоваться приближением дальней зоны, $r_1, r_2 \ll R$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$, то функция $\hat{\Gamma}^0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ примет вид

$$\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{4\pi^4}{R^2}\times$$
$$\times \left[\exp\left(-\frac{R}{l_{(o)}}\right) \delta\left(\mathbf{k}_1 - k_0\sqrt{\varepsilon_\perp}\frac{\mathbf{R}}{R}\right) \delta\left(\mathbf{k}_2 - k_0\sqrt{\varepsilon_\perp}\frac{\mathbf{R}}{R}\right) e^{(o)}_\alpha e^{(o)}_\beta e^{(o)}_\gamma e^{(o)}_\delta + \right.$$
$$+ \frac{R^3}{\varepsilon_\perp\sqrt{\varepsilon_\parallel}(\mathbf{R}(\hat{\varepsilon}^0)^{-1}\mathbf{R})^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{R}}{l_{(e)}}\right)\times$$
$$\left.\times \delta\left(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R})\right) \delta\left(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R})\right) e^{(e)}_\alpha e^{(e)}_\beta e^{(e)}_\gamma e^{(e)}_\delta\right]. \tag{5.41}$$

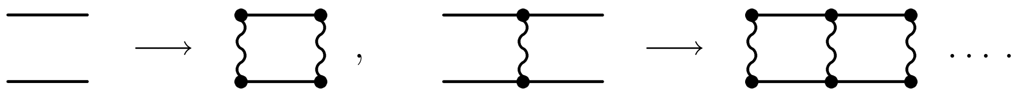
Здесь в произведении двух функций Грина мы пренебрегли “недиагональными” членами, содержащими одновременно поляризации $\mathbf{e}^{(o)}$ и $\mathbf{e}^{(e)}$.

Для вычисления интенсивности (5.39) нам осталось получить вклады лестничных и циклических диаграмм. Воспользуемся для этого диффузионным приближением (5.30), которое в диаграммном представлении имеет вид

$$\Gamma^{(D)}_{\alpha\beta\alpha'\beta'} = \qquad (5.42)$$



Если из этого ряда вычесть вклад двух первых слагаемых и убрать внешние пропагаторы, то можно получить выражение для ряда $\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}$, а следовательно, и для суммы циклических диаграмм $C_{\gamma\delta\mu\nu}$. Однако проще между концевыми частями диаграмм в (5.42) включить корреляционные функции, то есть, произвести замену



Заметим, что в результате этой процедуры мы получаем ряд для $\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}$, в котором не учитывается однократное рассеяние. Формально такое включение корреляций имеет следующий вид

$$\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{r}_1)\Gamma^{(D)}_{\mu'\delta'\gamma'\nu'}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{r}_2) \qquad (5.43)$$

или в представлении Фурье

$$\begin{gathered}\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \\ = \int \frac{d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3} B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1)\Gamma^{(D)}_{\mu'\delta'\gamma'\nu'}(\mathbf{K}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_2) = \\ = \frac{1}{N}\int \frac{d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3} B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1)\frac{\operatorname{Im}\langle T^R_{\mu'\delta'}\rangle(\mathbf{q}_1)\operatorname{Im}\langle T^A_{\gamma'\nu'}\rangle(\mathbf{q}_2)}{(\mathbf{K}\hat{D}\mathbf{K})}B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_2).\end{gathered} \qquad (5.44)$$

Для удобства введем обозначение

$$\Phi(\mathbf{K}) = \frac{1}{(\mathbf{K}\hat{D}\mathbf{K})}. \qquad (5.45)$$

Тогда $\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ можно представить в виде

$$\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{K}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \psi_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\Phi(\mathbf{K}). \qquad (5.46)$$

Уравнение (5.39) является достаточно общим. Нас будет интересовать когерентное обратное рассеяние в ограниченной среде, занимающей полупространство. Стандартный подход для учета границ состоит в следующем. Вычисляется сумма лестничных диаграмм в диффузионном приближении для безграничной среды. Полученное решение удовлетворяет уравнению диффузии, которое в стационарном случае имеет вид уравнения Лапласа. Учет ограниченности среды выполняется методом зеркальных отображений.

В анизотропной среде скорость диффузии света зависит от направления, и сумма лестничных диаграмм не будет удовлетворять уравнению Лапласа. Однако выполнив подходящую замену системы координат, можно привести уравнение для суммы лестничных диаграмм к уравнению Лапласа и использовать метод зеркальных отображений.

Мы рассмотрим геометрию, реально используемую в экспериментах [137, 138], когда НЖК ориентирован так, что оптическая ось параллельна границе раздела сред. Будем считать, что рассеивающая среда занимает полупространство $z > 0$, оптическая ось направлена по оси x, $\mathbf{n}^0 = (1, 0, 0)$. В этом случае функция $\Phi(\mathbf{K})$ в (5.45) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{K}) = \frac{1}{D_\parallel K_x^2 + D_\perp(K_y^2 + K_z^2)}. \tag{5.47}$$

Перейдем в новую систему координат, в которой

$$K'_x = \sqrt{\frac{D_\parallel}{D_\perp}} K_x, \quad K'_y = K_y, \quad K'_z = K_z.$$

Тогда $\Phi(\mathbf{K}') = 1/(D_\perp K'^2)$. Выполняя обратное преобразование Фурье, получим

$$\Phi(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = \frac{1}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|}, \tag{5.48}$$

где координаты со штрихами связаны с исходными координатами соотношениями

$$R'_x = \sqrt{\frac{D_\perp}{D_\parallel}} R_x, \quad R'_y = R_y, \quad R'_z = R_z.$$

В новой системе координат положение границы $z = 0$ не изменилось и нетрудно выполнить учет границы с помощью метода зеркальных отображений. Для полупространства получим

$$\Phi_b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{1}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \left[\frac{1}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|} - \frac{1}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'^*_2|} \right], \tag{5.49}$$

где $\mathbf{R}'^*_2 = \mathbf{R}'_2 - 2(\mathbf{R}'_2 \cdot \mathbf{e}_z + z_b)\mathbf{e}_z$. Здесь $z = z_b \cong 0.71l$ — положение плоскости, на которой сумма лестничных диаграмм обращается в ноль [115]. Если в среде имеется поглощение, то соотношение (5.49) примет вид

$$\Phi_b(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{1}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \left[\frac{\exp(-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|/\xi_a)}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|} - \frac{\exp(-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'^*_2|/\xi_a)}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'^*_2|} \right], \tag{5.50}$$

где ξ_a — средняя длина поглощения.

Используя выражения (5.43) и (5.50), получим для вклада лестничных диаграмм с учетом границы

$$\begin{gathered}\tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi N\sqrt{D_\parallel D_\perp}} B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{r}_1) \mathfrak{T}_{\mu'\delta'}(\mathbf{r}_1) \times \\ \times \left\{ \frac{\exp[-|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|/\xi_a]}{|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2|} - \frac{\exp\left[-\left|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2 + 2\left(R_{2z} + 2z_b\right)\mathbf{e}_z\right|/\xi_a\right]}{\left|\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}'_2 + 2\left(R_{2z} + 2z_b\right)\mathbf{e}_z\right|} \right\} \times \\ \times \mathfrak{T}_{\gamma'\nu'}(\mathbf{r}_2) B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{r}_2),\end{gathered} \tag{5.51}$$

где

$$\hat{\mathfrak{T}}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \, \mathrm{Im} \langle \hat{T}^R \rangle (\mathbf{k}).$$

С учетом вклада однократного рассеяния, имеющего вид (5.12), найдем полный вклад лестничных диаграмм

$$L_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \tilde{L}_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + B_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{5.52}$$

Используя формулы (5.33) и (5.50), получим для циклических диаграмм

$$
\begin{aligned}
&C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)= \\
&=\frac{1}{2\pi N\sqrt{D_\parallel D_\perp}}B_{\gamma\nu\mu'\delta'}\left(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2+\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right)\mathcal{T}_{\mu'\delta'}\left(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2+\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right)\times \\
&\times\left\{\frac{\exp[-|\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'|/(2\xi_a)]}{|\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'|}-\right. \\
&\left.-\frac{\exp\left[-\left|\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'+2\left(R_{1z}+R_{2z}-(r_{1z}-r_{2z})/2+2z_b\right)\mathbf{e}_z\right|/(2\xi_a)\right]}{\left|\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'+2\left(R_{1z}+R_{2z}-(r_{1z}-r_{2z})/2+2z_b\right)\mathbf{e}_z\right|}\right\}\times \\
&\times\mathcal{T}_{\gamma'\nu'}\left(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1+\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right)B_{\gamma'\nu'\mu\delta}\left(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1+\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right). \qquad (5.53)
\end{aligned}
$$

Диффузионное приближение, в рамках которого была вычислена сумма лестничных диаграмм, фактически предполагает короткодействующие корреляционные функции. Для простоты будем полагать в формулах (5.51) и (5.53), что входящие в эти выражение корреляционные функции имеют вид

$$
\hat{B}(\mathbf{r})=\hat{B}_0\delta(\mathbf{r}),
$$

где

$$
\hat{B}_0=\int\hat{B}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\hat{B}(\mathbf{k}=0).
$$

Выражение для $\hat{B}(\mathbf{k}=0)$ нетрудно получить из выражения (5.3), учитывая, что

$$
\langle|n_l(\mathbf{q}=0)|^2\rangle=\frac{k_BT}{\chi_aH_0^2},\quad l=1,2
$$

и пару ортогональных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ при $\mathbf{q}=0$ можно выбрать произвольно в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{n}^0$.

Выполняя преобразование Фурье по переменным $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, получаем

$$
\begin{aligned}
L_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)&=\frac{1}{4\pi N\sqrt{D_\parallel D_\perp}}B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{k}=0)\mathcal{T}_{\mu'\delta'}\mathcal{T}_{\gamma'\nu'}B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{k}=0)\times \\
&\times\left\{\frac{\exp[-|\mathbf{R}_1'-\mathbf{R}_2'|/\xi_a]}{|\mathbf{R}_1'-\mathbf{R}_2'|}-\frac{\exp\left[-\left|\mathbf{R}_1'-\mathbf{R}_2'+2\left(R_{2z}+2z_b\right)\mathbf{e}_z\right|/\xi_a\right]}{\left|\mathbf{R}_1'-\mathbf{R}_2'+2\left(R_{2z}+2z_b\right)\mathbf{e}_z\right|}\right\}+ \\
&+B_{\gamma\nu\mu\delta}(\mathbf{k}=0)\delta(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2) \qquad (5.54)
\end{aligned}
$$

и

$$C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=\frac{\delta(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)}{4\pi N\sqrt{D_\parallel D_\perp}}B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{k}=0)\mathfrak{T}_{\mu'\delta'}\mathfrak{T}_{\gamma'\nu'}B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{k}=0)\times$$
$$\times\int d\mathbf{r}_1 e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}_1}\left\{\frac{\exp[-r_1'/\xi_a]}{r_1'}-\frac{\exp\left[-\left|\mathbf{r}_1'+2\left(R_{1z}-r_{1z}/2+z_b\right)\mathbf{e}_z\right|/\xi_a\right]}{\left|\mathbf{r}_1'+2\left(R_{1z}-r_{1z}/2+z_b\right)\mathbf{e}_z\right|}\right\}, \tag{5.55}$$

где

$$\hat{\mathfrak{T}}=\hat{\mathfrak{T}}(\mathbf{r}=0)=\frac{k_0}{16\pi^2}\sum_{j=o,e}\int d\Omega_{\mathbf{k}}n^{(j)3}(\mathbf{s})\frac{\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s})\otimes\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s})}{(\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s})\hat{\varepsilon}^0\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{s}))}. \tag{5.56}$$

При выполнении интегрирования по переменной $\mathbf{r}_1$ в (5.55) следует учитывать, что точки $(\mathbf{R}_1\pm\mathbf{r}_1/2)$ должны лежать внутри рассеивающей среды. Для полупространства $z>0$ это приводит к условию $R_{1z}\pm r_{1z}/2>0$ или

$$-2R_{1z}<r_{1z}<2R_{1z}.$$

При выводе выражения (5.55) мы воспользовались соотношением:

$$\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 f(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\delta\left(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2+\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right)\delta\left(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1+\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right)=$$
$$=\delta(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 f(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_1,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2).$$

Подставляя (5.41), (5.54) и (5.55) в (5.39), получаем явное выражение для интенсивности когерентного обратного рассеяния с учетом лестничных и циклических диаграмм.

5.4. Расчет пика когерентного обратного рассеяния

Проанализируем когерентное обратное рассеяние для наиболее простой геометрии. Эта геометрия, фактически, совпадает с использованной в эксперименте работ [137, 138]. Будем считать, что свет падает по нормали к слою ЖК, $\mathbf{k}^{(i)}_{out}=k_0(0,0,1)$ (Рис. 5.2) и имеет поляризацию $\mathbf{e}^{(i)}_{out}\|\mathbf{n}^0$. При входе в ЖК это соответствует поляризации необыкновенного луча, которая также будет параллельна директору, $\mathbf{e}^{(i)} \| \mathbf{n}^0$. Индекс “*out*” относится к величинам вне рассеивающего объема.

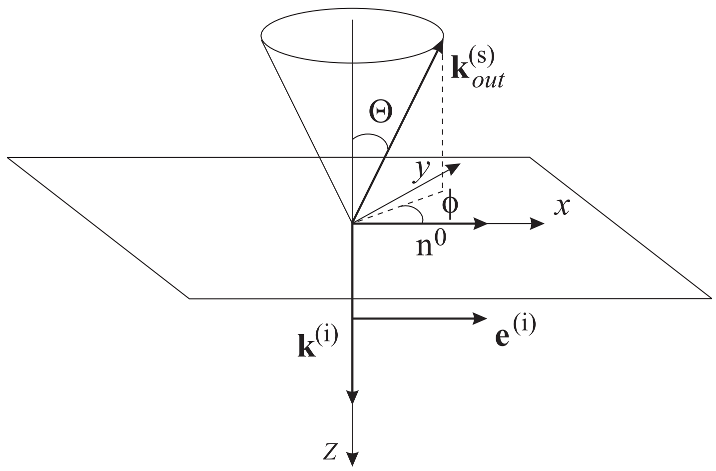


Рис. 5.2

Геометрия, используемая для расчета эффекта когерентного обратного рассеяния. Рассеивающая среда занимает полупространство $z > 0$, волна падает вдоль оси z. Рассеянное поле собирается под малым углом Θ, отсчитываемым от направления, обратного направлению оси z. Директор $\mathbf{n}^0$ направлен вдоль оси x

Интенсивность многократно рассеянного света измеряется на поверхности рассеивающей среды. Причем регистрируется рассеянный свет с той же поляризацией, что и падающий свет, $\mathbf{e}^{(s)}_{out} \| \mathbf{n}^0$. Измеряется интенсивность когерентного обратного рассеяния в узком конусе с осью вдоль оси z: $\mathbf{k}^{(s)}_{out} \approx k_0(\Theta \cos\phi, \Theta \sin\phi, -1)$, где Θ малый угол, отсчитываемый от направления, обратного направлению оси z, угол ϕ пробегает значения от 0 до 2π. В дальнейших расчетах мы должны учесть преломление волновых векторов на границе ЖК. Для описанной геометрии получим $\mathbf{k}^{(i)}$ и $\mathbf{k}^{(s)}$ внутри жидкого кристалла:

$$\mathbf{k}^{(i)} = \sqrt{\varepsilon_\|} k_0(0,0,1), \quad \mathbf{k}^{(s)} = k_0(\Theta \cos\phi, \Theta \sin\phi, -\sqrt{\varepsilon_\|}). \tag{5.57}$$

Вклад циклических диаграмм в интенсивность (5.39) имеет вид

$$J^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R},\mathbf{R}_1,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}_1)\times$$
$$\times\, C_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int\limits_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3 \Gamma^0_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_3,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}^{(i)}) I^{(i)}_{\alpha'\beta'}. \quad (5.58)$$

В дальнейших расчетах мы будем пренебрегать вкладом в функцию $\hat{\Gamma}^0$, связанным с обыкновенной волной. Это соответствует учету рассеяния только (e)→(e) типа. Такое приближение оправдано, поскольку (o)→(o) рассеяние в НЖК отсутствует, а рассеяния типа (e)→(o) и (o)→(e) значительно слабее, чем рассеяние типа (e)→(e). Подставляя в (5.58) второе слагаемое выражения (5.41) для $\hat{\Gamma}^0$ и выражение (5.55) для $\hat{C}$, получим

$$J^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}$$
$$\frac{4\pi^4}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|^2}\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|^3\exp\left(-|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|/l_{(e)}\right)}{\varepsilon_\perp\sqrt{\varepsilon_\parallel}((\mathbf{R}-\mathbf{R}_1)(\hat{\varepsilon}^0)^{-1}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1))^{3/2}}\times$$
$$\times\,\delta\left(\mathbf{k}^{(s)}-\mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1)\right)\delta\left(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1)\right)e^{(e)}_\alpha e^{(e)}_\beta e^{(e)}_\gamma e^{(e)}_\delta\times$$
$$\times\,\frac{\delta(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)}{4\pi N\sqrt{D_\parallel D_\perp}}B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{k}=0)\mathcal{T}_{\mu'\delta'}\mathcal{T}_{\gamma'\nu'}B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{k}=0)\int_{-2R_{1z}}^{2R_{1z}} d\mathbf{r}_1 e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}_1}\times$$
$$\times\left\{\frac{\exp[-r'_1/\xi_a]}{r'_1}-\frac{\exp\left[-\left|\mathbf{r}'_1+2\left(R_{1z}-r_{1z}/2+z_b\right)\mathbf{e}_z\right|/\xi_a\right]}{\left|\mathbf{r}'_1+2\left(R_{1z}-r_{1z}/2+z_b\right)\mathbf{e}_z\right|}\right\}\times$$
$$\times\int\limits_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3\frac{4\pi^4}{|\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3|^2}\frac{|\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3|^3\exp\left(-|\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3|/l_{(e)}\right)}{\varepsilon_\perp\sqrt{\varepsilon_\parallel}((\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3)(\hat{\varepsilon}^0)^{-1}(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3))^{3/2}}\times$$
$$\times\,\delta\left(\mathbf{k}^{(i)}-\mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3)\right)\delta\left(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3)\right)e^{(e)}_\mu e^{(e)}_\delta e^{(e)}_{\alpha'} e^{(e)}_{\beta'} I^{(i)}_{\alpha'\beta'}. \quad (5.59)$$

Интегрирование по $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ снимается за счет дельта-функций. Во всех подынтегральных выражениях, кроме оставшихся дельта-функций можно положить

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}^{(i)} = \mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3), \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}^{(s)} = \mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1).$$

В результате получаем

$$
\begin{gathered}
J^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)}) = M^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)})\times \\
\times \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \frac{\pi}{2}\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|\exp\left(-|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|/l_{(e)}\right)}{\varepsilon_\perp\sqrt{\varepsilon_\parallel}((\mathbf{R}-\mathbf{R}_1)(\hat{\varepsilon}^0)^{-1}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1))^{3/2}} \int_{-2R_{1z}}^{2R_{1z}} d\mathbf{r}_1 e^{i(\mathbf{k}^{(s)}+\mathbf{k}^{(i)})\cdot\mathbf{r}_1}\times \\
\times \left\{ \frac{\exp[-r_1'/\xi_a]}{r_1'} - \frac{\exp\left[-\left|\mathbf{r}_1'+2\left(R_{1z}-r_{1z}/2+z_b\right)\mathbf{e}_z\right|/\xi_a\right]}{\left|\mathbf{r}_1'+2\left(R_{1z}-r_{1z}/2+z_b\right)\mathbf{e}_z\right|}\right\}\times \\
\times \frac{\delta(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \int\limits_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3 \frac{\pi}{2}\frac{|\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3|\exp\left(-|\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3|/l_{(e)}\right)}{\varepsilon_\perp\sqrt{\varepsilon_\parallel}((\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3)(\hat{\varepsilon}^0)^{-1}(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3))^{3/2}}\times \\
\times\, \delta\left(\mathbf{k}^{(s)}-\mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1)\right)\delta\left(\mathbf{k}^{(i)}-\mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3)\right), \quad (5.60)
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
M^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)}) = e^{(e)}_\alpha(\mathbf{k}^{(s)})e^{(e)}_\beta(\mathbf{k}^{(s)})e^{(e)}_\gamma(\mathbf{k}^{(s)})e^{(e)}_\delta(\mathbf{k}^{(s)})\times \\
\times \frac{1}{N}B_{\gamma\nu\mu'\delta'}(\mathbf{k}=0)\mathcal{T}_{\mu'\delta'}\mathcal{T}_{\gamma'\nu'}B_{\gamma'\nu'\mu\delta}(\mathbf{k}=0)\times \\
\times\, e^{(e)}_\mu(\mathbf{k}^{(i)})e^{(e)}_\nu(\mathbf{k}^{(i)})e^{(e)}_{\alpha'}(\mathbf{k}^{(i)})e^{(e)}_{\beta'}(\mathbf{k}^{(i)})I^{(i)}_{\alpha'\beta'}. \quad (5.61)
\end{gathered}
$$

Детали расчета интегралов в выражении (5.60) можно найти в Приложении 4. Вклад в интенсивность обратного рассеяния за счет циклических диаграмм имеет вид

$$
\begin{gathered}
J^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)}) = J^{(C)}_{\alpha\beta}(\Theta,\phi) = M^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)})\frac{\pi^2}{8k_0^6}\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\frac{1}{D_\perp}\frac{1}{\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}}\times \\
\times \left[\frac{l_{(e)}}{\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}+1/l_{(e)}} - \frac{\exp(-2z_b\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2})}{(\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}+1/l_{(e)})^2}\right], \quad (5.62)
\end{gathered}
$$

где

$$
q'^2 = k_0^2\left(\frac{D_\parallel}{D_\perp}\Theta^2\cos^2\phi + \Theta^2\sin^2\phi\right).
$$

Вклад в интенсивность от лестничных диаграмм $J^{(L)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)})$ имеет вид

$$
\begin{gathered}
J^{(L)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}\Gamma^0_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{R},\mathbf{R}_1,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}_1)\times \\
\times\, L_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int\limits_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3\Gamma^0_{\mu\nu\alpha'\beta'}(\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_3,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}^{(i)})I^{(i)}_{\alpha'\beta'}. \quad (5.63)
\end{gathered}
$$

Этот вклад рассчитывается аналогично циклическому. Имеем

$$J^{(L)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)}) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \frac{\pi}{2}\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|\exp\left(-|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|/l_{(e)}\right)}{\varepsilon_\perp\sqrt{\varepsilon_\parallel}((\mathbf{R}-\mathbf{R}_1)(\hat{\varepsilon}^0)^{-1}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1))^{3/2}}\times$$
$$\times\left\{\frac{M^{(L)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)})}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}}\times\right.$$
$$\times\left[\frac{\exp[-|\mathbf{R}'_1-\mathbf{R}'_2|/\xi_a]}{|\mathbf{R}'_1-\mathbf{R}'_2|}-\frac{\exp\left[-\left|\mathbf{R}'_1-\mathbf{R}'_2+2\left(R_{2z}+2z_b\right)\mathbf{e}_z\right|/\xi_a\right]}{|\mathbf{R}'_1-\mathbf{R}'_2+2\left(R_{2z}+2z_b\right)\mathbf{e}_z|}\right]+$$
$$\left.+\,M^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)})\delta(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)\right\}\times$$
$$\times\int\limits_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3\frac{\pi}{2}\frac{|\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3|\exp\left(-|\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3|/l_{(e)}\right)}{\varepsilon_\perp\sqrt{\varepsilon_\parallel}((\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3)(\hat{\varepsilon}^0)^{-1}(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3))^{3/2}}\times$$
$$\times\,\delta\left(\mathbf{k}^{(s)}-\mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1)\right)\delta\left(\mathbf{k}^{(i)}-\mathbf{k}^{(e)}_{st}(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3)\right), \quad (5.64)$$

где

$$M^{(L)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)}) = e^{(e)}_\alpha(\mathbf{k}^{(s)})e^{(e)}_\beta(\mathbf{k}^{(s)})e^{(e)}_\gamma(\mathbf{k}^{(s)})e^{(e)}_\delta(\mathbf{k}^{(s)})\times$$
$$\times\frac{1}{N}B_{\gamma\delta\mu'\delta'}(\mathbf{k}=0)\mathcal{T}_{\mu'\delta'}\mathcal{T}_{\gamma'\nu'}B_{\gamma'\nu'\mu\nu}(\mathbf{k}=0)\times$$
$$\times\,e^{(e)}_\mu(\mathbf{k}^{(i)})e^{(e)}_\nu(\mathbf{k}^{(i)})e^{(e)}_{\alpha'}(\mathbf{k}^{(i)})e^{(e)}_{\beta'}(\mathbf{k}^{(i)})I^{(i)}_{\alpha'\beta'}, \quad (5.65)$$

$$M^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)}) = e^{(e)}_\alpha(\mathbf{k}^{(s)})e^{(e)}_\beta(\mathbf{k}^{(s)})e^{(e)}_\gamma(\mathbf{k}^{(s)})e^{(e)}_\delta(\mathbf{k}^{(s)})\times$$
$$\times\,B_{\gamma\delta\mu\nu}(\mathbf{k}=0)e^{(e)}_\mu(\mathbf{k}^{(i)})e^{(e)}_\nu(\mathbf{k}^{(i)})e^{(e)}_{\alpha'}(\mathbf{k}^{(i)})e^{(e)}_{\beta'}(\mathbf{k}^{(i)})I^{(i)}_{\alpha'\beta'}. \quad (5.66)$$

Здесь $M^{(L)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)})$ относится к сумме ряда лестничных диаграмм, начинающейся с двукратного рассеяния, а $M^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)})$ связан с однократным рассеянием. После вычисления интегралов в (5.64) получаем (см. Приложение 4)

$$J^{(L)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)}) = \frac{\pi^2}{8k_0^6}\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\left\{M^{(L)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)})\frac{\xi_a}{D_\perp}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{l_{(e)}}{1/\xi_a+1/l_{(e)}}-\frac{\exp(-2z_b/\xi_a)}{(1/\xi_a+1/l_{(e)})^2}\right]+M^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)})l_{(e)}\right\}. \quad (5.67)$$

Заметим, что в рассматриваемой геометрии $\mathbf{e}^{(i)}\|\mathbf{n}^0$ и $\mathbf{e}^{(s)}\|\mathbf{n}^0$. Из выражений (5.1) и (5.3) нетрудно показать, что в такой геометрии однократное рассеяние отсутствует [168], то есть, $M^{(1)}_{\alpha\beta} = 0$.

Интенсивность измеряется для поляризации рассеянного света, направленной вдоль оси x. Фактически, это означает, что $\alpha = x$ и $\beta = x$. Поскольку зависимость от угла Θ в поляризациях $\mathbf{e}^{(i)}$ и $\mathbf{e}^{(s)}$ имеет высокий порядок малости, то этим отличием можно пренебречь. Найдем коэффициенты $M^{(L)}_{xx}$ и $M^{(C)}_{xx}$. Величина $B_{\alpha\beta\mu\nu}$ при $\mathbf{k} = 0$ примет вид

$$B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k}=0) = \frac{k_0^4\varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2}\left[(\delta_{y\mu}\delta_{y\nu} + \delta_{z\mu}\delta_{z\nu})\delta_{x\alpha}\delta_{x\beta} + (\delta_{y\beta}\delta_{y\mu} + \delta_{z\beta}\delta_{z\mu})\delta_{x\alpha}\delta_{x\nu} + \right.$$
$$\left. + (\delta_{y\alpha}\delta_{y\nu} + \delta_{z\alpha}\delta_{z\nu})\delta_{x\beta}\delta_{x\mu} + (\delta_{y\alpha}\delta_{y\beta} + \delta_{z\alpha}\delta_{z\beta})\delta_{x\mu}\delta_{x\nu}\right]. \quad (5.68)$$

Здесь в выражениях (1.8) и (5.3) мы положили $\mathbf{q} = 0$. Вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ выбраны вдоль ортов системы координат: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_y$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_z$. Величина $\hat{\mathfrak{T}}$ определяется выражением (5.56) и для ее вычисления требуется найти вектора поляризаций для произвольного направления волнового вектора $\mathbf{s}$. Будем считать, что $\mathbf{s}$ имеет вид

$$\mathbf{s} = (\cos\theta,\, \sin\theta\cos\chi,\, \sin\theta\sin\chi).$$

Тогда из условий для поляризаций $\mathbf{e}^{(o)}$ и $\mathbf{e}^{(e)}$ (2.7) можно получить

$$\mathbf{e}^{(o)} = (0,\, \sin\theta\sin\chi,\, \sin\theta\cos\chi), \quad (5.69)$$

$$\mathbf{e}^{(e)} = a(\varepsilon_\perp \sin^2\theta,\; -\varepsilon_\| \cos\theta\sin\theta\cos\chi,\; -\varepsilon_\|\cos\theta\sin\theta\sin\chi), \quad (5.70)$$

где

$$a = \frac{1}{\sin\theta\sqrt{\varepsilon_\perp^2\sin^2\theta + \varepsilon_\|^2\cos^2\theta}}.$$

Из выражений (5.69) и (5.70) нетрудно видеть, что после интегрирования по углам в (5.56) все недиагональные элементы $\hat{\mathfrak{T}}$ будут равны нулю. Диагональные элементы не обращаются в ноль.

В нашем случае и падающая, и рассеянная волны имеют поляризацию типа (e), направленную вдоль оси x, то есть

$$e_\alpha^{(i)} = \delta_{x\alpha}, \quad e_\alpha^{(s)} = \delta_{x\alpha}.$$

Тогда, выполняя суммирования по повторяющимся индексам, получим

$$M_{xx}^{(L)}(\mathbf{k}^{(e)}, \mathbf{k}^{(e)}) = \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} B_{xx\mu'\delta'} \mathcal{T}_{\mu'\delta'} \mathcal{T}_{\gamma'\nu'} B_{\gamma'\nu' xx} =$$
$$= \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} \left(\frac{k_0^4 \varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2} \right)^2 (\mathcal{T}_{yy} + \mathcal{T}_{zz})^2. \quad (5.71)$$

Заметим, что $M_{xx}^{(C)}(\mathbf{k}^{(e)}, \mathbf{k}^{(e)})$ будет совпадать с $M_{xx}^{(L)}(\mathbf{k}^{(e)}, \mathbf{k}^{(e)})$ в рассмотренной геометрии. Поскольку $M_{xx}^{(C)}$ отличается от $M_{xx}^{(L)}$ лишь порядком суммирования индексов, при совпадающих поляризациях падающей и рассеянной волн эта разница исчезает. Тогда из (5.62) и (5.67) имеем

$$J_{xx}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = J_{xx}^{(C)}(\Theta = 0, \phi = 0). \quad (5.72)$$

Таким образом, относительный пик когерентного обратного рассеяния $B_{ee}(\Theta, \phi)$ будет описываться величиной

$$B_{ee}(\Theta, \phi) = \frac{J_{xx}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) + J_{xx}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)})}{J_{xx}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)})} = 1 + \frac{J_{xx}^{(C)}(\Theta, \phi)}{J_{xx}^{(C)}(0,0)}. \quad (5.73)$$

Нетрудно видеть, что максимальная высота пика будет равна 2.

Рассмотрим случай скрещенных поляризаций, когда на образец падает волна типа (o), а рассеивается волна типа (e), тогда

$$e_\alpha^{(i)} = \delta_{y\alpha}, \quad e_\alpha^{(s)} = \delta_{x\alpha}.$$

В этом случае вклады лестничных и циклических диаграмм отличаются. Выполняя суммирования, получим

$$M_{xx}^{(L)}(\mathbf{k}^{(o)}, \mathbf{k}^{(e)}) = \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} \left(\frac{k_0^4 \varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2} \right)^2 (\mathcal{T}_{yy} + \mathcal{T}_{zz}) \mathcal{T}_{xx}, \quad (5.74)$$

$$M_{xx}^{(C)}(\mathbf{k}^{(o)}, \mathbf{k}^{(e)}) = \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} \left(\frac{k_0^4 \varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2} \right)^2 \mathfrak{T}_{yx} \mathfrak{T}_{xy} = 0. \tag{5.75}$$

Вклад циклических диаграмм в этой геометрии обращается в ноль, поскольку в коэффициенте $\hat{\mathfrak{T}}$ недиагональные члены обращаются в ноль. Это означает, что в случае скрещенных поляризаций падающего и рассеянного света пик когерентного обратного рассеяния отсутствует и $B_{oe}(\Theta, \phi) \equiv 1$. Этот результат подтверждается экспериментами работ [137, 138]. Заметим также, что в режиме многократного рассеяния возможен случай падающей и рассеянной волны типа (о). Это связано с тем, что в процессе многократного рассеяния волна типа (о) может рассеяться в волну типа (е), а потом на выходе из образца волна типа (е) рассеется в волну типа (о).

Действительно, можно рассмотреть случай, когда и падающая, и рассеянная волны имеют поляризацию типа (о), направленную вдоль оси y, то есть

$$e_\alpha^{(i)} = \delta_{y\alpha}, \quad e_\alpha^{(s)} = \delta_{y\alpha}.$$

В этом случае отсутствует однократное рассеяние, однако многократное рассеяние возможно. Вклады лестничных и циклических диаграмм здесь будут совпадать

$$M_{yy}^{(L)}(\mathbf{k}^{(o)}, \mathbf{k}^{(o)}) = M_{yy}^{(C)}(\mathbf{k}^{(o)}, \mathbf{k}^{(o)}) = \frac{|E_0^{(i)}|^2}{N} \left(\frac{k_0^4 \varepsilon_a^2 k_B T}{\chi_a H_0^2} \right)^2 \mathfrak{T}_{xx}^2. \tag{5.76}$$

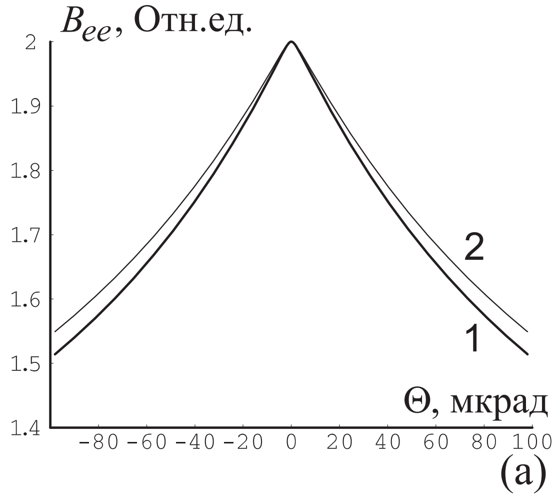
Эти вклады не обращается в ноль и возможно наблюдение пика когерентного обратного рассеяния. Пик обратного рассеяния, когда падающая и рассеянная волны являются обыкновенными, наблюдался экспериментально в работах [137, 138].

Мы провели сравнение теоретических кривых с экспериментальными данными работ [137, 138]. Поскольку рассматривался образец конечной толщины W, а мы получили формулы интенсивности для рассеяния от полупространства, в расчетах, как это обычно делается [119], мы положили в качестве длины поглощения $\xi_a \approx W$. Расчеты проведены для жидкого кристалла 5CB для длины волны $\lambda = 4.88 \cdot 10^{-5}$ см, $\varepsilon_\perp = 2.2$, $\varepsilon_a = 0.8$, $K_{33} = 6.1 \cdot 10^{-7}$ дин, $K_{11} = 0.79 K_{33}$, $K_{22} = 0.43 K_{33}$, $T = 301$K, $\xi_H = 4.2 \cdot 10^{-4}$ см. Толщина образца в эксперименте составляла $W = 4$ см. При расчетах значения коэффициентов диффузии $D_\parallel$ и $D_\perp$ были взяты из работы [169], где эти величины измерялись экспериментально $D_\parallel = 4.56 \cdot 10^8$ см^2/с, $D_\parallel / D_\perp = 1.26$. Длина свободного пробега $l_{(e)} = 1/\tau_{(e)}$. Экстинкция необыкновенного луча была рассчитана по формуле (П2.3) и при рассеянии назад ($\theta = \pi/2$) составляет $\tau_{(e)} = 44.0$ см$^{-1}$.

На Рис. 5.3(а) показана угловая зависимость пика когерентного обратного рассеяния $B_{ee}(\Theta, \phi = 0)$ и $B_{ee}(\Theta, \phi = \pi/2)$ для геометрии, приведенной на Рис. 5.2. Поляризации падающего и многократно рассеянного света направлены по оси x вдоль директора, что соответствует рассеянию типа (e)-(e). Для сравнения на Рис. 5.3(б) показана экспериментальная кривая, полученная в работах [137, 138] для этого же ЖК в той же геометрии. Сравнение рисунков 5.3(а) и 5.3(б) показывает, что ширина пиков практически совпадает. Также совпадает отношение ширин пиков при $\phi = 0$ и $\phi = \pi/2$ (отношение осей эллипса, лежащего в сечении пика обратного рассеяния). Отличие состоит в том, что теоретически рассчитанный пик имеет высоту 2, а экспериментально наблюдаемый ~ 1.6.

На Рис. 5.4 приведены теоретические и экспериментальные и данные для случая скрещенных поляризаций. Как видно из рисунков, пик когерентного обратного рассеяния отсутствует, и имеется только фон, обусловленный лестничными диаграммами.

На Рис. 5.5 приведены сечения пиков когерентного обратного рассеяния на разных высотах, рассчитанные теоретически, (а), и измеренные экспериментально (б). Экспериментальные данные взяты из работ [137, 138]. На верхних графиках показаны пики для падающей и рассеянной необыкновенной вол-



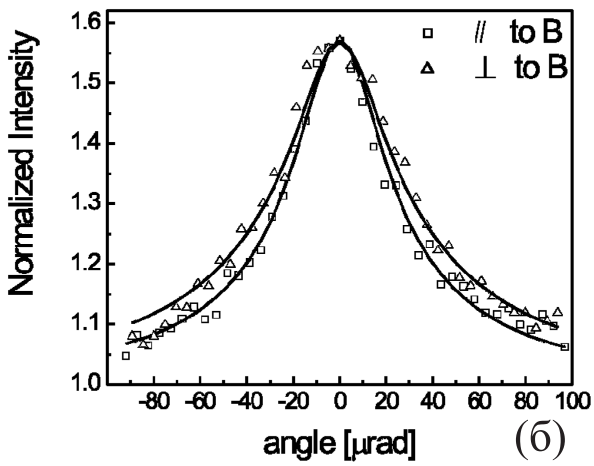


Рис. 5.3

Угловая зависимость пика когерентного обратного рассеяния. Поляризации падающей и рассеянной волн направлены вдоль директора. Расчеты (а) проведены по формулам (5.62) и (5.73) для жидкого кристалла 5CB. Значения параметров, такие же как на Рис. 5.1. Отношение коэффициентов диффузии составляет $D_{\|}/D_{\perp} = 1.26$. Экстинкция необыкновенного луча при рассеянии назад составляет $\tau_{(e)} = 44.0$ см$^{-1}$. Длина свободного пробега $l_{(e)} = 1/\tau_{(e)}$. Длина поглощения $\xi_a = 4$ см, $z_b = 0.71 l_{(e)}$. Кривая 1 соответствует расчету при $\phi = 0$, то есть, для направления вдоль директора, кривая 2 — $\phi = \pi/2$, поперек директора. Экспериментальные кривые, (б), взяты из работ [137, 138] для этого же ЖК в той же геометрии. На рисунке (б) квадраты соответствуют направлению сканирования вдоль директора, треугольники — поперек директора.

ны, на нижних — для падающей и рассеянной обыкновенной волны. Стрелкой показано направление директора. Верхний график рассчитан по формуле (5.73). Значения параметров взяты такими же, как для Рис. 5.3. Нижний график также можно получить из формулы (5.73), однако требуется учесть, что экстинкция $\tau_{(o)}$ отличается от экстинкции $\tau_{(e)}$. Экстинкция обыкновенного луча при рассеянии назад составляет $\tau_{(o)} = 36.3$ см$^{-1}$. В обоих случаях пик обратного рассеяния оказывается вытянутым в направлении поперек директора. Пик для обыкновенной волны несколько уже пика для необыкновенной волны из-за меньшей экстинкции.

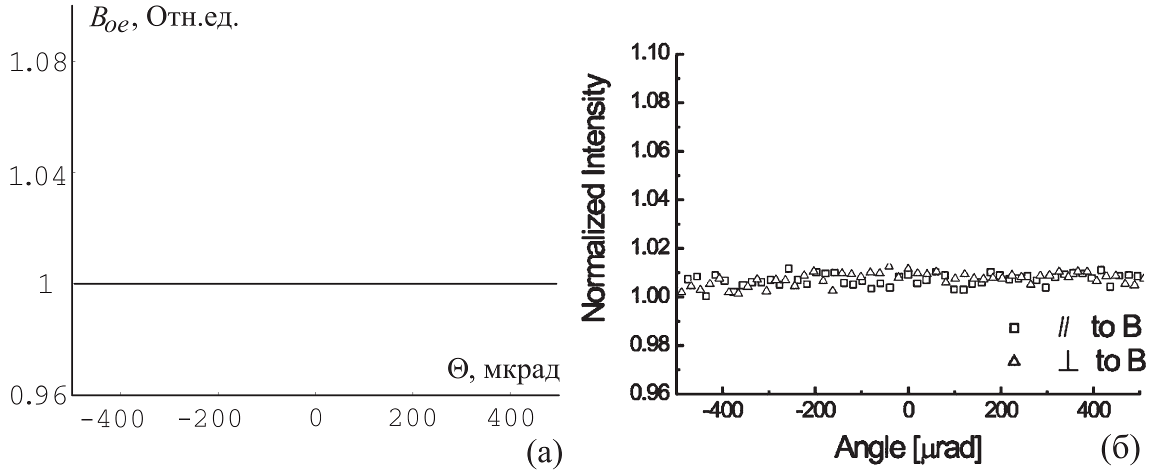


Рис. 5.4

Относительная интенсивность рассеяния в случае скрещенных поляризаций. Поляризация падающей волны направлена поперек директора, а поляризация рассеянной — вдоль директора. В этом случае $B_{oe} \equiv 1$ — прямая (а). Экспериментальные точки для случая скрещенных поляризаций, (б), взяты из работ [137, 138]. На обоих графиках отсутствует пик обратного рассеяния

Мы провели расчеты и сравнили с экспериментом высоту и форму пика когерентного обратного рассеяния для нематического жидкого кристалла. При расчетах мы не использовали ни одного подгоночного параметра. Как видно из рисунков, удается хорошо описать ширину пика обратного рассеяния, а также его анизотропию. В частности, экспериментально наблюдаемое отношение полуосей эллипса, лежащего в сечении пика составляет 1.15-1.17, а расчетное — $\sqrt{D_\parallel/D_\perp} = 1.12$.

Было показано, что вклад циклических диаграмм в геометрии эксперимента [137, 138] должен строго обращаться в ноль при скрещенных поляризациях, когда падающий луч имеет поляризацию (o), а рассеянный — (e) или наоборот. Единственный факт, который объяснен с недостаточной точностью, это относительная высота пика обратного рассеяния над фоном — предсказанная высота пика примерно на 20% больше, чем наблюдаемая на эксперименте. Наиболее вероятная причина такого расхождения состоит в

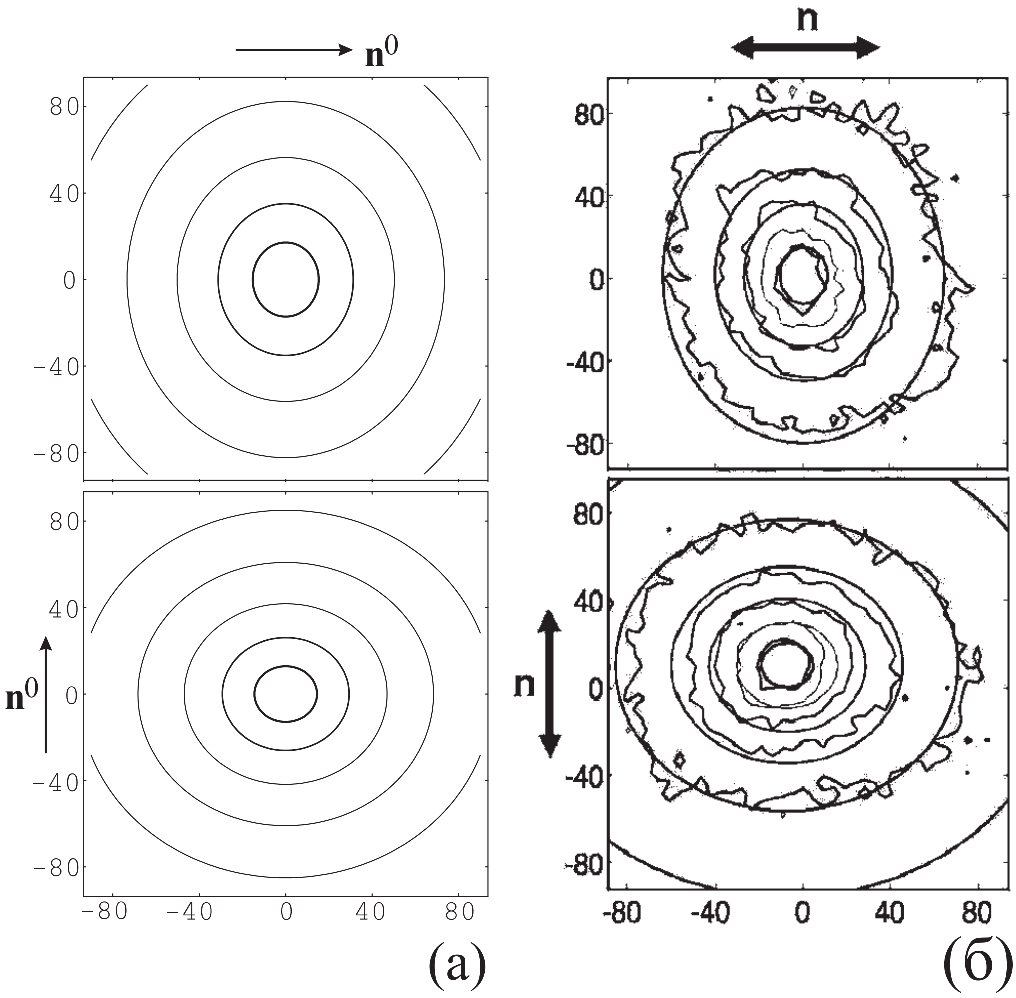


Рис. 5.5

Сечения пиков когерентного обратного рассеяния на разных высотах, рассчитанные теоретически, (а), и измеренные экспериментально (б). Экспериментальные данные взяты из работ [137,138]. На верхних графиках показаны пики для падающей и рассеянной необыкновенной волны, на нижних — для падающей и рассеянной обыкновенной волны. Стрелкой показано направление директора. По осям отложен угол Θ, выраженный в микрорадианах. На Рис. (а) сечения пика производились на высотах 1.9, 1.8, 1.7, 1.6 и 1.5. На Рис. (б) сечения выполнены в интервале высот 1.1–1.6

следующем. В наших расчетах относительная высота пика определяется отношением интенсивности рассеяния, обусловленного циклическими диаграммами, к интенсивности, связанной с лестничными. При рассеянии строго назад эти интенсивности в точности совпадают, поскольку вклад однократного рассеяния в рассмотренной геометрии равен нулю. Возможная причина расхождения состоит в том, что мы учитывали только наиболее сильное (е)-(е) рассеяние. Однако может быть заметным вклад также перекрестных рассеяний типа (о)-(е) или (е)-(о). Как мы видели, в перекрестном рассеянии пик отсутствует за счет обращения в ноль вклада циклических диаграмм. Вместе с тем, такой вклад в лестничных диаграммах существует. Таким образом, учет промежуточных перекрестных рассеяний должен увеличить интенсивность, обусловленную лестничными диаграммами, и практически не изменит интенсивность рассеяния, связанную с циклическими диаграммами. Это и должно привести к снижению относительной высоты пика обратного рассеяния.

Глава 6.

Временны́е корреляции многократно рассеянного света

6.1. Система уравнений для временно́й корреляционной функции

Рассмотрим среду со случайными пространственно-временными флуктуациями диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ относительно среднего значения $\varepsilon = \langle\varepsilon(\mathbf{r}, t)\rangle$. Пренебрегая в многократно рассеивающей среде поляризационными эффектами, волновое уравнение Максвелла (2.3) заменяют скалярным уравнением Гельмгольца, которое можно записать в интегральной форме

$$E(\mathbf{r}, t) = \langle E(\mathbf{r})\rangle + k_0^2 \int d\mathbf{r}_1 T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1, t)E(\mathbf{r}_1, t), \tag{6.1}$$

где $\langle E(\mathbf{r})\rangle = E_0 \exp(i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ — среднее макроскопическое поле в среде, $\mathbf{k}^{(i)}$ — волновой вектор падающей волны, $T(\mathbf{r}) = \exp(ikr)/(4\pi r)$ — функция Грина скалярного волнового уравнения. Множитель, описывающий гармоническую зависимость $\exp(i\omega t)$, мы далее опускаем, считая, что время изменения поля неоднородностей среды гораздо больше периода световой волны.

Нас будет интересовать рассеянное поле, возникающее в результате многократного рассеяния. Среднее от произведения флуктуаций рассеянных полей $\delta E(\mathbf{r},t) = E(\mathbf{r},t) - \langle E(\mathbf{r})\rangle$ в разные моменты времени представляет собой временну́ю корреляционную функцию, которую можно записать в виде

$$C(t) = \langle \delta E^*(\mathbf{r},t)\delta E(\mathbf{r},0)\rangle = r^{-2}E_0^2 \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_2' d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_1'$$
$$\exp(-i\mathbf{k}^{(s)}\cdot\mathbf{r}_2 + i\mathbf{k}^{(s)*}\cdot\mathbf{r}_2' + i\mathbf{k}^{(i)}\cdot\mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}^{(i)*}\cdot\mathbf{r}_1')\Gamma(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1',t), \quad (6.2)$$

где r — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения, $\mathbf{k}^{(s)}$ — волновой вектор рассеянной волны, $\Gamma(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1',t)$ — функция когерентности, которая удовлетворяет уравнению Бете–Солпитера, аналогичному (5.9)

$$\Gamma(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1',t) = k_0^4 \mathcal{G}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_2',t)[\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_1')+$$
$$+\int d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_3' T(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)T^*(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_3')\Gamma(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_3',\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1',t)], \quad (6.3)$$

где

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t_1-t_2) = \langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}_1,t_1)\delta\varepsilon(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle \quad (6.4)$$

— парный коррелятор флуктуаций диэлектрической проницаемости. Будем считать, что среда представляет собой систему броуновских частиц, так что Фурье-образ корреляционной функции имеет вид

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{q},t) = \int d\mathbf{r}\,\mathcal{G}(\mathbf{r},t)\exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{q})\exp(-Dq^2t), \quad (6.5)$$

где D — коэффициент диффузии. Величина $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) = \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{q},t=0)$ описывает индикатрису однократного рассеяния, или фазовую функцию, с передачей импульса $q = 2k\sin(\theta/2)$, где θ — угол рассеяния.

Введем координаты "центра тяжести" $\mathbf{R}_j = (\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_j')/2$ и "относительные координаты" $\mathbf{r}_j'' = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j'$. Тогда уравнение (6.3) можно представить в виде

$$\Gamma(\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_1,t|\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)}) = k_0^4\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}^{(s)}-\mathbf{k}^{(i)},t)\delta(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1)+$$
$$+k_0^4\int d\mathbf{R}_3\tilde{\mathcal{G}}(-\mathbf{k}^{(s)}+\mathbf{k}_{23},t)\Lambda(R_{23})\Gamma(\mathbf{R}_3,\mathbf{R}_1,t|\mathbf{k}_{23},\mathbf{k}^{(i)}), \quad (6.6)$$

где

$$\Gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) = \int d\mathbf{r}_1'' d\mathbf{r}_2'' \Gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, \mathbf{r}_2'', \mathbf{r}_1'', t) \exp(i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r}_1'' - i\mathbf{k}^{(s)} \cdot \mathbf{r}_2'') \tag{6.7}$$

— Фурье-образ функции когерентности по относительным координатам, $\mathbf{k}_{ij} = k\mathbf{R}_{ij}R_{ij}^{-1}$ — волновой вектор волны, распространяющейся из точки $\mathbf{R}_j$ в точку $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$, $\Lambda(R) = (4\pi R)^{-2}\exp(-R/l)$, l — длина экстинкции.

Будем считать, что среда занимает полупространство $z > 0$, z — декартова координата, перпендикулярная границе. Тогда зависимость от координат $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ сводится к зависимости от относительного двумерного вектора $\boldsymbol{\rho}_{21} = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)_\perp$, лежащего в касательной плоскости (x, y), и координат z_1 и z_2,

$$\Gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) = \Gamma(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, z_1, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}), \tag{6.8}$$

а фазовый множитель, входящий в уравнение (6.2), имеет вид

$$\exp(-i\mathbf{k}^{(s)} \cdot \mathbf{r}_2 + i\mathbf{k}^{(s)*} \cdot \mathbf{r}_2' + i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}^{(i)*} \cdot \mathbf{r}_1') \approx$$
$$\approx \exp\left(-\frac{z_1}{l\cos\theta_i} + \frac{z_2}{l\cos\theta_s}\right) \exp(i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r}_1'' - i\mathbf{k}^{(s)} \cdot \mathbf{r}_2''), \tag{6.9}$$

где θ_i и θ_s — углы падения и рассеяния соответственно. Для удобства рассмотрим случай нормального падения, когда волновой вектор падающей волны направлен вдоль единичной нормали к поверхности $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{k}^{(i)} \| \mathbf{e}_z$. Применим к уравнению (6.6) операцию $\int_0^\infty dz_1 \exp(-z_1/l)$, получим

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) = k_0^4 \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}, t)\delta(\boldsymbol{\rho}_{21})\theta(z_2)\exp(-z_2/l) +$$
$$+ k_0^4 \int \tilde{\mathcal{G}}(-\mathbf{k}^{(s)} + \mathbf{k}_{23}, t)\Lambda(R_{23})\Phi(\boldsymbol{\rho}_{31}, z_3, t|\mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}^{(i)})d\mathbf{R}_3, \tag{6.10}$$

где

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) = \int_0^\infty dz_1 \exp(-z_1/l)\Gamma(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, z_1, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}). \tag{6.11}$$

Уравнение (6.10) можно рассматривать как обобщение уравнения Милна–Шварцшильда на случай временны́х корреляций.

Временна́я корреляционная функция (6.2) в этой геометрии с учетом (6.9) и (6.11) имеет вид

$$C(t) \sim \int d\boldsymbol{\rho}_{21} \int_0^\infty dz_2\, \Phi(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) \exp(-z_2/l\cos\theta_s). \tag{6.12}$$

Функция Φ, определяющая временну́ю корреляционную функцию, зависит от трех векторов $\boldsymbol{\rho}_{21}$, $\mathbf{k}^{(s)}$ и $\mathbf{k}^{(i)}$. Вектор $\mathbf{k}^{(i)}$ направлен вдоль оси z: $\mathbf{k}^{(i)} = k(0,0,1)$. В сферической системе координат с осью z, $\mathbf{k}^{(i)} \parallel \mathbf{e}_z$, векторы $\mathbf{k}^{(s)}$ и $\boldsymbol{\rho}_{21}$ можно записать в виде $\mathbf{k}^{(s)} = k(\sin\theta_s\cos\phi_s, \sin\theta_s\sin\phi_s, \cos\theta_s)$, $\boldsymbol{\rho}_{21} = \rho_{12}(\cos\phi_\rho, \sin\phi_\rho, 0)$, где $\cos\theta_s = (\mathbf{k}^{(s)}\cdot\mathbf{k}^{(i)})/k^2$. Также удобно ввести угол ϕ между $\boldsymbol{\rho}_{21}$ и проекцией $\mathbf{k}^{(s)}$ на плоскость (x,y), $\cos\phi = \cos(\phi_\rho - \phi_s)$.

Далее мы разложим функцию $\Phi(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)})$ в ряд по сферическим функциям. Учет сферических функций нулевого и первого порядков дает хорошо известное диффузионное приближение. Мы рассмотрим разложение функции $\Phi(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)})$ вплоть до членов второго порядка. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) = \frac{1}{4\pi l}\Big[&\gamma_0(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t)P_0^0(\cos\theta_s) + \gamma_1(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t)P_1^0(\cos\theta_s) + \\ &+ \gamma_1^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t)P_1^1(\cos\theta_s)\cos\phi + \gamma_2(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t)P_2^0(\cos\theta_s) + \\ &+ \gamma_2^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t)P_2^1(\cos\theta_s)\cos\phi + \gamma_2^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t)P_2^2(\cos\theta_s)\cos 2\phi\Big].\end{aligned} \tag{6.13}$$

Здесь $P_i^j(x)$ — полиномы Лежандра: $P_0^0(x) = 1$, $P_1^0(x) = x$, $P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $P_2^0(x) = (3x^2-1)/2$, $P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}$, $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$. Разложение (6.13) представляет собой P_2–приближение для функции Φ.

Как видно из формулы (6.12), при вычислении временно́й корреляционной функции по вектору $\boldsymbol{\rho}_{21}$ проводится интегрирование. Тогда члены, содержащие угол ϕ исчезают. Поэтому можно ограничиться в разложении (6.13) анализом членов, не содержащих угол ϕ:

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) = \frac{1}{4\pi l}[&\gamma_0(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t) + \gamma_1(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t)P_1^0(\cos\theta_s) + \\ &+ \gamma_2(\boldsymbol{\rho}_{21}, z_2, t)P_2^0(\cos\theta_s)].\end{aligned} \tag{6.14}$$

С помощью уравнения (6.10) можно получить систему уравнений на функции γ_i, $i = 0, 1, 2$. Для этого последовательно применим к уравнению (6.10) интегрирования вида $\int d\boldsymbol{\rho}_{21} \int d\Omega_s$, $\int d\boldsymbol{\rho}_{21} \int d\Omega_s P_1^0(\cos\theta_s)$ и $\int d\boldsymbol{\rho}_{21} \int d\Omega_s P_2^0(\cos\theta_s)$, где интеграл $\int d\Omega_s$ соответствует интегрированию по всевозможным направлениям $\mathbf{k}^{(s)}$. В результате получаем

$$\frac{1}{2j+1}\gamma_j(z_2,t) = g_j(t)[\theta(z_2)\exp(-z_2/l) + \frac{1}{4l}\int_0^\infty dz_3 \Lambda_{jk}(0, z_{23})\gamma_k(z_3,t)]. \quad (6.15)$$

Индексы j и k пробегают значения 0, 1, 2. Здесь

$$\gamma_j(z,t) = \int \gamma_j(\boldsymbol{\rho}_{21}, z, t)d\boldsymbol{\rho}_{21}, \quad (6.16)$$

$$g_j(t) = lk_0^4 \int d\Omega_s \tilde{\mathfrak{G}}(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}, t)P_j^0(\cos\theta_s). \quad (6.17)$$

Длина экстинкции связана с корреляционной функцией оптической теоремой

$$l^{-1} = k_0^4 \int d\Omega_s \tilde{\mathfrak{G}}(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}). \quad (6.18)$$

Величины $g_j(t)$ параметризуют анизотропию однократного рассеяния. Величина $\Lambda_{jk}(0, z)$ — симметричная матрица размера 3×3 с элементами

$$\begin{aligned}
\Lambda_{00}(0,z) &= 2(4\pi)^{-2}\int_1^\infty \frac{dr}{r}\exp(-|z|r/l)\\
\Lambda_{01}(0,z) &= 2(4\pi)^{-2}\,\mathrm{sign}(z)\int_1^\infty \frac{dr}{r^2}\exp(-|z|r/l)\\
\Lambda_{02}(0,z) &= (4\pi)^{-2}\int_1^\infty \frac{dr}{r}\left(\frac{3}{r^2}-1\right)\exp(-|z|r/l)\\
\Lambda_{11}(0,z) &= 2(4\pi)^{-2}\int_1^\infty \frac{dr}{r^3}\exp(-|z|r/l)\\
\Lambda_{12}(0,z) &= (4\pi)^{-2}\,\mathrm{sign}(z)\int_1^\infty \frac{dr}{r^2}\left(\frac{3}{r^2}-1\right)\exp(-|z|r/l)\\
\Lambda_{22}(0,z) &= \frac{1}{2}(4\pi)^{-2}\int_1^\infty \frac{dr}{r}\left(\frac{3}{r^2}-1\right)^2\exp(-|z|r/l).
\end{aligned} \quad (6.19)$$

В дальнейшем удобно перейти к безразмерной переменной $\tilde{z} = z/l$.

В системе интегральных уравнений (6.15) по переменной $\tilde{z}_2$ проведем преобразование Лапласа. Определив Лаплас-образы

$$\tilde{\gamma}_j(s,t) = \int_0^\infty \exp(-s\tilde{z})\gamma_j(\tilde{z},t)d\tilde{z}\,, \quad (6.20)$$

получим

$$
\begin{gathered}
(1-g_0(t)m_0(s))\tilde\gamma_0(s,t)+sm_1(s)g_0(t)\tilde\gamma_1(s,t)- \\
-\frac{1}{2}g_0(t)(3m_1(s)-m_0(s))\tilde\gamma_2(s,t)=a_0\,g_0(t) \\
g_1(t)sm_1(s)\tilde\gamma_0(s,t)+\left(\frac{1}{3}-g_1(t)m_1(s)\right)\tilde\gamma_1(s,t)+ \\
+\frac{1}{2}g_1(t)s(3m_2(s)-m_1(s))\tilde\gamma_2(s,t)=a_1\,g_1(t) \\
-\frac{1}{2}g_2(t)(3m_1(s)-m_0(s))\tilde\gamma_0(s,t)+\frac{1}{2}g_2(t)s(3m_2(s)-m_1(s))\tilde\gamma_1(s,t)+ \\
+\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{4}g_2(t)(9m_2(s)-6m_1(s)+m_0(s))\right]\tilde\gamma_2(s,t)=a_2\,g_2(t)\,,
\end{gathered}
\tag{6.21}
$$

где

$$
\begin{gathered}
m_0(s)=\int_1^\infty\frac{dr}{r^2-s^2}=\frac{1}{2s}\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|\,, \\
m_1(s)=s^{-2}(m_0(s)-1),\qquad m_2(s)=s^{-2}(m_1(s)-1/3), \\
a_0=\frac{1}{1+s}-\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{dr}{r(r-s)}\,\tilde\gamma(r,t) \\
a_1=\frac{1}{1+s}+\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{dr}{r^2(r-s)}\,\tilde\gamma(r,t), \\
a_2=\frac{1}{1+s}-\frac{1}{4}\int_1^\infty\frac{dr}{r(r-s)}\left(\frac{3}{r^2}-1\right)\,\tilde\gamma(r,t).
\end{gathered}
\tag{6.22}
$$

Здесь введено обозначение

$$
\tilde\gamma(r,t)\equiv\tilde\gamma_0(r,t)-\frac{1}{r}\tilde\gamma_1(r,t)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{r^2}-1\right)\tilde\gamma_2(r,t)\,. \tag{6.23}
$$

Временная корреляционная функция поле-поле (6.12) при рассеянии назад с учетом разложения (6.14) принимает вид

$$
\begin{gathered}
C(t)\sim\frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{\rho}\,dz_2\left[\gamma_0(\boldsymbol{\rho},z_2,t)+\gamma_1(\boldsymbol{\rho},z_2,t)P_1^0(\cos\theta_s)+\right. \\
\left.+\,\gamma_2(\boldsymbol{\rho},z_2,t)P_2^0(\cos\theta_s)\right]\exp(-z_2/l).
\end{gathered}
\tag{6.24}
$$

Выполняя преобразование Лапласа (6.20) при $s=1$ с учетом (6.16) имеем

$$
C(t)\sim\frac{1}{4\pi}\left[\tilde\gamma_0(1,t)-\tilde\gamma_1(1,t)+\gamma_2(1,t)\right]=\frac{1}{4\pi}\tilde\gamma(1,t). \tag{6.25}
$$

Как видно из формулы (6.25), функция $\tilde\gamma(r,t)$ при $r=1$ позволяет найти временную корреляционную функцию.

6.2. Решение обобщенного уравнения Милна

Из системы (6.21) можно получить уравнение для функции $\tilde{\gamma}(s,t)$. Для этого домножим второе уравнение системы (6.21) на $3s^{-1}(g_0-1)$, а третье на $\dfrac{5}{2}[3s^{-2}(1-g_0)(1-g_1)-1]$ и сложим все три уравнения. Получим

$$\psi(s,t)\tilde{\gamma}(s,t) = g_0a_0 - \frac{3}{s}(1-g_0)g_1a_1 - \frac{5}{2}\left[1-\frac{3}{s^2}(1-g_0)(1-g_1)\right]g_2a_2, \quad (6.26)$$

$$\psi(s,t) = 1 - g_0m_0 - 3g_1m_1(1-g_0) + \frac{5}{4}g_2\left[1-\frac{3}{s^2}(1-g_0)(1-g_1)\right](3m_1-m_0). \quad (6.27)$$

Решим уравнение (6.26), используя метод Винера–Хопфа [106, 107]. Домножим уравнение (6.26) на $s^2(s+1)$. Это позволит избавиться от полюсов в правой и левой частях уравнения. При $s\to 0$ функция $\psi(s,t)$ ведет себя как

$$\psi(s,t)) \approx (-s^2+\alpha^2)/\beta^2, \quad (6.28)$$

где $\beta^2 = 3/(g_0-g_2)$, $\alpha^2 = (1-g_0)(1-g_1)(1-g_2)\beta^2$. Умножим и разделим левую часть уравнения (6.26) на $(\alpha^2-s^2)/(\beta^2-s^2)$. Вводя следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&\psi_1(s,t) = \psi(s,t)\frac{\beta^2-s^2}{\alpha^2-s^2}, \quad \tilde{\gamma}^+(s,t) = \tilde{\gamma}(s,t)s^2(s+1)\frac{\alpha+s}{\beta+s}\\
&\tilde{\gamma}^-(s,t) = s^2(s+1)\frac{\beta-s}{\alpha-s}\times\\
&\qquad\times\left\{g_0a_0 - \frac{3}{s}(1-g_0)g_1a_1 - \frac{5}{2}\left[1-\frac{3}{s^2}(1-g_0)(1-g_1)\right]g_2a_2\right\},
\end{aligned} \quad (6.29)$$

получим

$$\psi_1(s,t)\tilde{\gamma}^+(s,t) = \tilde{\gamma}^-(s,t). \quad (6.30)$$

Заметим, что $\tilde{\gamma}^+(s,t)$ в силу определения (6.20) и (6.23) регулярна при $\operatorname{Re} s \geq 0$, а $\tilde{\gamma}^-(s,t)$ регулярна при $\operatorname{Re} s < 1$. Таким образом, функция $\psi_1(s,t)$ представляет собой отношение функций регулярных в левой и правой частях комплексной плоскости s. С другой стороны, функция $\psi_1(s,t)$ — четная. Тогда ее можно представить в виде отношения функций, регулярных соответственно в правой и левой частях комплексной плоскости s, $\mathrm{Re}\, s > -1$ и $\mathrm{Re}\, s \le 0$:

$$\psi_1(s,t) = h^+(s)/h^-(s). \tag{6.31}$$

Поскольку $\psi_1(0) = 1$, положим $h^+(0) = h^-(0) = 1$. Используя тождество

$$J(s) = \frac{-s}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{ds'}{s'(s'-s)} \ln \psi_1(s',t) = \begin{cases} \ln h^+(s), & \mathrm{Re}\, s > 0 \\ \ln h^-(s), & \mathrm{Re}\, s < 0 \end{cases}, \tag{6.32}$$

получим

$$\begin{aligned} h^+(s) &= \exp J(s), \qquad \text{при} \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \\ h^-(s) &= \exp J(s), \qquad \text{при} \quad \mathrm{Re}\, s < 0. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Заметим, что в силу уравнений (6.30) и (6.31) $\tilde\gamma^- h^- = \tilde\gamma^+ h^+$. Но $\tilde\gamma^- h^-$ регулярна при $\mathrm{Re}\, s \le 0$, а $\tilde\gamma^+ h^+$ — при $\mathrm{Re}\, s \ge 0$. Значит, эти функции равны и регулярны во всей комплексной плоскости. Тогда вследствие обобщенной теоремы Лиувилля [107] они ведут себя как полином. Степень этого полинома можно определить, рассматривая поведение функции $\tilde\gamma^+ h^+$ при $s \to \infty$. Функция h^+ при больших s ведет себя как константа, а функция $\tilde\gamma^+$ растет как s^2. Значит

$$\tilde\gamma^- h^- = \tilde\gamma^+ h^+ = c_0 + c_1 s + c_2 s^2. \tag{6.34}$$

Здесь c_0, c_1 и c_2 некоторые константы. Тогда

$$\tilde\gamma^+ = (c_0 + c_1 s + c_2 s^2)/h^+. \tag{6.35}$$

Переходя в (6.32) к интегрированию по вещественному аргументу и используя свойство четности по s функции $\psi_1(s,t)$, получим

$$\tilde\gamma^+(s,t) = (c_0 + c_1 s + c_2 s^2) \exp\left[-\frac{s}{\pi}\int_0^\infty \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \ln \psi_1(is',t)\right], \tag{6.36}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(is',t) = \frac{\beta^2 + s'^2}{\alpha^2 + s'^2}\Biggl\{ & 1 - g_0 \frac{1}{s'} \operatorname{arctg} s' + 3(g_0 - 1) g_1 \frac{1}{s'^2}\left(1 - \frac{1}{s'}\operatorname{arctg} s'\right) + \\ & + \frac{5}{4} g_2 \left[1 + \frac{3}{s'^2}(1-g_0)(1-g_1)\right]\left[\frac{3}{s'^2}\left(1 - \frac{1}{s'}\operatorname{arctg} s'\right) - \frac{1}{s'}\operatorname{arctg} s'\right]\Biggr\}. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Тогда функция $\tilde{\gamma}(s,t)$ примет вид

$$\tilde{\gamma}(s,t) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}{s^2(s+1)} \frac{\beta + s}{\alpha + s} \exp\left[-\frac{s}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \ln \psi_1(is', t)\right]. \qquad (6.38)$$

Константы c_0, c_1 и c_2 можно найти, если подставить выражение (6.38) в уравнение (6.26). Получившееся равенство должно выполняться при любом значении s. В частности при $s = -1$ имеем

$$c_0 - c_1 + c_2 = \left\{ g_0 + 3g_1(1-g_0) - \frac{5}{2} g_2 [1 - 3(1-g_0)(1-g_1)] \right\} \frac{(\beta+1)}{(\alpha+1)h^+(1)}. \qquad (6.39)$$

Два других условия можно получить, если рассмотреть случаи $s \to \infty$ и $s = 0$. При $s \to \infty$ имеем

$$c_2 = g_0 \left(1 + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dr}{r} \tilde{\gamma}(r,t) \right). \qquad (6.40)$$

При $s \to 0$ левую и правую части уравнения (6.26) можно разложить в ряд по степеням s. В нулевом порядке имеем

$$c_0 = \frac{15}{2} \sqrt{\frac{(1-g_0)(1-g_1)}{1-g_2}} g_2 \left[1 - \frac{1}{4} \int_1^\infty dr \left(\frac{3}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{\gamma}(r,t) \right]. \qquad (6.41)$$

Из уравнений (6.39), (6.40), (6.41) можно найти c_0, c_1 и c_2. Заметим, что эти величины не зависят от s, но являются функциями времени t.

Зная величины c_0, c_1 и c_2, можно получить временну́ю корреляционную функцию, положив в выражении (6.38) $s = 1$.

6.3. Расчет временно́й корреляционной функции

Рассчитанная временна́я корреляционная функция сопоставлялась с экспериментальными данными. В эксперименте измерялись автокорреляционные функции многократного рассеяния света в полистирольных латексах с диаметром частиц 0.51, 1 и 3 мкм. Концентрация частиц была 5%.

На Рис. 6.1 приведена зависимость корреляционной функции от времени для всех трех значений диаметров частиц. Из рисунка видно, что результаты зависят от размеров частиц, причем с ростом диаметра латекса убывание корреляционной функции существенно замедляется.

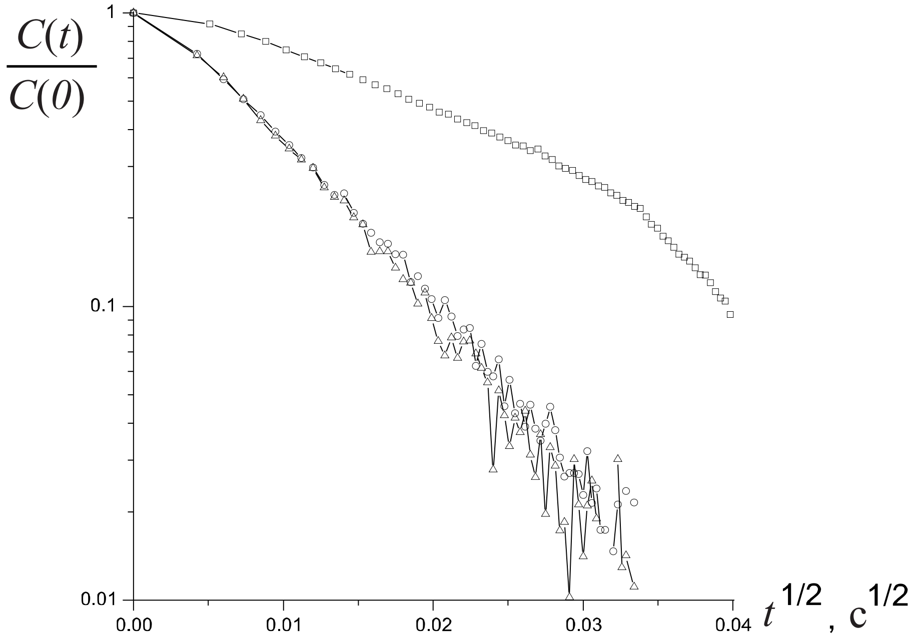


Рис. 6.1

Временна́я корреляционная функция многократно рассеянного света в 5% водной суспензии латекса различного диаметра d_l при угле рассеяния 90°: △ — d_l = 0.51 мкм, ◯ — d_l = 1 мкм, □ — d_l = 3 мкм

Для сопоставления с экспериментальными данными мы провели численные расчеты по формулам, полученным в предыдущих разделах. Выражение для корреляционной функции относится к случаю рассеяния света взвешенными броуновскими частицами. Оно описывает корреляцию поля на всех временах. Для вычисления временной корреляционной функции $C(t)$ необходимы коэффициент броуновской диффузии и Фурье-образ статической корреляционной функции $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ флуктуаций диэлектрической проницаемости. Для вычисления $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ будем предполагать частицы сферическими. Коэффициент диффузии будем определять как $D = k_B T/3\pi d_l \eta$, где k_B — постоянная Больцмана, T — температура, d_l — диаметр частиц, η — сдвиговая вязкость. Для расчета индикатрисы однократного рассеяния воспользуемся приближением Рэлея–Ганса [170]. Это приближение применимо в том случае, если, во-первых, показатель преломления броуновских частиц n_l слабо отличается от показателя преломления среды n: $|n - n_l| \ll 1$ и, во-вторых, диаметр частиц удовлетворяет неравенству $k_0^2 d_l^2 |n - n_l| \ll 1$. Для системы случайно распределенных N частиц в объеме V_{sc} диэлектрическая проницаемость может быть записана в виде

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^{N} \theta\left(\frac{d_l}{2} - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|\right), \tag{6.42}$$

где $\Delta\varepsilon$ — разность диэлектрических проницаемостей частиц и среды, $\theta(x)$ — тета–функция Хэвисайда. Тогда статический парный коррелятор диэлектрической проницаемости (6.4) можно записать в виде

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \Delta\varepsilon^2 \left\langle \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \theta\left(\frac{d_l}{2} - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|\right) \theta\left(\frac{d_l}{2} - |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_2|\right) \right\rangle. \tag{6.43}$$

Мы ограничимся учетом членов с $i = j$, что соответствует низшему порядку по концентрациям частиц. Тогда

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \Delta\varepsilon^2 \frac{N}{V_{sc}} \int \theta\left(\frac{d_l}{2} - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|\right) \theta\left(\frac{d_l}{2} - |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'|\right) d\mathbf{r}'. \tag{6.44}$$

Заметим, что интеграл в (6.44) представляет собой объем общей части двух шаров диаметром d_l с центрами в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Выполнив несложные вычисления, получим

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \Delta\varepsilon^2 \frac{V_l}{V_{sc}} \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{d_l} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{d_l}\right)^3, & |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \le d_l \\ 0\,, \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > d_l \end{cases}, \tag{6.45}$$

где V_l/V_{sc} — объемная доля частиц в растворе. Далее выполним преобразование Фурье в выражении (6.45)

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi\Delta\varepsilon^2}{q} \frac{V_l}{V_{sc}} (I_1(q) + I_2(q) + I_3(q)), \tag{6.46}$$

где

$$
\begin{aligned}
I_1(q) &= \frac{1}{q^2}(\sin(qd_l) - qd_l\cos(qd_l)) \\
I_2(q) &= -\frac{3}{2q^3 d_l}(-q^2 d_l^2\cos(qd_l) + 2\cos(qd_l) + 2qd_l\sin(qd_l) - 2) \\
I_3(q) &= \frac{1}{2q^5 d_l^3}(-q^4 d_l^4\cos(qd_l) + 4q^3 d_l^3\sin(qd_l) + 12q^2 d_l^2\cos(qd_l) - \\
&\qquad -24\cos(qd_l) - 24qd_l\sin(qd_l) + 24).
\end{aligned}
\tag{6.47}
$$

Подставляя уравнение (6.5) с учетом (6.46) в формулу (6.17), можно найти коэффициенты разложения $g_j(t)$, $j = 0, 1, 2$. Зная коэффициенты $g_j(t)$, можно решить уравнение (6.26), а затем при помощи условий (6.39), (6.40) и (6.41) найти величины c_0, c_1 и c_2. Положив $s = 1$, можно найти временную корреляционную функцию $C(t)/C(0)$ для разных значений d_l.

Поскольку использованное нами приближение Рэлея–Ганса накладывает ограничение на параметры частиц, то реально можно проводить расчеты только для частиц диаметром $d_l \leq 1/k_0\sqrt{\Delta n}$. Для нашей системы $k_0 \sim 1.8 \cdot 10^5\,\text{см}^{-1}$, $\Delta n \sim 0.04$, то есть $d_l \leq 1.4\,\text{мкм}$. Мы рассчитали $C(t)$ для частиц диаметром $d_l = 0.1$, 0.25, 0.37, 0.5, 1 мкм, причем последнее значение d_l находится на границе применимости теории. При расчете также использовались следующие параметры: $V_l/V_{sc} = 0.05$, $\Delta\varepsilon = 0.1$, $n = 4/3$, $\eta = 0.01$ пз, $T = 300$ К. Результаты расчетов приведены на Рис. 6.2. На Рис. 6.2(а) показана временна́я корреляционная функция для разных диаметров частиц. Видно, что, как и в случае экспериментальных данных, убывание корреляционной функции зависит от диаметра латекса. Причем в случае $d_l = 0.5$ мкм имеет место неплохое количественное совпадение экспериментальных данных и результатов расчета на всех временах. На Рис. 6.2(б) приведены результаты расчета временно́й корреляционной функции в P_1 и P_2–приближениях. Заметим, что кривые не совпадают даже при малых временах. Это говорит о том, что P_1–приближение может оказаться недостаточным при расчетах

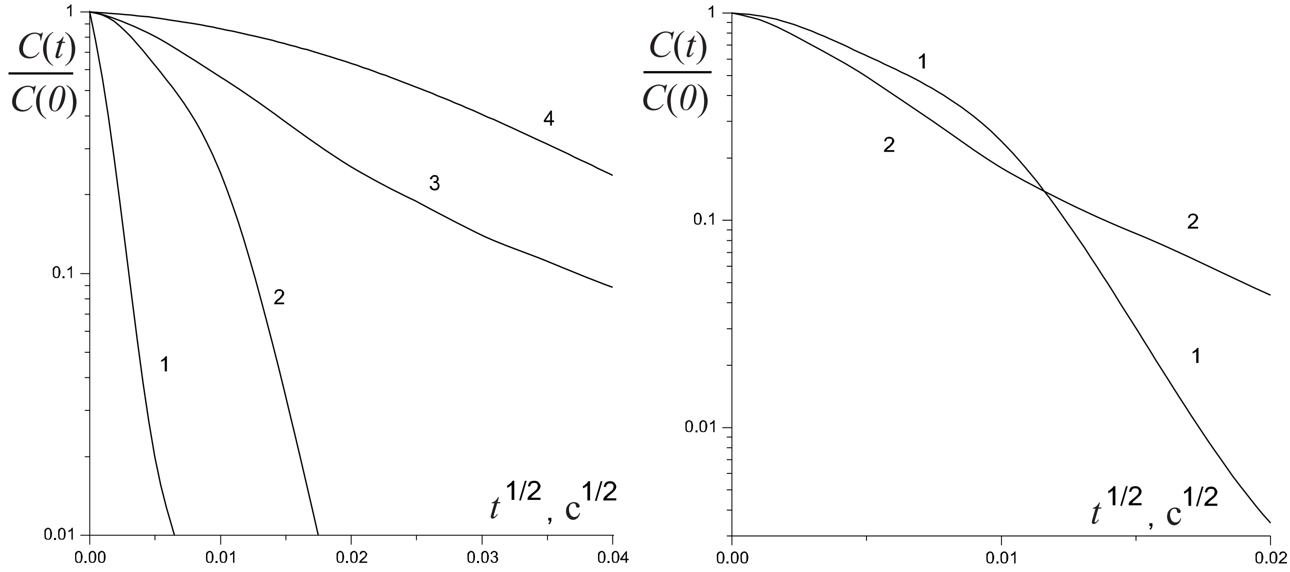


Рис. 6.2

(а) — результаты расчета временно́й корреляционной функции в P_2–приближении для рассеивающих частиц различного диаметра: 1 — $d_l = 0.1$ мкм, 2 — $d_l = 0.25$ мкм, 3 — $d_l = 0.37$ мкм, 4 — $d_l = 0.5$ мкм; (б) — сравнение результатов расчета временно́й корреляционной функции в P_1 и P_2–приближениях для частиц диаметром 0.25 мкм: 1 — P_1–приближение, 2 — P_2–приближение

временной корреляционно́й функции.

Проведенный расчет неприменим для случая больших частиц и большого $\Delta\varepsilon$, так как нарушаются условия применимости теории Рэлея–Ганса. Но он дает возможность выяснить характер зависимости временно́й корреляционной функции от размеров броуновских частиц.

Отметим, что нам удалось рассчитать временну́ю корреляционную функцию в расширенном временном интервале в P_2–приближении. При сравнении с экспериментом оказалось, что приближение Рэлея–Ганса для описания неоднородной среды оказывается недостаточным. Было бы желательно построить модель среды с более широкой областью применимости. По-видимому, также представляет интерес провести экспериментальные измерения параметров сильнонеоднородных диэлектрических сред. Это даст возможность получать информацию о зависимости от концентрации и размеров рассеивателей для таких параметров, в терминах которых проводится теоретическое описание. К ним относятся длина экстинкции, транспортная длина и более высокие моменты корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости. Это позволило бы более адекватно использовать результаты теоретических расчетов в анализе экспериментальных данных.

6.4. Обобщенное решение Милна для корреляционных эффектов многократного рассеяния света с учетом поляризации

Рассмотрим теперь временные корреляции в случае электромагнитного поля. Перенос электромагнитного излучения в случайной среде описывается уравнением Бете–Солпитера. Будем использовать следующую форму этого уравнения

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t \,|\, \mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) = k_0^4 \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}, t)\delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)\hat{I} + \\ + k_0^4 \int d\mathbf{R}_3 \tilde{\mathcal{G}}(-\mathbf{k}^{(s)} + \mathbf{k}_{23}, t)\hat{\Lambda}(R_{23})\hat{\Gamma}(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_1, t \,|\, \mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}^{(i)}), \quad (6.48)$$

Здесь $k^{(s)} = k^{(i)} = k = nk_0$ — волновое число в среде, n — показатель преломления среды: $n = n_1 + in_2$, n_1 и n_2 – соответственно вещественная и мнимая части n, $(2n_2k_0)^{-1} = l$, где l — длина экстинкции. Величина $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{q}, t)$ представляет собой Фурье-образ парного коррелятора флуктуаций диэлектрической проницаемости (6.5), на которых и происходит рассеяние. В случае броуновской диффузии $Dq^2 = 2(1 - \cos\theta)/\tau$, $\tau = (Dk^2)^{-1}$ — характерное время диффузии броуновской частицы на расстояние порядка λ.

Тензор четвертого ранга $\hat{\Lambda}(\mathbf{R})$

$$\Lambda_{\alpha\beta\mu\nu} = \left(\hat{I} - \frac{\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}}{R^2}\right)_{\alpha\mu} \otimes \left(\hat{I} - \frac{\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}}{R^2}\right)_{\beta\nu} \frac{\exp(-R/l)}{(4\pi R)^2} \quad (6.49)$$

представляет собой прямое произведение комплексно сопряженной пары функций Грина волнового уравнения Максвелла в дальней зоне и описывает преобразование пары полей с поляризациями μ и ν в пару с поляризациями α и β в результате одного акта рассеяния. Оптическая теорема связывает сечение рассеяния и длину рассеяния, или длину свободного пробега фотона между двумя актами упругого рассеяния

$$\frac{2}{3}k_0^4 \int d\Omega_s \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}^{(i)} - \mathbf{k}^{(s)}) = l^{-1}. \tag{6.50}$$

Уравнение (6.48) записано в приближении слабого рассеяния, $\lambda \ll l$. Приближение слабого рассеяния называют также лестничным приближением, поскольку формально оно возникает в результате суммирования ряда по кратностям рассеяния в виде суммы лестничных фейнмановских диаграмм. В связи с этим функцию $\hat{\Gamma}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t \,|\, \mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)})$ называют лестничным пропагатором.

Наблюдаемые величины — это корреляторы, или моменты поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и его флуктуаций $\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\rangle$. Первый момент — это среднее макроскопическое поле $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\rangle$; второй момент, или функция когерентности, определяет корреляционную функцию поля $\langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)\delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle$ четвертый момент — корреляционную функцию интенсивности рассеянного излучения $\langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)\delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1)\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)\delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle$.

Основной вклад в корреляционную функцию интенсивности описывается гауссовым приближением [171], в котором коррелятор четвертого порядка представляется в виде произведений парных корреляторов

$$\langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)\delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1)\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)\delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle =$$
$$= \langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)\delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1)\rangle\langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)\delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle + |\langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)\delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle|^2 . \tag{6.51}$$

В обычной геометрии эксперимента, когда на систему падает плоская волна вида $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, а рассеянное излучение наблюдается на большом расстоянии $\mathbf{r}$ от рассеивающей системы, каждая пара полей дает множитель $r^{-2}E_{0\alpha_1}E_{0\alpha_2}$, где $E_{0\alpha}$ — амплитуда падающей волны с поляризацией α.

Определим временную корреляционную функцию поля, наблюдаемую на большом расстоянии r от рассеивающей среды, в виде

$$\langle \delta E_\phi(\mathbf{r},t)\delta E^*_\phi(\mathbf{r},0)\rangle = (1/r^2)P_{\phi\beta_1}P_{\phi\beta_2}C^{(E)}_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2}(t|\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)})E_{0\alpha_1}E_{0\alpha_2}\,, \qquad (6.52)$$

где ϕ и α — поляризации рассеянного и падающего света соответственно, с волновыми векторами $\mathbf{k}^{(s)}$ и $\mathbf{k}^{(i)}$, оператор

$$\hat{P} = \hat{I} - \frac{\mathbf{k}^{(s)} \otimes \mathbf{k}^{(s)}}{k^2} \qquad (6.53)$$

обеспечивает поперечность рассеянной волны.

При $t = 0$ эта функция описывает интенсивность рассеянного излучения. В общем случае, при $t \neq 0$, квадратичная форма этой функции описывает корреляционную функцию интенсивности. Заметим, что в функции $\hat{C}^{(E)}(t\,|\,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)})$ опущен множитель $\exp(-i\omega t)$, где ω — частота падающей монохроматической волны, исчезающий при составлении квадратичной формы (6.51).

Основной вклад, как уже отмечалось, в рассеянное излучение дают лестничные диаграммы. При углах рассеяния, близких к 180°, становится сравнимой с основной, лестничной, интерференционная составляющая, обусловленная циклическими, или веерными [105, 172], диаграммами. Обозначая их вклады соответственно верхними индексами L и V, имеем

$$\hat{C}^{(E)}(t\,|\,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)}) = \hat{C}^{(L)}(t\,|\,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)}) + \hat{C}^{(V)}(t\,|\,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)}). \qquad (6.54)$$

Пусть рассеивающая среда занимает полупространство $z > 0$, где z — декартова координата, нормальная границе среды. Падающий и рассеянный лучи лежат в плоскости (y,z), угол θ_s отсчитывается от направления, обратного оси z. В этом случае лестничная и интерференционная составляющие функции когерентности имеют, соответственно, вид [118, 173, 174]

$$C^{(L)}_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2}(t\,|\,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)}) = \\ = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \Gamma_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_1,t\,|\,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)}) \exp\left(-\frac{z_1}{l\cos\theta_i} - \frac{z_2}{l\cos\theta_s}\right), \quad (6.55)$$

$$C^{(V)}_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2}(t\,|\,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)}) = \\ = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \left[\Gamma_{\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_2}\left(\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_1,t\,\middle|\,\frac{\mathbf{k}^{(s)}-\mathbf{k}^{(i)}}{2},\frac{\mathbf{k}^{(i)}-\mathbf{k}^{(s)}}{2}\right) - \right. \\ \left. - k_0^4\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}^{(s)}-\mathbf{k}^{(i)},t)\delta(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1)\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\right] \exp\left[-\frac{z_1+z_2}{2l}\left(\frac{1}{\cos\theta_i}+\frac{1}{\cos\theta_s}\right) + \right. \\ \left. + in_1k_0(z_1-z_2)(\cos\theta_i-\cos\theta_s) + in_1k_0(y_1-y_2)(\sin\theta_i-\sin\theta_s)\right], \quad (6.56)$$

Поскольку однократное рассеяние не дает вклада в интерференционную составляющую обратного рассеяния, в подынтегральном выражении (6.56) этот член вычитается. Легко видеть, что при рассеянии строго назад, при $\mathbf{k}^{(s)} = -\mathbf{k}^{(i)}$, поляризованная составляющая интерференционного вклада $\hat{C}^{(V)}(t\,|\,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)})$ в точности совпадает с поляризованной составляющей лестничного вклада $\hat{C}^{(L)}(t\,|\,\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)})$ до вычитания вклада однократного рассеяния; деполяризованные же компоненты не совпадают.

6.5. Временна́я корреляционная функция электромагнитного поля в P_0-приближении

В общем случае решение граничной задачи для тензора четвертого ранга $\hat{\Gamma}(\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_1,t|\mathbf{k}^{(s)},\mathbf{k}^{(i)})$ чрезвычайно громоздко. Тензорная структура уравнения (6.48) значительно упрощается в случае падающего плоско поляризованного света с поляризацией α. В этом случае индексы α_1 и α_2 совпадают. В силу симметрии задачи тогда попарно совпадают индексы $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ и $\mu = \nu$. Это позволяет рассматривать тензоры четвертого ранга с попарно совпадающими индексами как тензора второго ранга: $\Lambda_{\beta\beta\mu\mu} = \Lambda_{\beta\mu}$, $\Gamma_{\beta\beta\alpha\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha}$ и значительно упростить задачу. Уравнение Бете–Солпитера (6.48) для попарно совпадающих индексов поляризации принимает вид

$$\Gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) = k_0^4 \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}, t)\delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)\delta_{\beta\alpha} + \\ + k_0^4 \int d\mathbf{R}_3 \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}_{23}, t)\Lambda_{\beta\mu}(R_{23})\Gamma_{\mu\alpha}(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_1, t|\mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}^{(i)})\,. \quad (6.57)$$

Будем считать, что волновой вектор падающей волны лежит в плоскости (y, z), а ее поле поляризовано вдоль x, $\alpha = 1$. Тогда, поскольку начальная поляризация задана, $\alpha = 1$, отысканию подлежит вектор-столбец $\boldsymbol{\gamma} = (\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \Gamma_{31})/(4\pi)$.

Мы рассмотрим случай изотропной индикатрисы однократного рассеяния, когда функция $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{q})$ не зависит от переданного волнового вектора $\mathbf{q}$, $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) = \mathcal{G}_0$. Обозначив для краткости в случае изотропной индикатрисы

$$\tilde{\Gamma}_{\beta 1}(q_\perp = 0, s_s, s_i, t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) \equiv 4\pi\gamma_\beta(s_s, s_i, t), \quad (6.58)$$

временну́ю корреляционную функцию поля представим в виде

$$C_{\beta 1}(t|\mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) = \frac{S}{4\pi}\gamma_\beta(s_s, s_i, t), \quad (6.59)$$

где S — площадь освещенной поверхности.

В случае нормального падения поляризованную и деполяризованную составляющие корреляционной функции интенсивности, с учетом факторизации (6.51), можно записать в виде:

$$C^I_{pol}(\theta_s, t) = \gamma_1^2(s_s, 1, t), \quad (6.60)$$

$$C^I_{depol}(\theta_s, t) = \gamma_2^2(s_s, 1, t)\cos^2\theta_s + \gamma_3^2(s_s, 1, t)\sin^2\theta_s, \quad (6.61)$$

если поле падающей волны перпендикулярно плоскости рассеяния, и

$$C^I_{pol}(\theta_s,t)=\gamma_1^2(s_s,1,t)\cos^2\theta_s+\gamma_3^2(s_s,1,t)\sin^2\theta_s, \tag{6.62}$$

$$C^I_{depol}(\theta_s,t)=\gamma_2^2(s_s,1,t), \tag{6.63}$$

если поле падающей волны лежит в плоскости рассеяния. Плоскостью рассеяния называем плоскость, образованную волновыми векторами падающей и рассеянной волн. Усредним уравнение (6.57) по ориентациям $\mathbf{k}^{(s)}$, то есть, выполним интегрирование $\int d\Omega_s$. Выполняя $2D$-Фурье- и Лаплас-преобразования, получим

$$\left[\hat{I}-\frac{3}{2}\exp(-2t/\tau)\hat{\hat{\Lambda}}(s)\right]\boldsymbol{\gamma}(s,s_i,t)=\mathbf{b}(s,s_i,t). \tag{6.64}$$

Здесь

$$\hat{\hat{\Lambda}}(s)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3m_0+2m_1+3m_2 & m_0-2m_1+m_2 & 4(m_1-m_2) \\ m_0-2m_1+m_2 & 3m_0+2m_1+3m_2 & 4(m_1-m_2) \\ 4(m_1-m_2) & 4(m_1-m_2) & 8(m_0-2m_1+m_2) \end{pmatrix}. \tag{6.65}$$

Вектор-столбец $\mathbf{b}(s,s_i,t)$ в правой части (6.64) имеет вид

$$\begin{aligned} b_\beta(s,s_i,t)&=(3/2)\exp(-2t/\tau)(s_i+s)^{-1}\delta_{\beta 1}- \\ &-(3/4)\exp(-2t/\tau)\int_1^\infty\frac{ds'}{s'(s'-s)}\,a_{\beta\mu}(s')\gamma_\mu(s',s_i,t)\,, \end{aligned} \tag{6.66}$$

где

$$\hat{a}(s)=\frac{1}{8s^4}\begin{pmatrix} 3s^4+2s^2+3 & (s^2-1)^2 & 4(s^2-1) \\ (s^2-1)^2 & 3s^4+2s^2+3 & 4(s^2-1) \\ 4(s^2-1) & 4(s^2-1) & 8(s^2-1)^2 \end{pmatrix}. \tag{6.67}$$

Далее мы покажем, что матричное интегральное уравнение (6.64) преобразуется в независимые уравнения, каждое из которых решается как уравнение Милна для скалярного поля.

Структура матриц $\hat{\hat{\Lambda}}$ и $\hat{a}$ такова, что система уравнений (6.64) разбивается на две независимые подсистемы. Действительно, определив функции

$$\gamma_{\pm}(s, s_i, t) = (1/2)[\gamma_1(s, s_i, t) \pm \gamma_2(s, s_i, t)] \tag{6.68}$$

и, складывая и вычитая два первых уравнения из трех системы (6.64), получим замкнутое уравнение для компоненты $\gamma_-(s, s_i, t)$, описывающей степень деполяризации,

$$\psi_-(s,t)\gamma_-(s, s_i, t) = (3/4)\exp(-2t/\tau)(s_i + s)^{-1} - \\ - \frac{3}{4}\exp(-2t/\tau)\int_1^\infty \frac{ds'}{s'(s'-s)}\left[a_{11}(s') - a_{12}(s')\right]\gamma_-(s', s_i, t)\,, \tag{6.69}$$

где

$$\psi_-(s,t) = 1 - \frac{3}{8}\exp(-2t/\tau)(m_0 + 2m_1 + m_2)\,, \tag{6.70}$$

и систему уравнений для двух оставшихся компонент:

$$\begin{pmatrix} 1 - \dfrac{3}{4}e^{-2t/\tau}(m_0 + m_2) & -\dfrac{3}{4}e^{-2t/\tau}(m_1 - m_2) \\ -\dfrac{3}{2}e^{-2t/\tau}(m_1 - m_2) & 1 - \dfrac{3}{2}e^{-2t/\tau}(m_0 - 2m_1 + m_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_+ \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1 + b_2}{2} \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{6.71}$$

Уравнение (6.69) для функции $\gamma_-(s, s_i, t)$, которая согласно определению представляет собой в случае нормального падения разность поляризованной и деполяризованной рассеянных компонент, имеет вид уравнения Милна и решается при помощи метода Винера–Хопфа стандартным образом. В результате получим

$$\gamma_-(s, s_i, t) = \frac{3\exp(-2t/\tau)}{4(s_i + s)(1 - 0.7\exp(-2t/\tau))}\exp[-J_d(s,t) - J_d(s_i, t)]\,, \tag{6.72}$$

где величина

$$J_d(s,t) = \frac{s}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds'}{s'^2 + s^2}\ln\left\{\frac{\psi_-(is', t)}{1 - 0.7\exp(-2t/\tau)}\right\} \tag{6.73}$$

играет роль функции Чандрасекара [175]. Укажем, что функция $\psi_-(s,t)$ конечна при $s=0$:

$$\psi_-(0,t) = 1 - 0.7\exp(-2t/\tau)\,, \tag{6.74}$$

что приводит к тому, что функция $\gamma_-(s,s_i,t)$ не имеет особенности при $s\to 0$, и как следствие, регулярна по t в области малых времен. Это означает, что разность между поляризованной и деполяризованной компонентами временно́й корреляционной функции изменяется по линейному закону в зависимости от аргумента t/τ, в то время как сами эти компоненты линейно зависят от величины $\sqrt{t/\tau}$ при малых временах.

Мы рассчитали зависимость величины $\gamma_-(1,1,t)$ от времени. Согласно (6.60) и (6.61), в случае поляризации падающего поля перпендикулярно плоскости рассеяния

$$\gamma_-(1,1,t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{C^I_{pol}(0,t)} - \sqrt{C^I_{depol}(0,t)}\right).$$

Достоинство этого результата состоит в том, что полученный результат справедлив для любых времен и рассчитанная функция является экспериментально определяемой величиной.

Обратимся теперь к системе (6.71) и найдем ее решение в главном порядке по временному параметру t/τ. С использованием определения функций $m_j(s)$ и малости t/τ преобразуем ее к виду:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2t}{\tau} - \dfrac{3s^2(m_1+m_2)}{4} & \dfrac{t}{\tau} - \dfrac{3s^2(m_1-m_2)}{4} \\ \dfrac{2t}{5\tau} - \dfrac{3(m_1-m_2)}{2} & \dfrac{8t}{5\tau} + \dfrac{3(m_1-m_2)(1-s^2)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1+b_2+b_3}{2} \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{6.75}$$

При написании (6.75) мы пренебрегли величинами порядка $(t/\tau)s^2$ и выше. Такое пренебрежение, как было показано в скалярном случае, не отражается на решении задачи Милна при $t/\tau \ll 1$. Основная особенность в поведении временной корреляционной функции, а именно, линейная зависимость от $\sqrt{t/\tau}$ при малых временах, возникает из-за обращения в нуль детерминанта матрицы в уравнении (6.75) при $s = 0$, $t = 0$. Видно, что в нуль при $s = 0$, $t = 0$ обращаются элементы первой строки. Это означает, что в асимптотической области $t \ll \tau$ можно положить $t = 0$ в элементах второй строки. В результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left[\dfrac{2t}{\tau} - s^2 m_1\right]\gamma_+ + \left[\dfrac{2t}{3\tau} - \dfrac{s^2(m_1 - m_2)}{2}\right]\gamma_e & = \dfrac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \\ -\dfrac{m_1 - m_2}{2}\left[s^2\gamma_+ - (1 - s^2)\gamma_e\right] & = \dfrac{b_3}{3} \end{array} \right. , \qquad (6.76)$$

где $\gamma_e = \gamma_e(s, s_i, t) = \gamma_3(s, s_i, t) - \gamma_+(s, s_i, t)$. Из уравнений (6.76) видно, что функция $\gamma_e(s, s_i, t)$ конечна при $s \to 0$, $t \to 0$, в то время как $\gamma_+(s, s_i, t)$ неограниченно возрастает в этом пределе. Конечность $\gamma_e(0, s_i, 0)$ в главном порядке позволяет положить $t = 0$ повсюду, кроме коэффициента при γ_+ в первом уравнении. Тогда эту систему можно переписать в виде двух уравнений, к каждому из которых применим метод Винера–Хопфа:

$$\psi_+(s, t)\gamma_+(s, s_i, t) = \frac{(b_1 + b_2)(1 - s^2) + b_3}{3}\,, \qquad (6.77)$$

$$\frac{m_1 - m_2}{2}\gamma_c(s, s_i, t) = \frac{b_3}{3}\,, \qquad (6.78)$$

где определена новая искомая функция

$$\gamma_c(s, s_i, t) = (1 - s^2)\gamma_e(s, s_i, t) - s^2\gamma_+(s, s_i, t),$$

а величина $\psi_+(s, t)$ имеет вид

$$\psi_+(s, t) = \left[\frac{2t}{\tau} - s^2 m_1(s)\right](1 - s^2) - \frac{1}{2}\left[m_1(s) - m_2(s)\right]s^4. \qquad (6.79)$$

С учетом асимптотического поведения функций $m_1(s)$ и $m_2(s)$ для оператора правой части (6.79) имеем

$$\psi_+(s, t) \approx \frac{s_0^{*2} - s^2}{3} \quad \text{при} \quad s \to 0\,, \quad t \to 0\,, \qquad (6.80)$$

где $s_0^{*2} = 6t/\tau$. Таким образом, функция $\psi_+(s,t)$ имеет нуль в комплексной плоскости s, приближающийся к началу координат при $t \to 0$. Такое поведение воспроизводит известную особенность пропагатора уравнения Бете–Солпитера и приводит к диффузионному характеру распространения света в режиме многократного рассеяния. В результате, используя стандартную процедуру Винера–Хопфа, с учетом указанного нуля функции $\psi_+(s,t)$ в комплексной плоскости, решение уравнения (6.77) можно представить в виде

$$\gamma_+(s, s_i, t) = \frac{d_1}{s + s_0^*} \exp\left\{ \frac{-s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \ln\left[\frac{3\psi_+(is', t)}{s'^2 + s_0^{*2}} \right] \right\}. \qquad (6.81)$$

Аналогично решая уравнение (6.78), получим

$$\gamma_c(s, s_i, t) = d_2 \exp\left\{ \frac{-s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \ln\left[15(m_1(is') - m_2(is'))/2\right] \right\}. \qquad (6.82)$$

Параметры d_1 и d_2 являются постоянными по отношению к переменной s и будут найдены из дополнительных соображений.

В силу тождества

$$\exp\left\{ \frac{-s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \ln(A^2 + s'^2) \right\} = (A + s)^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad A > 0\,, \qquad (6.83)$$

решения (6.81), (6.82) удобно представить в виде

$$\gamma_+(s, s_i, t) = \frac{d_1}{s + s_0^*} \frac{1 + s}{1 + \sqrt{3}\, s} \exp\left[-J_+(s, t)\right], \qquad (6.84)$$

где

$$J_+(s, t) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \ln\left[\frac{3\psi_+(is', t)}{s'^2 + s_0^{*2}} \, \frac{1 + s'^2}{1 + 3s'^2} \right] \qquad (6.85)$$

и

$$\gamma_c(s, s_i, t) = d_2 (1 + \sqrt{2/15}\, s) \exp\left[-J_c(s)\right], \qquad (6.86)$$

где

$$J_c(s) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \ln\left[\frac{15}{2} (m_1(is') - m_2(is')) \left(1 + \frac{2s'^2}{15}\right) \right]. \qquad (6.87)$$

Эти выражения удобнее при численных расчетах, так как функции под знаком логарифма обращаются в единицу при $s' \to \infty$ и интегралы быстро сходятся. Величина $J_+(s,t)$, являющаяся вариантом функции Чандрасекара, линейно зависит от времени при малых значениях t, поэтому в дальнейшем будем полагать $J_+(s,t) \simeq J_+(s,0)$.

Во избежание громоздкости мы напишем соотношения на d_1 и d_2 при $t = 0$. Кроме того, из определения $\gamma_c(s, s_i, t)$ легко получить связь между параметрами d_1 и d_2. Действительно, поскольку $\gamma_+(s, s_i, t)$ и $\gamma_e(s, s_i, t)$ при $s = 1$ должны быть конечны, так как это — наблюдаемые компоненты временной корреляционной функции при рассеянии строго назад, то при $s = 1$ получаем

$$\gamma_c(1, s_i, t) = -\gamma_+(1, s_i, t).$$

Используя решения (6.84) и (6.86), получаем

$$d_2(1 + \sqrt{2/15}) \exp\left[-J_c(1)\right] = -\frac{2d_1}{(1+s_0^*)(1+\sqrt{3})} \exp\left[-J_+(1)\right]. \tag{6.88}$$

Непосредственное вычисление дает

$$d_2 = -0.582\, d_1 (1 + s_0^*)^{-1}. \tag{6.89}$$

Обозначим

$$\alpha_n = \int_1^\infty \frac{ds'}{s'^n} \frac{1+s'}{s'(1+\sqrt{3}\, s')} \exp\left[-J_+(s')\right], \tag{6.90}$$

$$\beta_n = \int_1^\infty \frac{ds'}{s'^n} \left(1 + \sqrt{2/15}\, s'\right) \exp\left[-J_c(s')\right]. \tag{6.91}$$

Параметры α_n и β_n легко находятся численно.

В общем случае, при $t \neq 0$, с учетом численных значений параметров α_n и β_n, уравнение (6.77) при $s = 0$ дает

$$d_1 = 2\left\{\alpha_2 + 0.582\,\beta_4 + s_0^*\left[4/3 - (\alpha_3 + 0.582\,\beta_4)\right]\right\}^{-1} \approx 2.57(1 + 0.894\, s_0^*)^{-1}. \tag{6.92}$$

Подставляя эту величину в (6.84), получим, в случае нормального падения и рассеяния назад

$$\gamma_+(1,1,t) \approx \frac{2.319}{(1+s_0^*)(1+0.895\,s_0^*)}\,. \tag{6.93}$$

С точностью до численного множителя это выражение близко к решению Милна [176] для временно́й корреляционной функции в модели скалярного поля

$$\gamma_{scal}(1,1,t) \approx 4.22\,(1+s_0^*)^{-2}\,. \tag{6.94}$$

Также с точностью до численного множителя оно совпадает с решением в рамках диффузионного приближения для случая изотропной индикатрисы однократного рассеяния, если в рамках метода зеркальных отображений выбрать зеркальную границу на физической границе, $z=0$ [177].

В случае неполяризованного падающего света $\gamma_- = 0$, и, таким образом, близость временны́х зависимостей, описываемых формулами (6.93) и (6.94), является подтверждением того, что приближение скалярного поля действительно можно с указанной точностью до 10% использовать при описании эффектов многократного рассеяния для неполяризованного света.

В случае нормального падения и рассеяния назад поляризованная компонента временно́й корреляционной функции определяется выражением

$$\gamma_{pol}(1,1,t) = \gamma_+(1,1,t) + \gamma_-(1,1,t), \tag{6.95}$$

а деполяризованная

$$\gamma_{depol}(1,1,t) = \gamma_+(1,1,t) - \gamma_-(1,1,t). \tag{6.96}$$

В первом порядке по временно́й переменной, оставляя только линейную зависимость от $\sqrt{t/\tau}$, в функции $\gamma_-(1,1,t)$ можно положить $t=0$. Тогда в главном по параметру $s_0^* = \sqrt{6t/\tau}$ порядке получаем

$$\gamma_{pol}(1,1,t) \approx 3.05\,(1-1.44\,s_0^*), \tag{6.97}$$

$$\gamma_{depol}(1,1,t) \approx 1.59\,(1 - 2.75\,s_0^*). \tag{6.98}$$

Временна́я корреляционная функция интенсивности определяется как квадрат от корреляционной функции полей. На Рис. 6.3 представлены схематически временны́е корреляционные функции поляризованной и деполяризованной компонент интенсивности. Видно, что в случае поляризованного излучения описание в рамках скалярной теории оказывается недостаточным.

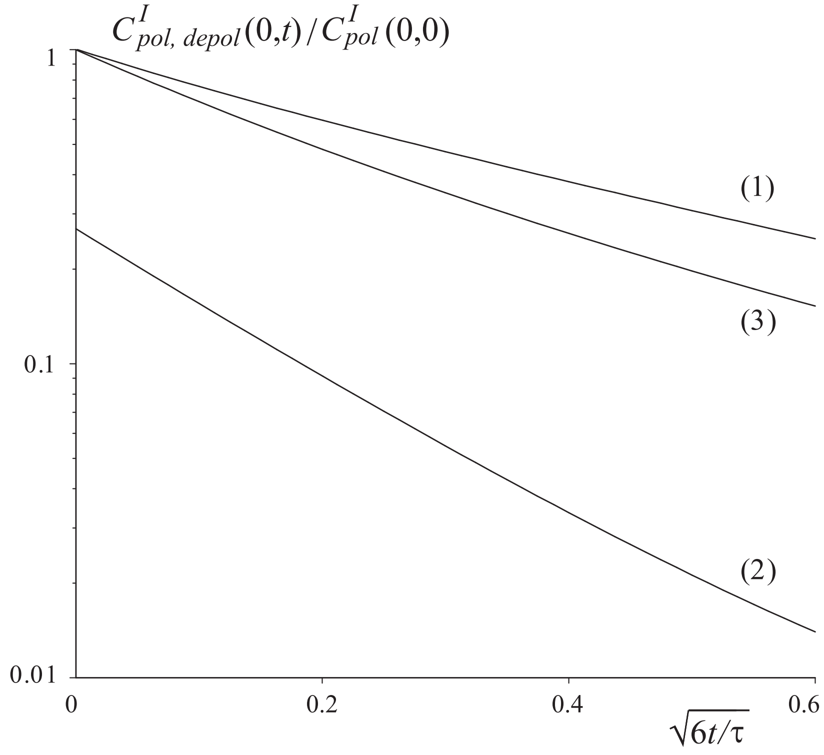


Рис. 6.3

Временна́я зависимость поляризованной, $C^I_{pol}(0,t)$, и деполяризованной, $C^I_{depol}(0,t)$, компонент корреляционной функции интенсивности света, рассеянного назад, рассчитанных согласно (6.72), (6.93) и нормированных на квадрат интенсивности поляризованной компоненты. Для сравнения приведена нормированная временна́я корреляционная функция неполяризованного излучения, рассчитанная согласно (6.94). (1) – поляризованная компонента, (2) – деполяризованная компонента, (3) – корреляционная функция интенсивности неполяризованного света

Теория скалярного поля предсказывает коэффициент наклона

$$\gamma_{scal}(1,1,t) \sim 1 - \gamma s_0^*,$$

определяющий скорость начального убывания временны́х корреляций полей, в точности равный двум, $\gamma = 2$. Видно, что коэффициенты наклона для поляризованной и деполяризованной компонент разительно отличаются от этого значения: $\gamma_{pol} = 1.44$ для поляризованной компоненты и $\gamma_{depol} = 2.75$ для деполяризованной. Расчеты в рамках диффузионного приближения дают весьма близкие значения [120], 1.6 и 2.7, соответственно; и хорошо согласуются с экспериментальными значениями [120] 1.6 ± 0.1 и 2.8 ± 0.2 при рассеянии света с $\lambda = 0.488$ мкм в растворе латекса с диаметром частиц 0.091 мкм значительно меньшим длины волны.

В случае неполяризованного падающего излучения или в случае наблюдения излучения, усредненного по поляризации, $\gamma_{pol} + \gamma_{depol}$, вклад γ_- отсутствует, и коэффициент наклона $\gamma = 1.89$, определяющий скорость убывания компоненты γ_+, близок к значению $\gamma = 2$ скалярной теории. Однако в том случае, когда в падающем излучении присутствуют в равных долях две ортогональные поляризации, нельзя обойтись приближением попарно совпадающих индексов.

При $t = 0$ полученное решение описывает интенсивность рассеянного излучения (без учета интерференционной составляющей). Мы рассчитали поляризованную $I_{pol}(\theta_s)$ и деполяризованную $I_{depol}(\theta_s)$ компоненты интенсивности рассеяния в зависимости от угла обратного рассеяния θ_s для нормального падения. В случае, когда рассеянный луч расположен в плоскости (y, z), то есть в плоскости перпендикулярной поляризации падающего поля, эти компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} I_{pol}(\theta_s) &= \gamma_+(s_s, 1, 0) + \gamma_-(s_s, 1, 0), \\ I_{depol}(\theta_s) &= -s_s^{-2}[\gamma_e(s_s, 1, 0) + \gamma_-(s_s, 1, 0)]. \end{aligned} \tag{6.99}$$

В случае, когда рассеянный луч расположен в плоскости (x, z), то есть, падающее поле ориентировано в плоскости рассеяния,

$$I_{pol}(\theta_s) = -s_s^{-2}[\gamma_e(s_s,1,0) - \gamma_-(s_s,1,0)],$$
$$I_{depol}(\theta_s) = \gamma_+(s_s,1,0) - \gamma_-(s_s,1,0). \qquad (6.100)$$

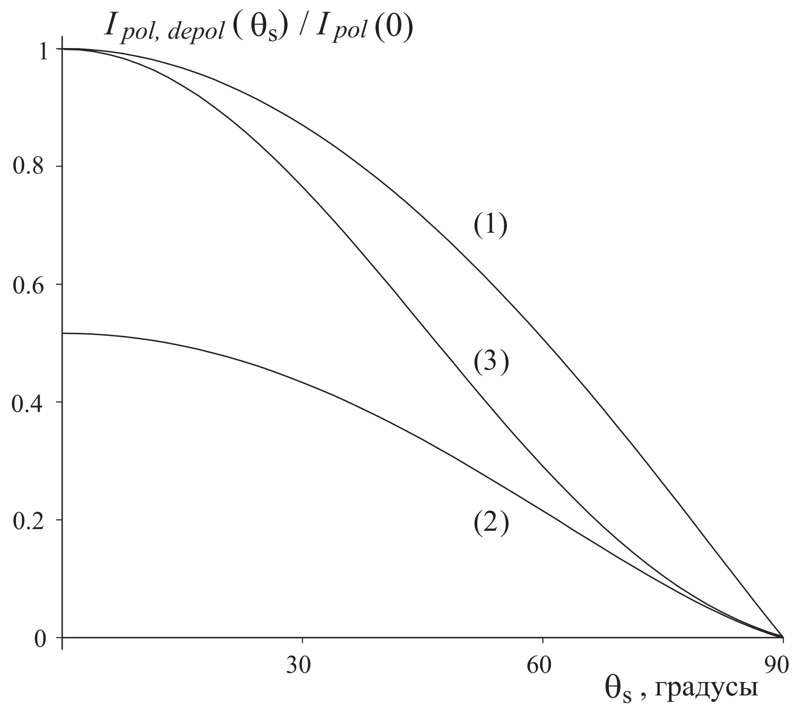


Рис. 6.4

Поляризованные $I_{pol}(\theta_s)$ и деполяризованные $I_{depol}(\theta_s)$ компоненты интенсивности рассеяния в зависимости от угла обратного рассеяния. (1) — поляризованная, (2) — деполяризованная компоненты в случае, когда поле падающей волны ориентировано нормально плоскости рассеяния. (3) — поляризованная компонента в случае, когда поле падающей волны лежит в плоскости рассеяния. Деполяризованная компонента для этой геометрии практически совпадает с кривой (2). Представленные величины нормированы на интенсивность поляризованной компоненты рассеяния при $\cos\theta_s = 1$

На Рис. 6.4 представлены зависимости поляризованной и деполяризованной составляющих интенсивности обратного рассеяния в зависимости от угла рассеяния для двух рассмотренных случаев расположения плоскости рассеяния и поляризации падающей волны. Френелевская составляющая, возникающая в результате преломления света на границе, не учитывается. Видно, что угловая зависимость поляризованной компоненты различна для различных ориентаций вектора поляризации падающей волны относительно плоскости рассеяния. В случае, когда поле падающей волны расположено в плоскости рассеяния, интенсивность рассеянной поляризованной компоненты убывает с ростом угла рассеяния заметно быстрее, начиная с углов рассеяния порядка 10°. Угловая зависимость деполяризованной компоненты одинакова для любой начальной поляризации.

6.6. Электромагнитное поле: степень деполяризации с учетом анизотропии в P_1-приближении

Ограничимся вычислением разности поляризованной и деполяризованной компонент (см. (6.57)) при нормальном падении и рассеянии

$$\Gamma_-(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1 \,|\, t) = \frac{1}{2}\left[\Gamma_{11}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1 \,|\, t) - \Gamma_{21}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1 \,|\, t)\right]. \tag{6.101}$$

2D-Фурье и дважды Лаплас преобразованную величину, при $q = 0$, представим в P_1-приближении в виде

$$\tilde{\Gamma}_-(s, s_i, t \,|\, \mathbf{k}^{(s)}, \mathbf{k}^{(i)}) \approx \frac{1}{4\pi}\left[\gamma_-^{(0)}(s, s_i, t) - \cos\theta_s \gamma_-^{(1)}(s, s_i, t)\right]. \tag{6.102}$$

Подставляя уравнение (6.102) в уравнение Бете–Солпитера, получим систему уравнений для составляющих $\gamma_-^{(0)}(s, s_i, t)$ и $\gamma_-^{(1)}(s, s_i, t)$

$$\begin{cases} (1 - 0.7g_0)\gamma_-^{(0)}(s, s_i, t) - \dfrac{3}{8}g_0 s^2(m_1(s) + 2m_2(s) + m_3(s))\gamma_-(s, s_i, t) = \\ \qquad = \dfrac{3g_0}{4(s_i + s)} - \dfrac{3g_0}{16}\displaystyle\int_1^\infty \frac{ds'}{s'}\left(1 + \frac{1}{s'^2}\right)^2 \frac{\gamma_-(s', s_i, t)}{s' - s} \\ \dfrac{3}{8}g_1 s(m_1(s) + 2m_2(s) + m_3(s))\gamma_-(s, s_i, t) + \dfrac{1}{3}\gamma_-^{(1)}(s, s_i, t) = \\ \qquad = \dfrac{3g_1}{4(s_i + s)} + \dfrac{3g_1}{16}\displaystyle\int_1^\infty \frac{ds'}{s'^2}\left(1 + \frac{1}{s'^2}\right)^2 \frac{\gamma_-(s', s_i, t)}{s' - s}, \end{cases} \tag{6.103}$$

где определена величина

$$\gamma_-(s, s_i, t) = \gamma_-^{(0)}(s, s_i, t) - \frac{1}{s}\,\gamma_-^{(1)}(s, s_i, t), \tag{6.104}$$

$m_3(s) = [m_2(s) - 1/5]/s^2$. При $s = s_s$ именно эта комбинация определяет разность поляризованной и деполяризованной компонент временно́й корреляционной функции поля.

Составляя линейную комбинацию из уравнений (6.103), получаем замкнутое интегральное уравнение для функции (6.104)

$$\psi_-(s,t)\gamma_-(s,s_i,t) = \frac{3g_0}{4(s_i+s)}\left[1 - \frac{3g_1}{sg_0}(1-0.7g_0)\right] - \\ - \frac{3g_0}{16}\int_1^\infty \frac{ds'}{s'}\left(1+\frac{1}{s'^2}\right)^2\left[1+\frac{3g_1}{ss'g_0}(1-0.7g_0)\right]\frac{\gamma_-(s',s_i,t)}{s'-s}, \quad (6.105)$$

где

$$\psi_-(s,t) = (1-0.7g_0)\left[1 - \frac{9g_1}{8}(m_1+2m_2+m_3)\right] - \frac{3g_0}{8}s^2(m_1+2m_2+m_3). \quad (6.106)$$

При малых значениях s и $t=0$ имеем

$$\psi_-(s,0) \approx 0.3\left(1 - \frac{69}{70}\overline{\cos\theta}\right) - s^2\,\frac{23+14.1\,\overline{\cos\theta}}{70}\,. \quad (6.107)$$

Здесь $\overline{\cos\theta}$ — среднее значение косинуса угла рассеяния, которое является основным параметром, описывающим анизотропию однократного рассеяния. Поскольку величина $\psi_-(s,0)$ конечна при $s=0$, то формально решение $\gamma_-(s,s_i,t)$ будет регулярно в области $t=0$, то есть, не возникает зависимости вида $\sqrt{t/\tau}$. Однако, поскольку при $\overline{\cos\theta} \to 1$, то есть, в случае сильной анизотропии однократного рассеяния, нуль функции $\psi_-(s,0)$ приближается к началу координат в области малых времен возникает, с учетом $69/70 \approx 1$, "почти" неаналитическая зависимость от t/τ.

Уравнение (6.105), с учетом определения (6.106), удовлетворяет всем условиям, при которых можно использовать метод Винера–Хопфа. С помощью способа, использованным при решении аналогичного уравнения для скалярного поля, получим

$$\gamma_-(s,s_i,t) = \frac{D_1+D_2 s}{\psi_-(0,t)s(s+s_i)}\exp[-J_-(s,t)], \quad (6.108)$$

где

$$J_-(s,t) = \frac{s}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2+s^2} \ln\left[\psi_-(is',t)/\psi_-(0,t)\right]. \tag{6.109}$$

На параметры D_1 и D_2, постоянные относительно s, легко получить условие

$$D_2 - \frac{D_1}{s_i} = \frac{3g_0}{4}\left[1 + \frac{3g_1}{s_i g_0}(1-0.7g_0)\right]\exp[-J_-(s_i,t)]. \tag{6.110}$$

Подставляя решение (6.108) в (6.105) и полагая $s = 0$, получаем

$$D_1 = -\frac{9}{4}g_1(1-0.7g_0)\left[1 + \frac{s_i}{4}\int\limits_1^{\infty}\frac{ds'}{s'^3}\left(1+\frac{1}{s'^2}\right)^2 \frac{(D_1 + D_2 s')\exp[-J_-(s',t)]}{s'(s'+s_i)\psi_-(0,t)}\right]. \tag{6.111}$$

Укажем на принципиальное отличие полученного решения от решения для скалярного поля. Параметр D_1 не исчезает при $t = 0$; это означает, что в случае электромагнитного поля интенсивность рассеянного назад излучения зависит от параметра анизотропии, в отличие от скалярного поля.

Мы рассчитали величину $\gamma_-(1,1,t)$, описывающую разность поляризованной и деполяризованной компонент временно́й корреляционной функции, для различных значений $\overline{\cos\theta}$, для случаев нормального падения и рассеяния. Результаты приведены на Рис. 6.5. Видно, что в случае слабой анизотропии, при небольших значениях $\overline{\cos\theta}$, степень поляризации убывает по линейному закону с ростом t/τ, и спадает значительно медленнее, чем сами поляризованная и деполяризованная компоненты, которые убывают линейно относительно $\sqrt{t/\tau}$. Однако для систем с большим значением $\overline{\cos\theta}$ возникает необычная ситуация: с ростом времени доля деполяризованной компоненты во временно́й корреляционной функции увеличивается в сравнении с поляризованной. При $t = 0$ степень поляризации уменьшается с ростом $\overline{\cos\theta}$: отношение $\gamma_-(1,1,0)$ к $\gamma_-(1,1,0)$ при $\overline{\cos\theta} = 0$ равно 0.67 при $\overline{\cos\theta} = 0.2$, 0.23 при $\overline{\cos\theta} = 0.4$, -0.40 при $\overline{\cos\theta} = 0.6$.

Заметим, что все сказанное относится к области $t/\tau \ll 1$; в связи с уже

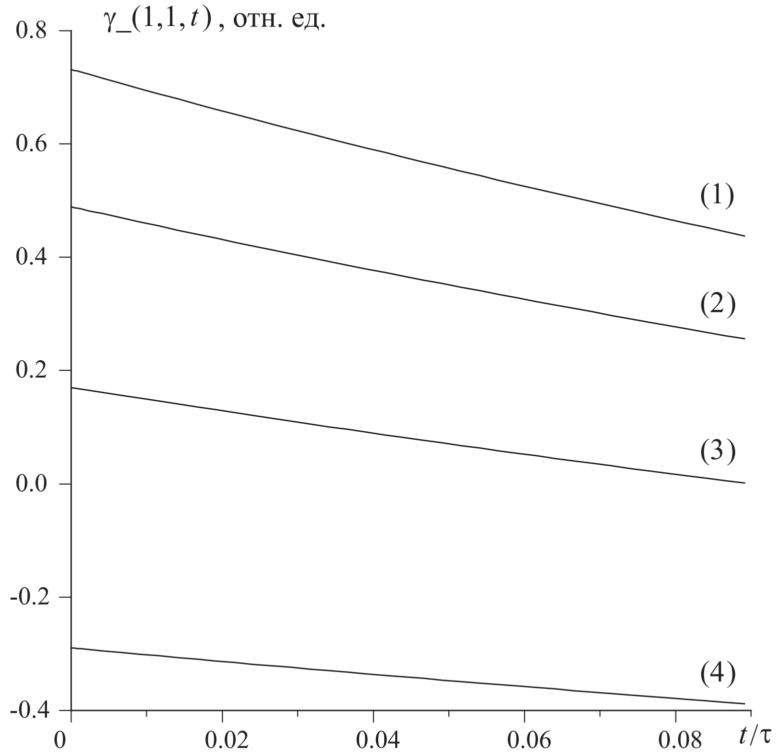


Рис. 6.5

Разность поляризованной и деполяризованной компонент временно́й корреляционной функции $\gamma_{-}(1,1,t)$ в зависимости от времени для различных значений $\overline{\cos\theta}$, для случая нормального падения и рассеяния. (1) — $\overline{\cos\theta}=0$, (2) — $\overline{\cos\theta}=0.2$, (3) — $\overline{\cos\theta}=0.4$, (4) — $\overline{\cos\theta}=0.6$

отмеченной малостью величины $\psi_{-}(0,0)$ при $1-\overline{\cos\theta}\ll 1$ параметром разложения является t/τ, а не $(1-\overline{\cos\theta})t/\tau$.

Мы рассчитали также величину $\gamma_{-}(s_s,1,t=0)$, которая описывает разность поляризованной и деполяризованной компонент интенсивности обратного рассеяния, в зависимости от угла рассеяния. Результаты приведены на Рис. 6.6, также для различных значений $\overline{\cos\theta}$. Видно, что разность между интенсивностями поляризованной и деполяризованной компонент обратного рассеяния сильно зависит от параметра анизотропии. Для слабо анизотропных систем степень поляризации монотонно убывает с ростом угла рассеяния. Для умеренных значений параметра анизотропии, $\overline{\cos\theta}\sim 0.4$, относительная доля деполяризованной компоненты возрастает с ростом угла рассеяния по сравнению с соответствующим значением при рассеянии строго назад; наконец, при больших значениях анизотропии, $\overline{\cos\theta} \geq 0.6$, возникает ситуация, когда с увеличением угла рассеяния поляризация меняет знак: деполяризованная компонента рассеянного излучения становится больше поляризованной компоненты.

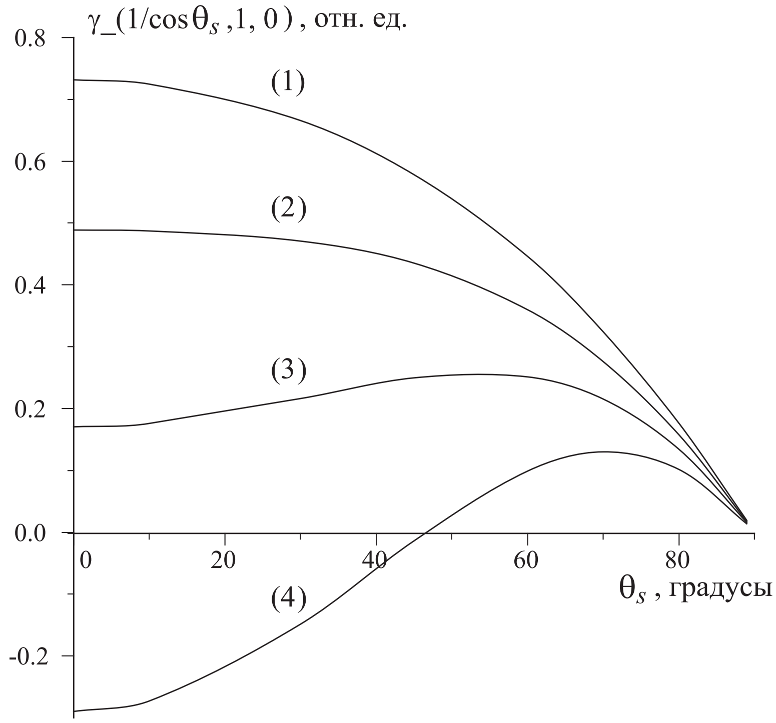


Рис. 6.6

Разность поляризованной и деполяризованной компонент интенсивности обратного рассеяния $\gamma_{-}(s_s, 1, 0)$ в зависимости от угла рассеяния; значения $\overline{\cos\theta}$ такие же, как и на рисунке (6.5)

В заключении отметим, что метод Винера–Хопфа, лежащий в основе классического решения Милна для интенсивности рассеяния скалярного поля точечными рассеивателями, заполняющими полупространство, удалось применить для решения ряда более содержательных задач многократного рассеяния. В случае скалярного поля получено решение для временно́й корреляционной функции при учете анизотропии в P_1 и P_2-приближениях. При этом временна́я зависимость корреляционной функции интенсивности находится в весьма хорошем согласии с экспериментом.

Мы получили обобщение решения Милна для электромагнитного поля. Для изотропного рассеяния мы нашли решение для временно́й корреляционной функции для поляризованной и деполяризованной компонент. Это решение также можно использовать в численных расчетах для систем с анизотропной индикатрисой. В случае анизотропного рассеяния найдено решение для разности поляризованной и деполяризованной компонент временно́й корреляционной функции в P_1-приближении. При этом обнаружены, в случае достаточно сильной анизотропии, $\overline{\cos\theta} \sim 0.4 - 0.6$, необычные поляризационные эффекты. Поляризационные эффекты для когерентного обратного рассеяния релеевскими частицами предсказаны [178] даже в случае неполяризованного падающего излучения. Мы описали поляризационные эффекты, связанные с анизотропией однократного рассеяния: изменение относительной скорости убывания поляризованной и деполяризованной компонент при переходе к системам с высокой анизотропией и изменение знака поляризованной интенсивности рассеянного излучения с ростом угла рассеяния. Эти эффекты нуждаются в экспериментальной проверке.

Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в настоящей работе:

1. Рассчитаны коротковолновые флуктуации директора в ХЖК с большим шагом спирали. Построена пространственная корреляционная функция флуктуаций директора. Рассмотрено поведение флуктуаций в окрестностях точек поворота. Обнаружен и описан эффект трансформации мод. Построена корреляционная функция с учетом влияния точек поворота.

2. В смектических жидких кристаллах исследовано явление неустойчивости Ландау–Пайерлса в зависимости от типа граничных условий. Показано, что в случае слабого поверхностного сцепления свободно подвешенная пленка остается стабильной при любом поперечном размере и теряет стабильность с ростом продольного размера.

3. Исследовано распространение электромагнитных волн в одноосных киральных жидких кристаллах с большим по сравнению с длиной волны шагом спирали. В рамках метода эталонного уравнения проанализированы окрестности точек поворота и рассмотрены эффекты заворота и прохождения необыкновенных волн через запрещенную зону (просачивание). Проведен анализ просачивания луча в случае широких запрещенных зон, когда между особыми точками имеют место области применимости ВКБ приближения. Подробно исследован случай узких запрещенных зон, когда особые точки сливаются. Рассчитаны угловые зависимости интенсивностей лучей, претерпевших

внутреннюю рефракцию и прошедших через запрещенную зону. Сформулированы экспериментальные условия для наблюдения эффектов заворота и просачивания необыкновенного луча. Получено хорошее согласие экспериментальных данных с теоретическими предсказаниями.

4. Построена функция Грина скалярного волнового уравнения (поле точечного источника) в безграничной одномерно периодической среде с крупномасштабными неоднородностями. Показано, что в такой среде поверхность волновых векторов имеет разрыв, а поверхность лучевых векторов — излом. Ограничение на направления волновых векторов связано с захватом лучей и образованием плоского волнового канала. Получены асимптотики функции Грина в дальней зоне внутри и вне волнового канала.

5. Построена функция Грина электромагнитного поля в геликоидальных жидких кристаллах с большим по сравнению с длиной световой волны шагом спирали. Проанализировано поведение функции Грина в дальней зоне. Показано, что функция Грина содержит слагаемые, отвечающие обыкновенной и необыкновенной волнам. Для необыкновенного луча на поверхности волновых векторов существует запрещенная зона, которая соответствует условию поворота луча и образованию плоского волнового канала.

6. Рассмотрена проблема однократного рассеяния света в геликоидальных жидких кристаллах с большим по сравнению с длиной световой волны шагом спирали. Предложена общая схема расчета интенсивности рассеянного света в средах с одномерной регулярной структурой, основанная на использовании метода Кирхгофа. Получены расчетные формулы в виде удобном для сравнения теории с экспериментом. Рассчитана угловая и поляризационная зависимости интенсивности рассеянного света на флуктуациях директора. Обнаружено, что интенсивность рассеяния немонотонно зависит от размеров

системы.

7. Исследована проблема многократного рассеяния света на флуктуациях директора в толстых образцах нематических жидких кристаллов, ориентация директора в которых задается внешним магнитным полем. Исходя из общего уравнения Бете–Солпитера, вычислена интенсивность многократного рассеяния с учетом вклада лестничных и циклических диаграмм. В рамках диффузионного приближения получены аналитические выражения для угловой и поляризационной зависимостей интенсивности когерентного обратного рассеяния. Показано, что разработанная теория позволяет описать эллиптическую форму конуса обратного рассеяния, объяснить отсутствие когерентного вклада для перекрестных поляризаций и рассчитать относительную высоту пика.

8. Проведено теоретическое описание временно́й корреляционной функции многократно рассеянного света средой, состоящей из анизотропных рассеивателей. В рамках метода Винера–Хопфа получено обобщенное решение Милна для скалярного и электромагнитного полей с учетом анизотропии однократного рассеяния. Решение уравнения Бете–Солпитера для временно́й корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости построено в виде ряда по полиномам Лежандра. Для скалярного поля найденное решение для временно́й корреляционной функции находится в хорошем согласии с известными экспериментальными данными. Для электромагнитного поля построено решение задачи Милна с учетом анизотропии в P_1-приближении. Решено обобщенное уравнение Милна для величины, описывающей степень деполяризации рассеянного излучения. Показано, что деполяризация рассеянного излучения при больших значениях анизотропии однократного рассеяния может менять знак.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность и признательность научным руководителям В.П. Романову, В.Л. Кузьмину и А.Ю. Валькову за терпение, поддержку, ценные советы и доброе отношение.

Автор выражает глубокую благодарность всему преподавательскому составу кафедры статистической физики.

Приложения

Приложение 1. Векторный метод ВКБ

В этом приложении мы рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений векторным методом ВКБ (см., например, [179]). Подставляя (1.34) в систему (1.32), получим уравнение на матрицу эволюции $\hat{M}(\xi, \xi_0)$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{M}(\xi, \xi_0) = \left(i\tilde{\Omega}\hat{B}(\xi) + \hat{C}(\xi)\right)\hat{M}(\xi, \xi_0). \tag{П1.1}$$

Удобно ввести новую неизвестную, для которой в главном порядке по параметру $\tilde{\Omega}$ система станет диагональной. Для этого представим $\hat{M}(\xi, \xi_0)$ в виде

$$\hat{M}(\xi, \xi_0) = \hat{U}(\xi)\hat{H}(\xi, \xi_0). \tag{П1.2}$$

Здесь $\hat{H}$ — новое неизвестное, $\hat{H}(\xi_0, \xi_0) = \hat{U}^{-1}(\xi_0)$, а выбор матрицы $\hat{U}$ будет фиксирован позже. Уравнение (П1.1) примет вид

$$\frac{d\hat{H}}{d\xi} = \left(i\tilde{\Omega}\hat{U}^{-1}\hat{B}\hat{U} + \hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U} - \hat{U}^{-1}\frac{d\hat{U}}{d\xi}\right)\hat{H}. \tag{П1.3}$$

Выберем теперь $\hat{U}(\xi)$ так, чтобы матрица $\hat{U}^{-1}\hat{B}\hat{U}$ стала диагональной, то есть

$$\hat{U}^{-1}\hat{B}\hat{U} = \hat{\Lambda}, \tag{П1.4}$$

где $\hat{\Lambda}$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы $\hat{B}$. При этом столбцы матрицы $\hat{U}$ являются собственными векторами матрицы $\hat{B}$. Тогда уравнение (П1.3) принимает вид

$$\frac{d\hat{H}}{d\xi} = i\tilde{\Omega}\left[\hat{\Lambda} + \frac{i}{\tilde{\Omega}}\left(\hat{U}^{-1}\frac{d\hat{U}}{d\xi} - \hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}\right)\right]\hat{H}. \tag{П1.5}$$

Отбросим член в правой части (П1.5), имеющий порядок $1/\tilde{\Omega}$ ("нулевое приближение"). Тогда (П1.5) расщепляется на систему независимых уравнений

$$\frac{d\hat{H}_{(0)}}{d\xi} = i\tilde{\Omega}\hat{\Lambda}\hat{H}_{(0)}, \tag{П1.6}$$

решение которой имеет вид

$$\hat{H}_{(0)}(\xi,\xi_0) = \exp\left[i\tilde{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi}\hat{\Lambda}(\xi')d\xi'\right]\hat{U}^{-1}(\xi_0). \tag{П1.7}$$

Далее найдем "первое приближение" уравнения (П1.5). Для этого представим $\hat{H}(\xi,\xi_0)$ в виде

$$\hat{H}(\xi,\xi_0) = \hat{U}_{(1)}(\xi)\hat{H}_{(1)}(\xi,\xi_0), \tag{П1.8}$$

где $\hat{H}_{(1)}(\xi_0,\xi_0) = \hat{U}^{-1}_{(1)}(\xi_0)\hat{U}^{-1}(\xi_0)$, и запишем уравнение на $\hat{H}_{(1)}(\xi,\xi_0)$:

$$\frac{d\hat{H}_{(1)}}{d\xi} = i\tilde{\Omega}\left\{\hat{U}^{-1}_{(1)}\left[\hat{\Lambda}+\frac{i}{\tilde{\Omega}}\left(\hat{U}^{-1}\frac{d\hat{U}}{d\xi}-\hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}\right)\right]\hat{U}_{(1)}+\frac{i}{\tilde{\Omega}}\hat{U}^{-1}_{(1)}\frac{d\hat{U}_{(1)}}{d\xi}\right\}\hat{H}_{(1)}. \tag{П1.9}$$

Выберем матрицу $\hat{U}_{(1)}(\xi)$ так, чтобы

$$\hat{U}^{-1}_{(1)}\left[\hat{\Lambda}+\frac{i}{\tilde{\Omega}}\left(\hat{U}^{-1}\frac{d\hat{U}}{d\xi}-\hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}\right)\right]\hat{U}_{(1)} = \hat{\Lambda}_{(1)}, \tag{П1.10}$$

где $\hat{\Lambda}_{(1)}$ — диагональная матрица составленная из собственных значений матрицы, стоящей в квадратных скобках (П1.10). Тогда уравнение (П1.9) можно записать в виде

$$\frac{d\hat{H}_{(1)}}{d\xi} = \left(i\tilde{\Omega}\hat{\Lambda}_{(1)}-\hat{U}^{-1}_{(1)}\frac{d\hat{U}_{(1)}}{d\xi}\right)\hat{H}_{(1)}. \tag{П1.11}$$

Заметим, что в случае $\tilde{\Omega}\gg 1$ матрица $\hat{\Lambda}+i\tilde{\Omega}^{-1}\left(\hat{U}^{-1}\frac{d\hat{U}}{d\xi}-\hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}\right)$ близка к матрице $\hat{\Lambda}$, а значит близки матрицы $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Lambda}_{(1)}$, поэтому матрица $\hat{U}_{(1)}$ в (П1.10) близка к единичной матрице, то есть

$$\hat{U}_{(1)}(\xi)\approx\hat{I}+\frac{i}{\tilde{\Omega}}\hat{V}(\xi), \qquad \hat{U}^{-1}_{(1)}(\xi)\approx\hat{I}-\frac{i}{\tilde{\Omega}}\hat{V}(\xi). \tag{П1.12}$$

Эти выражения позволяют получить условие применимости метода ВКБ:

$$|V_{lm}| \ll \tilde{\Omega}. \tag{П1.13}$$

Подставляя (П1.12) в уравнение (П1.10), для $\hat{\Lambda}_{(1)}$ и $\hat{V}$ получаем

$$(\hat{\Lambda}_{(1)})_{ll} \approx \lambda_l + \frac{i}{\tilde{\Omega}}\left(\hat{U}^{-1}\frac{d\hat{U}}{d\xi} - \hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}\right)_{ll}, \tag{П1.14}$$

$$V_{lm} \approx \frac{1}{\lambda_m - \lambda_l}\left(\hat{U}^{-1}\frac{d\hat{U}}{d\xi} - \hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}\right)_{lm}, \quad l \neq m, \tag{П1.15}$$

где $\Lambda_{ll} = \lambda_l$, $l, m = 1, \ldots 4$. Для нахождения диагональных элементов матрицы $\hat{V}$ необходимо учесть члены следующего порядка малости $1/\tilde{\Omega}^2$. Из соотношений (П1.14) и (П1.15) следует, что второе слагаемое в скобках (П1.11) имеет порядок $1/\tilde{\Omega}^2$, и им в первом приближении можно пренебречь. Получим

$$\hat{H}_{(1)}(\xi, \xi_0) \approx \exp\left[i\tilde{\Omega}\int_{\xi_0}^{\xi} \hat{\Lambda}_{(1)}(\xi')d\xi'\right] \hat{U}_{(1)}^{-1}(\xi_0)\hat{U}^{-1}(\xi_0). \tag{П1.16}$$

Тогда если в матрицах $\hat{U}_{(1)}$ и $\hat{U}_{(1)}^{-1}$ пренебречь поправками порядка $1/\tilde{\Omega}$, то матрица $\hat{M}(\xi, \xi_0)$ в первом приближении примет вид

$$\begin{aligned} &\hat{M}(\xi, \xi_0) \approx \hat{U}(\xi)\times \\ &\times \widehat{\mathrm{diag}}\left\{\exp\left[\int_{\xi_0}^{\xi}\left(i\tilde{\Omega}\lambda_l(\xi') - \left(\hat{U}^{-1}(\xi')\hat{U}'(\xi') - \hat{U}^{-1}(\xi')\hat{C}(\xi')\hat{U}(\xi')\right)_{ll}\right)d\xi'\right]\right\}\times \\ &\times \hat{U}^{-1}(\xi_0). \end{aligned} \tag{П1.17}$$

Эта формула и представляет собой векторный аналог классического ВКБ приближения.

Область применимости этой формулы определяется неравенствами:

$$\tilde{\Omega} \gg 1, \quad |V_{lm}(\xi)| \ll \tilde{\Omega}\,, \quad \tilde{\Omega}\left|\int_{\xi_0}^{\xi}\left(\hat{\Lambda}_{(2)}(\xi') - \hat{\Lambda}_{(1)}(\xi')\right)_{ll} d\xi'\right| \ll 1\,, \tag{П1.18}$$

где $\hat{\Lambda}_{(2)}$ — соответствующая диагональная матрица второго приближения.

Первое неравенство означает, что $\tilde{\Omega}$ является большим параметром. Второе неравенство связано с пренебрежением при получении (П1.17) членами $\pm i\tilde{\Omega}/\hat{V}(\xi)$ в (П1.12), и согласно (П1.15) дает ограничение на близость собственных чисел λ_l и λ_m во всем интервале от ξ_0 до ξ,

$$\min_{\xi_0 \leqslant \xi' \leqslant \xi} |\lambda_l(\xi') - \lambda_m(\xi')| \gg \tilde{\Omega}^{-1}. \tag{П1.19}$$

Наконец, третье неравенство означает малость следующей поправки к экспоненциальному члену в (П1.17) при любых ξ_0, ξ и дает ограничение на допустимую ширину области $\xi - \xi_0$, в которой можно пользоваться ВКБ формулой (П1.17). По порядку величины $\Lambda_{(1)ll}(\xi') - \Lambda_{(2)ll}(\xi') \sim \lambda_l(\xi')\tilde{\Omega}^{-2}$, поэтому

$$|\xi - \xi_0| \ll \tilde{\Omega}/|\overline{\lambda_l}|, \tag{П1.20}$$

где $\overline{\lambda_l}$ — среднее значения λ_l на интервале $[\xi_0; \xi]$.

Приложение 2. Коэффициент экстинкции в НЖК

Введем полное сечение рассеяния для волны типа (i) в НЖК $\sigma_{(i)}$, определяемое как рассеянная единицей объема мощность, деленная на модуль плотности потока энергии $|\mathbf{S}^{(i)}|$ падающей волны [166],

$$\sigma_{(i)} = \frac{dP}{dV|\mathbf{S}^{(i)}|}.$$

Для вычисления рассеянной мощности P следует проинтегрировать выражение для интенсивности однократного рассеяния в НЖК (5.1) по всем направлениям рассеянных лучей по поверхности сферы радиуса R. Тогда, суммируя по двум возможным типам рассеянных лучей, имеем для полного сечения рассеяния в борновском приближении

$$\sigma_{(i)}(\mathbf{k}^{(i)}) = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{e_\alpha^{(i)}e_\beta^{(i)}}{n^{(i)}\cos\delta^{(i)}}\sum_{s=o,e}\int d\Omega_{\mathbf{k}^{(s)}} B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q})\frac{n^{(s)}e_\mu^{(s)}e_\nu^{(s)}}{\cos^2\delta^{(s)}}, \tag{П2.1}$$

где $\hat{B}$ определяется выражением (5.3), а $\cos\delta^{(s)}$ — выражением (5.2), $d\Omega_{\mathbf{k}^{(s)}}$ означает интегрирование по всем направлениям волновых векторов рассеянного света. Здесь мы перешли от интегрирования по направлениям лучевых векторов к интегрированию по направлениям волновых векторов и учли $|\mathbf{S}^{(i)}| = I^0_{(i)}$.

С полным сечением рассеяния связан коэффициент экстинкции $\tau_{(i)}$, определяющий коэффициент затухания электромагнитной волны в среде. Коэффициент экстинкции определяется мнимой частью тензора диэлектрической проницаемости. В анизотропных средах справедливо соотношение [168, 180]

$$\sigma_{(i)} = \tau_{(i)} \cos\delta^{(i)}. \tag{П2.2}$$

Такое различие между коэффициентом экстинкции и полным сечением рассеяния связано с тем, что для необыкновенного луча в анизотропных средах направление переноса энергии (то есть, направление вектора Пойнтинга $\mathbf{S}^{(i)}$) и направление волнового вектора $\mathbf{k}^{(i)}$ не совпадают. Используя (П2.1) и (П2.2), получаем выражение для коэффициента экстинкции в анизотропной среде

$$\tau_{(i)}(\mathbf{k}^{(i)}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{e^{(i)}_\alpha e^{(i)}_\beta}{n^{(i)}\cos^2\delta^{(i)}} \sum_{s=o,e} \int d\Omega_{\mathbf{k}^{(s)}} B_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{q}) \frac{n^{(s)} e^{(s)}_\mu e^{(s)}_\nu}{\cos^2\delta^{(s)}}. \tag{П2.3}$$

Фактически, это соотношение, согласно оптической теореме, связывает коэффициент затухания электромагнитной волны в среде с ее рассеивающими свойствами [166].

Приложение 3. Построение решения в окрестности точки поворота

Для построения решения системы (2.87) удобно сделать замену

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = (\mathcal{H} + (1-\mathcal{H})\sin^2\xi^{(1)}_*)^{-1/2} \begin{pmatrix} \mathcal{H}\cos\xi & 0 \\ 0 & \sin\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}. \tag{П3.1}$$

Уравнение для вектора $\mathbf{f} = (f_x, f_y)^T$ имеет вид

$$\partial_\xi^2 \mathbf{f} + 2\hat{G}\partial_\xi \mathbf{f} + (\Omega^2 \hat{B} - \hat{I})\mathbf{f} = 0, \tag{П3.2}$$

где

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}(\varepsilon_\perp + \varepsilon_a \cos^2\xi) & \varepsilon_a \sin^2\xi \\ \mathcal{H}\varepsilon_a \cos^2\xi & \mathcal{H}\varepsilon_\perp + \varepsilon_a \sin^2\xi \end{pmatrix}, \tag{П3.3}$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} -\sin\xi\cos^{-1}\xi & 0 \\ 0 & \cos\xi\sin^{-1}\xi \end{pmatrix}. \tag{П3.4}$$

Разложим коэффициенты уравнения (П3.2) в ряд в окрестности точки $\xi_*^{(1)}$. Далее введем "растянутую" переменную $\tau = \Omega^{2/3}(\xi - \xi_*^{(1)})$, которая в силу (2.31) не является малой в области взаимодействия. Уравнение (П3.2) принимает вид

$$\Omega^{-2/3}\partial_\tau^2 \mathbf{f} + 2\Omega^{-4/3}[\hat{G}_* + \Omega^{-2/3}\tau\hat{G}'_* + \ldots]\partial_\tau \mathbf{f} + [-\Omega^{-2}\hat{I} + \hat{B}_* + \Omega^{-2/3}\tau\hat{B}'_* + \ldots]\mathbf{f} = 0, \tag{П3.5}$$

где штрих обозначает производную по переменной ξ, а индекс "$*$" у матриц означает, что их элементы вычисляются в точке $\xi = \xi_*^{(1)}$. Итерационное решение будем искать в виде ряда по убывающим степеням $\Omega^{-2/3}$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \Omega^{-2/3}\mathbf{f}_1 + \Omega^{-4/3}\mathbf{f}_2 + \ldots. \tag{П3.6}$$

Подстановка ряда (П3.6) в уравнение (П3.5) дает рекуррентную систему уравнений на $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \ldots$. Приравнивая нулю члены при нулевых степенях Ω, получаем

$$\hat{B}_* \mathbf{f}_0 = 0. \tag{П3.7}$$

Определитель матрицы $\hat{B}_*$ равен нулю, и поэтому решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{f}_0 = \beta(\tau)\boldsymbol{\chi}, \quad \boldsymbol{\chi} = (1,1)^T, \tag{П3.8}$$

где $\boldsymbol{\chi}$ — собственный вектор матрицы $\hat{B}_*$, отвечающий нулевому собственному значению.

В следующем порядке малости имеем

$$\hat{B}_*\mathbf{f}_1 = -(\beta''\hat{I} + \tau\beta\hat{B}'_*)\boldsymbol{\chi}. \qquad (\text{П}3.9)$$

Если разложить вектор $\mathbf{f}_1$ по собственным векторам матрицы $\hat{B}_*$, то нетрудно убедиться, что левая часть уравнения (П3.9) ортогональна вектору $\boldsymbol{\chi}$. Таким образом, условием разрешимости системы уравнений (П3.9) является требование, чтобы правая часть тоже была ортогональна вектору $\boldsymbol{\chi}$

$$(\beta''\hat{I} + \tau\beta\hat{B}'_*)\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\chi} = 0. \qquad (\text{П}3.10)$$

Выполняя умножение в (П3.10), получаем уравнение на функцию β

$$\beta''_\tau - 2\sqrt{-\mathcal{H}\varepsilon_\parallel(\varepsilon_a + \mathcal{H}\varepsilon_\perp)}\tau\beta = 0. \qquad (\text{П}3.11)$$

Уравнение (П3.11) представляет собой уравнение Эйри. Решение этого уравнения запишем через функции Ханкеля первого и второго рода, $H^{(1)}_{1/3}(u)$ и $H^{(2)}_{1/3}(u)$, отдельно для областей $\tau < 0$ и $\tau > 0$ [181]

$$\beta_<(\tau) = \left[-v^{1/3}\tau\right]^{1/2}\left[A^{(1)}_< H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}v^{1/2}(-\tau)^{3/2}\right) + B^{(1)}_< H^{(2)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}v^{1/2}(-\tau)^{3/2}\right)\right], \qquad (\text{П}3.12)$$

$$\beta_>(\tau) = \left[v^{1/3}\tau\right]^{1/2}\left[A^{(1)}_> H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2i}{3}v^{1/2}\tau^{3/2}\right) + B^{(1)}_> H^{(2)}_{1/3}\left(\frac{2i}{3}v^{1/2}\tau^{3/2}\right)\right], \qquad (\text{П}3.13)$$

где $v = 2\sqrt{-\mathcal{H}\varepsilon_\parallel(\varepsilon_a + \mathcal{H}\varepsilon_\perp)}$, $A^{(1)}_<$, $B^{(1)}_<$, $A^{(1)}_>$, $B^{(1)}_>$ — константы, индекс (1) здесь обозначает окрестность первой точки поворота на пути следования волны.

Покажем, что при достаточно больших $|\tau|$ член пропорциональный $B^{(1)}_<$ отвечает падающей необыкновенной волне, а член пропорциональный $A^{(1)}_<$ —

отраженной необыкновенной. Воспользуемся асимптотическими выражениями для функций Ханкеля при больших значениях аргумента

$$H_\nu^{(j)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \exp\left[\pm i\left(u - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right][1 + O(u^{-1})], \quad j = 1, 2, \qquad (\text{П}3.14)$$

где $|u| \gg 1$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1/2$, $|\arg u| < \pi$.

В случае вещественного u направление распространения волны определяется тем, в каком направлении относительно ξ растет фаза в показателе экспоненты (П3.14). Для чисто мнимого u одна волна будет экспоненциально возрастающей, а вторая — убывающей. Из закона сохранения энергии коэффициент при возрастающей экспоненте следует положить равным нулю. Физически волна с возрастающей амплитудой соответствует волне, “распространяющейся” в сторону убывания ξ. Такая волна появляется, если на симметричную точку поворота 4 (Рис. 2.6) падает волна со стороны положительных ξ.

Асимптотики решения в окрестности точки поворота при $|\tau| \gg 1$ имеют вид

$$\beta_<(\tau) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} v^{-1/12}(-\tau)^{-1/4}\left[A_<^{(1)} \exp\left(i(\frac{2}{3}v^{1/2}(-\tau)^{3/2} - \frac{5}{12}\pi)\right) + \right.$$
$$\left. + B_<^{(1)} \exp\left(-i(\frac{2}{3}v^{1/2}(-\tau)^{3/2} - \frac{5}{12}\pi)\right)\right], \quad (\text{П}3.15)$$

$$\beta_>(\tau) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} v^{-1/12}\tau^{-1/4}\left[A_>^{(1)} \exp\left(-\frac{2}{3}v^{1/2}\tau^{3/2} - i\frac{5}{12}\pi\right) + \right.$$
$$\left. + B_>^{(1)} \exp\left(\frac{2}{3}v^{1/2}\tau^{3/2} + i\frac{5}{12}\pi\right)\right]. \quad (\text{П}3.16)$$

Приложение 4. Расчет вкладов лестничных и циклических диаграмм в интенсивность рассеяния

В этом приложении приведен расчет интегралов в выражении (5.60). Две дельта-функции в уравнении (5.60), фактически, фиксируют направления векторов $\tilde{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}$ и $\tilde{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3$. С учетом выражений (5.57) для волновых векторов внутри ЖК, получим

$$\tilde{\mathbf{R}}_2 \parallel \mathbf{e}_z,$$

то есть $\tilde{\mathbf{R}}_2 = \tilde{Z}_2 \mathbf{e}_z$, и

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 \parallel -\hat{\varepsilon}^0 \mathbf{k}^{(s)},$$

что дает

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \tilde{Z}_1 \left(-\frac{\sqrt{\varepsilon_\parallel}}{\varepsilon_\perp} \Theta \cos\phi, -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\parallel}} \Theta \sin\phi, 1 \right), \quad \tilde{R}_1 \approx \tilde{Z}_1.$$

Перейдем от интегрирования по $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ к интегрированию по $\tilde{\mathbf{R}}_1$ и $\tilde{\mathbf{R}}_2$. Запишем интегралы в сферических координатах. Дельта-функции от волновых векторов снимут интегралы по углам. Имеем

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi^2}{4k_0^6} \int_0^\infty \tilde{Z}_1^2 d\tilde{Z}_1 \int_0^\infty \tilde{Z}_2^2 d\tilde{Z}_2 \int\limits_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3$$
$$\int_{-2(\tilde{Z}_1+R_z)}^{2(\tilde{Z}_1+R_z)} d\mathbf{r}_1 \frac{1}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \frac{\exp(-\tilde{Z}_1/l_{(e)})}{\tilde{Z}_1^2} \frac{\exp(-\tilde{Z}_2/l_{(e)})}{\tilde{Z}_2^2} \times$$
$$\times \delta\left(-\tilde{Z}_1 \frac{\sqrt{\varepsilon_\parallel}}{\varepsilon_\perp} \Theta \cos\phi \mathbf{e}_x - \tilde{Z}_1 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\parallel}} \Theta \sin\phi \mathbf{e}_y + \tilde{Z}_1 \mathbf{e}_z + \mathbf{R} - \tilde{Z}_2 \mathbf{e}_z - \mathbf{R}_3 \right) \times$$
$$\times e^{i(\mathbf{k}^{(s)}+\mathbf{k}^{(i)})\cdot\mathbf{r}_1} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\exp[-r_1'/\xi_a]}{r_1'} - \frac{\exp\left[-\left| \mathbf{r}_1' + 2\left(\tilde{Z}_1 + R_z - r_{1z}/2 + z_b \right) \mathbf{e}_z \right| / \xi_a \right]}{\left| \mathbf{r}_1' + 2\left(\tilde{Z}_1 + R_z - r_{1z}/2 + z_b \right) \mathbf{e}_z \right|} \right\}. \quad (П4.1)$$

Выполняя интегрирование по переменной $\mathbf{R}_3$, получаем

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi}{16k_0^6} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \frac{1}{\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \int_0^\infty d\tilde{Z}_1 \int_0^\infty d\tilde{Z}_2$$
$$\exp\left(-\frac{\tilde{Z}_1}{l_{(e)}} - \frac{\tilde{Z}_2}{l_{(e)}} \right) \delta\left(\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2 + R_z \right) \int_{-2(\tilde{Z}_1+R_z)}^{2(\tilde{Z}_1+R_z)} d\mathbf{r}_1 e^{i(\mathbf{k}^{(s)}+\mathbf{k}^{(i)})\cdot\mathbf{r}_1} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\exp[-r_1'/\xi_a]}{r_1'} - \frac{\exp\left[-\left| \mathbf{r}_1' + 2\left(\tilde{Z}_1 + R_z - r_{1z}/2 + z_b \right) \mathbf{e}_z \right| / \xi_a \right]}{\left| \mathbf{r}_1' + 2\left(\tilde{Z}_1 + R_z - r_{1z}/2 + z_b \right) \mathbf{e}_z \right|} \right\}. \quad (П4.2)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}^{(s)} + \mathbf{k}^{(i)} \approx k_0(\Theta\cos\phi, \Theta\sin\phi, 0),$$

$$\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\rho} + r_{1z}\mathbf{e}_z.$$

Поскольку мы считаем, что интенсивность считывается с поверхности образца, положим $R_z = 0$. Вычислим интеграл по переменной $\tilde{Z}_2$. Получим

$$J^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi}{16k_0^6} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \frac{1}{\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \int_0^\infty d\tilde{Z}_1 \exp\left(-\frac{2\tilde{Z}_1}{l_{(e)}}\right) \times$$
$$\times \int_{-2\tilde{Z}_1}^{2\tilde{Z}_1} dr_{1z} \int d\boldsymbol{\rho} e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\exp[-\sqrt{\rho'^2 + r_{1z}}/\xi_a]}{\sqrt{\rho'^2 + r_{1z}}} - \frac{\exp[-\sqrt{\rho'^2 + (2\tilde{Z}_1 + 2z_b)^2}/\xi_a]}{\sqrt{\rho'^2 + (2\tilde{Z}_1 + 2z_b)^2}} \right\}. \quad (\text{П}4.3)$$

Сделаем замену переменных

$$r_{1z} = z_1 - z_2, \quad \tilde{Z}_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Получим

$$J^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = M^{(C)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi}{16k_0^6} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \frac{1}{\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \times$$
$$\times \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\frac{z_1 + z_2}{l_{(e)}}\right) \int d\boldsymbol{\rho} e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\exp[-\sqrt{\rho'^2 + (z_1 - z_2)^2}/\xi_a]}{\sqrt{\rho'^2 + (z_1 - z_2)^2}} - \frac{\exp[-\sqrt{\rho'^2 + (z_1 + z_2 + 2z_b)^2}/\xi_a]}{\sqrt{\rho'^2 + (z_1 + z_2 + 2z_b)^2}} \right\}. \quad (\text{П}4.4)$$

Введем переменную $\mathbf{q}'$, так чтобы $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} = \mathbf{q}' \cdot \boldsymbol{\rho}'$

$$\mathbf{q}' = \left(\sqrt{\frac{D_\parallel}{D_\perp}} q_x, q_y, q_z \right).$$

Перейдем в выражении (П4.4) к интегрированию по переменной $\boldsymbol{\rho}'$. Введем полярные координаты. Получим интегралы вида

$$\int d\boldsymbol{\rho} e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \frac{\exp[-\sqrt{\rho'^2+a^2}/\xi_a]}{\sqrt{\rho'^2+a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{D_\parallel}{D_\perp}} \int_0^\infty d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\exp[-\sqrt{\rho'^2+a^2}/\xi_a]}{\sqrt{\rho'^2+a^2}} \exp(iq'\rho'\cos\psi). \quad (\text{П4.5})$$

Для вычисления интеграла по углу, воспользуемся соотношением [119, 150]

$$\int_0^{2\pi} d\psi \exp(iq'\rho'\cos\psi) = 2\pi J_0(q'\rho'),$$

где $J_0(q'\rho')$ — функция Бесселя первого рода.

Для вычисления интеграла по координате воспользуемся соотношением [158] (стр. 189)

$$\int_0^\infty d\rho'\rho' \frac{\exp[-\sqrt{\rho'^2+a^2}/\xi_a]}{\sqrt{\rho'^2+a^2}} J_0(q'\rho') = \frac{\exp[-|a|\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}]}{\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}}.$$

Тогда для выражения (П4.4) получим

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)}) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi^2}{8k_0^6} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \frac{1}{D_\perp} \frac{1}{\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}} \times$$
$$\times \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp\left(-\frac{z_1+z_2}{l_{(e)}}\right) \times$$
$$\times \left[\exp\left(-|z_1-z_2|\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}\right) - \exp\left(-|z_1+z_2+2z_b|\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}\right)\right]. \quad (\text{П4.6})$$

Оставшиеся интегралы легко вычисляются. В результате, вклад в интенсивность обратного рассеяния за счет циклических диаграмм имеет вид

$$J_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{R},\mathbf{k}^{(s)}) = J_{\alpha\beta}^{(C)}(\Theta,\phi) = M_{\alpha\beta}^{(C)}(\mathbf{k}^{(i)},\mathbf{k}^{(s)}) \frac{\pi^2}{8k_0^6} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \frac{1}{D_\perp} \frac{1}{\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}} \times$$
$$\times \left[\frac{l_{(e)}}{\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}+1/l_{(e)}} - \frac{\exp(-2z_b\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2})}{(\sqrt{q'^2+1/\xi_a^2}+1/l_{(e)})^2}\right]. \quad (\text{П4.7})$$

Отсюда можно получить зависимость интенсивности от углов Θ и ϕ, учитывая, что

$$q'^2 = k_0^2 \left(\frac{D_\parallel}{D_\perp}\Theta^2\cos^2\phi + \Theta^2\sin^2\phi\right).$$

Вклад в интенсивность рассеяния лестничных диаграмм (5.64) рассчитывается аналогичным образом. В этом случае имеется существенное упрощение, поскольку отсутствует зависимость от вектора $\mathbf{q}$. После снятия дельта-функций от волновых векторов имеем

$$J_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \frac{\pi^2}{4k_0^6} \int_0^\infty d\tilde{Z}_1 \int_0^\infty d\tilde{Z}_2 \int\limits_{Z_3=0} d\mathbf{R}_3 \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \exp(-\tilde{Z}_1/l_{(e)}) \times$$
$$\times \exp(-\tilde{Z}_2/l_{(e)}) \left\{ \frac{M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)})}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \left[\frac{\exp[-|\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R}' - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}_3'|/\xi_a]}{|\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R}' - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}_3'|} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\exp[-|\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R}' - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}_3' + 2(\tilde{Z}_2 + R_{3z} + z_b)\mathbf{e}_z|/\xi_a]}{|\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R}' - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}_3' + 2(\tilde{Z}_2 + R_{3z} + z_b)\mathbf{e}_z|} \right] +$$
$$\left. + M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \delta\left(\tilde{Z}_1\mathbf{e}_z + \mathbf{R} - \tilde{Z}_2\mathbf{e}_z - \mathbf{R}_3\right) \right\}. \quad (\text{П}4.8)$$

Выполняем интегрирование по $\mathbf{R}_3$

$$J_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) =$$
$$= \frac{\pi^2}{4k_0^6} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \int_0^\infty d\tilde{Z}_1 \int_0^\infty d\tilde{Z}_2 \exp(-\tilde{Z}_1/l_{(e)}) \exp(-\tilde{Z}_2/l_{(e)}) \times$$
$$\times \left\{ M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{2\pi\xi_a}{4\pi\sqrt{D_\parallel D_\perp}} \times \right.$$
$$\times \left[\exp[-|\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2|/\xi_a] - \exp[-|\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + 2z_b|/\xi_a] \right] +$$
$$\left. + M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \delta(\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2) \right\}. \quad (\text{П}4.9)$$

В результате получаем

$$J_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{R}, \mathbf{k}^{(s)}) = \frac{\pi^2}{8k_0^6} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \left\{ M_{\alpha\beta}^{(L)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) \frac{\xi_a}{D_\perp} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{l_{(e)}}{1/\xi_a + 1/l_{(e)}} - \frac{\exp(-2z_b/\xi_a)}{(1/\xi_a + 1/l_{(e)})^2} \right] + M_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}^{(i)}, \mathbf{k}^{(s)}) l_{(e)} \right\}. \quad (\text{П}4.10)$$

Список литературы

1. *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М., Наука, 1982.
2. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М., Мир, 1980.
3. *Фриш У.* Турбулентность. Наследие Колмогорова. М., ФАЗИС, 1998.
4. *Ландау Л.Л., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика, ч. 1. М., Наука, 1995.
5. *Lubensky T.C.* Phys. Rev. A, 1972, V. 6, No. 1, P. 452.
6. *Stephen M.J., Straley J.P.* Rev. Mod. Phys., 1974, V. 46, No. 4, P. 617.
7. *Стратанович Р.Л.* ЖЭТФ, 1977, Т. 73, № 3(9), С. 1061.
8. *Вещунов М.С.* ЖЭТФ, 1979, Т. 76, № 5, С. 1515.
9. *Chatterjee A., Van Winkle D.H.* Phys. Rev. E, 1997, V. 55, No. 4, P. 4360.
10. *Harris A.B., Kamien R.D., Lubensky T.C.* Rev. Mod. Phys., 1999, V. 71, No. 5, P. 1745.
11. *Liangbin Hu, Yonggang Jiang, Ruibao Tao* Phys. Rev. E, 1998, V. 57, No. 4, P. 4289.
12. *Andrienko D., Germano G., Allen M.P.* Phys. Rev. E, 2000, V. 62, No. 5, P. 6688.

13. *Watson P., Anderson J.E., Bos P.J.* Phys. Rev. E, 2000, V. 62, No. 3, P. 3719.

14. *Ajdari A., Duplantier B., Hone D., Peliti L., Prost J.* J. de Phys. II, 1992, V. 2, P. 487.

15. *Зельдович Б.Я., Табирян Н.В.* ЖЭТФ, 1981, Т. 81, С. 1788.

16. *Вальков А.Ю., Романов В.П., Романов М.В.* ЖЭТФ, 2001, Т. 120, вып. 2, С. 389.

17. *Романов В.П., Шалагинов А.Н.* ЖЭТФ, 1992, Т. 102, С. 884.

18. *Shalaginov A.N., Romanov V.P.* Phys. Rev. E, 1993, V. 48, P. 1073.

19. *Фреман Н., Фреман П.У.* ВКБ-приближение. М., Мир, 1967.

20. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. т. 2. М., Мир, 1978.

21. *Budden K.G.* Radio Waves in the Ionosphere. Cambridge, Cambridge University Press, 1971.

22. *Graff K.F.* Wave Motion in Elastic Solids. Oxford, Clarendon Press, 1975.

23. *Peierls R.E.* Annales de l'Institut Henri Poincarè, 1935, V. 5, P. 177.

24. *Ландау Л.Д.* ЖЭТФ, 1937, Т. 7, С. 627.

25. *Caillé A.* C. R. Acad. Sci. Ser. B, 1972, V. 247, P. 891.

26. *Gunther L., Imry Y., Lajzerowicz J.* Phys. Rev. A, 1980, V. 22, P. 1733.

27. *Als-Nielsen J.* in Ordering in strongly fluctuating condensed systems. New York, Plenum, 1980, P. 57.

28. *Зисман А.Н., Никифоров Д.В., Островский Б.Л., Терентьев Е.М.* Письма в ЖЭТФ, 1987, Т. 45, С. 193.

29. *Nachaliel E., Keller E.N., Davidov D., Boeffel C.* Phys. Rev. A, 1991, V. 43, P. 2897.

30. *Kaganer V.M., Ostrovskii B.I., de Jeu W.H.* Phys. Rev. A, 1991, V. 44, P. 8158.

31. *Safinya C.R., Roux D., Smith G.S., Sinha S.K., Dimon P., Clark N.A., Bellocq A.M.* Phys. Rev. Lett., 1986, V. 57, P. 2718.

32. *Roux D., Safinya C.R.* J. Phys. (Paris), 1988, V. 49, P. 307.

33. *Wack D.C., Webb W.W.* Phys. Rev. A, 1989, V. 40, P. 1627.

34. *Stepanek P., Nallet F., Diat A., Almdal K., Panine P.* Macromol., 2002, V. 35, P. 7287.

35. *Sakoda K.* Optical Properties of Photonic Crystals. Berlin, Springer-Verlag, 2005.

36. *Yasumoto K.* Electromagnetic Theory and Applications for Photonic Crystals. Boca Raton, Taylor and Francis Group, 2006.

37. *Yeh P., Gu C.* Optics of Liquid Crystal Displays. New York, John Wiley & Sons, 1999.

38. *Yang D.-K., Wu S.-T.* Fundamentals of Liquid Crystal Devices. Chichester, John Wiley & Sons, 2006.

39. *Chandrasekhar S., Kitzerow H.-S., Bahr C.* Chirality in Liquid Crystals. New York, Springer-Verlag, 2001.

40. *Беляков В.А.* Дифракционная оптика периодических сред сложной структуры. М., Наука, 1988.

41. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М., изд-во АН СССР, 1957.

42. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Наука, 1967.

43. *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов. М., Мир, 1977.

44. *Mouguin M.C.* Bull. Soc. Franc. Miner. Cryst, 1911, V. 34, P. 71.

45. *Berreman D.W., Scheffer T.J.* Phys. Rev. A, 1971, V. 5, P. 1397.

46. *Berreman D.W.* J. Opt. Soc. of Am., 1972, V. 62, P. 502; 1973, V. 63, P. 1374.

47. *Палто С.П.* ЖЭТФ, 2001, Т. 119, С. 638.

48. *Кац Е.И.* ЖЭТФ, 1970, Т. 59, № 5(11), С. 1854.

49. *Чандрасекхар С.* Жидкие кристаллы. М., Мир, 1980.

50. *Oldano C.* Phys. Rev. A, 1989, V. 40, P. 6014.

51. *Galatola P.* Phys. Rev. E, 1997, V. 55, No. 4, P. 4338.

52. *Hubert P., Jagemalm P., Oldano C., Rajteri M.* Phys. Rev. E, 1998, V. 58, No. 3, P. 3264.

53. *Oldano C., Ponti S.* Phys. Rev. E, 2000, V. 63, No. 1, 011703.

54. *Ponti S., Oldano C., Becchi M.* Phys. Rev. E, 2001, V. 64, 021704.

55. *Liberman V.S., Zel'dovich B.Ya.* Phys. Rev. E, 1994, V. 49, P. 2389.

56. *Savchenko A.Yu., Zel'dovich B.Ya.* Phys. Rev. E, 1994. V. 50, P. 2287.

57. *Вальков А.Ю., Гринин Р.В., Романов В.П.* Опт. и спектр., 1997, Т. 83, № 2, С. 239.

58. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М., Наука, 1989.

59. *Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В.* УФН, 1983, Т. 141, № 2, С. 257.

60. *Aksenova E.V., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Phys. Rev. E, 1999, V. 59, P. 1184.

61. *Перель М.В.* Радиофизика, 1990, Т. 33, № 11, С. 1208.

62. *Warenghem M., Ismaili M., Hector D.* J. de Phys. III, 1992, V. 2, P. 765.

63. *Simoni F., Bloisi F., Vicari L., Warenghem M., Ismaili M., Hector D.* Europhys. Lett., 1993, V. 21(2), P. 189.

64. *Warenghem M., Louvergneaux D., Simoni F.* Mol. Cryst. Liq. Cryst., 1996, V. 282, P. 235.

65. *Аксенова Е.В., Вальков А.Ю., Каретников А.А., Ковшик А.П., Романов В.П., Рюмцев Е.И.* ЖЭТФ, 2004, Т. 126, С. 1109.

66. *Aksenova E.V., Karetnikov A.A., Kovshik A.P., Romanov V.P., Val'kov A.Yu.* Europhysics Letters, 2005, V. 69, P. 68.

67. *Peterson M.A.* Phys. Rev. A, 1983, V. 27, P. 520.

68. *Вальков А.Ю., Романов В.П., Шалагинов А.Н.* Акуст. журн., 1991, Т. 37, № 4, С. 636.

69. *Nicorovici N.A., McPhedran R.C., Petit R.* Phys. Rev. E, 1994, V. 49, No. 5, P. 4563.

70. *Nicorovici N.A., McPhedran R.C., Bao Ke-Da* Phys. Rev. E, 1995, V. 51, No. 1, P. 690.

71. *Galatola P.* Phys. Rev. E, 1994, V. 49, No. 5, P. 4552.

72. *Бакулин А.В., Тюриков Л.Г.* Акуст. журн., 1996, Т. 42, № 6, С. 741.

73. *Moskvin D.N., Romanov V.P., Valkov A. Yu.* Phys. Rev. E, 1993, V. 48, No. 2, P. 1436.

74. *Dajun Cheng, Wei Ren* Phys. Rev. E, 1996, V. 54, No. 3, P. 2917.

75. *Paulus M., Gay-Balmaz P., Martin O.J.F.* Phys. Rev. E, 2000, V. 62, No. 4, P. 5797.

76. *Paulus M., Martin O.J.F.* Phys. Rev. E, 2001, V. 63, No. 6, 066615.

77. *Morozov G.V., Maev R.Gr., Drake G.W.F.* Phys. Rev. E, 2001, V. 63, No. 5, 056601.

78. *Dajun Cheng* Phys. Rev. E, 1997, V. 55, No. 2, P. 1950.

79. *Alvarado-Rodriguez I., Halevi P., Sanchez A.S.* Phys. Rev. E, 2001, V. 63, No. 5, 056613.

80. Wave Scattering in Complex Media: From Theory to Applications, edited by van Tiggelen B.A. and Skipetrov S.E., NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2003.

81. *van Tiggelen B., Stark H.* Rev. Mod. Phys., 2000, V. 72, P. 1017.

82. *Barabanenkov Yu.N., Kravtsov Yu.A., Ozrin V.D., Saichev A.I.* in Enhanced Backscattering in Optics, Progress in Optics, edited by E. Wolf, Amsterdam, North Holland, 1991, V. 29, P. 67.

83. Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements and Applications, edited by Mishchenko M.I., Travis L.D., Hovenier J.W., San Diego, Academic Press, 2000.

84. *Ping Sheng* Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena, San Diego, Academic Press, 1995.

85. *Pine D.J., Weitz D.A., Maret G., Wolf P.E., Herbolzheimer E., Chaikin P.M.* Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media. Singapore, World Scientific, ed. by P. Sheng, 1989.

86. *Wolf P.E., Maret G.* in Scattering in Volumes and Surfaces. Amsterdam, Elsevier, ed. by M. Nieto-Vesperanos and J.C. Dainty, 1990, P. 37.

87. *Lagendijk A., van Tiggelen B.A.* Phys. Rep., 1996, V. 270, P. 145.

88. *Yodh A.G., Chance B.* Phys. Today, 1995, March, P. 34.

89. *Maret G., Wolf P.* Z. Phys. B, 1987, V. 65, P. 409.

90. *Weitz D.A., Pine D.J., Pusey P.N., Tough R.J.A.* Phys. Rev. Lett., 1989, V. 63, P. 1747.

91. *Wu X-L., Pine D.J., Chaikin P.M., Huang J.S., Weitz D.A.* JOSA B, 1990, V. 7, P. 15.

92. *Bicout D., Maynard R.* Physica A (Amsterdam), 1993, V. 199, P. 387.

93. *Boas D.A., O'Leary M.A., Chance B., Yodh A.G.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1994, V. 91, P. 4887.

94. *Bicout D., Maret G.* Physica A (Amsterdam), 1994, V. 210, P. 87.

95. *Boas D.A., Campbell L.E., Yodh A.G.* Phys. Rev. Lett., 1995, V. 75, P. 1855.

96. *Bicout D., Maynard R.* Physica B (Amsterdam), 1995, V. 204, P. 20.

97. *Heckmeier M., Maret G.* Europhys. Lett., 1996, V. 34, P. 257.

98. *Heckmeier M., Scipetrov S.E., Maret G., Maynard R.* JOSA A, 1997, V. 14, P. 185.

99. *Lubensky T.C., Yodh A.G.* JOSA A, 1997, V. 14, P. 156.

100. *Scipetrov S.E.* Europhys. Lett., 1997, V. 40, P. 381.

101. *Скипетров С.Е., Меглинский И.В.* ЖЭТФ, 1998, Т. 113, С. 1213.

102. *Кузьмин В.Л., Романов В.П.* ЖЭТФ, 1998, Т. 113, С. 2022.

103. *Кузьмин В.Л.* Опт. и спектр., 1999, Т. 86, С. 994.

104. *Pine D.J., Weitz D.A., Chaikin P.M., Herbolzheimer E.* Phys. Rev. Lett., 1988, V. 60, P. 1134.

105. *Голубенцев А.А.* ЖЭТФ, 1984, Т. 86, С. 47.

106. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.

107. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М., Иностранная литература, 1958.

108. *Городничев Е.Е., Дударев С.Л., Рогозкин Д.Б.* ЖЭТФ, 1989, Т. 96, С. 847,

109. *Gorodnichev E.E., Dudarev S.L., Rogozkin D.B.* Phys. Lett. A, 1990, V. 144, P. 48.

110. *Nieuwenhuizen T.M. Luck J.M.* Phys. Rev. E, 1993, V. 48, P. 569.

111. *Кузьмин В.Л., Романов В.П.* ЖЭТФ, 1999, Т. 116, С. 1912.

112. *Amic E., Luck J.M., Nieuwenhuizen T.M.* J. Phys. A, 1996, V. 29, P. 4915.

113. *Кузьмин В.Л., Романов В.П.* УФН, 1996, Т. 166, С. 247.

114. *Тучин В.В.* УФН, 1997, Т. 167, С. 517.

115. *van Rossum M.C.W., Nieuwenhuizen Th.M.* Rev. Mod. Phys., 1999, V. 71, P. 313.

116. *van Albada M.P., Lagendijk A.* Phys. Rev. Lett., 1985, V. 55, P. 2692.

117. *Wolf P.E., Maret G.* Phys. Rev. Lett., 1985, V. 55, P. 2696.

118. *van der Mark M.B., van Albada M.P., Lagendijk A.* Phys. Rev. B, 1988, V. 37, P. 3575.

119. *MacKintosh F.C., John S.* Phys. Rev. B, 1988, V. 37, P. 1884.

120. *MacKintosh F.C., John S.* Phys. Rev. B, 1989, V. 40, P. 2383.

121. *Bret B.P.J., Lagendijk A.* Phys. Rev. E, 2004, V. 70, P. 036601.

122. *van Tiggelen B.A., Maynard R., Nieuwenhuizen Th.M.* Phys. Rev. E, 1996, V. 53, P. 2881.

123. *Lacoste D., van Tiggelen B.A.* Phys. Rev. E, 2000, V. 61, P. 4556.

124. *Kuz'min L.V., Romanov V.P., Zubkov L.A.* Phys. Rev. E, 1996, V. 54, P. 6798.

125. *Stark H., Lubensky T.C.* Phys. Rev. E, 1997, V. 55, P. 514.

126. *Stark H., Kao M.H., Jester K.A., Lubensky T.C., Yodh A.G.* J. Opt. Soc. Am. A, 1997, V. 14, P. 156.

127. *van Tiggelen B.A., Maynard R., Heiderich A.* Phys. Rev. Lett., 1996, V. 77, P. 639.

128. *van Tiggelen B.A., Heiderich A., Maynard R.* Mol. Cryst. Liq. Cryst., 1997, V. 293, P. 205.

129. *Kaas B.C., van Tiggelen B.A., Lagendijk A.* Phys. Rev. Lett., 2008, V. 100, P. 123902.

130. *Kuzmin V.L., Romanov V.P.* Europhys. Lett., 2002, V. 59, P. 206.

131. *Wiersma D.S., Muzzi A., Colocci M., Righini R.* Phys. Rev. E, 2000, V. 62, P. 6681.

132. *Mishchenko M.I.* Phys. Rev. B, 1991, V. 44, P. 12597.

133. *Mishchenko M.I.* J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1996, V. 56, P. 673.

134. *Mishchenko M.I., Luck J.M., Nieuwenhuizen T.M.* J. Opt. Soc. Am. A, 2000, V. 17, P. 888.

135. *Кузьмин В.Л.* Опт. и спектр., 2002, Т. 93, С. 482.

136. *Кузьмин В.Л., Павлова М.Н.* Опт. и спектр., 2000, Т. 89, С. 277.

137. *Sapienza R., Mujumdar S., Cheung C., Yodh A.G., Wiersma D.* Phys. Rev. Lett., 2004, V. 92, 033903.

138. *Sapienza R., Wiersma D.S., Delande D.* Mol. Cryst. Liq. Cryst., 2005, V. 429, P. 193.

139. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их применения. М., Наука, 1972.

140. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. т.2. Справочная математическая библиотека. М., Наука, 1966.

141. *Перель М.В.* Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 23, Ленинград, изд-во Ленинградского университета, 1990, С. 58

142. *Buslaev V., Grigis A.* J. d'Analyse Math., 2001, V. 84, P. 67.

143. *Гринина Е.А.* Теор. Мат. Физ., 2000, Т. 122, № 3, С. 357.

144. *Tweet D.J., Holyst R., Swanson B.D., Stragier H., Sorensen L.B.* Phys. Rev. Lett., 1990, V. 65, P. 2157.

145. *Holyst R.* Phys. Rev. A, 1991, V. 42, P. 7511.

146. *Holyst R.* Phys. Rev. A, 1991, V. 44, P. 3692.

147. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т.1–2. М., Мир, 1965.

148. *Vertogen G., de Jeu W.H.* Thermotropic liquid crystals, fundamentals. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1988.

149. *Holyst R., Tweet D.J., Sorensen L.B.* Phys. Rev. Lett., 1990, V. 65, P. 2153.

150. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., Наука, 1981.

151. *Poniewierski A., Holyst R.* Phys. Rev. B, 1993, V. 47, P. 9840.

152. *de Jeu W.H., Ostrovskii B.I., Shalaginov A.N.* Rev. Mod. Phys., 2003, V. 75, P. 181.

153. *Романов В.П., Ульянов С.В.* УФН, 2003, Т. 173, С. 941.

154. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.

155. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М., Наука, 1980.

156. *Вальков А.Ю., Зубков Л.А., Ковшик А.П., Романов В.П.* Письма в ЖЭТФ, 1984, Т. 46, С. 281.

157. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., Наука, 1977.

158. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М., Наука, 1983.

159. *Абрамовиц М., Стиган И.А.* Справочник по специальным функциям. М., Наука, 1979.

160. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М., Иностранная литература, 1959.

161. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М., Наука, 1970.

162. *Lax M., Nelson D.F.* Proc. of III Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics, Plenum, New York, 1973, P. 415.

163. *Lax M., Nelson D.F.* Theory of Light Scattering in Condenced Media, I Soviet-American Conference, Moskow, Nauka, 1976, V. 2, P. 452.

164. *Беляков В.А., Сонин С.А.* Оптика холестерических жидких кристаллов. М., Наука, 1982.

165. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. 1-е изд., М., Наука, 1979.

166. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах, том 2, М., Мир, 1981.

167. *Stephen M.J., Cwilich G.* Phys. Rev. B, 1986, V. 34, P. 7564.

168. *Вальков А.Ю., Романов В.П.* ЖЭТФ, 1986, Т. 90, С. 1264.

169. *Wiersma D.S., Muzzi A., Colocci M., Righini R.*, Phys. Rev. Lett., 1999, V. 83, P. 4321.

170. *Ван де Хюлст Г.* Рассеяние свата малыми частицами. М., Иностранная литература, 1961.

171. *Shapiro B.* Phys. Rev. Lett., 1986, V. 57, P. 2168.

172. *Барабаненков Ю.Н.* Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1973, Т. 16, С. 88.

173. *Akkermans E., Wolf P.E., Maynard R., Maret G.* J. Phys. (Paris), 1988, V. 49, P. 77.

174. *Барабаненков Ю.Н., Озрин В.Д.* ЖЭТФ, 1988, Т. 94, С. 56.

175. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии, М., Иностранная литература, 1953.

176. *Кузъмин В.Л., Романов В.П.* Опт. и спектр., 1997, Т. 82, С. 642.

177. *Stephen M.J.* Phys. Rev. B, 1988 V. 37, P. 1.

178. *Amic E., Luck J.M., Nieuwenhuizen T.M.* J. Phys. I, 1997, V. 7, P. 445.

179. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1983.

180. *Langevin D., Bouchiat M.-A.* J. de Phys., 1975, V. 36, (Colloq. Nr. C-1), P. 197.

181. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1971.

Список основных обозначений

$a_{0,z,\perp}$	молекулярный размер, длина молекулы, толщина молекулы
$A^{(j)}$	амплитуда волны типа (j)
B	упругая константа, связанная со сжатием слоев
$B_{\alpha\beta\mu\nu}$	$k_0^4\langle\delta\varepsilon_{\alpha\mu}\delta\varepsilon^*_{\nu\beta}\rangle$, корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости
C_l	$1 - K_{33}/K_{ll}$, $l = 1, 2$
$\hat{C}$	циклические диаграммы
D	коэффициент диффузии света
$\hat{D}$	тензорный коэффициент диффузии света
$D_\parallel$, $D_\perp$	коэффициенты диффузии света вдоль и поперек директора
d	толщина образца
$\mathbf{e}^{(j)}$	вектор поляризации волны типа (j)
$\mathbf{e}^{(i)}$	вектор поляризации падающей волны
$\mathbf{e}^{(s)}$	вектор поляризации рассеянной волны
$E(a)$	нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода
$\mathbf{E}$	напряженность электрического поля (E_x, E_y, E_z)
$\mathbf{E}^{(i)}$	падающее поле
$\mathbf{E}^{(s)}$	рассеянное поле
F	свободная энергия
F_b	свободная энергия Франка
F_f	вклад внешнего поля в свободную энергию

F_s	поверхностный вклад в свободную энергию
G	корреляционная функция флуктуаций смещений слоев
$\hat{G}$	корреляционная функция флуктуаций директора
$\hat{\mathcal{G}}$	корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости
$\mathbf{H}$	напряженность магнитного поля (H_x, H_y, H_z)
$\mathbf{H}_0$	внешнее постоянное магнитное поле
$\mathcal{H}$	$1 - k_\perp^2/(k_0^2 \varepsilon_\perp)$
$\hat{I}$	единичная матрица
$I^{(s)}$	интенсивность однократного рассеяния для волны с поляризацией (s)
$I_\nu(a)$	модифицированная функция Бесселя первого рода
$K(a)$	нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода
$K_\nu(a)$	модифицированная функция Бесселя второго рода
k_0	волновое число однородной изотропной среды
k_B	постоянная Больцмана
$\mathbf{k}$	трехмерный волновой вектор
$\mathbf{k}_\perp$	двухмерный волновой вектор, $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$
$\ldots(\mathbf{k})$	величины в трехмерном представлении Фурье
$\mathbf{k}^{(j)}$	волновой вектор волны типа (j)
$\mathbf{k}^{(i)}$	волновой вектор падающей волны
$\mathbf{k}^{(s)}$	волновой вектор рассеянной волны
$k_z^{(j)}$	продольная часть волнового вектора
$\mathbf{k}_{st}^{(j)}$	волновой вектор в стационарной точке
K	упругая константа, связанная с искажением формы слоев
K_{ll}	модули Франка

$L_{x,y,z}$	длина, толщина и высота образца
$L_\perp$	поперечный размер образца
$\hat{L}$	лестничные диаграммы
l, $l_{(j)}$	длина свободного пробега фотона
$\hat{M}(\xi, \xi_0)$	матрица эволюции
$n(z)$	показатель преломления
$n^{(j)}$	показатель преломления волны типа (j)
$\mathbf{n}$	вектор директора
$\mathbf{n}^0$	равновесный директор
P	период структуры
$\hat{P}$	поперечный проектор
q_0	$2\pi/P$, обратный период структуры
$\mathbf{q}$	трехмерный волновой вектор
$\mathbf{q}_\perp$	двухмерный волновой вектор, $\mathbf{q}_\perp = (q_x, q_y)$
q_{max}	обрезание на молекулярном размере
q_{min}	обрезание на размере системы
$\ldots(\mathbf{q}_\perp, z)$	величины в $(\mathbf{q}_\perp, z)$–представлении
$\mathbf{r}$	радиус вектор (x, y, z)
$\mathbf{r}_\perp$	(r_x, r_y)
$\ldots(\mathbf{r})$	величины в координатном представлении
$S_\perp$	площадь поперечного сечения образца
$\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{(j)}$	вектор Пойнтинга
$\mathbf{s}$	единичный волновой вектор необыкновенной волны
T	температура
$T^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$	функция Грина для равновесной среды
$\hat{T}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$	тензорная функция Грина для равновесной среды

$\langle \hat{T}^{R/A} \rangle(\mathbf{r})$	средняя функция Грина НЖК
u	флуктуации смещения слоев в СЖК
$u_{1,2}$	флуктуационные моды в ХЖК
$\hat{U}$	матрица, составленная из собственных векторов
V_{sc}	рассеивающий объем
V	коэффициент отражения для амплитуды волны
$w_{1,2}$	коэффициенты сцепления с подложкой
W	коэффициент прохождения для амплитуды волны
z_*	плоскости, от которых происходит отражение луча (точки поворота)
γ, $\gamma_{1,2}$	коэффициенты поверхностного натяжения
δ, $\delta^{(j)}$	угол между лучевым и волновым векторами
$\delta(z)$, $\delta(\mathbf{r})$	дельта-функция
$\delta\mathbf{n}$	флуктуации директора
$\delta\hat{\varepsilon}$	флуктуации тензора диэлектрической проницаемости
$\hat{\varepsilon}$	тензор диэлектрической проницаемости
$\varepsilon_{\parallel}$, $\varepsilon_{\perp}$	диэлектрические проницаемости вдоль и поперек $\mathbf{n}^0$
ε_a	$\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$, анизотропия диэлектрической проницаемости
η	степень неоднородности среды
θ	угол между $\mathbf{n}^0$ и $\mathbf{k}^{(e)}$
λ	длина волны
λ_j	собственные значения
λ_{sm}	$\sqrt{K/B}$, длина порядка толщины смектического слоя
$\hat{\Lambda}$	диагональная матрица, составленная из собственных значений
ξ	$q_0 z + \phi_0$, безразмерная переменная
ξ_H	магнитная длина когерентности

ξ_*, ξ_{**}	точка поворота (вырождения собственных значений)
σ_C^2	средний квадрат флуктуаций в центре образца
$\tau_{(j)}$	коэффициент экстинкции волны типа (j)
ϕ_0	направление $\mathbf{n}^0$ на плоскости $z = 0$
χ_a	$\chi_\parallel - \chi_\perp$ анизотропия магнитной восприимчивости
$\chi(z)$	угол падения в ЖК на плоскость, перпендикулярную оси z
$\boldsymbol{\psi}_l$	собственные вектора
Ω	$k_0/q_0 = P/\lambda$, большой безразмерный параметр
$\tilde{\Omega}$	$q_\perp/q_0$, большой безразмерный параметр